REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (1). Páginas 5–24.
Junio de 2006. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: http://www.upo.es/RevMetCuant/art1.pdf

Progreso técnico: una aproximación desde la Teoría de Grupos de Transformaciones de Lie

Fedriani Martel, Eugenio M.
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica.
Universidad Pablo de Olavide
Correo electrónico: efedmar@upo.es

Tenorio Villalón, Ángel F.
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica.
Universidad Pablo de Olavide
Correo electrónico: aftenvil@upo.es

RESUMEN

En la presente comunicación explicamos algunas de las herramientas de la Geometría Diferencial y, en concreto, de la Teoría de Lie con las que se trabaja actualmente en Economía. Se indican las condiciones que se exigen a las funciones de producción y la definición de un tipo de progreso técnico denominado *de tipo Lie*, consistente en exigir las tres propiedades que han de verificar los grupos de Lie. También se expone el uso del operador de Lie en interpretaciones económicas y en la cuantificación del impacto del progreso técnico. Dicho operador permite dar una respuesta a la Controversia Solow-Stigler. Por último, se indican varias aplicaciones de la Teoría de Lie en los estudios económicos, que permiten abrir futuras líneas de investigación, de las que se apuntan algunas. De este modo, nuestro objetivo principal es mostrar el uso, actual y futuro, de la Teoría de Lie en el campo de la Economía.

Palabras clave: cambio técnico; progreso técnico tipo Lie; holoteticidad.
Clasificación JEL: C65; O30.
2000MSC: 22E99; 91B99.

Artículo recibido el 17 de marzo de 2006 y aceptado el 24 de abril de 2006.

Technical Progress: an Approach from Lie Transformation Group Theory

ABSTRACT

In this paper we explain some tools of Differential Geometry. In detail we deal with Lie Theory, which is currently being investigated in Economics. Firstly we indicate the conditions demanded to production functions in such studies, and the definition of a particular type of technical progress: the Lie type. For this type, the three properties of Lie groups have to be verified by the technical progress. We also show the use of Lie operator for economical interpretations, and for quantifying the impact of the technical progress. This operator allows us to answer Solow-Stigler Controversy. Finally we introduce some applications of Lie Theory in Economics, and suggest new future research lines they can generate. In this way, our main aim is to show the actual and future applications of Lie Theory in Economics.

Keywords: technical change; Lie type of technical progress; holotheticity.
JEL classification: C65; O30.
2000MSC: 22E99; 91B99.

1. Introducción

A la hora de estudiar el comportamiento que tiene una tecnología (entendida como el conjunto de funciones de producción) con respecto a cualquier cambio que se produce a lo largo del tiempo, se pueden utilizar varias herramientas y, de hecho, han sido varios los intentos que han tratado de explicar dicha evolución.

En primer lugar deberíamos recordar el estudio de la matriz tecnológica y del análisis input-output de Leontief, en el cual (modelo clásico) se presuponen constantes y conocidos los coeficientes de la matriz tecnológica y a partir de ellos se podría saber de un modo muy simple cuál sería, por ejemplo, la producción que se necesitaría para satisfacer una determinada demanda. Desgraciadamente el modelo clásico de Leontief no es válido para estudiar los progresos técnicos, ya que la matriz de coeficientes tecnológicos variaría en función del tiempo y los coeficientes no serían, por tanto, constantes.

En la actualidad, aún se realizan estudios en líneas de investigación que pretenden solventar los defectos del modelo clásico de Leontief. Algunas de estas líneas se basan en considerar no constantes los coeficientes tecnológicos, añadiéndole una variable aleatoria a cada uno de ellos, que representarían las fluctuaciones de dichos coeficientes o su evolución a lo largo del tiempo. El estudio de estos nuevos coeficientes tecnológicos y de la producción determinada por éstos se realizaría normalmente mediante técnicas estadísticas (véase, por ejemplo, Rueda, 2004).

Pero a la hora de ver los efectos que sufre la producción debido a los cambios técnicos que se pueden dar tanto dentro de la economía como fuera de ella, surge un segundo problema cuya versión más conocida ha pasado a llamarse la *Controversia Solow-Stigler* y que consiste en saber si se podrían aislar e identificar independientemente los efectos del progreso técnico de los efectos de los rendimientos a escala (esto es, en algunos modelos simples, estudiar el crecimiento en la razón capital/mano de obra).

Según Solow (1957) la parte del aumento en la producción per capita estadounidense que no es debida al crecimiento en la razón capital/mano de obra debería imputársele a un cambio técnico (término que Solow introduce en la literatura). Para ello, Solow supone que dicho progreso técnico es *del tipo neutro de Hicks* y que la función de producción subyacente es homogénea de grado 1.

Por su parte, Stigler (1961) no creía acertada la suposición de homogeneidad en la función de producción y defendió la necesidad de distinguir entre rendimiento a escala creciente y progreso técnico. Stigler intentó construir una función de producción internacional empleando datos de EE.UU. y R.U. y la función de producción de Cobb-Douglas. Su conclusión fue que las economías a escala y los progresos técnicos son potencialmente del mismo orden de magnitud, por lo que la estimación de la magnitud debía resolverse, según Stigler, no solo con cálculos de productividad, sino también con teoría de crecimiento económico.

Solow (1961), pese a estar de acuerdo con respecto a la magnitud potencial de los efectos a escala, creía que el problema de medir dichos efectos y distinguirlos de los de progreso técnico sería extremadamente difícil y, al ser un teórico de la Economía, prefería suponer la homogeneidad de grado 1 (rendimiento a escala constante).

El origen de la Controversia Solow-Stigler se encuentra en que el tipo de progreso técnico se transforma completamente en uno de tipo neutro de Hicks, el cual es indistinguible de la propiedad de rendimiento a escala. Es decir, el progreso técnico y el rendimiento a escala no pueden diferenciarse teóricamente para la función de producción estudiada. Para solventar esta controversia, Sato (1981) recurre a la formulación y modelización matemática, con el fin de clarificar los conceptos relacionados con el equilibrio además de determinar el papel que juega el tiempo dentro del Análisis Económico. Nosotros expondremos en lo sucesivo el uso por parte de Sato de la Teoría de Grupos de Lie para estudiar y observar de manera independiente, en una economía, los efectos a escala de los provocados por un progreso técnico. Al menos en teoría, esto permitiría la medición de ambos independientemente unos de otros.

Para realizar este análisis, Sato define un nuevo concepto, la *holoteticidad*, que procede de considerar que el progreso técnico que afecta a la función de producción se transformará en un efecto a escala; en ese caso, no podrán diferenciarse el impacto del efecto a escala del correspondiente efecto del progreso técnico. En consecuencia, para evitar la Controversia Solow-Stigler y así poder diferenciar efecto a escala de progreso técnico, solo habrá que considerar una función de producción y un tipo de progreso técnico que no verifiquen la propiedad de holoteticidad.

Conviene adelantar también que el concepto de holoteticidad y la Teoría de Lie tienen otras utilidades dentro del estudio económico. Por ejemplo, permiten investigar y obtener algunas respuestas acerca de cuáles serán los tipos de progreso técnico que dejan invariante una aplicación isocuanta. Esto se puede estudiar como las curvas integrales asociada a un grupo de Lie uniparamétrico que se obtendría a partir del tipo de progreso técnico.

Es más, el concepto de holoteticidad en una función de producción dada, permite estudiar propiedades de dicha función de producción. De hecho, se puede demostrar que cada familia de funciones de producción verifica una propiedad de invariancia que no resulta afectada por el impacto del cambio técnico. Dicha propiedad permite, en base a su unicidad, clasificar una familia de funciones de producción y distinguirla de todas las restantes familias. Para estudiar las propiedades de invariancia es de gran utilidad la Teoría de Grupos de Lie, como también se verá.

El objetivo principal de este trabajo es mostrar la utilidad de la Teoría de Grupos de Transformaciones de Lie dentro del campo de la Economía. Para ello, se exponen, de manera pormenorizada, el significado y contenido de algunos conceptos correspondientes a dicha teoría pero dentro del tratamiento de los cambios y los progresos técnicos. Además, se indican otros conceptos que también podrían tratarse con el estudio de la Teoría de Grupos de Transformaciones de Lie.

A continuación, se expone la estructura que presenta el artículo tras esta introducción. En una primera sección indicamos las causas que motivaron la aparición de la Teoría de Lie y de los conceptos de grupo y álgebra de Lie, además de mostrar el uso de dichos conceptos en diversos campos científicos. En la siguiente sección se dan las nociones previas correspondientes a funciones de producción y cambio técnico que se emplearán posteriormente en el artículo.

En una cuarta sección se indica la definición del concepto de holoteticidad dado por Sato (1981) y se muestran algunas interpretaciones económicas que se pueden hacer de dicho concepto. Seguidamente, se dedica una sección a tratar un tipo específico de progreso técnico: el de tipo Lie. Esta sección se subdivide en tres subsecciones dedicadas, respectivamente a: indicar la interpretación económica de las propiedades que caracterizan a los progresos técnicos de tipo Lie, mostrar cómo medir el impacto del progreso técnico y responder a la Controversia Solow-Stigler indicada anteriormente.

Finalmente, recopilamos en una última sección algunas posibles líneas de investigación en la que se están utilizando la Teoría de Lie como una herramienta para el avance en dichas líneas.

2. La Teoría de Lie de Grupos de Transformaciones

Las herramientas que se usan en el presente trabajo provienen todas de la Teoría de Grupos de Transformaciones Continuas de Lie. Esta teoría se fraguó en la segunda mitad del s.XIX por obra del matemático noruego Sophus Marius Lie (1842–1899). El motivo primordial que condujo a Lie a realizar dicho estudio fue obtener una teoría para las ecuaciones diferenciales que equivaliese en este campo a la creada por Galois en el campo de las ecuaciones algebraicas. Mientras que la Teoría de Galois permite resolver cualquier ecuación algebraica empleando grupos de permutaciones, Lie quería obtener una relación análoga entre la Teoría de Grupos y las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales. Lie buscaba una teoría geométrica con la que hallar invariancias empleando una serie de transformaciones que caracterizarían a dichas ecuaciones diferenciales. De hecho, a una ecuación en derivadas parciales le asoció una familia finita de transformaciones, que formaba lo que llamamos un álgebra de Lie (de dimensión finita)[1]. Con ello se llegaba a la clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales mediante los grupos continuos de transformaciones y, lo que es más importante, mediante la transformación de Lie. Para

[1]Originariamente, Lie denominó grupo continuo de transformaciones a lo que hoy se denomina álgebra de Lie. Fue en 1934 cuando aparece por primera vez el término *álgebra de Lie*.

saber más sobre el fundador de esta teoría y las inquietudes que le llevaron a desarrollarla puede consultarse Núñez y Tenorio (2002), mientras que los fundamentos de la propia teoría se describen en Jacobson (1979), por ejemplo.

Esta disciplina ha evolucionado y se ha convertido en una herramienta de gran importancia en ciencias como la Física y, en un futuro, probablemente afecte al desarrollo de la Economía. La evolución teórica del estudio de los grupos y las álgebras de Lie ha tomado muchos caminos que pueden ir desde la clasificación de las álgebras de Lie según su dimensión y ciertas características[2] al estudio de la relación entre los grupos de Lie y las álgebras de Lie dentro de la Teoría de Representación. Así, el uso de la Teoría de Lie en Física Teórica suele estar relacionado con la aparición de grupos de simetrías en sistemas dinámicos y con el estudio de las leyes conservativas, que pueden enunciarse como propiedades de invariancia.[3] Otras ciencias en las que se aplican las álgebras y los grupos de Lie son la Genética[4], la Química y, más concretamente, la Química Cuántica[5].

La Teoría de Lie ha sido tan importante y ha aportado tantos avances en diversos campos de la Ciencia que se han buscado diversas generalizaciones de la misma. De ese modo, se han introducido los conceptos de superálgebra de Lie[6], de isoálgebra de Lie[7] e incluso de algebroide de Lie[8]. Aquéllos que quieran información adicional sobre temas relacionados con las álgebras y los grupos de Lie pueden acudir, por ejemplo, a Varadarajan (1998).

3. Nociones preliminares

Como se indicó anteriormente, nuestra intención es mostrar diversas aplicaciones de la Teoría de Lie a los estudios económicos y abrir algunas líneas de investigación. Veremos, por ejemplo, que la Teoría de Lie puede emplearse en el estudio del progreso técnico que actúa sobre una tecnología y en la identificación y distinción entre éste y el efecto del rendimiento a escala. Intentaremos explicar estos conceptos sobre un modelo simple:

Como es costumbre, se considerará una tecnología en la que K y L significan el capital y la mano de obra, respectivamente. Dicha tecnología vendrá representada por una función

[2]Véanse Ancochea y Goze (1989), Boza et al. (2001) y (2003), de Graaf (2004) o Mubarakzjanov (1963).

[3]Una aplicación interesante se tiene en Mecánica Hamiltoniana con las funciones denominadas *observables*, que forman un álgebra de Lie y las simetrías del hamiltoniano forman una subálgebra de la anterior. Para ver ésta y otras aplicaciones a la Física de forma más detallada, puede consultarse Sattinger y Weaver (1997).

[4]Sánchez y Grau (2005) construyen el álgebra de Lie del código genético. Este álgebra permitiría comprender mejor la lógica subyacente en dicho código y establecer ciertas relaciones algebraicas entre los codones de las cadenas de ADN y ARN.

[5]Véase, por ejemplo, Kellman (1996), Yang et al. (2000), Zheng et al. (2000) o Yang et al. (2001).

[6]Véase Frappat et al. (1996).

[7]Véase Falcón y Núñez (2002).

[8]Véase Núñez et al. (2006).

de producción neoclásica

$$Y = f(K, L) \tag{1}$$

que sea continuamente diferenciable y globalmente quasi-cóncava.

Antes de continuar, creemos conveniente recordar la definición de función de producción neoclásica y una caracterización de las funciones quasi-cóncavas:

Definición 3.1. *Una función de producción $Y = f(K, L)$ se dice* neoclásica *si verifica las dos siguientes condiciones:*

1. *Es homogénea de grado 1 (rendimiento a escala constante).*
2. *Disminuye suavemente respecto de los factores individuales.*

Definición 3.2. *Una función de producción $Y = f(K, L)$ se dice que* disminuye suavemente respecto a un factor individual *si al aumentar uno de los factores de la producción, permaneciendo los demás constantes, las ganancias globales decrecen relativamente a partir de un cierto punto.*

Proposición 3.3. *Sea una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, al menos, hasta orden 2 y sea $a \in \mathrm{Dom}(f)$. La función f es quasi-cóncava en a si y solo si la matriz hessiana de f en a, $Hf(a)$, es semidefinida negativa.* □

Como se ha dicho, la tecnología no se mantiene siempre constante y sufre modificaciones en el transcurso del tiempo, bien por variaciones del capital bien por mejoras debidas a la investigación. Esas variaciones se observan en las modificaciones que sufre la propia función de producción de la tecnología. El concepto empleado en Economía para representar estos cambios son el de *cambio técnico* y el más restrictivo de *progreso técnico*.

Definición 3.4. *Un* cambio técnico *en una tecnología es cualquier cambio en la función de producción que altere la relación entre consumos y producciones.*

Un cambio técnico se denomina progreso técnico *si la producción aumenta para cualquier consumo, con respecto al que se obtenía antes del cambio.*

En caso de introducirse un efecto técnico exógeno en la función de producción f, supondremos que la forma de la función de producción f no varía, aunque sí los niveles de producción. En consecuencia, podemos escribir la función de producción tras el efecto técnico como:

$$\bar{Y} = \bar{f}(K, L, t) \tag{2}$$

donde t es el parámetro de progreso técnico e $\bar{Y}$ es la producción para el capital K y la mano de obra L tras el progreso técnico.

Para denotar un cambio técnico con parámetro t suele emplearse la notación T_t. Pero cuando no hay lugar a confusión puede obviarse el parámetro en la notación e indicar el cambio técnico con T.

El progreso técnico puede verse también como la variación que sufren las necesidades del capital y la mano de obra tras dicho progreso. Para ello, se emplea el concepto de *funciones de progreso técnico*, cuya definición se indica a continuación:

Definición 3.5. *Las* funciones de progreso técnico *de K y L son las funciones ϕ y ψ que combinan los factores mediante el parámetro de progreso técnico t. Es decir, las funciones que permiten expresar el progreso técnico de la siguiente forma:*

$$T_t : \bar{K} = \phi(K, L, t), \ \bar{L} = \psi(K, L, t). \tag{3}$$

A las variables $\bar{K}$ y $\bar{L}$ se las denomina capital efectivo *y* mano de obra efectiva*, respectivamente.*

Las funciones de progreso técnico antes definidas se supondrán analíticas y reales respecto de las tres variables, K, L y t. Además, las funciones ϕ y ψ son independientes respecto de las variables K y L. Esta última propiedad lo que viene a decir es que se verifica la siguiente condición:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial K} & \frac{\partial\phi}{\partial L} \\ \frac{\partial\psi}{\partial K} & \frac{\partial\psi}{\partial L} \end{vmatrix} \not\equiv 0. \tag{4}$$

La condición (4) permite aplicar el Teorema de la Función Implícita a la función vectorial $T = (\phi, \psi)$, formada por las dos funciones de progreso técnico, menos la función vectorial constante consistente en $(\bar{K}, \bar{L})$. De este modo, para cada par de valores para el capital y la mano de obra efectivas, podremos despejar las variables K y L en función de las variables $\bar{K}$ y $\bar{L}$ (y conocer las necesidades de capital y mano de obra tras el progreso técnico).

Para concluir la sección, recordamos la definición de un determinado tipo de progreso técnico: el tipo neutro de Hicks.

Definición 3.6. *Se dice que un progreso técnico es* de tipo neutro de Hicks *si aplicado a una función de producción f se verifica que:*

$$\bar{Y} = \bar{f}(K, L, t) = A(t) \cdot f(K, L) = A(t) \cdot Y,$$

con $A > 0$ y $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} > 0$.

4. Holoteticidad. Interpretación económica

Como dijimos antes, una de las causas por las que se introduce la Teoría de Lie en la literatura económica se debe al interés que presenta el poder distinguir en una tecnología entre el impacto del progreso técnico y el de los efectos de los rendimientos a escala. Persiguiendo este objetivo, Sato (1981) introduce el concepto de *holoteticidad de una función de producción bajo un tipo de progreso técnico dado*. La definición de este concepto es la que se indica a continuación:

Definición 4.1. *Sean la función de producción f y el progreso técnico T definido por las funciones de progreso técnico (ϕ, ψ). Se dice que f es* holotética *bajo el progreso técnico T si el efecto total del progreso técnico T sobre f puede ser representado por una función F estrictamente monótona. Esta condición puede ser expresada por la siguiente cadena de igualdades:*

$$\bar{Y} = \bar{f}(K, L, t) = f(\bar{K}, \bar{L}) = f[\phi(K, L, t), \psi(K, L, t)] = g(f(K, L), t) = F_{(t)}(Y) \qquad (5)$$

Exigir que el progreso técnico actuando sobre la función de producción dé que la producción efectiva $\bar{Y}$ sea una función de la producción de partida Y tiene varias consideraciones y consecuencias económicas que detallaremos en la presente sección. Pero antes de continuar sería interesante aclarar que uno de los tipos de progreso técnico más habituales, el tipo neutro de Hicks, es un caso de holoteticidad. Veámoslo:

Sea $Y = f(K, L)$ una función de producción y sea T un progreso técnico de tipo neutro de Hicks definido por las funciones de progreso técnico dadas en (3). Entonces el impacto de este tipo de progreso técnico[9] debe verificar la siguiente condición:

$$\bar{Y} = f(\bar{K}, \bar{L}) = A(t) \cdot f(K, L) = A(t) \cdot Y, \qquad (6)$$

que puede verse que es una condición de holoteticidad sin más que definir $F_{(t)}\,(Y)$ como el producto $A(t) \cdot Y$.

4.1. Holoteticidad e isocuantas

La primera consideración sobre la holoteticidad permite afirmar que la función de producción $Y = f(K, L)$ es holotética bajo un tipo de progreso técnico dado T si y solo si el efecto total de un tipo de progreso técnico dado se transforma completamente en un efecto a escala en la producción sin que varíe la forma de la aplicación isocuanta.

Las isocuantas son de la forma $\bar{Y} = c$, donde c es una constante real. Debido a la holoteticidad de f bajo T, se tiene que las isocuantas son de la forma $c = F_{(t)}(Y)$ o, lo que es equivalente, $Y = F_{(t)}^{-1}(c)$, que son las curvas de nivel de la tecnología antes de que actúe el progreso técnico. En consecuencia, suponer la holoteticidad bajo el progreso técnico T equivale a que el conjunto de las curvas isocuantas no resulte afectado, salvo en un reetiquetado de las isocuantas.

[9] Según se vio en la Definición 3.6, la condición verificada por un progreso técnico de tipo neutro de Hicks es precisamente la exigida para la holoteticidad en (6).

4.2. Holoteticidad y tasa marginal de sustitución

Una segunda consideración que puede realizarse acerca de la holoteticidad bajo el progreso técnico T está relacionada con la Tasa Marginal de Sustitución (TMS) entre capital y mano de obra. Recuérdese que la TMS se puede definir como $R = \dfrac{f_L}{f_K}$, siendo $f_L = \frac{\partial f}{\partial L} > 0$ y $f_K = \frac{\partial f}{\partial K} > 0$.

Si calculamos la Tasa Marginal de Sustitución $\bar{R}$ entre capital K y mano de obra L tras un progreso técnico T como el de (3), tendríamos la siguiente igualdad:

$$\bar{R} = \frac{\bar{Y}_L}{\bar{Y}_K} = \frac{f_\phi \cdot \phi_L + f_\psi \cdot \psi_L}{f_\phi \cdot \phi_K + f_\psi \cdot \psi_K}$$

Pero, en virtud de la ecuación (5) consistente en la definición de la holoteticidad de f bajo el cambio técnico, tendríamos la siguiente relación entre la TMS, R, existente antes del progreso técnico y la TMS, $\bar{R}$, existente después:

$$\bar{R} = \frac{\bar{Y}_L}{\bar{Y}_K} = \frac{\frac{\partial F_{(t)}(Y)}{\partial L}}{\frac{\partial F_{(t)}(Y)}{\partial K}} = \frac{\frac{\partial F_{(t)}(Y)}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial F_{(t)}(Y)}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial K}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}} = \frac{f_L}{f_K} = R.$$

En consecuencia, se puede afirmar que $\bar{R}$ es independiente del parámetro t de progreso técnico, siempre que la función de producción sea holotética bajo dicho progreso técnico. En consecuencia, la TMS se puede ver como una función invariante con respecto al progreso técnico.

Nota 4.2. *La igualdad entre R y $\bar{R}$ arriba indicada no debe inducir a pensar en una posible igualdad entre R y R^*, donde R^* fuese la TMS de la función de producción $\bar{f}$ respecto del capital efectivo $\bar{K}$ y de la mano de obra efectiva $\bar{L}$, la cual sí depende del parámetro de progreso técnico t.*

Nota 4.3. *También ha de tenerse en cuenta que todo lo hecho en esta Subsección ha sido considerando la TMS de L respecto de K. De manera análoga se podría repetir el estudio para la TMS de K respecto de L y veríamos que se tiene una correspondiente propiedad de invariancia de esta última TMS con respecto del parámetro t de progreso técnico.*

4.3. Holoteticidad y separabilidad

Como se vio en la ecuación (5), al aplicar un progreso técnico a una función de producción f que sea holotética, el parámetro t de progreso técnico y f se pueden ver de manera separada. No obstante, para hablar propiamente de separabilidad, previamente debe darse una definición de dicho concepto:

Definición 4.4. *La función de producción* $\bar{Y} = \bar{f}(K, L, t) = g(f(K, L), t)$ *se dice* débilmente separable *con respecto a* K*,* L *y* t *si se verifica:*

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial K} \Big/ \frac{\partial g}{\partial L}\right)}{\partial t} \equiv 0.$$

La derivada que aparece en la expresión que define el concepto de débilmente separable también podría escribirse como $\dfrac{\partial \frac{g_K}{g_L}}{\partial t}$. Pero al ser g una expresión de la función de producción tras el progreso técnico, entonces dicha derivada resulta ser la derivada de la TMS $\bar{R}$, que ya dijimos en la Nota 4.3 que no depende del parámetro t de progreso técnico y, por lo tanto, su derivada respecto de t ha de ser 0.

Con esto, se demuestra de manera inmediata que las funciones de producción holotéticas bajo un progreso técnico T dado verifican la siguiente condición relacionada con la separabilidad débil:

Proposición 4.5. *Sea* f *una función de producción holotética bajo un progreso técnico dado,* T*. El efecto total de dicho progreso técnico sobre la función de producción se expresa en una forma débilmente separable a través de las funciones de progreso técnico.* □

Nota 4.6. *La función débilmente separable no es la función de producción* f*, sino la función* $F_{(t)}$ *que se obtiene al aplicar las funciones de progreso técnico a* f*.*

4.4. Holoteticidad y familia de funciones de producción

Hay una consideración más que puede hacerse sobre el concepto de holoteticidad y que consiste en ver cómo la familia de funciones de producción holotéticas bajo un determinado tipo de progreso técnico T es invariante bajo la acción de las funciones de progreso técnico de T. Es decir, el progreso técnico transformaría una función de producción de la familia en otra de esa misma familia.

La causa de esto radica en que la transformación asociada al progreso técnico genera una familia de funciones cuya expresión es $\bar{Y} = F_{(t)}[Y]$ y de tal modo que la relación entre el capital K y la mano de obra L no se modifica. Por lo tanto, la función de producción resultante también es holotética bajo dicho progreso técnico y pertenece a la familia estudiada de funciones de producción. Obsérvese que dicha familia de funciones se expresa en función de la producción de partida Y y del parámetro t de progreso técnico, que es el que determina a cada elemento de la familia.

Esta propiedad de invariancia es la que permite emplear la Teoría de Lie en el estudio del concepto de la holoteticidad, ya que la Teoría de Lie permite realizar un análisis de las propiedades de invariancia y, de hecho, es uno de los objetivos centrales de esta teoría, como se puede comprobar en las páginas 41 y 85–87 de Sattinger y Weaver (1997) y en el Apéndice F de Fulton y Harris (1991).

5. Progreso técnico de tipo Lie

En las Definiciones 3.4 y 3.5 se presentaban los conceptos de progreso técnico (T) y de las funciones de progreso técnico ϕ y ψ. A la hora de estudiar la holoteticidad, interesa que el progreso técnico verifique una serie de propiedades. En concreto, lo que se impone es que el progreso técnico verifique las propiedades de un grupo de Lie uniparamético, que son las siguientes:

Propiedades de grupos de Lie:

(GL1) El resultado de aplicar sucesivamente dos transformaciones

$$T_{t_1} \begin{cases} \bar{K} = \phi(K, L, t_1); \\ \bar{L} = \psi(K, L, t_1); \end{cases} \quad \text{y} \quad T_{t_2} \begin{cases} \bar{\bar{K}} = \phi(\bar{K}, \bar{L}, t_2); \\ \bar{\bar{L}} = \psi(\bar{K}, \bar{L}, t_2); \end{cases}$$

es el mismo que el de aplicar la transformación:

$$T_{t_1+t_2} \begin{cases} \bar{\bar{K}} = \phi(K, L, t_1 + t_2); \\ \bar{\bar{L}} = \psi(K, L, t_1 + t_2). \end{cases}$$

(GL2) La transformación que se obtiene para el valor $-t$ del parámetro coincide con la inversa de la transformación obtenida para el valor t del parámetro:

$$T_t^{-1} : K = \phi(\bar{K}, \bar{L}, -t), \; L = \psi(\bar{K}, \bar{L}, -t).$$

(GL3) La transformación obtenida para el valor $t_0 = 0$ del parámetro es la transformación identidad:

$$T_0 : \begin{cases} \bar{K} = \phi(K, L, t_0) = \phi(K, L, 0) = K; \\ \bar{L} = \psi(K, L, t_0) = \psi(K, L, 0) = L. \end{cases}$$

Expresando las tres propiedades funcionalmente, usando la composición de funciones como producto en las transformaciones T_t que definen al progreso técnico, dichas propiedades se escribirían en su forma habitual:

(GL1)$'$ $T_{t_2} \circ T_{t_1} = T_{t_2+t_1}$.

(GL2)$'$ $T_t^{-1} = T_{-t}$.

(GL3)$'$ $T_0 = \mathrm{Id}$, siendo Id la función identidad.

Utilizando la nomenclatura propia de la Teoría de Grupos de Lie, el conjunto de todas las transformaciones incluidas en (3) forma lo que se denomina un *grupo continuo finito uniparamétrico* (o solamente *grupo uniparamétrico*), ya que el parámetro t varía continuamente en su dominio y las funciones ϕ y ψ son diferenciables respecto a t en dicho dominio.

Definición 5.1. *Si el tipo de progreso técnico T posee las tres propiedades de grupo de Lie, entonces diremos que es un* progreso técnico de tipo Lie.

5.1. Interpretación económica de las propiedades de grupo de Lie

Las tres propiedades de grupo que se les ha exigido a las funciones de progreso técnico pueden interpretarse económicamente de manera muy sencilla. Para comprobarlo, supondremos que el parámetro de progreso técnico t va a representar el *año* en el que tiene lugar el progreso técnico; por tanto, el capital efectivo $\bar{K}$ y la mano de obra efectiva $\bar{L}$ corresponderán, respectivamente, al capital y mano de obra existentes en ese año.

La propiedad (GL1) puede leerse como sigue: si el capital y la mano de obra disponibles en los años t_1 y t_2 se expresan como funciones ϕ y ψ dependientes de los valores del capital y la mano de obra del año previo, el capital y la mano de obra existentes en cualquier momento podrían obtenerse mediante adiciones en el parámetro t del tipo $t_1 + t_2$. En consecuencia, conocida la expresión de cómo varían el capital y la mano de obra en el primer año, $t = 1$, se podría obtener la de cualquier año sin más que considerar $t = \sum_{i=1}^{n} 1$, siendo n el año del que queremos saber la información.

La propiedad (GL2) implicaría el conocimiento del capital y la mano de obra existentes en el momento inicial a partir de las funciones de progreso técnico y empleando un parámetro adecuado $(-t)$.

La propiedad (GL3) equivaldría a enunciar que el capital y la mano de obra iniciales son iguales a los efectivos si no suceden cambios técnicos.

Podría pensarse que el imponer estas propiedades al progreso técnico a considerar sería plantear demasiadas restricciones, pero eso no es así: la práctica totalidad de tipos de progreso técnico empleados y discutidos habitualmente en la literatura económica verifican estas tres propiedades de grupo de Lie.[10]

Además, estas propiedades son de gran utilidad para distinguir una familia de funciones de producción de otra distinta[11] y también se puede demostrar que toda función de producción verifica la propiedad de holoteticidad respecto de algún progreso técnico de tipo Lie.[12]

La herramienta básica para trabajar con un progreso técnico de tipo Lie es la *transformación infinitesimal del progreso técnico*. Esta transformación consiste en realizar un cambio infinitesimal en el progreso técnico dado por (3), que afectará a la función de producción indicada en (2). Para ver claramente la utilidad de esto, debemos estudiar el comportamiento de las funciones de progreso técnico ϕ y ψ bajo este cambio infinitesimal

[10] Se puede demostrar que todos los tipos de progreso técnico son casos particulares del tipo proyectivo. Por progreso técnico de tipo proyectivo se entiende cualquier progreso técnico que se obtiene mediante la integración de una transformación infinitesimal asociada a un grupo de Lie proyectivo. En consecuencia, las funciones de progreso técnico poseen estructura de grupo de Lie y el progreso técnico es de tipo Lie (Sato, 1981, pp. 52–53).

[11] Este hecho es consecuencia inmediata del Teorema 5.6, demostrado por Sato (1981).

[12] Véase la Sección IV del Capítulo 2 de Sato (1981) para una demostración de este hecho.

del parámetro. Considérese, pues, un instante infinitesimal δt y el cambio dado por las funciones de progreso técnico:

$$\bar{K} = \phi(K, L, \delta t),$$
$$\bar{L} = \psi(K, L, \delta t).$$

Entonces podemos expresar las transformaciones en ese instante infinitesimal como:

$$\delta K = \bar{K} - K = \xi(K, L)\delta t \qquad \text{y} \qquad \delta L = \bar{L} - L = \eta(K, L)\delta t, \tag{7}$$

siendo las funciones ξ y η las definidas como $\xi(K, L) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{t=0}$ y $\eta(K, L) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0}$.

La expresión (7) recibe el nombre de *transformación infinitesimal del progreso técnico*. Sin embargo, se puede expresar dicha transformación infinitesimal de forma alternativa empleando el *operador de Lie* que tiene asociado la transformación infinitesimal. Por definición, la expresión del operador de Lie asociado a (7) es el siguiente:

$$U = \xi(K, L)\frac{\partial}{\partial K} + \eta(K, L)\frac{\partial}{\partial L}.$$

La eficacia de la transformación infinitesimal para estudiar los progresos técnicos reside en la unicidad de ésta, como puede deducirse de aplicar el Teorema de Taylor a la función de producción y quedarse con el sumando correspondiente a las derivadas de primer orden. Esto puede enunciarse como sigue:

Proposición 5.2. *Dado un progreso técnico de tipo Lie, éste posee una única transformación infinitesimal independiente.* □

5.2. Aplicación económica: medida del cambio técnico

Existe una manera sencilla de interpretar, dentro del ámbito de la Economía, el campo diferenciable U definido en (7). Más concretamente, la transformación infinitesimal del progreso técnico puede emplearse para cuantificar dicho cambio técnico, permitiendo definir una medida del mismo. Para ello, se define previamente el concepto de *medida de primer orden del impacto técnico cerca de la transformación identidad* y después se demuestra que esta medida es expresable en función del operador de Lie asociado a la transformación.

Definición 5.3. *Dadas una función de producción $Y = f(K, L)$ y un cambio técnico de tipo Lie T como el de* (3)*, se define la* medida de primer orden del impacto de cambio técnico cerca de la transformación identidad *como la siguiente derivada:*

$$M(T) = \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t}\right)_{t=0}.$$

A la medida $M(T)$ que se acaba de definir también se la denomina, abreviadamente, medida del cambio técnico.

Proposición 5.4. *En las condiciones de la Definición 5.3, la medida del cambio técnico coincide con el operador de Lie aplicado a la función de producción. Es decir:*

$$M(T) = Uf = \xi(K,L) \cdot \frac{\partial f}{\partial K} + \eta(K,L) \cdot \frac{\partial f}{\partial L}. \tag{8}$$

Demostración. Si se le aplica el cambio técnico T a la función de producción $Y = f(K,L)$, resulta la función de producción

$$\bar{Y} = f(\bar{K}, \bar{L}) = \bar{f}(K, L, t),$$

que, desarrollándola por su serie de Taylor en $t = 0$, resulta ser:

$$\bar{Y} = f(K,L) + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}\right)_{t=0} \cdot t + \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial t^2}\right)_{t=0} \cdot t^2 + \cdots$$

Si se calcula el operador de Lie de la función f respecto de las variables $\bar{K}$ y $\bar{L}$, dicho operador se expresa:

$$\bar{U}f = \frac{\partial \bar{K}}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{K}} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{L}}.$$

Por propia definición, las funciones $\bar{K}$ y $\bar{L}$ son, respectivamente, las funciones ϕ y ψ de progreso técnico. En consecuencia, se verifican las igualdades:

$$\left(\frac{\partial \bar{K}}{\partial t}\right)_{t=0} = \xi \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial t}\right)_{t=0} = \eta,$$

donde ξ y η son las funciones definidas en (7).

Como la función de producción $\bar{Y} = f(\bar{K}, \bar{L})$ posee la misma expresión respecto de las variables $\bar{K}$ y $\bar{L}$ que la función de producción $Y = f(K,L)$ respecto de K y L, entonces las derivadas de ambas funciones de producción deben tener expresiones análogas respecto de sus respectivas variables. En virtud de la condición (GL3), los valores de $\bar{K}$ y $\bar{L}$, cuando $t = 0$, corresponden a los valores de K y de L, respectivamente, por lo que tienen que verificar:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{K}}\right)_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial K} \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{L}}\right)_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial L}.$$

En vista de todo lo anterior, se verifica que $\left(\bar{U}f\right)_{t=0} = Uf$.

Por otra parte, la Regla de la Cadena implica aquí que $\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \bar{U}\bar{f}$. Con lo que, dando el valor $t = 0$ en dicha expresión, se llega a:

$$\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\bar{U}f\right)_{t=0} = Uf.$$

□

Si se interpreta económicamente cada uno de los sumandos aparecidos en la expresión (8), la Proposición 5.4 puede leerse como que la medida de cambio técnico es igual a la suma de los siguiente dos productos:

1. La transformación infinitesimal del capital por la productividad marginal respecto del capital $(\xi \cdot \dfrac{\partial f}{\partial K})$.
2. La transformación infinitesimal de la mano de obra por la productividad marginal respecto de la mano de obra $(\eta \cdot \dfrac{\partial f}{\partial L})$.

5.3. Una respuesta a la Controversia Solow-Stigler

Como se ha visto, el operador de Lie de una transformación infinitesimal de progreso técnico se utiliza para obtener la medida de primer orden del impacto de un progreso técnico. Pero existe una segunda utilidad del operador de Lie, que es la de obtener la caracterización de la holoteticidad de una función de producción, como puede verse en el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en Sato (1981):

Teorema 5.5. *Una función de producción es holotética bajo un progreso técnico de tipo Lie T si y solo si la medida de cambio técnico es función de la propia función de producción: $Uf = G(f)$.* □

Esto permite observar que el efecto de cualquier transformación de progreso técnico sobre f correspondería a una expresión del tipo $\bar{Y} = e^{t \cdot U} \cdot f$, pero la holoteticidad y el Teorema 5.5, permiten expresar $\bar{Y}$ como una función de f y del parámetro de progreso técnico.

No obstante, ha de tenerse en cuenta que todo lo anterior parte del supuesto de tener un progreso técnico y una función de producción holotética bajo dicho progreso. Por lo tanto, es de suma importancia ver si tiene sentido la condición de holoteticidad, esto es: dado un progreso técnico de tipo Lie, ¿existe una función de producción que sea holotética? Sato (1981) probó que sí y lo enunció como sigue:

Teorema 5.6. *Existe una única tecnología holotética bajo un progreso técnico de tipo Lie dado y en la que el efecto del progreso técnico se transforma completamente en efecto de rendimientos a escala.* □

Este Teorema 5.6 le llevó a dar una respuesta a la Controversia Solow-Stigler, como puede verse en el siguiente:

Teorema 5.7. *El efecto de un progreso técnico T y el efecto del rendimiento a escala de f pueden identificarse independientemente si y solo si la función de producción no es holotética bajo el progreso técnico T.* □

En consecuencia, puede darse una estimación tanto del progreso técnico como del efecto de rendimientos a escala, siempre que la función de producción que se considere no sea holotética bajo dicho progreso técnico.

Es más, si lo conocido es la función de producción y nos preguntamos cuáles son los progresos técnicos que no conviene considerar a la hora de poder distinguir entre el efecto de dicho progreso y el efecto de los rendimientos a escala, se nos plantea la necesidad de conocer los progresos técnicos de tipo Lie bajo los que la función de producción dada será holotética. De hecho, se puede probar que existe al menos un progreso técnico de tipo Lie, aunque realmente el número de soluciones sea infinito ya que el progreso técnico se halla resolviendo una ecuación diferencial del tipo $M(K,L)dK + N(K,L)dL = 0$, siendo el cociente $\frac{N}{M}$ la TMS.

6. Otras aplicaciones de la Teoría de Lie a la Economía

Ya hemos comentado que los tipos de progreso técnico usados habitualmente en la literatura verifican las tres propiedades que definen a los grupos de Lie, por lo que no resultaba una suposición excesivamente restrictiva trabajar con tipos de progreso técnico con esas propiedades y que se han denominado *de tipo Lie*. También se ha expuesto el concepto de holoteticidad introducido por Sato (1981), que permite introducir técnicas para estudiar por separado los efectos a escala de los provenientes del progreso técnico.

De un modo análogo, resulta de interés mostrar algunas otras de las líneas de investigación en las que se emplean los conceptos aquí expuestos. Por ello, haremos un breve resumen con algunas de las aplicaciones actuales en Economía y que suelen estar relacionadas con el estudio del progreso técnico y de la invariancia económica.

Conceptos de interés en este contexto son el de *representación de grupo de Lie de la TMS* (consistente en asociar a la TMS un subgrupo uniparamétrico de Lie) y el de *compatibilidad del progreso técnico* con la estructura interna de una tecnología dada (estudiada con una condición sobre el producto corchete de Lie con respecto a la representación de grupo de Lie de la TMS). La holoteticidad de una función de producción bajo un progreso técnico equivaldría a expresar dicho progreso técnico como una combinación lineal de la representación de la TMS y de otro progreso técnico de tipo Lie compatible con la estructura interna de esa tecnología. Esto abre la posibilidad de analizar si las condiciones sobre los productos corchetes son compatibles con las que se requieren a los distintos tipos de álgebras de Lie existentes y estudiados.

También se usan grupos de Lie para estudiar la neutralidad de los progresos técnicos mediante el estudio de su invariancia bajo ciertos grupos de transformaciones de Lie (G-neutralidad). De hecho, los conceptos clásicos de neutralidad (de Hicks, Harrod y Solow) son casos particulares de este nuevo concepto de neutralidad. Análogamente, las funciones de producción de Cobb-Douglas pueden obtenerse también del estudio de la G-neutralidad.

Igualmente, se utilizan los grupos y las álgebras de Lie en el estudio de la holoteticidad de tecnologías implícitas, aunque en tal caso no es posible hallar los tipos Lie de cambio técnico bajo los que una tecnología implícita es holotética. Esto no es lo que ocurriría en el caso de las tecnologías explícitas, en las que sí pueden determinarse. Es más, las formas básicas de las funciones de producción CES[13] pueden obtenerse a partir de los grupos de Lie de transformaciones correspondientes. La clasificación de estas funciones de producción puede, a su vez, obtenerse mediante la propiedad de invariancia de una ecuación diferencial bajo un determinado subgrupo uniparamétrico.

Desde hace bastante tiempo se viene empleando en la Física la conexión existente entre simetrías dinámicas o invariancias y las leyes conservativas de un sistema matemático. Los resultados sobre las propiedades de ecuaciones diferenciales bajo grupos de Lie continuos llevaron a Emmy Noether (1918) a enunciar el conocido *Teorema de Noether*. Este teorema se podría interpretar, en las aplicaciones económicas, como un establecimiento de leyes conservativas de sistemas dinámicos, que dependerían del modelo económico al que se refiriesen.

Por último, indicamos la posibilidad de emplear la Teoría de Lie para perfeccionar la Teoría de Números Índices. Sato (1981) ya utilizó los grupos de Lie para afrontar el estudio de varios de los problemas básicos de la Teoría de Números Índices. Así, estudia la cuestión de los criterios del test de Fischer-Frisch para un número índice y el problema de número índice económico invariante. Los test de números índices estudiados hasta la fecha pueden traducirse a condiciones de transformaciones infinitesimales de grupos de Lie, que se verán como acciones del grupo de Lie sobre el número índice. Un número índice debe satisfacer las propiedades de invariancia de transformaciones de grupo para ser un índice útil de medida de precios y cantidades.

Con estas consideraciones, pretendemos abrir diferentes líneas de investigación en las que el estudio de los grupos o las álgebras de Lie facilite la obtención de resultados más cercanos a la Economía.

Referencias bibliográficas

Ancochea, J. M. y Goze, M. (1989) Classification des Algèbres de Lie Nilpotentes de Dimension 7, *Archiv. Math.* **52**, pp. 175–185.

Arrow, K. J., Chenery, H. B., Minhas, B. S. y Solow, R. M. (1961) Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency, *Review of Economics and Statistics* **53**,

[13]Una función CES es aquélla cuya elasticidad de sustitución es constante. Estas funciones, que se introdujeron en Arrow et al. (1961), no se utilizan solo para expresar funciones de producción sino también para las de utilidad. Su expresión es de la forma $F(\underline{X}) = \alpha \left(\sum_i a_i X_i^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$, donde α y a_i son constantes positivas y la elasticidad de sustitución viene dada por $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$.

pp. 225–251.

Boza, L., Fedriani, E. M. y Núñez, J. (2001) A New Method for Classifying Complex Filiform Lie Algebras, *Applied Mathematics and Computation* **121** (2-3), pp. 169–175.

Boza, L., Fedriani, E. M. y Núñez, J. (2003) Complex Filiform Lie Algebras of Dimension 11, *Applied Mathematics and Computation* **141**, pp. 611–630.

de Graaf, W. A. (2004) Classification of Solvable Lie Algebras. E-print disponible en http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0404/0404071.pdf.

Falcón, R. M. y Núñez, J. (2002) La Isoteoría de Lie-Santilli. America-Europe-Asia. International Academic Press.

Frappat, L., Sorba, P. y Sciarrino, A. (1996) Dictionary on Lie Superalgebras. E-print disponible en http://arxiv.org/PS_cache/hep-th/pdf/9607/9607161.pdf.

Fulton, W. y Harris, J. (1991) Representation Theory: A First Course. Springer-Verlag, New York.

Jacobson, N. (1979) Lie Algebras. Dover Publications, Inc. New York.

Kellman, M. E. (1996) Symmetry in chemistry from the hydrogen atom to proteins. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **93**, pp. 14287–14294.

Mubarakzjanov, G. M. (1963) Classification of Real Structures of Lie Algebras of Fifth Order, *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika*, **3** (34), pp. 99–106 (en ruso).

Noether, E. (1918) Invariante Variationsprobleme, *Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse*, pp. 235–257.

Núñez, J. y Tenorio, A. F. (2002) Sophus M. Lie, *La Gaceta de la RSME* **5:1**, pp. 121–130.

Núñez, J., Tenorio, A. F. y Vilches, J. A. (2006) Elementos de la Teoría de Grupoides y Algebroides. Monografía por aparecer.

Rueda, J. M. (2004) Análisis Input-Output Estocástico de la Economía Andaluza. Tesis Doctoral. Universidad Pablo de Olavide, Sevilla.

Sánchez, R. y Grau, R. (2005) A Novel Lie Algebra of the Genetic Code over the Galois Field of Four DNA Bases. E-print disponible en http://arxiv.org/ftp/q-bio/papers/0501/0501036.pdf.

Sato, R. (1981) Theory of Technical Change and Economic Invariance. Academic Press. Reeditado en: Sato, R. (1998) Theory of Technical Change and Economic Invariance. Edward Elgar.

Sattinger, D. H. y Weaver, O. L. (1997) Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics. University of Bangalore Press, Bangalore.

Solow, R. M. (1957) Technical Change and the Aggregate Production Function, *Rewiew of Economics and Statistics* **39**, pp. 312–320.

Solow, R. M. (1961) Comment on Stigler, en *Output, Input and Productivity Measurement*, Income and Wealth Series, pp. 64–68. Princeton Univ. Press, Princeton.

Stigler, G. J. (1961) Economic Problems in Measuring Changes in Productivity, en *Output, Input and Productivity Measurement*, Income and Wealth Series, pp. 47–63. Princeton Univ. Press, Princeton.

Varadarajan, V. S. (1998) Lie Groups, Lie Algebras and their Representations. Selected Monographies **17**, Collæge Press, Beijing.

Yang, B., Han, K. y Ding, S. (2000) Dynamical Lie Algebraic Approach to Energy Transfer of the Scattering System $A+BC$, *Int. J. Quantum Chem.* **78**, pp. 295–302.

Yang, B., Yin, H.; Han, K. y Ding, S. (2001) Dynamical Lie Algebraic Treatment for the $A+BC$ Scattering, *Int. J. Quantum Chem.* **81**, pp. 214–221.

Zheng, Y., Yi, Z. y Guan, D. (2000) Rotationally Inelastic Molecule-Surface Scattering: Dynamical Lie Algebraic Method, *Int. J. Quantum Chem.* **76**, pp. 500–510.