Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal

Towards an interdisciplinary approach to introduce economic modelling in Secondary Education: a proposal on the derivative and the marginal analysis

María Gutiérrez-Portilla.
Universidad de Cantabria.
maria.gutierrezp@unican.es

Paula Gutiérrez-Portilla.
Universidad de Cantabria.
paula.gutierrezp@unican.es

Pedro Álvarez-Causelo.
Universidad de Cantabria.
pedro.alvarez@unican.es

RESUMEN.

En este trabajo se describe un objeto virtual de aprendizaje (OVA) elaborado bajo una perspectiva interdisciplinar que abarca las materias de Economía y Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, correspondientes ambas a la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales del Bachillerato. Dicho OVA está constituido por una secuencia de construcciones elaboradas con el software Geogebra y organizadas en torno al concepto matemático de función derivada y su papel como herramienta básica en la modelización económica (asociado fundamentalmente a lo que suele denominarse análisis marginal).

La propuesta se realiza con la intención de ejemplificar el tipo de materiales y actividades que podrían diseñarse y utilizarse de una manera integradora por parte del profesorado de ambas materias. Desde el punto de vista de la docencia de la economía, se considera que este tipo de planteamientos facilitaría la transferencia de los conocimientos de matemáticas al ámbito de la modelización económica, lo que resulta especialmente relevante en relación con la finalidad propedéutica del Bachillerato. Desde el de la docencia de las matemáticas, tanto la investigación relacionada con su didáctica como el propio currículo de la materia para la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y el Bachillerato, reflejan la importancia de incluir la modelización, no sólo por su interés como contenido, sino también por su función vehicular en tanto que facilitadora del aprendizaje de los conceptos matemáticos.

PALABRAS CLAVE.

Modelos económicos, análisis marginal, función derivada, objeto virtual de aprendizaje, interdisciplinariedad.

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

ABSTRACT.
The paper describes a virtual learning object (VLO) built under an interdisciplinary perspective integrating *Economía* and *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales*, which are both subjects within the *Humanidades y Ciencias Sociales* area in *Bachillerato*. Such VLO is created out of a sequence of applications designed in the software Geogebra and organized around the mathematical concept of the derivative function and its role as an essential tool in economic modelling (mainly linked to what is usually known as marginal analysis).
The proposal aims to exemplify a set of materials and activities that could be designed and used in an integrated way by teachers of both subjects. From the viewpoint of teaching *Economía*, this type of approaches may facilitate the transfer of mathematical knowledge to the field of economic modelling, which is especially relevant when taking into consideration the propaedeutic purpose of *Bachillerato*. Concerning the teaching in *Matemáticas*, research on its didactics as well as the curriculum content for the *Educación Secundaria Obligatoria (ESO)* and *Bachillerato* highlight the dual goal of developing students' modelling competency and enhancing their learning of the mathematical concepts involved.

KEY WORDS.
Economic models, marginal analysis, derivative function, virtual learning object, interdisciplinary approach.

1. Introducción.

El recurso a los modelos teóricos como herramienta de investigación constituye la característica más definitoria de la economía en tanto que disciplina científica y la que más la distingue del resto de ciencias sociales. Dicha característica se manifiesta no solo en los planes de estudio de las titulaciones universitarias, sino también en el currículo de Economía en la educación secundaria. La iniciación a la modelización económica aparece de manera explícita tanto en la propuesta curricular para el cuarto curso de la ESO como, fundamentalmente, en la del primer curso de Bachillerato. Sin embargo, la transcendencia de la modelización es mucho mayor. Una ojeada a cualquier libro de texto de Economía para el primer curso de Bachillerato es suficiente para darse cuenta de que, incluso a la hora de abordar aquellos contenidos de un carácter más descriptivo, a los alumnos se les presenta la realidad económica interpretada a partir de los modelos teóricos que pretenden explicarla.
Un aspecto fundamental en ese proceso de iniciación a la modelización económica es el papel que en el mismo juegan las matemáticas (Katzner, 2003; Rai et al., 2010). Un modelo económico es un sistema abstracto idealizado a través de cuya manipulación se pretende poner de manifiesto los mecanismos presentes en su funcionamiento. El objetivo último es su utilización como herramienta para generar hipótesis sobre las relaciones causa-efecto que podrían estar presentes en el funcionamiento del sistema real que sirve de referente para el modelo. La abstracción y la representación formalizada, la manipulación del sistema construido y la interpretación de los resultados teóricos requieren del dominio de una serie de conceptos y procedimientos matemáticos, así como de la capacidad de activarlos de manera eficiente.

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

Esa relación especial entre las matemáticas y los modelos económicos debería reflejarse en un enfoque interdisciplinar a la hora de abordar los objetivos de aprendizaje relacionados con la modelización. La integración de los conocimientos de matemáticas con los de economía constituye una condición necesaria para lograr un aprendizaje significativo por parte de los alumnos. Conseguirlo resulta especialmente importante en relación con la finalidad propedéutica del Bachillerato. En las titulaciones universitarias relacionadas con la economía, en particular en el Grado en Economía, son frecuentes las quejas del profesorado respecto a la formación matemática previa de los alumnos. Estos, por su parte, lo sufren en términos de resultados académicos y de dificultades a la hora de superar el gran número de asignaturas que requieren una base matemática sólida (Casasús-Estellés et al., 2018). Un planteamiento interdisciplinar, organizado en torno al papel de las matemáticas en la modelización económica, es la única manera posible de revertir esta situación. Tal y como han puesto de manifiesto Tur & Shakhovnina (2015), el hecho de establecer conexiones interdisciplinares entre las matemáticas y las disciplinas económicas supone mejores resultados en la formación en los Grados en Economía.
En relación con todo ello, en este trabajo se presenta un objeto virtual de aprendizaje (OVA) diseñado desde una perspectiva interdisciplinar. El análisis marginal, en tanto que herramienta básica en el proceso de modelización económica (Roorda et al., 2007; Arango et al., 2015)[1], y el concepto de derivada, en tanto que concepto matemático subyacente, constituyen el eje vertebrador de la propuesta. Dicho OVA consta de una secuencia de cuatro construcciones dinámicas elaboradas con Geogebra, un software de matemática dinámica gratuito y ampliamente reconocido en la docencia de las matemáticas (Kllogjeri, 2010; Arbain & Shukor, 2015), y se propone como un ejemplo del tipo de actividades que, abordadas de una manera interdisciplinar, facilitarían el logro de un aprendizaje significativo del papel de la modelización teórica en economía (Mkhatshwa, 2019). Por un lado, se pretende que el profesorado de Economía tenga en cuenta los conocimientos matemáticos de que disponen sus alumnos y logre que los activen cuando les presenten los distintos modelos económicos. Por el otro, que el profesorado de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales tenga como referencia el contexto económico y las necesidades del proceso de modelización económica a la hora de explicar los conceptos y procedimientos matemáticos. La necesidad de adoptar dicha perspectiva interdisciplinar en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la etapa de educación secundaria entre las matemáticas y las ciencias sociales ha sido objeto de análisis en trabajos como Brante & Brunosson (2014)[2].

2. La modelización en el currículo del itinerario de Ciencias Sociales del Bachillerato.

2.1. Los modelos teóricos y el currículo de Economía.

El papel de las matemáticas en la enseñanza de la economía durante la educación secundaria ha sido siempre objeto de un intenso debate. Cuando en 1990 la LOGSE incorporaba por primera vez la Economía como materia del Bachillerato, el legislador señalaba en la introducción del currículo de la materia que entre los criterios que se habían tenido en cuenta a la hora de seleccionar los contenidos figuraba el siguiente:

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

> Limitar a lo imprescindible las aplicaciones de las formas y técnicas matemáticas por el inconveniente -sobre todo en cursos introductorios de economía- de que una excesiva formalización determine la esencia y los contenidos del curso, y contribuya a centrar su enseñanza más en la resolución de los problemas que plantea el lenguaje matemático que en la descripción, interpretación y explicación de la realidad económica. (Real Decreto 1179/1992, p. 100 Anexo).

A pesar de este propósito inicial, lo cierto es que en la actualidad tanto el currículo como los libros de texto de Economía reflejan claramente que los conceptos y procedimientos matemáticos desempeñan un papel fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en especial en el Bachillerato. A riesgo de simplificar en exceso, podría decirse que se recurre a las matemáticas en relación con dos ámbitos formativos distintos, aunque complementarios: el análisis de datos y los modelos teóricos. Es en este último en el que se centra la atención en este trabajo.

El currículo actual recoge dos asignaturas troncales correspondientes a la materia de Economía en la educación secundaria. La primera de ellas en la opción de Enseñanzas Académicas del cuarto curso de la ESO y la otra en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales del primer curso de Bachillerato. En ambos casos los modelos económicos aparecen de forma explícita entre los contenidos del Bloque 1. Centrándonos en el caso de la asignatura de 1º de Bachillerato, en el Bloque 1 del currículo se establece como uno de los criterios de evaluación el de "Comprender el método científico que se utiliza en el área de la Economía, así como identificar las fases de la investigación científica en Economía y los modelos económicos" (Real Decreto 1105/2014, p. 244). Además, a lo largo del currículo aparecen referencias constantes a distintos modelos económicos. El Bloque 3, con el título "El mercado y el sistema de precios", constituye el ejemplo paradigmático. Todos los contenidos que aparecen en el mismo tienen claramente una naturaleza teórica, si bien es cierto que entre los criterios de evaluación aparece el de "Analizar el funcionamiento de mercados reales y observar sus diferencias con los modelos […]" (Real Decreto 1105/2014, p. 245).

Pero la verdadera transcendencia de la modelización se manifiesta en el recurso constante a modelos y conceptos teóricos. Claramente, los contenidos del currículo de la materia están seleccionados y organizados a partir de los modelos teóricos de referencia en el ámbito de la microeconomía y de la macroeconomía.

2.2. La modelización y el currículo de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.

El currículo LOMCE para las distintas asignaturas de matemáticas correspondientes a la ESO y al Bachillerato recoge la creciente importancia asignada a la modelización. La manifestación más clara de ello es la inclusión en todas las asignaturas, desde el primer curso de la ESO hasta el segundo curso de Bachillerato, de un Bloque 1 denominado "Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas". En la introducción al currículo de las distintas materias se establece que dicho bloque tiene un carácter transversal, debiendo desarrollarse de forma simultánea al resto de bloques de contenido, y que debe ser el eje fundamental de las

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

distintas asignaturas. Al mismo tiempo, se incluye a “la matematización y modelización” como uno de los cinco procesos básicos a partir de los cuales se articula dicho bloque.

Tabla 1: Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables relacionados con la modelización recogidos en el Bloque 1 del currículo de la materia Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales del primer y segundo curso de Bachillerato.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad.	7. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	7.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.
		7.2. Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios.
		7.3 Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.
		7.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad
		7.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.
	8. Valora la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	8.1 Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre los logros conseguidos, resultados mejorables, impresiones personales del proceso, etc.

Fuente: Real Decreto 1105/2014.

Esa preocupación por conectar las matemáticas con la realidad se manifiesta, además, en el resto de bloques de todas las asignaturas en los que se apela reiteradamente a las “situaciones reales” tanto como punto de partida, a la hora de introducir los nuevos conceptos y procedimientos, como punto de llegada, a la hora de interpretar los resultados teóricos.

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

Puede afirmarse, por tanto, que la LOMCE, claramente influida por el marco competencial propuesto por PISA[3], incorpora de hecho la modelización, tanto como contenido explícito, como en su función vehicular y, además, lo hace desde los primeros cursos de la ESO.
En el caso concreto de las dos asignaturas de la materia Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, se repite el patrón común mencionado anteriormente. En la Tabla 1 se recogen los contenidos, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables relacionados con la modelización que forman parte de ese Bloque 1.
En el resto de bloques se hace constantemente referencia a los contextos reales, en general, y a los fenómenos sociales, en particular. A modo de ejemplo, la intención de vincular la formación matemática al ciclo completo de la modelización se ve claramente en el Bloque 2 (Números y álgebra), para el cual se establecen, entre otros, los siguientes estándares de aprendizaje evaluables:

1. Utiliza de manera eficaz el lenguaje algebraico para representar situaciones planteadas en contextos reales.
2. Resuelve problemas relativos a las ciencias sociales, mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones.
3. Realiza una interpretación contextualizada de los resultados obtenidos y los expone con claridad.

En definitiva, el currículo no hace sino reflejar la intención, recogida en la introducción del mismo, de enfocar la materia desde una perspectiva instrumental. En efecto, en dicha introducción se afirma que “la enseñanza de esta materia no debe desvincularse de su aplicación a la interpretación de los fenómenos sociales […]” (Real Decreto 1105/2014, p. 381). En la misma se recurre precisamente a los modelos económicos para ejemplificar el papel de las matemáticas como herramienta: “Las Matemáticas tienen un carácter instrumental como base del progreso de otras disciplinas. Por ejemplo, en Economía, la Teoría Económica explica los fenómenos económicos con una base matemática” (Real Decreto 1105/2014, p. 381).

3. La modelización desde la didáctica de las matemáticas.

La investigación en el ámbito de la didáctica de las matemáticas relacionada con la modelización ha venido siendo muy activa desde el trabajo seminal de Pollak (1979), utilizándose mayoritariamente en la actualidad la etiqueta “Modelización y aplicaciones” para referirse a los trabajos específicos sobre el tema. Las distintas aportaciones teóricas y empíricas realizadas han puesto de manifiesto que la modelización teórica constituye, a la vez, un área que presenta grandes dificultades de aprendizaje, pero también con un gran valor formativo (Blomhøj, 2019; Blum, 2015; Brady, 2018). En el caso concreto de los trabajos que abordan la introducción de la modelización en la práctica docente en secundaria (Blomhøj, 2019), consideran necesario distinguir dos grandes finalidades:

1. Lograr que el alumnado alcance la competencia en modelización como contenido curricular explícito.
2. Utilizar la modelización como vehículo facilitador del aprendizaje de las matemáticas.

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

En relación con la primera de estas finalidades, las distintas investigaciones han puesto de manifiesto la necesidad de involucrar al alumnado en la totalidad del ciclo de la modelización, a la vez que han ido detallando la naturaleza de la competencia en modelización a partir de la identificación de una serie de sub-competencias (Kaiser & Brand, 2015; Maaß, 2006; Niss, 2003) y señalando las dificultades de aprendizaje asociadas a las distintas fases del proceso de modelización (Blum & Ferri, 2009; Galbraith & Stillman, 2006). A los efectos de este trabajo, también se considera especialmente importante la propuesta de Niss (2003) de distinguir dos ámbitos dentro de la competencia en modelización: el relacionado con el análisis y la decodificación de modelos dados y el relacionado con la autonomía para recurrir a la modelización ante situaciones nuevas.

En cuanto a la utilización de la modelización como vehículo para el aprendizaje de las matemáticas, la investigación relacionada presenta, lógicamente, un carácter mucho más general que la relativa a la modelización como contenido. Sería necesario, por tanto, considerar toda la literatura relacionada con el aprendizaje de las matemáticas en general, y de los conceptos y procedimientos matemáticos concretos presentes en la modelización, en particular. Ciñéndose a la investigación en el campo de la modelización y aplicaciones, Blomhøj (2019) distingue tres marcos teóricos generales desde los que se aborda el papel vehicular de la modelización: la Enseñanza Realista de las Matemáticas (ERM) (Freudenthal, 2002; Gravemeijer & Doorman, 1999), la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 2007) y la denominada Perspectiva de los Modelos y la Modelización (PMM) (Lesh and Doerr, 2003). Los tres marcos comparten la idea común de que las actividades relacionadas con la modelización en contextos variados favorecen el aprendizaje de los conceptos matemáticos y desde los mismos se vienen realizando distintas aportaciones en cuanto a la identificación de las dificultades de aprendizaje y el diseño de actividades que faciliten superarlas.

El OVA propuesto parte precisamente de la consideración de las dos finalidades asociadas a la inclusión de la modelización en la educación secundaria desde la didáctica de las matemáticas: como contenido y como vehículo. En cuanto a la modelización como contenido presenta las siguientes características:

a. Centra la atención en el análisis y la decodificación de modelos dados, recogiendo la situación habitual en la docencia de la economía en secundaria.
b. Va dirigido fundamentalmente a facilitar el desarrollo de las siguientes capacidades o sub-competencias:
    i. Comprender el lenguaje utilizado y el papel de los distintos conceptos y procedimientos matemáticos que dan forma a los modelos presentados.
    ii. Manipular por sí mismos los modelos presentados de cara a determinar los resultados teóricos que se derivan de los mismos.

Sin embargo, se mantiene siempre presente la transcendencia de considerar el ciclo completo de la modelización para lograr un aprendizaje significativo en relación con esos modelos dados, lo cual se manifiesta a su vez en la fijación como objetivo a alcanzar de las siguientes sub-competencias:

iii. Concebir los modelos presentados como resultado de un proceso de abstracción y simplificación a partir del fenómeno real objeto de estudio.

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

iv. Interpretar los resultados teóricos en términos de hipótesis sobre el funcionamiento del sistema real objeto de estudio y ser consciente de la necesidad de validación de las mismas.

En cuanto a la modelización como vehículo, los objetos matemáticos involucrados son los subyacentes al concepto de función derivada, en particular el de función, el de tasa de variación media y el de derivada de una función en un punto.

4. La propuesta: marco teórico y contexto económico.

4.1. La función derivada como objetivo de aprendizaje: un marco teórico

El marco teórico utilizado es una adaptación del propuesto por Zandieh (2000), dirigido a facilitar la exploración del grado de comprensión del concepto de derivada por parte de los estudiantes. Tomando como referencia de partida el análisis de lo que se asocia en la comunidad educativa a la comprensión del concepto de derivada, dicho autor considera dos ejes vertebradores:

1. La red o esquema conceptual subyacente.
2. El papel de las distintas formas de representación como mediadoras del aprendizaje.

En cuanto a la red o esquema conceptual subyacente, Zandieh (2000) parte de la definición analítica de la derivada para proponer una división en tres capas (ratio, límite y función), cada una de las cuales supone la comprensión adecuada de un concepto que resulta fundamental para acceder al de la siguiente capa[4]. Sin embargo, el propio autor reconoce la flexibilidad de su propuesta en cuanto a la selección del número de capas y la naturaleza de las mismas. Aprovechando dicha flexibilidad, la propuesta que aquí se hace tiene el mismo punto de partida, pero propone una división en cuatro capas.
Dada una relación funcional entre dos variables $y = f(x)$, la definición analítica tradicional de la derivada viene dada por la expresión[5]:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

A partir de la misma, se considera que el esquema conceptual asociado al concepto de función derivada consta de cuatro capas: función, tasa de variación media, derivada en un punto y función derivada.
De la misma manera que Zandieh (2000), se considera que en cada una de esas capas el proceso de aprendizaje debe suponer el paso de una concepción inicial en términos únicamente procedimentales a una concepción final en términos estructurales (Sfard, 1991). Esta última, más compacta y abstracta, supone la incorporación del concepto como un nuevo objeto matemático en la estructura cognitiva del alumno. Alcanzar la concepción estructural de los nuevos conceptos supone un salto cualitativo difícil de dar, pero a la vez determinante de cara a lograr una reestructuración eficiente de los esquemas cognitivos y a facilitar la comprensión de otros conceptos relacionados.

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

Las distintas formas de representación, en tanto que mediadoras del proceso de aprendizaje, constituyen el segundo eje vertebrador del marco propuesto por Zandieh (2000). Según Duval (1993; 2006) la disponibilidad y uso de diversos sistemas de representación semiótica y sus transformaciones (tratamientos o conversiones) constituyen la base de la comprensión en las matemáticas. Esto es debido a que, dado el carácter abstracto de los objetos matemáticos, las representaciones internas o imágenes conceptuales de los mismos se derivan únicamente del paso de unas representaciones semióticas a otras y de la coordinación entre las mismas. En particular, señala la importancia de la coordinación entre las representaciones llevadas a cabo en distintos registros:

> La comprensión matemática comienza con la coordinación de registros. El reconocimiento de los mismos objetos matemáticos a partir de representaciones provenientes de dos registros diferentes no es una operación local u ocasional, sino el resultado de la coordinación general entre registros. Los procesos de pensamiento matemático dependen de las sinergias cognitivas entre registros de representación. La coordinación entre los registros de representación semiótica proporciona algo parecido a una extensión de la capacidad mental (Duval, 2006, p. 126).

En este trabajo se considera el tipo de registro como segundo eje vertebrador, distinguiendo cuatro tipos posibles: verbal, algebraico, gráfico y numérico. Esta postura difiere de la inicial de Zandieh (2000) en que este autor proponía las distintas representaciones como eje vertebrador y distinguía entre éstas tanto por el registro utilizado como por el contexto en el que se presentaban los conceptos.

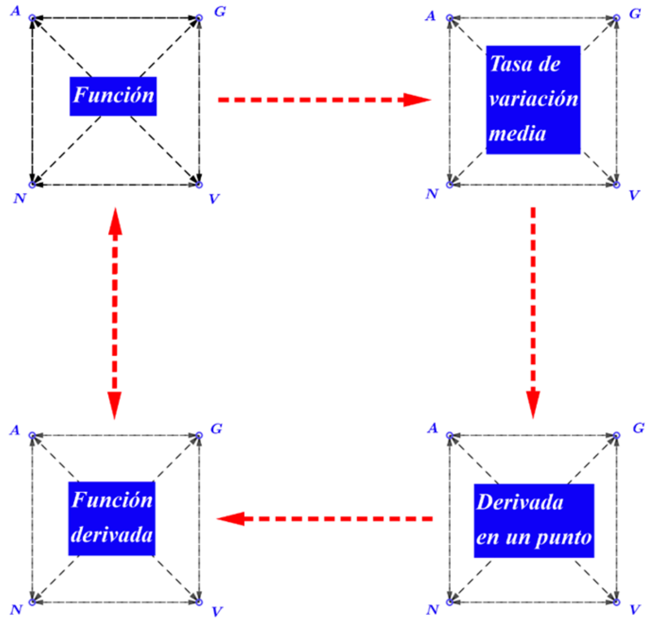

Figura 1: Esquema derivado de la propuesta teórica para el diseño del OVA basado en las cuatro capas vinculadas a la comprensión del concepto de derivada (función, tasa de variación media, derivada en un punto y función derivada). Cada capa se corresponde con una construcción del OVA y cada vértice con un tipo de representación (verbal, algebraica, gráfica y numérica). Fuente: Elaboración propia a partir de Zandieh (2000).

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

El OVA que se propone se estructura a partir del esquema recogido en la Figura 1. Así, las cuatro construcciones de las que consta se corresponden con cada una de las cuatro capas de la propuesta teórica: función (construcción 1), tasa de variación media (construcción 2), derivada en un punto (construcción 3) y función derivada (construcción 4), dando paso cada una de ellas a la capa siguiente. Además, la última construcción, tal y como se puede observar en el esquema, permite al alumno cerrar el círculo y establecer una conexión directa entre la función derivada y el propio concepto de función, es decir, entre la primera y la cuarta capa del concepto de derivada. Por último, a través de la unión de los cuatro vértices correspondientes a las distintas representaciones (verbal, algebraica, gráfica y numérica) en cada uno de los cuadrados se pretende transmitir la idea de que en cada construcción se pone el énfasis en la coordinación entre las distintas representaciones de los correspondientes conceptos como forma de alcanzar una concepción estructural de los mismos.

Para llevar a cabo este planteamiento interdisciplinar a través del uso del OVA, tal y como indican Brante & Brunosson (2014), resulta fundamental la colaboración y coordinación entre profesores ya que de ello dependerá la elección de la mejor forma de presentar el objeto de aprendizaje a los alumnos. En nuestro caso, la función derivada constituye el objetivo de aprendizaje, en torno al cual se ha diseñado el OVA.

El profesor de Economía tendría que partir de los conocimientos de matemáticas que ya tienen sus alumnos y lograr que los transfieran al ámbito de la modelización económica. Esto es especialmente relevante en cuanto a las dos primeras construcciones. El concepto de función, eje de la primera de ellas, tiene un tratamiento extenso y profundo en el currículo de matemáticas, dándole nombre incluso a uno de los grandes bloques temáticos en que se divide para cada uno de los cuatro cursos de la ESO. La tasa de variación media, eje de la segunda, aparece explícitamente en el currículo de Matemáticas correspondiente al cuarto curso de la ESO. Además, el profesor de Economía debe ser consciente también de que la tasa de variación media forma parte de los contenidos de matemáticas que se impartirán en ese curso.

El profesor de Matemáticas debería tener en cuenta el uso que se hace de los conceptos matemáticos en el ámbito de la modelización económica y utilizar el contexto económico como referente habitual. Esto sería especialmente importante en relación con las dos últimas construcciones. Dado que el profesor de Economía se encuentra que durante la mayor parte del curso no puede recurrir al concepto de derivada porque los alumnos aún no lo han visto, es el profesor de Matemáticas, tanto en la asignatura del primer curso como en la del segundo curso de Bachillerato, el que debe asumir el papel de dar sentido a dicho concepto en el contexto económico y familiarizar al alumno con su uso como herramienta de modelización.

4.2. Contexto económico de la propuesta.

Como contexto económico de la propuesta se ha elegido la modelización de las condiciones de costes de una empresa para lo que en economía se denomina el corto plazo. Las condiciones de costes constituyen un aspecto fundamental a la hora de caracterizar el comportamiento de las empresas[6] en los distintos ámbitos de decisión. En el caso de las

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

asignaturas introductorias a la economía, el planteamiento se hace en términos de la relación entre el volumen de producción elegido por la empresa y los correspondientes costes que tendría. En particular, la denominada función de coste total recoge la relación entre el volumen de producción y el coste total en que incurriría la empresa para obtenerlo. Bajos los supuestos subyacentes (en particular que la empresa produce un único bien homogéneo y que los precios de los factores no dependen del volumen de producción) dicha relación se representa de una manera general mediante una expresión de la forma $c = C(x)$, siendo x el volumen de producción, c el coste total y C el nombre de la función. En aras de la manejabilidad del modelo, lo habitual es suponer también que la función es continua y diferenciable en el dominio de interés.
La repercusión sobre los costes de la empresa de un determinado cambio en el volumen de producción depende del margen de tiempo de que disponga para ajustar el proceso productivo. En los modelos teóricos que se les presentan a los alumnos esa situación se simplifica considerando únicamente dos horizontes temporales, a los cuales se les denomina corto plazo y largo plazo. Mientras que por largo plazo se entiende aquel horizonte temporal en el cual la empresa puede ajustar libremente las cantidades de todos los factores que emplea, el corto plazo se caracteriza porque la empresa no tiene margen para ajustar algunos de esos factores, los denominados factores fijos. Trasladado a las condiciones de costes, tendremos que a corto plazo la función de costes es el resultado de la suma de dos funciones, la de coste fijo total (que es una función constante) y la de coste variable total:

$$C(x) = CF + CV(x).$$

Tomando como punto de partida esta relación funcional, las construcciones tienen como referente último la función derivada, en este caso la función de coste marginal.
Desde el punto de vista del profesor de Economía, el OVA se enmarca directamente en los contenidos del Bloque 2 del currículo. Así, entre los estándares de aprendizaje de dicho bloque aparece el siguiente: "Comprende y utiliza diferentes tipos de costes, tanto fijos como variables, totales, medios y marginales, así como representa e interpreta gráficos de costes" (Real Decreto 1105/2014, p. 244).
Sin embargo, la utilidad del OVA propuesto es fundamentalmente la de servir de referencia para el diseño y la utilización de materiales similares asociados a los distintos contenidos curriculares. Por poner un par de ejemplos, en el mismo bloque podría hacerse un tratamiento similar de la teoría de la producción o, en el Bloque 1, podría elaborarse una construcción sencilla centrada en el concepto de función para abordar el tema clásico en economía de la frontera de posibilidades de producción. De la misma manera, podría ampliarse fácilmente para abarcar, en el mismo contexto económico, el concepto matemático de integral (presentando la función de coste total como la integral de la de coste marginal).

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

5. Descripción del OVA.

El OVA propuesto (https://www.geogebra.org/m/yjdzfeas) ha sido diseñado en Geogebra, software matemático libre que proporciona numerosas ventajas a la hora de ser utilizado como herramienta didáctica. Su carácter interactivo y dinámico ofrece al alumno la posibilidad de realizar cambios que se reflejan en tiempo real en las aplicaciones, por lo que a través de la experimentación y manipulación se logra un aprendizaje global y significativo de los conceptos tanto económicos como matemáticos. Otro aspecto muy positivo de este software es que permite presentar simultáneamente los distintos registros de representación de un mismo concepto matemático, lo cual es indispensable en la transición desde un aprendizaje operacional hasta otro de carácter estructural.

Resulta conveniente mencionar que el propio Real Decreto 1105/2014 destaca la importancia de la utilización de herramientas tecnológicas para mejorar la comprensión de determinados conceptos matemáticos. Asimismo, trabajos como Geiger et al. (2010), Artigue (2013) y Bray & Tangney (2017) ponen de manifiesto el impacto positivo que supone la integración de las nuevas tecnologías digitales en la educación matemática. La utilización de los OVAs como herramienta virtual sirve de complemento a los procesos de enseñanza-aprendizaje. Entre sus ventajas documentadas destacan la flexibilidad, la variedad metodológica, la posibilidad de contar con nuevos entornos, la optimización de recursos o la potenciación del aprendizaje colaborativo y autónomo (Wiley, 2000; Cabrera-Medina et al., 2016).

5.1. Construcción 1: Funciones y razonamiento covariacional.

La construcción 1 se organiza en torno a la propia función de costes totales a corto plazo mencionada anteriormente. En su presentación inicial la construcción recoge la representación gráfica de la forma estándar de la función de costes variables totales (monótona creciente en todo el dominio, con un tramo inicial cóncavo que da paso a un tramo convexo) y también la representación analítica (Figura 2). El usuario puede manipular la construcción en cuanto a:

1. La posibilidad de elegir y cambiar de manera continua o discreta el nivel de producción, observando el coste asociado y sus variaciones. La elección del nivel de producción puede introducirse de distintas maneras: moviendo el punto que representa el nivel de producción sobre el eje de abscisas, introduciendo en un cuadro el valor deseado o desplazando un deslizador. Al recoger el valor que toman las variables tanto en el gráfico como en la evaluación de la expresión analítica, se le facilita al alumno la coordinación entre la representación algebraica y la gráfica.
2. La elección del valor de algunos parámetros relacionados con la forma de la función:
    a. La cuantía de los costes fijos. Así, cuando no existen costes fijos, la función de costes totales coincide con la de costes variables totales, y a medida que los costes fijos aumentan, la distancia vertical entre ambas funciones crece.
    b. Los parámetros que determinan la forma de la función cuadrática que recoge los costes variables totales.

En cuanto a su finalidad, la construcción 1 se dirige a facilitar el logro de una concepción estructural por parte del alumno del concepto de función. Para conseguir dicho objetivo se consideran fundamentales los siguientes aspectos:

1. La concepción de la función en términos covariacionales. En este sentido, el razonamiento covariacional supone que el alumno, dadas unas funciones de costes totales y costes variables totales que dependen del nivel de producción, sea capaz de vincular el valor que toma el nivel de producción con el valor que toma cada función. Los trabajos de Carlson et al. (2002), Carlson et al. (2010) y Thompson & Carlson (2017) ponen de manifiesto que la idea de covariación, es decir, la coordinación de dos magnitudes que varían simultáneamente, es indispensable para alcanzar una concepción estructural del concepto de función.
2. La coordinación entre las distintas representaciones. La construcción recoge la conexión entre la representación algebraica, la numérica y la gráfica.

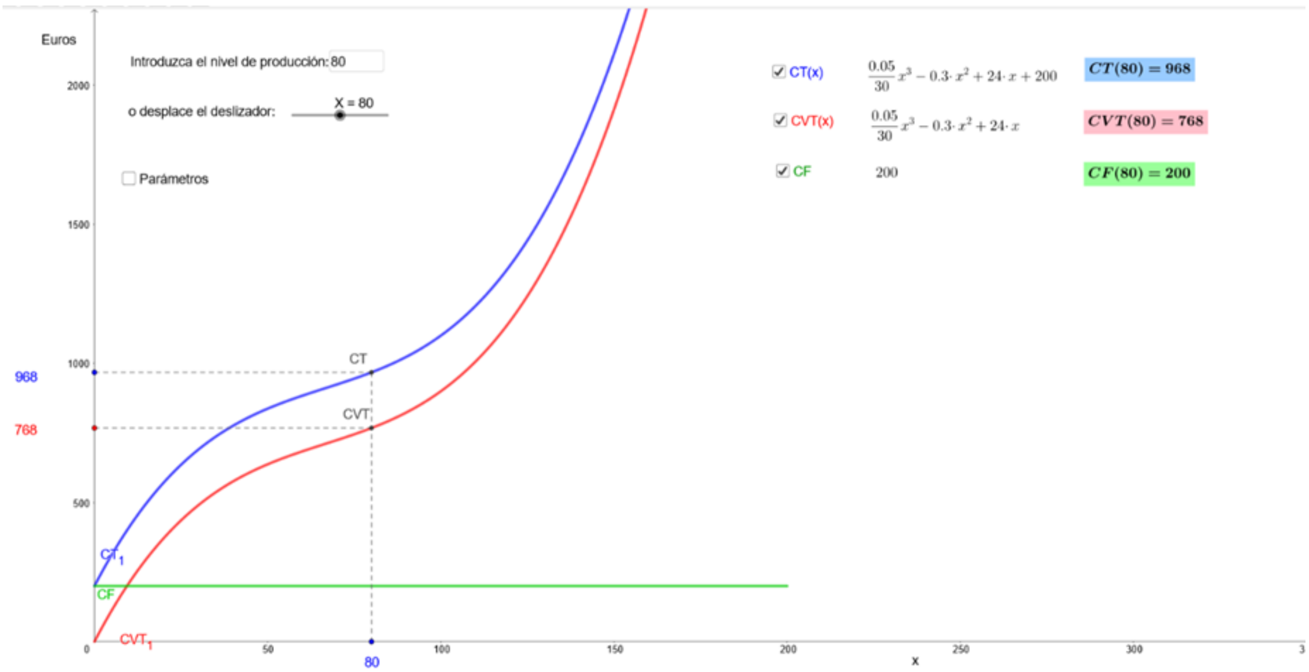

Figura 2. Aspecto de la pantalla correspondiente a la construcción 1.
Accesible en: https://www.geogebra.org/m/yjdzfeas#material/fem26cnt

5.2. Construcción 2: Tasa de variación media.

La construcción 2 se basa en el concepto de tasa de variación media. En el contexto de la función de costes dicha tasa tiene la interpretación de coste medio incremental, esto es, de repercusión media sobre el coste por cada una de las unidades en que se aumente o disminuya la producción. Partiendo de la definición analítica de la misma como cociente de incrementos, se hace hincapié en su dependencia del volumen de producción de partida y de la cuantía de la variación en dicho volumen de producción.

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

$$TVMe^{c}(x_0, \Delta x) = \frac{\Delta c}{\Delta x}$$

Tal y como se muestra en la Figura 3, la construcción permite seleccionar tanto x_0 como Δx y apreciar la repercusión del cambio de cualquiera de ellas sobre el valor de la tasa de variación media (coste medio incremental) tanto en la representación gráfica (la pendiente de la recta secante que corta a la función de coste total para los dos niveles de producción considerados) como en la numérica. De nuevo, la selección del nivel de producción inicial y del cambio considerado en el mismo puede realizarse de tres maneras: introduciendo directamente los valores en la casilla asignada, moviendo un deslizador o desplazando directamente en la gráfica de la función el nivel de producción. Los dos últimos facilitan enormemente el razonamiento covariacional, en comparación con las posibilidades que ofrece un gráfico estático.

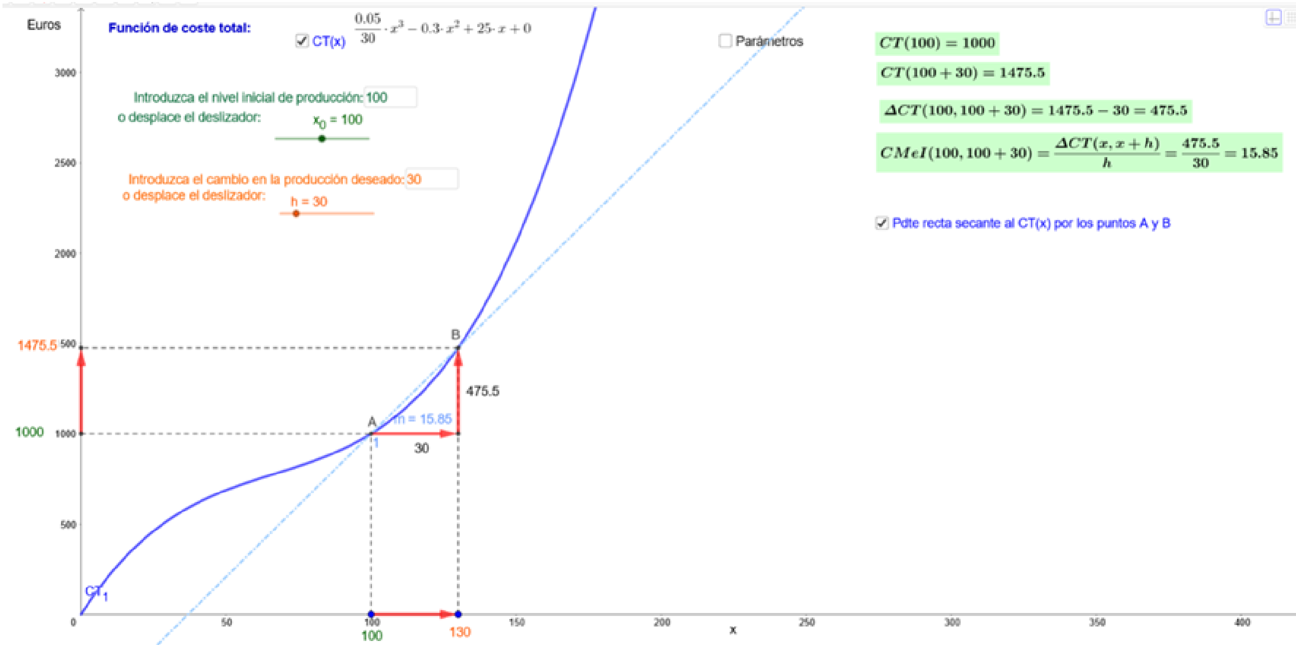

Figura 3. Aspecto de la pantalla correspondiente a la construcción 2.
Accesible en: https://www.geogebra.org/m/yjdzfeas#material/nvyd2ujv

Por tanto, la construcción 2 tiene una triple finalidad:

1. Facilitar la comprensión del concepto de tasa de variación media en sus diferentes representaciones: como la pendiente de la recta secante a la función de coste total en los dos niveles de producción considerados (representación gráfica), como el coste medio incremental (representación algebraica) y, por último, como el valor de la tasa de variación media (representación numérica).

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

2. Permitir la coordinación de las diferentes representaciones de la tasa de variación media.
3. Fomentar el razonamiento covariacional ligado a la tasa de variación media, ya que con este concepto estamos midiendo, en forma de tasa, la repercusión del cambio en una determinada variable sobre el valor que toma la otra.

5.3. Construcción 3: Derivada de una función en un punto.

La construcción 3 toma como punto de partida el concepto de tasa de variación media y, a partir del mismo, se introduce el concepto de derivada (Figura 4). Se pone el énfasis en la comprensión de la misma en términos de tasa de variación marginal, esto es, de tasa de variación media para cambios infinitesimales en la variable independiente.

$$TVMg^c(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} TVMe^c(x_0, \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{dc}{dx}(x_0)$$

En el contexto de la función de coste total, la denominación estándar de la tasa de variación marginal es la de coste marginal. El énfasis puesto en su interpretación como una tasa pretende llevar al estudiante a superar la interpretación habitual como coste de la última unidad producida, interpretación que, además de ser errónea, limita la capacidad de extender el concepto a otros contextos de manera autónoma.
La manipulación de la construcción permite apreciar:

1. La convergencia de la tasa de variación media, $TVMe^c(x_0, \Delta x)$, al valor de la derivada en el punto, $\frac{dc}{dx}(x_0)$, a medida que la variación en la producción se hace más pequeña. Para ello en la pantalla se muestra tanto el valor numérico de la derivada en el punto considerado, calculado a partir de su expresión analítica, como el valor del cociente de incrementos a medida que se hace más pequeño el Δx.
2. La interpretación geométrica de la derivada en un punto en términos de la pendiente de la recta tangente en el punto. Además de poder apreciar que la recta secante se aproxima a la tangente a medida que se hace más pequeño el Δx, en la construcción se muestra la pendiente de dicha recta para que pueda compararse con el valor numérico que toma la derivada.
3. La dependencia del valor de la derivada del nivel de producción elegido. Por ejemplo, desplazando el nivel de producción con el deslizador, se aprecia claramente cómo cambian, de manera continua, tanto el valor numérico que toma la derivada, como la tangente a la curva para ese nivel de producción.

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

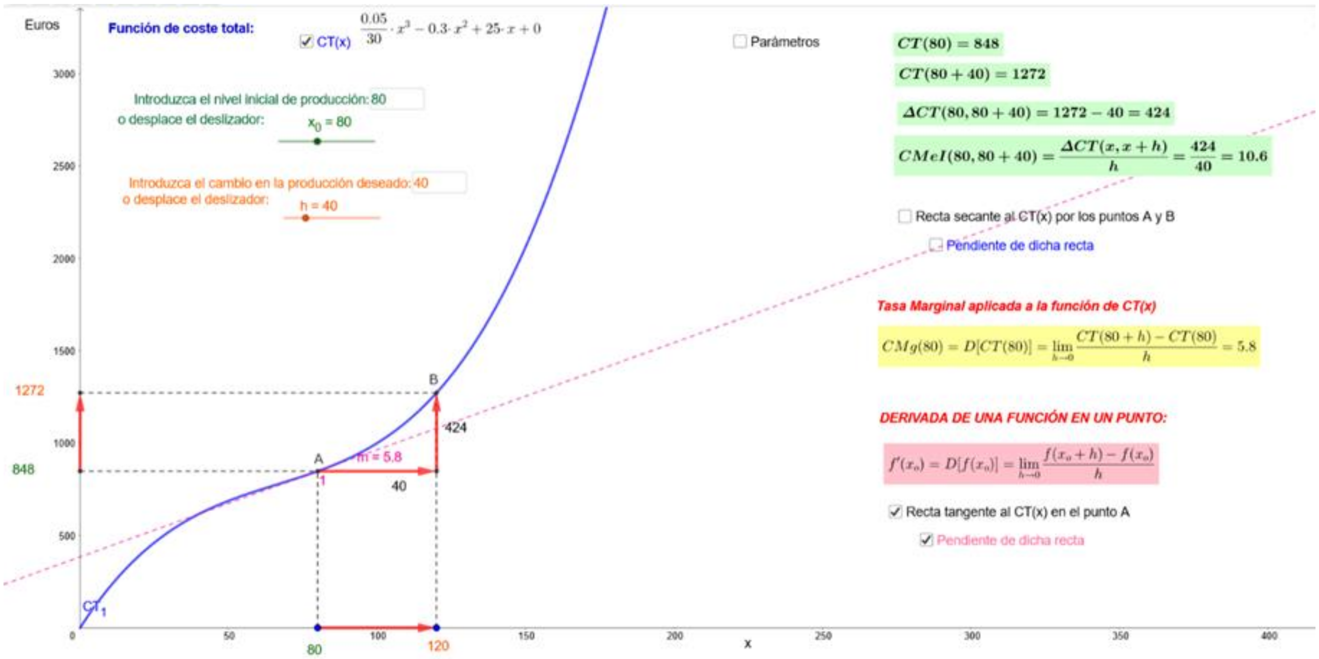

Figura 4. Aspecto de la pantalla correspondiente a la construcción 3.
Accesible en: https://www.geogebra.org/m/yjdzfeas#material/bnvtyk5y

Con la construcción 3 se pretende:

1. Identificar la transición desde la tasa de variación media a la derivada en un punto, lo cual equivale en el contexto actual a relacionar el coste marginal con el coste medio incremental.
2. Favorecer la comprensión del concepto de derivada de una función en un punto mediante la conexión de sus distintas representaciones: como la pendiente de la recta tangente a la función de coste total en dicho punto (representación gráfica), como el coste marginal o límite del coste medio incremental ante una variación infinitesimal en la producción (representación algebraica) y, por último, como el valor numérico que toma la derivada.

5.4. Construcción 4: Función derivada.

La construcción 4 se apoya en las anteriores para facilitar la asimilación del concepto que se fija como referencia en este trabajo: el de función derivada. La intención es que el alumno comprenda el concepto matemático y su papel en el ámbito de los modelos económicos. Para ello, en primer lugar, se muestra cómo varía el coste marginal, en su representación numérica y gráfica, dependiendo del nivel de producción considerado, es decir, entra en juego, de nuevo, la idea de covariación (Figura 5). El nivel de producción se puede modificar introduciendo el valor deseado en una casilla, a través de un deslizador o moviendo el punto que representa el nivel de producción sobre el eje de abscisas.

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

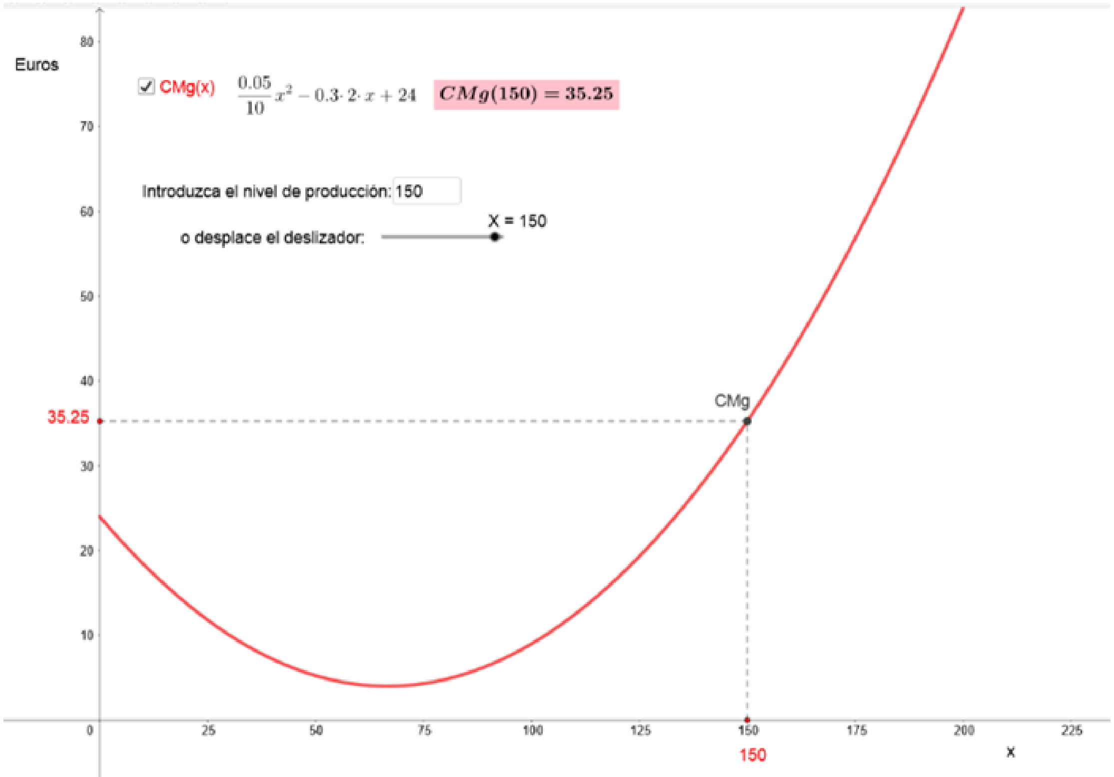

Figura 5. Aspecto de la pantalla correspondiente a la construcción 4a.
Accesible en: https://www.geogebra.org/m/yjdzfeas#material/umkqkkxh

A continuación, tal y como se puede apreciar en la Figura 6, se utilizan las dos ventanas gráficas de Geogebra, lo cual no sólo permite la conexión entre las distintas representaciones del concepto, sino también la coordinación entre las representaciones de la función derivada (la de coste marginal) y de la función original (coste total). Esta construcción permite al usuario modificar el nivel de producción desplazando el deslizador hasta el valor deseado, introduciendo dicho valor en una casilla o directamente moviendo el punto asociado al nivel de producción en el eje de abscisas desde cualquiera de las dos ventanas gráficas.
En el contexto de la función de costes, supone pasar del coste marginal para un determinado nivel de producción, $CMg(x_0)$, a la función que nos da dicho valor para cualquier valor del dominio, $CMg(x)$.
La construcción permite apreciar la relación que guarda la función derivada con la pendiente de la función original y, lo que es más importante, la conexión entre la forma de las gráficas de cada una de ellas. En relación a este último aspecto, se puede comprobar cómo el tramo cóncavo inicial de la función de costes totales se corresponde con el tramo decreciente de la función de coste marginal (función derivada). A lo largo de este, a medida que nos vamos desplazando sobre la función de coste marginal cuando aumenta el nivel de producción (ventana gráfica de la derecha), la pendiente de la recta tangente a la función de coste total en el nivel de producción analizado va decreciendo (ventana gráfica de la izquierda). En

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

cambio, el tramo convexo de la función de costes totales se corresponde con el tramo creciente de la función de coste marginal y a lo largo del mismo, a medida que aumenta el nivel de producción, va creciendo la pendiente de la recta tangente a la función de coste total en el punto determinado por el nivel de producción. En otras palabras, el coste marginal va aumentando.

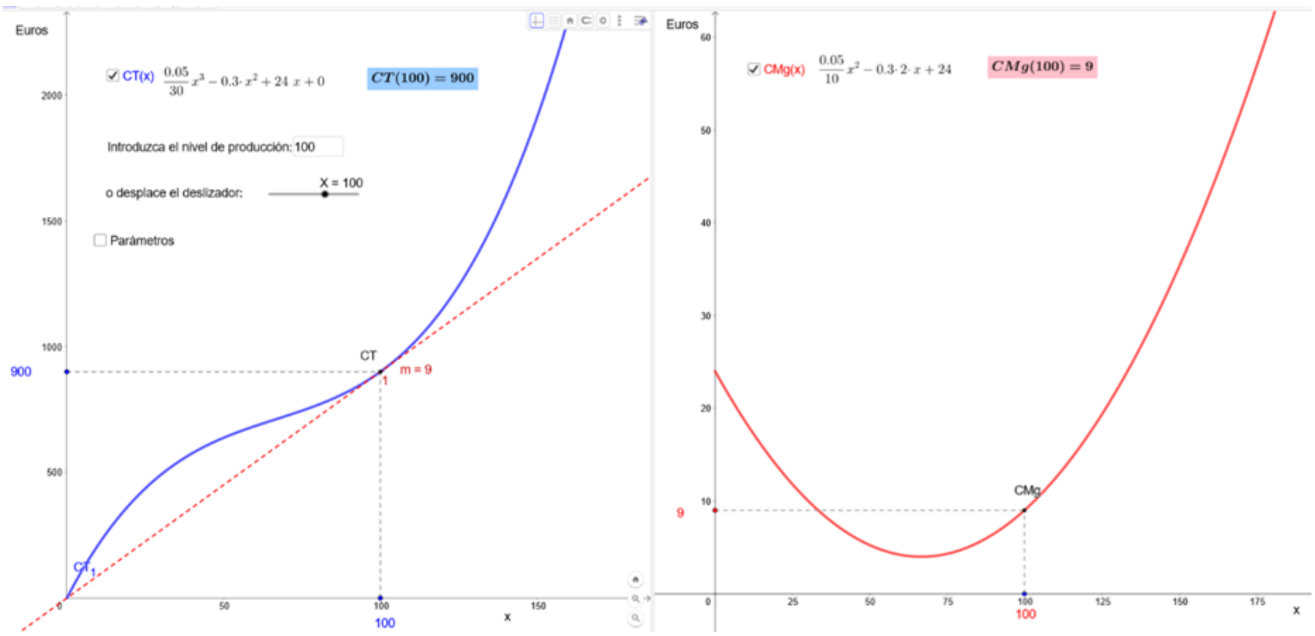

Figura 6. Aspecto de la pantalla correspondiente a la construcción 4b.
Accesible en: https://www.geogebra.org/m/yjdzfeas#material/vtatkf3j

En definitiva, con la construcción 4 se pretende:

1. Trabajar el razonamiento covariacional entre el nivel de producción y el coste total (ventana gráfica de la izquierda) y entre el nivel de producción y el coste marginal (ventana gráfica de la derecha) de manera simultánea.
2. Establecer la conexión entre el concepto de coste total y el marginal en sus distintos registros de representación a partir de la observación de cómo cambia el valor de ambas funciones al variar el nivel de producción.
3. Distinguir entre derivada de una función (en este caso la de coste total) en un punto (determinado por el nivel de producción) y la función derivada (la función de coste marginal).

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

6. Conclusiones.

La corriente STEM, acrónimo de los términos en inglés Science, Technology, Engineering y Mathematics (Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas), ha tenido éxito en cuanto a la reivindicación de un enfoque más integrador en la enseñanza de las materias del ámbito científico y tecnológico y de las matemáticas (Al-Salami et al., 2017). Sin entrar a considerar si debería incluirse o no a la economía bajo dichas etiquetas[7], lo que parece evidente es que existen razones para demandar que sus contenidos sean también abordados desde un planteamiento más transversal. Por un lado, la modelización matemática tiene un peso muy importante en la configuración del currículo actual en la etapa preuniversitaria. Por el otro, numerosos estudios han puesto de manifiesto la influencia de la formación matemática en el rendimiento de los estudiantes en las titulaciones universitarias del ámbito de la economía (Ariza et al., 2015; Arnold & Straten, 2012; Ballard & Johnson, 2004).

Al mismo tiempo que se señalan las ventajas del enfoque interdisciplinar, es necesario reconocer también el enorme reto que supone para el profesorado, el cual normalmente no ha recibido una formación previa para ello y tampoco suele disponer ni de los recursos materiales, ni del apoyo institucional para llevarlo a cabo. Tal y como señala Klaassen (2018), una mejor comprensión de factores como el grado de integración entre las diferentes disciplinas o la elección de un entorno de aprendizaje adecuado son claves para conseguir una sólida formación educativa en la que el carácter interdisciplinar vaya ganando cada vez un mayor peso. Relacionado con ello, si consideramos el papel que juegan las nuevas tecnologías digitales, trabajos como Área-Moreira (2009) o Marín-Díaz et al. (2018) han analizado los retos de su integración en las aulas y centros educativos y entre las medidas que serían necesarias llevar a cabo destacan la realización de inversiones económicas en dotación de recursos tecnológicos, el desarrollo de estrategias de formación del profesorado, así como la creación de comunidades virtuales de aprendizaje y de materiales online que puedan ser utilizados y compartidos por diferentes centros y aulas. En este sentido, la propuesta que se hace pretende únicamente ser una muestra del tipo de materiales que se podrían elaborar con un coste relativamente bajo en términos de carga de trabajo y que podrían servir de germen de una colaboración más intensa entre los respectivos departamentos didácticos. También ayudaría a ello el hecho de que este tipo de recursos resulta especialmente útil para su uso en línea, como facilitadores del aprendizaje autónomo (Mora-Vicarioli, 2012). En particular, si el uso de estos OVAs se apoya con otros materiales, como podrían ser ejercicios interactivos diseñados para inducir la manipulación deseada de las construcciones por parte del alumno o cursos de carácter teórico, constituyen un buen complemento a las actividades desarrolladas tanto dentro del aula o fuera de ella (Wiley, 2000; Cabrera-Medina et al., 2016; Morales et al., 2016). Inicialmente, el profesorado podría limitarse a utilizar estos recursos digitales como herramientas de apoyo al autoaprendizaje, sin verse obligado a modificar excesivamente su planificación de la docencia presencial.

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

Los objetivos de aprendizaje que han servido de guía en la elaboración del OVA son especialmente relevantes en relación con la formación propedéutica de los alumnos que realicen estudios universitarios en el ámbito de la economía. Sin embargo, también se ha identificado un valor formativo más general, vinculado a los objetivos de aprendizaje más propios de las matemáticas. Las variaciones en el contexto económico y la consideración de otros conceptos matemáticos permitirían crear un repositorio de materiales que podrían utilizarse de una manera flexible tanto en las clases de Economía como en las de Matemáticas (Arango et al., 2015). Como profesores de asignaturas de teoría económica en los primeros cursos del Grado en Economía, sostenemos que el esfuerzo de coordinación que requiere entre los dos departamentos didácticos se vería más que compensado en términos de aprendizaje significativo por parte del alumnado.

Referencias

- Al-Salami, M.K., Makela, C.J. & De Miranda, M.A. (2017). Assessing changes in teachers' attitudes toward interdisciplinary STEM teaching. *International Journal of Technology and Design Education, 27*(1), 63-88 (2017). DOI: https://doi.org/10.1007/s10798-015-9341-0
- Arango, J., Gaviria, D. & Valencia, A. (2015). Differential calculus teaching through virtual learning objects in the field of management sciences. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 176*, 412-418. DOI: https://doi.org/ 10.1016/j.sbspro.2015.01.490
- Arbain, N. & Shukor, N.A. (2015). The effects of Geogebra on students achievement. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 172*, 208-214. DOI: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.356
- Área-Moreira, M. (2009). La sociedad de la información, las tecnologías y la educación. En M. Área-Moreira (Ed.). *Introducción a la tecnología educativa.* Tenerife. Universidad de La Laguna.
- Ariza, A., Llinares, S. & Valls, J. (2015). Students' understanding of the function-derivative relationship when learning economic concepts. *Mathematics Education Research Journal, 17*(4), 615-635. DOI: https://doi.org/10.1007/s13394-015-0156-9
- Arnold, I. J. M., & Straten, J. T. (2012). Motivation and math skills as determinants of first-year performance in economics. *The Journal of Economic Education, 43*(1), 33-47. DOI: https://doi.org/10.1080/00220485.2012.636709
- Artigue, M. (2013). L'impact curriculaire des technologies sur l'éducation mathématique. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 295-305. DOI: https://doi.org/10.36397/emteia.v4i1.2236
- Ballard, C. L. & Johnson, F. (2004). Basic math skills and performance in an introductory economics class. *The Journal of Economic Education, 35*(1), 3-23. DOI: https://doi.org/10.3200/JECE.35.1.3-23

- Blomhøj, M. (2019). Towards integration of modelling in secondary mathematics teaching. En G.A. Stillman y J.P. Brown (Eds.). *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education,* pp. 37-52. Suiza: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_3
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? En S.J. Cho (Ed.). *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Springer International Publishing. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9
- Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.
- Brady, C. (2018). Modelling and the representational imagination. *ZDM - Mathematics Education*, *50*(1-2), 45-59. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-018-0926-4
- Brante, G. & Brunosson, A. (2014). To double a recipe-interdisciplinary teaching and learning of mathematical content knowledge in a home economics setting. *Education Inquiry, 5*(2), 301-318. DOI: https://doi.org/10.3402/edui.v5.23925
- Bray, A. & Tangney, B. (2017). Technology usage in mathematics education research. A systematic review of recent trends. *Computers & Education, 114*, 255-273. DOI: https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.07.004
- Cabrera-Medina, J.M., Sánchez-Medina, I.I. & Rojas-Rojas, F. (2016). Uso de objetos virtuales de aprendizaje OVAS como estrategia de enseñanza-aprendizaje inclusivo y complementario a los cursos teóricos-prácticos. Una experiencia con estudiantes del curso física de ondas. *Revista Educación en Ingeniería, 11*(22), 4-12.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378. DOI: https://doi.org/10.2307/4149958
- Carlson, M., Oehrtman, M., & Engelke, N. (2010). The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understandings. *Cognition and Instruction*. *28*(2), 113-145. DOI: https://doi.org/10.1080/07370001003676587
- Casasús-Estellés, T., Ivars-Escortell, A. & López-Rodríguez, M.I. (2018). Present and future of the e-learning in economics schools and faculties. *Multidisciplinary Journal for Education, Social and Technological Sciences, 5*(1), 44-64.
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F.J. García (Eds.). *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica*, pp. 705-746. Jaén: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37-65. IREM de Strasbourg, Francia.

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131. DOI https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z
- Freudenthal, H. (2002). *Revisiting Mathematics Education : China Lectures*. Norwell: Kluwer Academic Publishers.
- Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 143-162. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02655886
- Geiger, V., Faragher, R. & Goos, M. (2010). CAS-enabled technologies as 'agents provocateurs' in teaching and learning mathematical modelling in secondary school classrooms. *Mathematics Education Research Journal*. *22*(2), 48-68. DOI: https://doi.org/10.1007/BF03217565
- Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A Calculus Course as an Example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*, 111-129. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1003749919816
- Kaiser G. & Brand S. (2015) Modelling competencies: Past development and further perspectives. En G. Stillman, W. Blum, M. Salett Biembengut (Eds.). *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, pp. 129-149. Cham: Springer.
- Katzner, D.W. (2003). Why mathematics in economics? *Journal of Post Keynesian Economics, 25*(4), 561-574.
- Klaassen, R.G. (2018). Interdisciplinary education: a case study, *European Journal of Engineering Education, 43*(6), 842-859, DOI: https://doi.org/10.1080/03043797.2018.1442417
- Kllogjeri, P. (2010). GeoGebra: A global platform for teaching and learning math together and using the synergy of mathematicians. En M.D. Lytras, P. Ordonez De Pablos, D. Avison, J. Sipior, Q. Jin, W. Leal Filho, L. Uden, M. Thomas, S. Cervai & D.G. Horner (Eds.). *Technology Enhanced Learning. Quality of Teaching and Educational Reform.* Communications in Computer and Information Science, 73. Springer, Berlín, Heidelberg.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.). *Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching,* pp. 3-58. Mahawah, NJ: Lawrence Earlbaum.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 113-142. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02655885
- Marín-Díaz, V., Burgos-Mellado, S. & López-Pérez, M. (2018). Formación de docentes para la inclusión digital desde el plan escuela 2.0: estudio de un caso. *International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 10*, 274-298.

- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España (MECD). (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. https://www.educacionyfp.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d
- Mkhatshwa, T.P. (2019). Students' quantitative reasoning about an absolute extrema optimization problem in a profit maximization context. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(8), 1105-1127. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1562116
- Mora-Vicarioli, F. (2012). Learning objects: The importance of its use in the virtual education. *Revista Calidad en la Educación Superior, 3*(1), 104-118.
- Morales, L., Gutiérrez, L. & Ariza, L. (2016). Guía para el diseño de objetos virtuales de aprendizaje (OVA). Aplicación al proceso de enseñanza-aprendizaje del área bajo la curva de cálculo integral. *Revista Científica General José María Córdova, 14*(18), 127-147.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish Kom Project. *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, 115-124.
- Pollak, H. O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. En UNESCO (Eds.). *New Trends in Mathematics Teaching IV*, pp. 232-248. París.
- Rai, B.K., So, C.K. & Nicholas, A. (2010). A primer on mathematical modelling in Economics. *Journal of Economic Surveys. 26*(4), 594-615. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1467-6419.2010.00655.x
- Real Decreto 1179/1992, de 2 de octubre, por el que se establece el currículo del Bachillerato (BOE-A-1992-23406). https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-1992-23406
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf
- Roorda, G., Vos, P. & Goedhart, M. (2007). 5.8-The concept of the derivative in modelling and applications. En C., Haines, C., Galbraith, P., Blum, W. & S. Khan (Eds.). *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics-ICTMA 12*, pp. 288-293. Woodhead Publishing. DOI: https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.288
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00302715
- Thompson, P. W. & Carlson, M. (2017). Variation, covariation and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En Cai, J. (Ed.). *Compendium for research in Mathematics Education*, pp. 421-456. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701

- Tur, G.I. & Shakhovnina, N.V. (2015). Applications as a way of implementation of interdisciplinary connections of mathematical and economic disciplines. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology,37*(75), 14-16.
- Wiley, D.A. (2000). Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. En D.A. Wiley (Ed.). *The Instructional Use of Learning Objects: Online Version.*
- Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En *Research in Collegiate Mathematics Education IV, 8*, pp. 103-127. Arizona: Conference Board of the Mathematical Science.

[1] Arango et al. (2015) han demostrado que las estrategias docentes basadas en el uso de OVAs sobre el cálculo diferencial se pueden aplicar satisfactoriamente al campo de las Ciencias Administrativas para mejorar la asimilación de técnicas de derivación. En concreto, estos autores aplicaron técnicas de modelización económica para resolver problemas de optimización como la maximización de beneficios o la minimización de costes.

[2] Estos autores han verificado que la enseñanza interdisciplinar supone una mejora en el aprendizaje de las fracciones como concepto matemático entre un grupo de alumnos suecos de doce años. La utilización del contexto de la economía familiar y el consumo para aprender a trabajar con fracciones condujo a mejores resultados comparados con aquellos obtenidos en un contexto matemático.

[3] En el documento “Marcos y Pruebas de Evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias”, la competencia matemática se define como: “La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las Matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan” (MECD, 2013, p. 9).

[4] Zandieh (2000) recurre a la metáfora del puzzle para ilustrarlo. Cada estudiante parte de una comprensión parcial del concepto de derivada, y a partir de la recopilación de diferentes piezas del puzzle, va logrando una comprensión cada vez más completa del concepto a falta quizás de unas pocas piezas que quedan sin encajar. Únicamente cuando cada estudiante sea capaz de encajar todas las piezas logrará una comprensión total de la derivada.

[5] Se ha de señalar que el Δx se suele denotar en los libros de texto como h. De hecho, será ésta última la notación que utilizaremos en el diseño del OVA.

[6] El punto de partida estándar de los modelos teóricos en economía a la hora de caracterizar el comportamiento de las empresas privadas es el supuesto de maximización de beneficios. Sin embargo, en la medida en que los beneficios no son sino la diferencia entre los ingresos y los costes, caracterizar las consecuencias de un determinado comportamiento en términos de su repercusión sobre los beneficios requiere hacerlo primero en términos de su repercusión sobre los costes.

[7] Muchas universidades americanas han modificado el nombre de sus títulos de grado y de posgrado de tal manera que sean considerados STEM. En particular, el cambio de títulos cubiertos bajo la denominación Economics a otros cubiertos bajo la denominación de Econometrics and Quantitative Economics es suficiente para lograr la recalificación a STEM.

Fecha de recepción: 23-03-2020 Fecha de aceptación: 02-05-2020
Gutiérrez-Portilla, M., Gutiérrez-Portilla, P. & Álvarez-Causelo, P. (2021). Hacia un planteamiento interdisciplinar en la iniciación a la modelización económica en el Bachillerato: una propuesta en torno a la derivada y el análisis marginal
International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI), 16, 236-259
ISSN: 2386-4303 DOI https://doi.org/10.46661/ijeri.4701