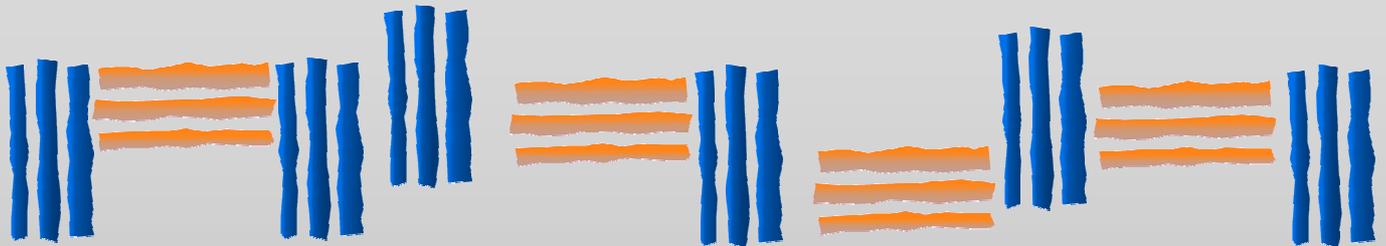


REVISTA DE
MÉTODOS CUANTITATIVOS
PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA



UNIVERSIDAD
**PABLO^D
OLAVIDE**
SEVILLA

Número 1
Junio de 2006
ISSN: 1886-516X
D.L: SE-2927-06

**REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA**

**Journal of Quantitative Methods
for Business and Administration**

Número 1. Junio de 2006.

ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.

URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/>

Editores:

Dr. Eugenio M. Fedriani Martel
Universidad Pablo de Olavide
Ctra. de Utrera, km. 1 - 41013
Sevilla (Spain).
Correo-e: efedmar@upo.es

Dr. Alfredo García Hernández-Díaz
Universidad Pablo de Olavide
Ctra. de Utrera, km. 1 - 41013
Sevilla (Spain).
Correo-e: agarher@upo.es

Comité Editorial:

Dr. Ignacio Contreras Rubio, Universidad Pablo de Olavide (España)
Dr. Miguel Ángel Hinojosa Ramos, Universidad Pablo de Olavide (España)
Dra. María Amparo León Sánchez, Universidad de Pinar del Río (Cuba)
Dr. Cecilio Mar Molinero, University of Kent (United Kingdom)
Dr. Ana María Martín Caraballo, Universidad Pablo de Olavide (España)
Dra. M^a Carmen Melgar Hiraldo, Universidad Pablo de Olavide (España)
Dr. José Antonio Ordaz Sanz, Universidad Pablo de Olavide (España)
Dr. José Manuel Rueda Cantuche, Universidad Pablo de Olavide (España)

Editorial

La Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa pretende ser un medio de comunicación útil para todos los que investigan en técnicas Matemáticas, Estadísticas o Econométricas y sus posibles aplicaciones al ámbito económico o empresarial. La edita un grupo de profesores del Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica de la Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla (España). A continuación se resumen algunas de sus características más destacadas.

Contenidos y temática

Se publica cualquier tipo de artículos originales e inéditos relacionados con aplicaciones de la Matemática o la Estadística a las Ciencias Económicas y Empresariales. También se admiten trabajos de investigación pura, siempre que sean susceptibles de aplicación práctica. Se facilita la publicación de artículos que necesiten un proceso de revisión rápido y de aquellos costosos de publicar en formato papel debido a sus características técnicas: documentos excesivamente extensos, que necesiten la inclusión de gráficos en colores o de elementos interactivos (referencias o enlaces, por ejemplo), etc. Se recomienda especialmente el envío de artículos que sirvan para fundamentar o apoyar otros que puedan ser enviados a otras revistas, pues no tiene limitación en cuanto a los números de páginas, de definiciones, de gráficos, de tablas ni de referencias bibliográficas a incluir en un artículo.

Formato

Es una revista electrónica que pretende aprovechar el medio que actualmente es más eficiente para la difusión internacional del conocimiento científico: Internet. Su periodicidad es semestral, publicándose el primer número de cada año en junio y el segundo en diciembre. Se puede acceder gratuitamente a los artículos en formato PDF. Posee número internacional normalizado de publicaciones seriadas (ISSN) y Depósito Legal (D.L.); la autoría de sus contenidos será reconocida internacionalmente.

Propósitos principales

Se intenta difundir la producción científica del modo más ágil posible. Asimismo, se posibilita la publicación en español de trabajos de investigación que merecen difusión y reconocimiento internacionales. La propia Revista trata de ser merecedora de dicho reconocimiento, solicitando su inclusión en las bases de datos internacionales más prestigiosas, así como en el Journal Citation Reports del Institute for Scientific Information (ISI).

Idiomas utilizados

Se admiten artículos escritos en español o en inglés. En cualquier caso, el título, el resumen y las palabras clave deberán incluirse en ambos idiomas. En el caso del español, el texto deberá ajustarse a las recomendaciones de la Real Academia de la Lengua Española; en el caso del inglés, se aceptan los estándares británico, americano y australiano.

Evaluación de los trabajos

Cada trabajo enviado es revisado por los Editores y confiado a dos especialistas en la temática de que se trate. Estos los evaluarán (sistema de “doble ciego”) en el plazo más breve que sea posible. Si bien no existe limitación en el número de páginas de los trabajos, los trabajos más largos tardarán normalmente más tiempo en recibir el resultado de la evaluación.

Instrucciones para los autores

Los autores deberán enviar sus trabajos a través de la página web de la Revista (<http://www.upo.es/RevMetCuant/autores.htm>). En el formulario electrónico se piden los datos para la cabecera del artículo, que aparecerán en páginas separadas. El resto del documento podrá ser escrito en el formato que los autores consideren más adecuado, permitiéndose el empleo de cualquier procesador de texto, siempre que el documento se envíe también en formato PDF. Se recuerda que la extensión de los artículos no está limitada.

Suscripciones a la Revista

La Revista tiene un coste de mantenimiento muy bajo y, por esto, son gratuitas tanto la suscripción a la Revista como la descarga de los artículos publicados en ella. La suscripción electrónica solo significa la recepción de avisos con los números publicados y deberá realizarse a través de la página web de la Revista (<http://www.upo.es/RevMetCuant/suscripcion.htm>).

Agradecimientos

Los Editores agradecen a la Universidad Pablo de Olavide y, en especial, al Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica la colaboración prestada durante la elaboración del primer número. Además, agradece a cada uno de los miembros del primer Comité Editorial el esfuerzo desarrollado a la hora de evaluar desinteresadamente los trabajos.

LOS EDITORES.



Progreso técnico: una aproximación desde la Teoría de Grupos de Transformaciones de Lie

FEDRIANI MARTEL, EUGENIO M.

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica.

Universidad Pablo de Olavide

Correo electrónico: efedmar@upo.es

TENORIO VILLALÓN, ÁNGEL F.

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica.

Universidad Pablo de Olavide

Correo electrónico: aftenvil@upo.es

RESUMEN

En la presente comunicación explicamos algunas de las herramientas de la Geometría Diferencial y, en concreto, de la Teoría de Lie con las que se trabaja actualmente en Economía. Se indican las condiciones que se exigen a las funciones de producción y la definición de un tipo de progreso técnico denominado *de tipo Lie*, consistente en exigir las tres propiedades que han de verificar los grupos de Lie. También se expone el uso del operador de Lie en interpretaciones económicas y en la cuantificación del impacto del progreso técnico. Dicho operador permite dar una respuesta a la Controversia Solow-Stigler. Por último, se indican varias aplicaciones de la Teoría de Lie en los estudios económicos, que permiten abrir futuras líneas de investigación, de las que se apuntan algunas. De este modo, nuestro objetivo principal es mostrar el uso, actual y futuro, de la Teoría de Lie en el campo de la Economía.

Palabras clave: cambio técnico; progreso técnico tipo Lie; holoteticidad.

Clasificación JEL: C65; O30.

2000MSC: 22E99; 91B99.

Technical Progress: an Approach from Lie Transformation Group Theory

ABSTRACT

In this paper we explain some tools of Differential Geometry. In detail we deal with Lie Theory, which is currently being investigated in Economics. Firstly we indicate the conditions demanded to production functions in such studies, and the definition of a particular type of technical progress: the Lie type. For this type, the three properties of Lie groups have to be verified by the technical progress. We also show the use of Lie operator for economical interpretations, and for quantifying the impact of the technical progress. This operator allows us to answer Solow-Stigler Controversy. Finally we introduce some applications of Lie Theory in Economics, and suggest new future research lines they can generate. In this way, our main aim is to show the actual and future applications of Lie Theory in Economics.

Keywords: technical change; Lie type of technical progress; holotheticity.

JEL classification: C65; O30.

2000MSC: 22E99; 91B99.



1. Introducción

A la hora de estudiar el comportamiento que tiene una tecnología (entendida como el conjunto de funciones de producción) con respecto a cualquier cambio que se produce a lo largo del tiempo, se pueden utilizar varias herramientas y, de hecho, han sido varios los intentos que han tratado de explicar dicha evolución.

En primer lugar deberíamos recordar el estudio de la matriz tecnológica y del análisis input-output de Leontief, en el cual (modelo clásico) se presuponen constantes y conocidos los coeficientes de la matriz tecnológica y a partir de ellos se podría saber de un modo muy simple cuál sería, por ejemplo, la producción que se necesitaría para satisfacer una determinada demanda. Desgraciadamente el modelo clásico de Leontief no es válido para estudiar los progresos técnicos, ya que la matriz de coeficientes tecnológicos variaría en función del tiempo y los coeficientes no serían, por tanto, constantes.

En la actualidad, aún se realizan estudios en líneas de investigación que pretenden solventar los defectos del modelo clásico de Leontief. Algunas de estas líneas se basan en considerar no constantes los coeficientes tecnológicos, añadiéndole una variable aleatoria a cada uno de ellos, que representarían las fluctuaciones de dichos coeficientes o su evolución a lo largo del tiempo. El estudio de estos nuevos coeficientes tecnológicos y de la producción determinada por éstos se realizaría normalmente mediante técnicas estadísticas (véase, por ejemplo, Rueda, 2004).

Pero a la hora de ver los efectos que sufre la producción debido a los cambios técnicos que se pueden dar tanto dentro de la economía como fuera de ella, surge un segundo problema cuya versión más conocida ha pasado a llamarse la *Controversia Solow-Stigler* y que consiste en saber si se podrían aislar e identificar independientemente los efectos del progreso técnico de los efectos de los rendimientos a escala (esto es, en algunos modelos simples, estudiar el crecimiento en la razón capital/mano de obra).

Según Solow (1957) la parte del aumento en la producción per capita estadounidense que no es debida al crecimiento en la razón capital/mano de obra debería imputársele a un cambio técnico (término que Solow introduce en la literatura). Para ello, Solow supone que dicho progreso técnico es *del tipo neutro de Hicks* y que la función de producción subyacente es homogénea de grado 1.

Por su parte, Stigler (1961) no creía acertada la suposición de homogeneidad en la función de producción y defendió la necesidad de distinguir entre rendimiento a escala creciente y progreso técnico. Stigler intentó construir una función de producción internacional empleando datos de EE.UU. y R.U. y la función de producción de Cobb-Douglas. Su conclusión fue que las economías a escala y los progresos técnicos son potencialmente del mismo orden de magnitud, por lo que la estimación de la magnitud debía resolverse,

según Stigler, no solo con cálculos de productividad, sino también con teoría de crecimiento económico.

Solow (1961), pese a estar de acuerdo con respecto a la magnitud potencial de los efectos a escala, creía que el problema de medir dichos efectos y distinguirlos de los de progreso técnico sería extremadamente difícil y, al ser un teórico de la Economía, prefería suponer la homogeneidad de grado 1 (rendimiento a escala constante).

El origen de la Controversia Solow-Stigler se encuentra en que el tipo de progreso técnico se transforma completamente en uno de tipo neutro de Hicks, el cual es indistinguible de la propiedad de rendimiento a escala. Es decir, el progreso técnico y el rendimiento a escala no pueden diferenciarse teóricamente para la función de producción estudiada. Para solventar esta controversia, Sato (1981) recurre a la formulación y modelización matemática, con el fin de clarificar los conceptos relacionados con el equilibrio además de determinar el papel que juega el tiempo dentro del Análisis Económico. Nosotros expondremos en lo sucesivo el uso por parte de Sato de la Teoría de Grupos de Lie para estudiar y observar de manera independiente, en una economía, los efectos a escala de los provocados por un progreso técnico. Al menos en teoría, esto permitiría la medición de ambos independientemente unos de otros.

Para realizar este análisis, Sato define un nuevo concepto, la *holoteticidad*, que procede de considerar que el progreso técnico que afecta a la función de producción se transformará en un efecto a escala; en ese caso, no podrán diferenciarse el impacto del efecto a escala del correspondiente efecto del progreso técnico. En consecuencia, para evitar la Controversia Solow-Stigler y así poder diferenciar efecto a escala de progreso técnico, solo habrá que considerar una función de producción y un tipo de progreso técnico que no verifiquen la propiedad de holoteticidad.

Conviene adelantar también que el concepto de holoteticidad y la Teoría de Lie tienen otras utilidades dentro del estudio económico. Por ejemplo, permiten investigar y obtener algunas respuestas acerca de cuáles serán los tipos de progreso técnico que dejan invariante una aplicación isocuanta. Esto se puede estudiar como las curvas integrales asociada a un grupo de Lie uniparamétrico que se obtendría a partir del tipo de progreso técnico.

Es más, el concepto de holoteticidad en una función de producción dada, permite estudiar propiedades de dicha función de producción. De hecho, se puede demostrar que cada familia de funciones de producción verifica una propiedad de invariancia que no resulta afectada por el impacto del cambio técnico. Dicha propiedad permite, en base a su unicidad, clasificar una familia de funciones de producción y distinguirla de todas las restantes familias. Para estudiar las propiedades de invariancia es de gran utilidad la Teoría de Grupos de Lie, como también se verá.

El objetivo principal de este trabajo es mostrar la utilidad de la Teoría de Grupos de Transformaciones de Lie dentro del campo de la Economía. Para ello, se exponen, de

manera pormenorizada, el significado y contenido de algunos conceptos correspondientes a dicha teoría pero dentro del tratamiento de los cambios y los progresos técnicos. Además, se indican otros conceptos que también podrían tratarse con el estudio de la Teoría de Grupos de Transformaciones de Lie.

A continuación, se expone la estructura que presenta el artículo tras esta introducción. En una primera sección indicamos las causas que motivaron la aparición de la Teoría de Lie y de los conceptos de grupo y álgebra de Lie, además de mostrar el uso de dichos conceptos en diversos campos científicos. En la siguiente sección se dan las nociones previas correspondientes a funciones de producción y cambio técnico que se emplearán posteriormente en el artículo.

En una cuarta sección se indica la definición del concepto de holoteticidad dado por Sato (1981) y se muestran algunas interpretaciones económicas que se pueden hacer de dicho concepto. Seguidamente, se dedica una sección a tratar un tipo específico de progreso técnico: el de tipo Lie. Esta sección se subdivide en tres subsecciones dedicadas, respectivamente a: indicar la interpretación económica de las propiedades que caracterizan a los progresos técnicos de tipo Lie, mostrar cómo medir el impacto del progreso técnico y responder a la Controversia Solow-Stigler indicada anteriormente.

Finalmente, recopilamos en una última sección algunas posibles líneas de investigación en la que se están utilizando la Teoría de Lie como una herramienta para el avance en dichas líneas.

2. La Teoría de Lie de Grupos de Transformaciones

Las herramientas que se usan en el presente trabajo provienen todas de la Teoría de Grupos de Transformaciones Continuas de Lie. Esta teoría se fraguó en la segunda mitad del s.XIX por obra del matemático noruego Sophus Marius Lie (1842–1899). El motivo primordial que condujo a Lie a realizar dicho estudio fue obtener una teoría para las ecuaciones diferenciales que equivaliese en este campo a la creada por Galois en el campo de las ecuaciones algebraicas. Mientras que la Teoría de Galois permite resolver cualquier ecuación algebraica empleando grupos de permutaciones, Lie quería obtener una relación análoga entre la Teoría de Grupos y las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales. Lie buscaba una teoría geométrica con la que hallar invariancias empleando una serie de transformaciones que caracterizarían a dichas ecuaciones diferenciales. De hecho, a una ecuación en derivadas parciales le asoció una familia finita de transformaciones, que formaba lo que llamamos un álgebra de Lie (de dimensión finita)¹. Con ello se llegaba a la clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales mediante los grupos continuos de transformaciones y, lo que es más importante, mediante la transformación de Lie. Para

¹Originariamente, Lie denominó grupo continuo de transformaciones a lo que hoy se denomina álgebra de Lie. Fue en 1934 cuando aparece por primera vez el término *álgebra de Lie*.

saber más sobre el fundador de esta teoría y las inquietudes que le llevaron a desarrollarla puede consultarse Núñez y Tenorio (2002), mientras que los fundamentos de la propia teoría se describen en Jacobson (1979), por ejemplo.

Esta disciplina ha evolucionado y se ha convertido en una herramienta de gran importancia en ciencias como la Física y, en un futuro, probablemente afecte al desarrollo de la Economía. La evolución teórica del estudio de los grupos y las álgebras de Lie ha tomado muchos caminos que pueden ir desde la clasificación de las álgebras de Lie según su dimensión y ciertas características² al estudio de la relación entre los grupos de Lie y las álgebras de Lie dentro de la Teoría de Representación. Así, el uso de la Teoría de Lie en Física Teórica suele estar relacionado con la aparición de grupos de simetrías en sistemas dinámicos y con el estudio de las leyes conservativas, que pueden enunciarse como propiedades de invariancia.³ Otras ciencias en las que se aplican las álgebras y los grupos de Lie son la Genética⁴, la Química y, más concretamente, la Química Cuántica⁵.

La Teoría de Lie ha sido tan importante y ha aportado tantos avances en diversos campos de la Ciencia que se han buscado diversas generalizaciones de la misma. De ese modo, se han introducido los conceptos de superálgebra de Lie⁶, de isoálgebra de Lie⁷ e incluso de algebroide de Lie⁸. Aquéllos que quieran información adicional sobre temas relacionados con las álgebras y los grupos de Lie pueden acudir, por ejemplo, a Varadarajan (1998).

3. Nociones preliminares

Como se indicó anteriormente, nuestra intención es mostrar diversas aplicaciones de la Teoría de Lie a los estudios económicos y abrir algunas líneas de investigación. Veremos, por ejemplo, que la Teoría de Lie puede emplearse en el estudio del progreso técnico que actúa sobre una tecnología y en la identificación y distinción entre éste y el efecto del rendimiento a escala. Intentaremos explicar estos conceptos sobre un modelo simple:

Como es costumbre, se considerará una tecnología en la que K y L significan el capital y la mano de obra, respectivamente. Dicha tecnología vendrá representada por una función

²Véanse Ancochea y Goze (1989), Boza et al. (2001) y (2003), de Graaf (2004) o Mubarakzjanov (1963).

³Una aplicación interesante se tiene en Mecánica Hamiltoniana con las funciones denominadas *observables*, que forman un álgebra de Lie y las simetrías del hamiltoniano forman una subálgebra de la anterior. Para ver ésta y otras aplicaciones a la Física de forma más detallada, puede consultarse Sattinger y Weaver (1997).

⁴Sánchez y Grau (2005) construyen el álgebra de Lie del código genético. Este álgebra permitiría comprender mejor la lógica subyacente en dicho código y establecer ciertas relaciones algebraicas entre los codones de las cadenas de ADN y ARN.

⁵Véase, por ejemplo, Kellman (1996), Yang et al. (2000), Zheng et al. (2000) o Yang et al. (2001).

⁶Véase Frappat et al. (1996).

⁷Véase Falcón y Núñez (2002).

⁸Véase Núñez et al. (2006).

de producción neoclásica

$$Y = f(K, L) \tag{1}$$

que sea continuamente diferenciable y globalmente quasi-cóncava.

Antes de continuar, creemos conveniente recordar la definición de función de producción neoclásica y una caracterización de las funciones quasi-cóncavas:

Definición 3.1. Una función de producción $Y = f(K, L)$ se dice neoclásica si verifica las dos siguientes condiciones:

1. Es homogénea de grado 1 (rendimiento a escala constante).
2. Disminuye suavemente respecto de los factores individuales.

Definición 3.2. Una función de producción $Y = f(K, L)$ se dice que disminuye suavemente respecto a un factor individual si al aumentar uno de los factores de la producción, permaneciendo los demás constantes, las ganancias globales decrecen relativamente a partir de un cierto punto.

Proposición 3.3. Sea una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, al menos, hasta orden 2 y sea $a \in \text{Dom}(f)$. La función f es quasi-cóncava en a si y solo si la matriz hessiana de f en a , $Hf(a)$, es semidefinida negativa. \square

Como se ha dicho, la tecnología no se mantiene siempre constante y sufre modificaciones en el transcurso del tiempo, bien por variaciones del capital bien por mejoras debidas a la investigación. Esas variaciones se observan en las modificaciones que sufre la propia función de producción de la tecnología. El concepto empleado en Economía para representar estos cambios son el de *cambio técnico* y el más restrictivo de *progreso técnico*.

Definición 3.4. Un cambio técnico en una tecnología es cualquier cambio en la función de producción que altere la relación entre consumos y producciones.

Un cambio técnico se denomina progreso técnico si la producción aumenta para cualquier consumo, con respecto al que se obtenía antes del cambio.

En caso de introducirse un efecto técnico exógeno en la función de producción f , supondremos que la forma de la función de producción f no varía, aunque sí los niveles de producción. En consecuencia, podemos escribir la función de producción tras el efecto técnico como:

$$\bar{Y} = \bar{f}(K, L, t) \tag{2}$$

donde t es el parámetro de progreso técnico e \bar{Y} es la producción para el capital K y la mano de obra L tras el progreso técnico.

Para denotar un cambio técnico con parámetro t suele emplearse la notación T_t . Pero cuando no hay lugar a confusión puede obviarse el parámetro en la notación e indicar el cambio técnico con T .

El progreso técnico puede verse también como la variación que sufren las necesidades del capital y la mano de obra tras dicho progreso. Para ello, se emplea el concepto de *funciones de progreso técnico*, cuya definición se indica a continuación:

Definición 3.5. *Las funciones de progreso técnico de K y L son las funciones ϕ y ψ que combinan los factores mediante el parámetro de progreso técnico t . Es decir, las funciones que permiten expresar el progreso técnico de la siguiente forma:*

$$T_t : \bar{K} = \phi(K, L, t), \quad \bar{L} = \psi(K, L, t). \quad (3)$$

A las variables \bar{K} y \bar{L} se las denomina capital efectivo y mano de obra efectiva, respectivamente.

Las funciones de progreso técnico antes definidas se supondrán analíticas y reales respecto de las tres variables, K , L y t . Además, las funciones ϕ y ψ son independientes respecto de las variables K y L . Esta última propiedad lo que viene a decir es que se verifica la siguiente condición:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial K} & \frac{\partial \phi}{\partial L} \\ \frac{\partial \psi}{\partial K} & \frac{\partial \psi}{\partial L} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4)$$

La condición (4) permite aplicar el Teorema de la Función Implícita a la función vectorial $T = (\phi, \psi)$, formada por las dos funciones de progreso técnico, menos la función vectorial constante consistente en (\bar{K}, \bar{L}) . De este modo, para cada par de valores para el capital y la mano de obra efectivas, podremos despejar las variables K y L en función de las variables \bar{K} y \bar{L} (y conocer las necesidades de capital y mano de obra tras el progreso técnico).

Para concluir la sección, recordamos la definición de un determinado tipo de progreso técnico: el tipo neutro de Hicks.

Definición 3.6. *Se dice que un progreso técnico es de tipo neutro de Hicks si aplicado a una función de producción f se verifica que:*

$$\bar{Y} = \bar{f}(K, L, t) = A(t) \cdot f(K, L) = A(t) \cdot Y,$$

con $A > 0$ y $\frac{dA}{dt} > 0$.

4. Holoteticidad. Interpretación económica

Como dijimos antes, una de las causas por las que se introduce la Teoría de Lie en la literatura económica se debe al interés que presenta el poder distinguir en una tecnología

entre el impacto del progreso técnico y el de los efectos de los rendimientos a escala. Perseguiendo este objetivo, Sato (1981) introduce el concepto de *holoteticidad de una función de producción bajo un tipo de progreso técnico dado*. La definición de este concepto es la que se indica a continuación:

Definición 4.1. Sean la función de producción f y el progreso técnico T definido por las funciones de progreso técnico (ϕ, ψ) . Se dice que f es holotética bajo el progreso técnico T si el efecto total del progreso técnico T sobre f puede ser representado por una función F estrictamente monótona. Esta condición puede ser expresada por la siguiente cadena de igualdades:

$$\bar{Y} = \bar{f}(K, L, t) = f(\bar{K}, \bar{L}) = f[\phi(K, L, t), \psi(K, L, t)] = g(f(K, L), t) = F_{(t)}(Y) \quad (5)$$

Exigir que el progreso técnico actuando sobre la función de producción dé que la producción efectiva \bar{Y} sea una función de la producción de partida Y tiene varias consideraciones y consecuencias económicas que detallaremos en la presente sección. Pero antes de continuar sería interesante aclarar que uno de los tipos de progreso técnico más habituales, el tipo neutro de Hicks, es un caso de holoteticidad. Veámoslo:

Sea $Y = f(K, L)$ una función de producción y sea T un progreso técnico de tipo neutro de Hicks definido por las funciones de progreso técnico dadas en (3). Entonces el impacto de este tipo de progreso técnico⁹ debe verificar la siguiente condición:

$$\bar{Y} = f(\bar{K}, \bar{L}) = A(t) \cdot f(K, L) = A(t) \cdot Y, \quad (6)$$

que puede verse que es una condición de holoteticidad sin más que definir $F_{(t)}(Y)$ como el producto $A(t) \cdot Y$.

4.1. Holoteticidad e isocuantas

La primera consideración sobre la holoteticidad permite afirmar que la función de producción $Y = f(K, L)$ es holotética bajo un tipo de progreso técnico dado T si y solo si el efecto total de un tipo de progreso técnico dado se transforma completamente en un efecto a escala en la producción sin que varíe la forma de la aplicación isocuanta.

Las isocuantas son de la forma $\bar{Y} = c$, donde c es una constante real. Debido a la holoteticidad de f bajo T , se tiene que las isocuantas son de la forma $c = F_{(t)}(Y)$ o, lo que es equivalente, $Y = F_{(t)}^{-1}(c)$, que son las curvas de nivel de la tecnología antes de que actúe el progreso técnico. En consecuencia, suponer la holoteticidad bajo el progreso técnico T equivale a que el conjunto de las curvas isocuantas no resulte afectado, salvo en un reetiquetado de las isocuantas.

⁹Según se vio en la Definición 3.6, la condición verificada por un progreso técnico de tipo neutro de Hicks es precisamente la exigida para la holoteticidad en (6).

4.2. Holoteticidad y tasa marginal de sustitución

Una segunda consideración que puede realizarse acerca de la holoteticidad bajo el progreso técnico T está relacionada con la Tasa Marginal de Sustitución (TMS) entre capital y mano de obra. Recuérdese que la TMS se puede definir como $R = \frac{f_L}{f_K}$, siendo $f_L = \frac{\partial f}{\partial L} > 0$ y $f_K = \frac{\partial f}{\partial K} > 0$.

Si calculamos la Tasa Marginal de Sustitución \bar{R} entre capital K y mano de obra L tras un progreso técnico T como el de (3), tendríamos la siguiente igualdad:

$$\bar{R} = \frac{\bar{Y}_L}{\bar{Y}_K} = \frac{f_\phi \cdot \phi_L + f_\psi \cdot \psi_L}{f_\phi \cdot \phi_K + f_\psi \cdot \psi_K}$$

Pero, en virtud de la ecuación (5) consistente en la definición de la holoteticidad de f bajo el cambio técnico, tendríamos la siguiente relación entre la TMS, R , existente antes del progreso técnico y la TMS, \bar{R} , existente después:

$$\bar{R} = \frac{\bar{Y}_L}{\bar{Y}_K} = \frac{\frac{\partial F_{(t)}(Y)}{\partial L}}{\frac{\partial F_{(t)}(Y)}{\partial K}} = \frac{\frac{\partial F_{(t)}(Y)}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial F_{(t)}(Y)}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial K}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}} = \frac{f_L}{f_K} = R.$$

En consecuencia, se puede afirmar que \bar{R} es independiente del parámetro t de progreso técnico, siempre que la función de producción sea holotética bajo dicho progreso técnico. En consecuencia, la TMS se puede ver como una función invariante con respecto al progreso técnico.

Nota 4.2. La igualdad entre R y \bar{R} arriba indicada no debe inducir a pensar en una posible igualdad entre R y R^* , donde R^* fuese la TMS de la función de producción \bar{f} respecto del capital efectivo \bar{K} y de la mano de obra efectiva \bar{L} , la cual sí depende del parámetro de progreso técnico t .

Nota 4.3. También ha de tenerse en cuenta que todo lo hecho en esta Subsección ha sido considerando la TMS de L respecto de K . De manera análoga se podría repetir el estudio para la TMS de K respecto de L y veríamos que se tiene una correspondiente propiedad de invariancia de esta última TMS con respecto del parámetro t de progreso técnico.

4.3. Holoteticidad y separabilidad

Como se vio en la ecuación (5), al aplicar un progreso técnico a una función de producción f que sea holotética, el parámetro t de progreso técnico y f se pueden ver de manera separada. No obstante, para hablar propiamente de separabilidad, previamente debe darse una definición de dicho concepto:

Definición 4.4. La función de producción $\bar{Y} = \bar{f}(K, L, t) = g(f(K, L), t)$ se dice débilmente separable con respecto a K , L y t si se verifica:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial K} / \frac{\partial g}{\partial L} \right)}{\partial t} \equiv 0.$$

La derivada que aparece en la expresión que define el concepto de débilmente separable también podría escribirse como $\frac{\partial \frac{g_K}{g_L}}{\partial t}$. Pero al ser g una expresión de la función de producción tras el progreso técnico, entonces dicha derivada resulta ser la derivada de la TMS \bar{R} , que ya dijimos en la Nota 4.3 que no depende del parámetro t de progreso técnico y, por lo tanto, su derivada respecto de t ha de ser 0.

Con esto, se demuestra de manera inmediata que las funciones de producción holotéticas bajo un progreso técnico T dado verifican la siguiente condición relacionada con la separabilidad débil:

Proposición 4.5. Sea f una función de producción holotética bajo un progreso técnico dado, T . El efecto total de dicho progreso técnico sobre la función de producción se expresa en una forma débilmente separable a través de las funciones de progreso técnico. \square

Nota 4.6. La función débilmente separable no es la función de producción f , sino la función $F_{(t)}$ que se obtiene al aplicar las funciones de progreso técnico a f .

4.4. Holoteticidad y familia de funciones de producción

Hay una consideración más que puede hacerse sobre el concepto de holoteticidad y que consiste en ver cómo la familia de funciones de producción holotéticas bajo un determinado tipo de progreso técnico T es invariante bajo la acción de las funciones de progreso técnico de T . Es decir, el progreso técnico transformaría una función de producción de la familia en otra de esa misma familia.

La causa de esto radica en que la transformación asociada al progreso técnico genera una familia de funciones cuya expresión es $\bar{Y} = F_{(t)}[Y]$ y de tal modo que la relación entre el capital K y la mano de obra L no se modifica. Por lo tanto, la función de producción resultante también es holotética bajo dicho progreso técnico y pertenece a la familia estudiada de funciones de producción. Obsérvese que dicha familia de funciones se expresa en función de la producción de partida Y y del parámetro t de progreso técnico, que es el que determina a cada elemento de la familia.

Esta propiedad de invariancia es la que permite emplear la Teoría de Lie en el estudio del concepto de la holoteticidad, ya que la Teoría de Lie permite realizar un análisis de las propiedades de invariancia y, de hecho, es uno de los objetivos centrales de esta teoría, como se puede comprobar en las páginas 41 y 85–87 de Sattinger y Weaver (1997) y en el Apéndice F de Fulton y Harris (1991).

5. Progreso técnico de tipo Lie

En las Definiciones 3.4 y 3.5 se presentaban los conceptos de progreso técnico (T) y de las funciones de progreso técnico ϕ y ψ . A la hora de estudiar la holoteticidad, interesa que el progreso técnico verifique una serie de propiedades. En concreto, lo que se impone es que el progreso técnico verifique las propiedades de un grupo de Lie uniparamétrico, que son las siguientes:

Propiedades de grupos de Lie:

(GL1) El resultado de aplicar sucesivamente dos transformaciones

$$T_{t_1} \begin{cases} \bar{K} = \phi(K, L, t_1); \\ \bar{L} = \psi(K, L, t_1); \end{cases} \quad \text{y} \quad T_{t_2} \begin{cases} \bar{\bar{K}} = \phi(\bar{K}, \bar{L}, t_2); \\ \bar{\bar{L}} = \psi(\bar{K}, \bar{L}, t_2); \end{cases}$$

es el mismo que el de aplicar la transformación:

$$T_{t_1+t_2} \begin{cases} \bar{\bar{K}} = \phi(K, L, t_1 + t_2); \\ \bar{\bar{L}} = \psi(K, L, t_1 + t_2). \end{cases}$$

(GL2) La transformación que se obtiene para el valor $-t$ del parámetro coincide con la inversa de la transformación obtenida para el valor t del parámetro:

$$T_t^{-1} : K = \phi(\bar{K}, \bar{L}, -t), \quad L = \psi(\bar{K}, \bar{L}, -t).$$

(GL3) La transformación obtenida para el valor $t_0 = 0$ del parámetro es la transformación identidad:

$$T_0 : \begin{cases} \bar{K} = \phi(K, L, t_0) = \phi(K, L, 0) = K; \\ \bar{L} = \psi(K, L, t_0) = \psi(K, L, 0) = L. \end{cases}$$

Expresando las tres propiedades funcionalmente, usando la composición de funciones como producto en las transformaciones T_t que definen al progreso técnico, dichas propiedades se escribirían en su forma habitual:

$$(GL1)' \quad T_{t_2} \circ T_{t_1} = T_{t_2+t_1}.$$

$$(GL2)' \quad T_t^{-1} = T_{-t}.$$

$$(GL3)' \quad T_0 = \text{Id}, \text{ siendo Id la función identidad.}$$

Utilizando la nomenclatura propia de la Teoría de Grupos de Lie, el conjunto de todas las transformaciones incluidas en (3) forma lo que se denomina un *grupo continuo finito uniparamétrico* (o solamente *grupo uniparamétrico*), ya que el parámetro t varía continuamente en su dominio y las funciones ϕ y ψ son diferenciables respecto a t en dicho dominio.

Definición 5.1. *Si el tipo de progreso técnico T posee las tres propiedades de grupo de Lie, entonces diremos que es un progreso técnico de tipo Lie.*

5.1. Interpretación económica de las propiedades de grupo de Lie

Las tres propiedades de grupo que se les ha exigido a las funciones de progreso técnico pueden interpretarse económicamente de manera muy sencilla. Para comprobarlo, supondremos que el parámetro de progreso técnico t va a representar el *año* en el que tiene lugar el progreso técnico; por tanto, el capital efectivo \bar{K} y la mano de obra efectiva \bar{L} corresponderán, respectivamente, al capital y mano de obra existentes en ese año.

La propiedad (GL1) puede leerse como sigue: si el capital y la mano de obra disponibles en los años t_1 y t_2 se expresan como funciones ϕ y ψ dependientes de los valores del capital y la mano de obra del año previo, el capital y la mano de obra existentes en cualquier momento podrían obtenerse mediante adiciones en el parámetro t del tipo $t_1 + t_2$. En consecuencia, conocida la expresión de cómo varían el capital y la mano de obra en el primer año, $t = 1$, se podría obtener la de cualquier año sin más que considerar $t = \sum_{i=1}^n 1$, siendo n el año del que queremos saber la información.

La propiedad (GL2) implicaría el conocimiento del capital y la mano de obra existentes en el momento inicial a partir de las funciones de progreso técnico y empleando un parámetro adecuado ($-t$).

La propiedad (GL3) equivaldría a enunciar que el capital y la mano de obra iniciales son iguales a los efectivos si no suceden cambios técnicos.

Podría pensarse que el imponer estas propiedades al progreso técnico a considerar sería plantear demasiadas restricciones, pero eso no es así: la práctica totalidad de tipos de progreso técnico empleados y discutidos habitualmente en la literatura económica verifican estas tres propiedades de grupo de Lie.¹⁰

Además, estas propiedades son de gran utilidad para distinguir una familia de funciones de producción de otra distinta¹¹ y también se puede demostrar que toda función de producción verifica la propiedad de holoteticidad respecto de algún progreso técnico de tipo Lie.¹²

La herramienta básica para trabajar con un progreso técnico de tipo Lie es la *transformación infinitesimal del progreso técnico*. Esta transformación consiste en realizar un cambio infinitesimal en el progreso técnico dado por (3), que afectará a la función de producción indicada en (2). Para ver claramente la utilidad de esto, debemos estudiar el comportamiento de las funciones de progreso técnico ϕ y ψ bajo este cambio infinitesimal

¹⁰Se puede demostrar que todos los tipos de progreso técnico son casos particulares del tipo proyectivo. Por progreso técnico de tipo proyectivo se entiende cualquier progreso técnico que se obtiene mediante la integración de una transformación infinitesimal asociada a un grupo de Lie proyectivo. En consecuencia, las funciones de progreso técnico poseen estructura de grupo de Lie y el progreso técnico es de tipo Lie (Sato, 1981, pp. 52–53).

¹¹Este hecho es consecuencia inmediata del Teorema 5.6, demostrado por Sato (1981).

¹²Véase la Sección IV del Capítulo 2 de Sato (1981) para una demostración de este hecho.

del parámetro. Considérese, pues, un instante infinitesimal δt y el cambio dado por las funciones de progreso técnico:

$$\begin{aligned}\bar{K} &= \phi(K, L, \delta t), \\ \bar{L} &= \psi(K, L, \delta t).\end{aligned}$$

Entonces podemos expresar las transformaciones en ese instante infinitesimal como:

$$\delta K = \bar{K} - K = \xi(K, L)\delta t \quad \text{y} \quad \delta L = \bar{L} - L = \eta(K, L)\delta t, \quad (7)$$

siendo las funciones ξ y η las definidas como $\xi(K, L) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{t=0}$ y $\eta(K, L) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=0}$.

La expresión (7) recibe el nombre de *transformación infinitesimal del progreso técnico*. Sin embargo, se puede expresar dicha transformación infinitesimal de forma alternativa empleando el *operador de Lie* que tiene asociado la transformación infinitesimal. Por definición, la expresión del operador de Lie asociado a (7) es el siguiente:

$$U = \xi(K, L)\frac{\partial}{\partial K} + \eta(K, L)\frac{\partial}{\partial L}.$$

La eficacia de la transformación infinitesimal para estudiar los progresos técnicos reside en la unicidad de ésta, como puede deducirse de aplicar el Teorema de Taylor a la función de producción y quedarse con el sumando correspondiente a las derivadas de primer orden. Esto puede enunciarse como sigue:

Proposición 5.2. *Dado un progreso técnico de tipo Lie, éste posee una única transformación infinitesimal independiente.* □

5.2. Aplicación económica: medida del cambio técnico

Existe una manera sencilla de interpretar, dentro del ámbito de la Economía, el campo diferenciable U definido en (7). Más concretamente, la transformación infinitesimal del progreso técnico puede emplearse para cuantificar dicho cambio técnico, permitiendo definir una medida del mismo. Para ello, se define previamente el concepto de *medida de primer orden del impacto técnico cerca de la transformación identidad* y después se demuestra que esta medida es expresable en función del operador de Lie asociado a la transformación.

Definición 5.3. *Dadas una función de producción $Y = f(K, L)$ y un cambio técnico de tipo Lie T como el de (3), se define la medida de primer orden del impacto de cambio técnico cerca de la transformación identidad como la siguiente derivada:*

$$M(T) = \left(\frac{\partial\bar{Y}}{\partial t}\right)_{t=0}.$$

A la medida $M(T)$ que se acaba de definir también se la denomina, abreviadamente, medida del cambio técnico.

Proposición 5.4. *En las condiciones de la Definición 5.3, la medida del cambio técnico coincide con el operador de Lie aplicado a la función de producción. Es decir:*

$$M(T) = Uf = \xi(K, L) \cdot \frac{\partial f}{\partial K} + \eta(K, L) \cdot \frac{\partial f}{\partial L}. \quad (8)$$

Demostración. Si se le aplica el cambio técnico T a la función de producción $Y = f(K, L)$, resulta la función de producción

$$\bar{Y} = f(\bar{K}, \bar{L}) = \bar{f}(K, L, t),$$

que, desarrollándola por su serie de Taylor en $t = 0$, resulta ser:

$$\bar{Y} = f(K, L) + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \right)_{t=0} \cdot t + \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial t^2} \right)_{t=0} \cdot t^2 + \dots$$

Si se calcula el operador de Lie de la función f respecto de las variables \bar{K} y \bar{L} , dicho operador se expresa:

$$\bar{U}f = \frac{\partial \bar{K}}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{K}} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{L}}.$$

Por propia definición, las funciones \bar{K} y \bar{L} son, respectivamente, las funciones ϕ y ψ de progreso técnico. En consecuencia, se verifican las igualdades:

$$\left(\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} \right)_{t=0} = \xi \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial t} \right)_{t=0} = \eta,$$

donde ξ y η son las funciones definidas en (7).

Como la función de producción $\bar{Y} = f(\bar{K}, \bar{L})$ posee la misma expresión respecto de las variables \bar{K} y \bar{L} que la función de producción $Y = f(K, L)$ respecto de K y L , entonces las derivadas de ambas funciones de producción deben tener expresiones análogas respecto de sus respectivas variables. En virtud de la condición (GL3), los valores de \bar{K} y \bar{L} , cuando $t = 0$, corresponden a los valores de K y de L , respectivamente, por lo que tienen que verificar:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{K}} \right)_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial K} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{L}} \right)_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial L}.$$

En vista de todo lo anterior, se verifica que $(\bar{U}f)_{t=0} = Uf$.

Por otra parte, la Regla de la Cadena implica aquí que $\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \bar{U}f$. Con lo que, dando el valor $t = 0$ en dicha expresión, se llega a:

$$\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} \right)_{t=0} = (\bar{U}f)_{t=0} = Uf. \quad \square$$

Si se interpreta económicamente cada uno de los sumandos aparecidos en la expresión (8), la Proposición 5.4 puede leerse como que la medida de cambio técnico es igual a la suma de los siguiente dos productos:

1. La transformación infinitesimal del capital por la productividad marginal respecto del capital ($\xi \cdot \frac{\partial f}{\partial K}$).
2. La transformación infinitesimal de la mano de obra por la productividad marginal respecto de la mano de obra ($\eta \cdot \frac{\partial f}{\partial L}$).

5.3. Una respuesta a la Controversia Solow-Stigler

Como se ha visto, el operador de Lie de una transformación infinitesimal de progreso técnico se utiliza para obtener la medida de primer orden del impacto de un progreso técnico. Pero existe una segunda utilidad del operador de Lie, que es la de obtener la caracterización de la holoteticidad de una función de producción, como puede verse en el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en Sato (1981):

Teorema 5.5. *Una función de producción es holotética bajo un progreso técnico de tipo Lie T si y solo si la medida de cambio técnico es función de la propia función de producción: $Uf = G(f)$.* □

Esto permite observar que el efecto de cualquier transformación de progreso técnico sobre f correspondería a una expresión del tipo $\bar{Y} = e^{t \cdot U} \cdot f$, pero la holoteticidad y el Teorema 5.5, permiten expresar \bar{Y} como una función de f y del parámetro de progreso técnico.

No obstante, ha de tenerse en cuenta que todo lo anterior parte del supuesto de tener un progreso técnico y una función de producción holotética bajo dicho progreso. Por lo tanto, es de suma importancia ver si tiene sentido la condición de holoteticidad, esto es: dado un progreso técnico de tipo Lie, ¿existe una función de producción que sea holotética? Sato (1981) probó que sí y lo enunció como sigue:

Teorema 5.6. *Existe una única tecnología holotética bajo un progreso técnico de tipo Lie dado y en la que el efecto del progreso técnico se transforma completamente en efecto de rendimientos a escala.* □

Este Teorema 5.6 le llevó a dar una respuesta a la Controversia Solow-Stigler, como puede verse en el siguiente:

Teorema 5.7. *El efecto de un progreso técnico T y el efecto del rendimiento a escala de f pueden identificarse independientemente si y solo si la función de producción no es holotética bajo el progreso técnico T .* □

En consecuencia, puede darse una estimación tanto del progreso técnico como del efecto de rendimientos a escala, siempre que la función de producción que se considere no sea holotética bajo dicho progreso técnico.

Es más, si lo conocido es la función de producción y nos preguntamos cuáles son los progresos técnicos que no conviene considerar a la hora de poder distinguir entre el efecto de dicho progreso y el efecto de los rendimientos a escala, se nos plantea la necesidad de conocer los progresos técnicos de tipo Lie bajo los que la función de producción dada será holotética. De hecho, se puede probar que existe al menos un progreso técnico de tipo Lie, aunque realmente el número de soluciones sea infinito ya que el progreso técnico se halla resolviendo una ecuación diferencial del tipo $M(K, L)dK + N(K, L)dL = 0$, siendo el cociente $\frac{N}{M}$ la TMS.

6. Otras aplicaciones de la Teoría de Lie a la Economía

Ya hemos comentado que los tipos de progreso técnico usados habitualmente en la literatura verifican las tres propiedades que definen a los grupos de Lie, por lo que no resultaba una suposición excesivamente restrictiva trabajar con tipos de progreso técnico con esas propiedades y que se han denominado *de tipo Lie*. También se ha expuesto el concepto de holoteticidad introducido por Sato (1981), que permite introducir técnicas para estudiar por separado los efectos a escala de los provenientes del progreso técnico.

De un modo análogo, resulta de interés mostrar algunas otras de las líneas de investigación en las que se emplean los conceptos aquí expuestos. Por ello, haremos un breve resumen con algunas de las aplicaciones actuales en Economía y que suelen estar relacionadas con el estudio del progreso técnico y de la invariancia económica.

Conceptos de interés en este contexto son el de *representación de grupo de Lie de la TMS* (consistente en asociar a la TMS un subgrupo uniparamétrico de Lie) y el de *compatibilidad del progreso técnico* con la estructura interna de una tecnología dada (estudiada con una condición sobre el producto corchete de Lie con respecto a la representación de grupo de Lie de la TMS). La holoteticidad de una función de producción bajo un progreso técnico equivaldría a expresar dicho progreso técnico como una combinación lineal de la representación de la TMS y de otro progreso técnico de tipo Lie compatible con la estructura interna de esa tecnología. Esto abre la posibilidad de analizar si las condiciones sobre los productos corchetes son compatibles con las que se requieren a los distintos tipos de álgebras de Lie existentes y estudiados.

También se usan grupos de Lie para estudiar la neutralidad de los progresos técnicos mediante el estudio de su invariancia bajo ciertos grupos de transformaciones de Lie (*G*-neutralidad). De hecho, los conceptos clásicos de neutralidad (de Hicks, Harrod y Solow) son casos particulares de este nuevo concepto de neutralidad. Análogamente, las funciones

de producción de Cobb-Douglas pueden obtenerse también del estudio de la G -neutralidad.

Igualmente, se utilizan los grupos y las álgebras de Lie en el estudio de la holoteticidad de tecnologías implícitas, aunque en tal caso no es posible hallar los tipos Lie de cambio técnico bajo los que una tecnología implícita es holotética. Esto no es lo que ocurriría en el caso de las tecnologías explícitas, en las que sí pueden determinarse. Es más, las formas básicas de las funciones de producción CES¹³ pueden obtenerse a partir de los grupos de Lie de transformaciones correspondientes. La clasificación de estas funciones de producción puede, a su vez, obtenerse mediante la propiedad de invariancia de una ecuación diferencial bajo un determinado subgrupo uniparamétrico.

Desde hace bastante tiempo se viene empleando en la Física la conexión existente entre simetrías dinámicas o invariancias y las leyes conservativas de un sistema matemático. Los resultados sobre las propiedades de ecuaciones diferenciales bajo grupos de Lie continuos llevaron a Emmy Noether (1918) a enunciar el conocido *Teorema de Noether*. Este teorema se podría interpretar, en las aplicaciones económicas, como un establecimiento de leyes conservativas de sistemas dinámicos, que dependerían del modelo económico al que se refiriesen.

Por último, indicamos la posibilidad de emplear la Teoría de Lie para perfeccionar la Teoría de Números Índices. Sato (1981) ya utilizó los grupos de Lie para afrontar el estudio de varios de los problemas básicos de la Teoría de Números Índices. Así, estudia la cuestión de los criterios del test de Fischer-Frisch para un número índice y el problema de número índice económico invariante. Los test de números índices estudiados hasta la fecha pueden traducirse a condiciones de transformaciones infinitesimales de grupos de Lie, que se verán como acciones del grupo de Lie sobre el número índice. Un número índice debe satisfacer las propiedades de invariancia de transformaciones de grupo para ser un índice útil de medida de precios y cantidades.

Con estas consideraciones, pretendemos abrir diferentes líneas de investigación en las que el estudio de los grupos o las álgebras de Lie facilite la obtención de resultados más cercanos a la Economía.

Referencias bibliográficas

- Ancochea, J. M. y Goze, M. (1989) Classification des Algèbres de Lie Nilpotentes de Dimension 7, *Archiv. Math.* **52**, pp. 175–185.
- Arrow, K. J., Chenery, H. B., Minhas, B. S. y Solow, R. M. (1961) Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency, *Review of Economics and Statistics* **53**,

¹³Una función CES es aquella cuya elasticidad de sustitución es constante. Estas funciones, que se introdujeron en Arrow et al. (1961), no se utilizan solo para expresar funciones de producción sino también para las de utilidad. Su expresión es de la forma $F(\underline{X}) = \alpha \left(\sum_i a_i X_i^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}}$, donde α y a_i son constantes positivas y la elasticidad de sustitución viene dada por $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$.

pp. 225–251.

- Boza, L., Fedriani, E. M. y Núñez, J. (2001) A New Method for Classifying Complex Filiform Lie Algebras, *Applied Mathematics and Computation* **121** (2-3), pp. 169–175.
- Boza, L., Fedriani, E. M. y Núñez, J. (2003) Complex Filiform Lie Algebras of Dimension 11, *Applied Mathematics and Computation* **141**, pp. 611–630.
- de Graaf, W. A. (2004) Classification of Solvable Lie Algebras. E-print disponible en http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0404/0404071.pdf.
- Falcón, R. M. y Núñez, J. (2002) La Isoteoría de Lie-Santilli. America-Europe-Asia. International Academic Press.
- Frappat, L., Sorba, P. y Sciarrino, A. (1996) Dictionary on Lie Superalgebras. E-print disponible en http://arxiv.org/PS_cache/hep-th/pdf/9607/9607161.pdf.
- Fulton, W. y Harris, J. (1991) Representation Theory: A First Course. Springer-Verlag, New York.
- Jacobson, N. (1979) Lie Algebras. Dover Publications, Inc. New York.
- Kellman, M. E. (1996) Symmetry in chemistry from the hydrogen atom to proteins. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **93**, pp. 14287–14294.
- Mubarakzjanov, G. M. (1963) Classification of Real Structures of Lie Algebras of Fifth Order, *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika*, **3** (34), pp. 99–106 (en ruso).
- Noether, E. (1918) Invariante Variationsprobleme, *Nachr. d. Königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse*, pp. 235–257.
- Núñez, J. y Tenorio, A. F. (2002) Sophus M. Lie, *La Gaceta de la RSME* **5:1**, pp. 121–130.
- Núñez, J., Tenorio, A. F. y Vilches, J. A. (2006) Elementos de la Teoría de Grupoides y Algebroides. Monografía por aparecer.
- Rueda, J. M. (2004) Análisis Input-Output Estocástico de la Economía Andaluza. Tesis Doctoral. Universidad Pablo de Olavide, Sevilla.
- Sánchez, R. y Grau, R. (2005) A Novel Lie Algebra of the Genetic Code over the Galois Field of Four DNA Bases. E-print disponible en <http://arxiv.org/ftp/q-bio/papers/0501/0501036.pdf>.
- Sato, R. (1981) Theory of Technical Change and Economic Invariance. Academic Press. Reeditado en: Sato, R. (1998) Theory of Technical Change and Economic Invariance. Edward Elgar.
- Sattinger, D. H. y Weaver, O. L. (1997) Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics. University of Bangalore Press, Bangalore.
- Solow, R. M. (1957) Technical Change and the Aggregate Production Function, *Review of Economics and Statistics* **39**, pp. 312–320.
- Solow, R. M. (1961) Comment on Stigler, en *Output, Input and Productivity Measurement*, Income and Wealth Series, pp. 64–68. Princeton Univ. Press, Princeton.

- Stigler, G. J. (1961) Economic Problems in Measuring Changes in Productivity, en *Output, Input and Productivity Measurement*, Income and Wealth Series, pp. 47–63. Princeton Univ. Press, Princeton.
- Varadarajan, V. S. (1998) Lie Groups, Lie Algebras and their Representations. Selected Monographies **17**, Collège Press, Beijing.
- Yang, B., Han, K. y Ding, S. (2000) Dynamical Lie Algebraic Approach to Energy Transfer of the Scattering System $A + BC$, *Int. J. Quantum Chem.* **78**, pp. 295–302.
- Yang, B., Yin, H.; Han, K. y Ding, S. (2001) Dynamical Lie Algebraic Treatment for the $A + BC$ Scattering, *Int. J. Quantum Chem.* **81**, pp. 214–221.
- Zheng, Y., Yi, Z. y Guan, D. (2000) Rotationally Inelastic Molecule-Surface Scattering: Dynamical Lie Algebraic Method, *Int. J. Quantum Chem.* **76**, pp. 500–510.

Algoritmo Tabú para un problema de distribución de espacios

G. HERNÁNDEZ-DÍAZ, ALFREDO

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica.

Universidad Pablo de Olavide

Correo electrónico: agarher@upo.es

GUERRERO CASAS, FLOR M.

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica.

Universidad Pablo de Olavide

Correo electrónico: fguecas@upo.es

CABALLERO FERNÁNDEZ, RAFAEL

Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas). Universidad de Málaga

Correo electrónico: r.caballero@uma.es

MOLINA LUQUE, JULIÁN

Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas). Universidad de Málaga

Correo electrónico: julian_molina@uma.es

RESUMEN

La distribución de espacios es un problema que habitualmente se presenta en situaciones reales cuando se deben asignar simultáneamente diferentes conjuntos de espacios (despachos, habitaciones, salas, etc.) distribuidos entre edificios y/o plantas entre varios grupos de personas de tal forma que se minimicen las distancias entre los espacios asignados a cada grupo y la sede de dicho grupo. Esta situación da lugar a un problema combinatorio con una función objetivo cuadrática, lo cual complica enormemente su resolución mediante un método exacto. Por este motivo, proponemos para su resolución un metaheurístico basado en Búsqueda Tabú con dos grupos de movimientos claramente diferenciados: intercambio de despachos y reasignación de sedes. Finalmente, aplicamos dicho algoritmo a un caso real en la Universidad Pablo de Olavide de Sevilla (España).

Palabras clave: búsqueda tabú; problemas de asignación.

Clasificación JEL: C61; C63.

2000MSC: 90C59; 90C27; 90C20; 90C90.

Tabu Search Algorithm for a Room Allocation Problem

ABSTRACT

The distribution of spaces is a usual real problem presented when we have to assign simultaneously different sets of spaces (offices, rooms, halls, etc.). These spaces are distributed in buildings and/or floors and have to be assigned among several groups of people. The aim is to minimize the total distance among the spaces assigned to each group and its head office. This situation drives us to a quadratic combinatorial problem, so difficult to solve with exact methods. This is the reason to propose a metaheuristic method to solve it, a Tabu Search algorithm with two types of movements: the swapping of two offices and further assignment of head offices. The performance of the algorithm is demonstrated on a problem related with the Pablo de Olavide University in Seville (Spain).

Keywords: tabu search; room allocation problems.

JEL classification: C61; C63.

2000MSC: 90C59; 90C27; 90C20; 90C90.



1. Introducción y formulación

El problema de distribuir despachos entre grupos de personas simultáneamente es una tarea compleja dado que cada grupo valorará los espacios que le han sido asignadas en función de la *sede* (planta en la que se encuentra la mayoría del grupo) que le haya sido también asignada. Así, el problema es de una complejidad superior dado que debemos resolver dos problemas de asignación simultáneamente. Por un lado, buscamos el reparto óptimo de las sedes y por otro, una vez conocida ésta, la distribución óptima de los espacios. Por tanto, una solución posible debe contemplar que todos los grupos tengan asignado una planta como sede, pudiendo ocurrir que varios grupos compartan sede, que ninguna habitación sea asignada a más de un grupo y que se satisfagan las demandas de los grupos, es decir, que el total de asignaciones por grupo coincida con el tamaño de éste.

Así, la formulación del problema queda de la siguiente forma:

$$\text{Min. } \sum_G \sum_H \sum_P w_{g,h}^p X_{p,g} Y_{h,g} \quad (1)$$

$$\text{s.a. } \sum_P X_{p,g} = 1, \text{ para cada } g \in G, \quad (2)$$

$$\sum_G Y_{h,g} \leq 1, \text{ para cada } h \in H, \quad (3)$$

$$\sum_H Y_{h,g} = c_g, \text{ para cada } g \in G, \quad (4)$$

$$X_{p,g}, Y_{h,g} \in \{0,1\}, \quad (5)$$

donde los conjuntos G , H y P indexan al número de grupos, de despachos y de plantas respectivamente, la variables binarias $X_{p,g}$ e $Y_{h,g}$ se definen como sigue:

$$X_{p,g} = \begin{cases} 1, & \text{si al grupo } g \text{ se le asigna la planta } p \text{ como sede,} \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

e

$$Y_{h,g} = \begin{cases} 1, & \text{si la habitación } h \text{ es asignada al grupo } g, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

$w_{g,h}^p$ representa la valoración que le da el grupo g a la habitación h si su sede es la planta p , y c_g es el número de personas que compone el grupo g . En nuestro caso, $w_{g,h}^p$ representará la distancia (por ejemplo, euclídea) desde la habitación h hasta la planta p en la que se encuentra la sede del grupo g . Este es el motivo por el que el problema está planteado como de minimización.

Así, la ecuación (1) representa el objetivo a minimizar, esto es, la suma total de todas las valoraciones que los grupos han considerado para cada una de los espacios asignados; la restricción (2) obliga a que todos los grupos tengan asignada una única sede; la ecuación (3) imposibilita que una habitación sea asignada a más de un grupo, pudiendo ocurrir además que una habitación quedase sin asignar (tomando la suma el valor cero); mientras que (4) fuerza a que el número de espacios asignados a cada grupo coincida con el número de miembros que lo forman.

Lógicamente, el problema resultaría infactible si la demanda superara a la oferta, es decir, si:

$$\sum_G c_g > |H|.$$

Por este motivo, en todo momento supondremos que la demanda es inferior o igual a la oferta.

En resumen, el modelo planteado es un problema combinatorio de minimización con función objetivo cuadrática. Este problema no corresponde exactamente a ninguno de los problemas clásicos de optimización combinatoria en la literatura, pero presenta cierta similitud (en cuanto a la formulación y en cuanto a la situación real a resolver) con los problemas de asignación de espacios, motivo por el cual en el siguiente epígrafe haremos una breve introducción a este tipo de problemas.

2. Problemas de Asignación de Espacios

Habitualmente nos enfrentamos a problemas de reparto de muy diversa índole (personas, tareas, dinero, objetos,...). Dichos problemas, si no son excesivamente grandes, los solemos resolver manualmente usando nuestra razón. Pero, cuando el tamaño de dichos problemas excede de nuestra capacidad, nos vemos obligados a utilizar herramientas analíticas que nos faciliten su resolución. Es por ello por lo que desde hace varias décadas se vienen estudiando este tipo de problemas dentro del campo de la Programación Matemática y la Investigación Operativa dentro de la rama comúnmente conocida como Problemas de Asignación (allocation problems).

En particular, el problema de la asignación de espacios ha sido ampliamente estudiado en los últimos años. Así, por ejemplo, Carter (1989) y Carter y Laporte (en Burke y Carter, 1998) trabajan con la problemática de asignar aulas a las distintas asignaturas de una universidad, López García et al. (2002) estudian la distribución óptima de salones entre los múltiples cursos de verano en una universidad y Ciriani et al. (2004) proponen un algoritmo para el reparto de despachos de un pasillo. Aunque en cada uno de estos problemas se trabaja con un conjunto de restricciones específico, la base de la gran mayoría de estos problemas combinatorios es el de la “concentración”, es decir, cada grupo (ya sea de alumnos, de conferencias o de personas de un departamento) busca que los elementos que le han sido asignados (aulas, salas de conferencias o despachos) estén lo más próximos posible unos de otros. No obstante, tal como se ha comentado antes, ninguno de los trabajos anteriores es exactamente igual al propuesto y por ello no se pueden comparar las soluciones obtenidas con otros métodos o algoritmo de la literatura.

Debido a que la mayoría de los problemas de este tipo son NP-completos (véase Garey y Johnson (1975) para más detalles), algunos de los métodos exactos se han demostrado poco eficientes y lentos (computacionalmente hablando). Es por esto por lo que los algoritmos metaheurísticos están siendo utilizados cada día más para este tipo de problemas de asignación y otros de similares características. Distintos procedimientos de búsqueda como la Búsqueda Tabú (Laguna et al. (1995), Díaz y Fernández (2001), Kelly et al. (1994) o López García et al. (2003)), los Algoritmos Genéticos (Wang et al. (2002)), el Temple Simulado (Herault y Privault (1998)), concatenación de movimientos simples y *path relinking* (Yagiura et al. (2004)), *logic cuts* (Osorio y Laguna (2003)) o los basados en Colonias de Hormigas (Middendorf et al. (2002)) se están utilizando con gran éxito en estos tipos de problemas. Más recientemente, los

problemas de asignación están siendo estudiados con objetivos múltiples utilizando también algoritmos metaheurísticos (Gandibleux et al. (2003) y Gandibleux et al. (2004)).

Las siguientes secciones están estructuradas de la siguiente manera. En la Sección 3 recordamos los conceptos básicos de la Búsqueda Tabú y en la Sección 4 exponemos con detalle el algoritmo que proponemos. En la Sección 5 contrastamos el algoritmo propuesto con 80 instancias generadas aleatoriamente para este problema. Finalmente, en la Sección 6 aplicamos dicho algoritmo al caso real de la Universidad Pablo de Olavide y en la Sección 7 presentamos las conclusiones.

3. La Búsqueda Tabú

La búsqueda tabú (TS) es un procedimiento heurístico de memoria adaptativa propuesto por Glover en 1986 (Glover, 1986) para la búsqueda de los óptimos globales (resp., soluciones eficientes) en problemas de optimización mono-objetivo (resp., multiobjetivo). TS está siendo aplicado exitosamente en las últimas décadas en multitud de problemas complejos (continuos y discretos, lineales y no lineales, convexos y no convexos, etc.) en diferentes áreas científicas (tal y como se puede ver en Glover y Laguna (1997)).

TS explora el espacio de soluciones a través de repetidos movimientos desde una solución a la mejor de sus vecinas tratando de evitar los óptimos locales. Para un problema mono-objetivo, TS realiza una búsqueda por entornos en la cual se desplaza en cada iteración a la mejor solución no tabú del vecindario de la solución actual. Los principales atributos de cada solución visitada son almacenados en una lista tabú por un determinado número de iteraciones para evitar que estas soluciones sean revisitadas, es decir, para evitar ciclos en la búsqueda por entornos. Así, un elemento del vecindario de la solución actual es declarado tabú (es decir, es prohibido) si alguno de sus atributos está en la lista tabú. En general, un método basado en búsqueda tabú requiere de los siguientes elementos:

1. Solución inicial. La búsqueda debe comenzar desde una solución inicial que podría ser cualquier solución admisible que satisfaga las restricciones del problema. Una buena solución inicial podría acelerar la búsqueda con el consiguiente ahorro de tiempo. Dicha solución puede ser generada aleatoriamente o utilizando *funciones ávidas* o *greedy functions* (funciones que incorporan información adicional del problema utilizadas como estrategias para generar puntos de mejor calidad).
2. Movimiento. Un movimiento es un procedimiento aleatorio o determinístico por el que se genera una solución admisible a partir de la solución inicial. Usualmente, este procedimiento es sencillo para el caso de problemas combinatorios, pero mucho más complejo para el caso de problemas de optimización continuos.
3. Vecindad. Dada una solución S , la vecindad $N(S)$ es el conjunto de todas las soluciones admisibles que pueden ser generadas por la ejecución de un movimiento sobre la solución actual S . Este conjunto suele ser numerables para problemas combinatorios y, en aquellos casos en los que $N(S)$ sea grande, se suele operar con un subconjunto de

éste. Para problemas continuos, los posibles vecinos son no numerables y se debe ser más creativo para definir $N(S)$.

4. Lista tabú. Es un mecanismo de memoria adaptativa que trata de evitar que la búsqueda entre en un ciclo o quede atrapada en un óptimo local. Una vez que un movimiento, que genera una nueva solución, es aceptado, su movimiento inverso se añade a la lista tabú y permanece en ésta un número determinado de iteraciones. Si el tamaño de la lista tabú es pequeño, entonces la búsqueda se intensifica en una determinada área del espacio, mientras que si el tamaño de la lista es grande se enfatiza la búsqueda en diferentes regiones del espacio de soluciones.
5. Criterio de parada. En general, la búsqueda termina después de un número determinado de iteraciones, después de un tiempo de computación predefinido o cuando se alcanza un número dado de iteraciones sin mejorar la mejor solución.

No obstante, dentro de un TS se puede encontrar una gran variedad de estrategias destinadas a mejorar la búsqueda como, por ejemplo, criterios de aspiración, que admite movimientos tabú si se satisface el criterio de aspiración (por ejemplo, se mejora el valor de la función objetivo de la mejor solución encontrada hasta ese momento) con idea de cruzar las barreras impuestas en las restricciones tratando de encontrar otras zonas factibles más prometedoras; fases de intensificación, que permite concentrar la búsqueda en aquellas zonas más prometedoras; fase de diversificación, que permite desplazarse hacia zonas no exploradas, etc. Una referencia básica acerca de TS se puede encontrar en Glover y Laguna (1997).

4. Algoritmo propuesto

A continuación mostramos los detalles del heurístico propuesto para resolver el problema planteado. El algoritmo que presentamos se basa en una búsqueda local mediante el uso de una lista tabú que inicializamos apropiadamente. El pseudocódigo se muestra en el siguiente esquema:

Estructura básica del algoritmo

- Generar una solución inicial s_0 .

- Inicializamos la solución y la lista tabú: $s_{final} = s_0$, $T = \{s_0\}$.

- Fase de acercamiento: En cada iteración t :

Repetir (hasta condición de parada):

1. Generar vecindario tipo 1, $N(s_t)$, y eliminamos las soluciones tabú, $N(s_t) = N(s_t) - T$.

2. s_{t+1} es seleccionado verificando $f(s_{t+1}) = \min\{f(s) : s \in N(s_t)\}$.

3. Si $f(s_{t+1}) < f(s_{final})$, $s_{final} = s_{t+1}$.

4. Actualizar T .

Fin acercamiento.

- Fase de Intensificación:

Repetir (hasta condición de parada): En cada iteración t :

1. Generar un vecino de tipo 2, $N(s_t)$.

2. Aplicamos una Fase de Acercamiento.

Fin Intensificación.

Pasamos a continuación a describir las características específicas del algoritmo.

4.1. Generación de la solución inicial

Esta generación se realiza a través de un procedimiento ávido. Así, asignamos las sedes a los distintos grupos bajo criterios de volumen de los grupos y capacidad de los edificios. Concretamente, ordenamos los grupos en función del tamaño de mayor a menor, y siguiendo este orden, asignamos al grupo la planta con menor holgura por exceso, y si esto no es posible, la planta con menor holgura por defecto. A continuación, y respetando el orden anterior, vamos asignando los distintos espacios a cada uno de los miembros de cada grupo. Como veremos en secciones posteriores, este semillado es muy efectivo y, en algunas de las instancias, está muy próxima a la solución óptima final.

4.2. Fase de acercamiento

- Vecino tipo 1. En esta fase se intentará mejorar el valor de la función objetivo realizando intercambios del tipo 1-1, es decir, intercambiando o reasignando a dos individuos mal colocados (es decir, individuos colocados en una planta o edificio distinto de la sede de su grupo). Fijamos a un individuo mal colocado y lo incluimos en la lista tabú (es decir, no volverá a ser considerado un cierto número de iteraciones). A continuación, distinguimos tres tipos de movimientos posibles: (a) si hubiese sitio en su sede, lo reasignamos a su sede, (b) si la planta de su sede está llena pero hubiese un individuo de otro grupo mal colocado ocupando una habitación, los intercambiamos, (c) si la planta de su sede está llena de individuos bien colocados, entonces buscamos acercarlo a su sede mediante un intercambio con otro individuo también mal colocado.

4.3. Fase de Intensificación

En esta fase probamos a mejorar la solución encontrada cambiando aleatoriamente las asignaciones de las sedes iniciales, para luego reparar la solución de una forma acorde a esta nueva distribución de las sedes de cada grupo. Para ello, generaremos el siguiente tipo de vecinos:

- Vecino tipo 2. Generamos aleatoriamente un número N entre 1 y el número de grupos y reasignamos aleatoriamente las sedes a N de los grupos elegidos aleatoriamente.

De esta manera damos un salto dentro del espacio de las soluciones, pero la mayoría de los individuos estarán mal colocados. Es por esto que a continuación realizamos una búsqueda intensiva para mejorar el punto actual en el que nos encontramos. Es decir, se procede a recolocar (utilizando el esquema de movimientos de la fase de Acercamiento) los individuos que tras esta reasignación de las sedes han quedado mal colocados.

4.4. Criterios de parada

Con idea de que el algoritmo sea lo más autónomo posible, hemos utilizado criterios de parada auto-ajustables dependiendo de la oferta y la demanda. En primer lugar, el criterio de parada para la fase de acercamiento se reajusta en cada ciclo con un valor igual al número total de miembros mal colocados (siempre que el valor de la función objetivo no sea cero). De esta forma, buscamos mejorar la solución encontrada redistribuyendo a los individuos mal colocados. Para la fase de intensificación, y dado

que la holgura juega un papel relevante en el problema, tomamos como criterio de parada que el número de iteraciones no supere a:

$$\frac{\text{Departamentos} * \text{Plantas}}{\text{Oferta} - \text{Demanda} + 1}$$

(también si el valor de la función objetivo no es cero).

5. Implementación y resultados

El algoritmo presentado se implementó bajo un entorno Windows utilizando el lenguaje C++ en su versión 6.0. Dicha implementación se ha utilizado en un PC de sobremesa con el sistema operativo Windows XP con un microprocesador de Intel Pentium a 1.5 GHz. y una memoria RAM de 512 MB.

Para este problema no existen instancias en la literatura ni otros métodos con los que comparar resultados (cada uno de los trabajos comentado en la Sección 2 incorpora restricciones distintas que lo hacen diferente al nuestro). Por este motivo se ha generado un conjunto de instancias (que se describen a continuación) y que se han resuelto, aunque no se ha comparado con ningún otro método al no existir otro método por el momento para este mismo problema.

Así, para comprobar la eficiencia del algoritmo se han generado 80 instancias clasificadas en cuatro conjuntos que describimos a continuación. Si denotamos por m al número de grupos que debemos distribuir, por n al número de plantas o edificios disponibles y por s a la holgura total de la que se dispone, es decir, la diferencia entre la oferta total y la demanda total, denotaremos por m_n_s a la instancia generada para ubicar a m grupos en las n plantas (o edificios) con una holgura total de s espacios. Como coeficientes $w_{g,h}^p$ tomaremos la distancia euclídea del edificio donde se encuentra el despacho h al edificio p si éste fuese la sede del departamento g , una vez que asignamos aleatoriamente coordenadas en el plano a cada edificio. Los cuatro grupos de instancias generados van aumentando de tamaño, y por tanto de dificultad, en los parámetros m y n . Dentro de cada grupo de instancias hacemos variar el parámetro s desde 0 hasta 19. Así, los cuatro grupos de instancias corresponden a los valores $(m,n) = (10,5)$, $(m,n) = (15,7)$, $(m,n) = (20,10)$ y $(m,n) = (25,12)$.

Los resultados para cada grupo de instancias se presentan en las tablas 1, 2, 3 y 4, respectivamente. En la columna *Valor alcanzado* mostramos el mejor valor de la función objetivo obtenido por el algoritmo, en *Mal colocados* mostramos el porcentaje de individuos que finalmente quedan mal colocados (fuera de sus sedes), en *Tiempo mejor* mostramos el tiempo, en segundos, en el que el algoritmo alcanza el mejor valor y en *Tiempo total* el tiempo de ejecución del algoritmo.

| Instancia | Valor alcanzado | Mal colocados (%) | Tiempo mejor | Tiempo total |
|-----------|-----------------|-------------------|--------------|--------------|
| 10_5_0 | 5.012 | 2 | 0.64 | 2.84 |
| 10_5_1 | 1 | 1 | 0.61 | 1.71 |
| 10_5_2 | 1.341 | 3 | 0.56 | 1.33 |
| 10_5_3 | 0.632 | 0.5 | 0.41 | 0.99 |
| 10_5_4 | 2.166 | 4 | 0.37 | 0.86 |
| 10_5_5 | 2.088 | 2 | 0.36 | 0.67 |
| 10_5_6 | 3.298 | 4 | 0.52 | 0.82 |
| 10_5_7 | 1.253 | 0.5 | 0 | 0.87 |
| 10_5_8 | 3.893 | 4.5 | 0.62 | 0.78 |
| 10_5_9 | 0 | 0 | 0 | 0.38 |
| 10_5_10 | 0 | 0 | 0 | 0.50 |
| 10_5_11 | 0 | 0 | 0 | 0.66 |
| 10_5_12 | 2.8 | 3.5 | 0.48 | 0.52 |
| 10_5_13 | 0 | 0 | 0 | 0.53 |
| 10_5_14 | 0 | 0 | 0 | 0.43 |
| 10_5_15 | 3.354 | 2.5 | 0.46 | 0.62 |
| 10_5_16 | 0 | 0 | 0 | 0.64 |
| 10_5_17 | 0 | 0 | 0 | 0.72 |
| 10_5_18 | 1.104 | 0.5 | 0.49 | 0.60 |
| 10_5_19 | 0 | 0 | 0 | 0.38 |

Tabla 1. Resultados obtenidos para el conjunto de instancias $(m,n)=(10,5)$.

En la Tabla 1 se aprecia, como era esperable, que el valor alcanzado tiende a mejorar a medida que la holgura, s , aumenta. Es más, en algunos problemas el valor de la función objetivo conseguido es cero, obteniéndose por tanto un 100% de éxito en las asignaciones de los despachos. No obstante, el valor alcanzado puede empeorar para valores de s grandes debido a que otros parámetros como el número de despachos por planta es también determinante a la hora de obtener un reparto óptimo de los espacios disponibles.

| Instancia | Valor alcanzado | Mal colocados (%) | Tiempo mejor | Tiempo total |
|-----------|-----------------|-------------------|--------------|--------------|
| 15_7_0 | 4.539 | 2 | 7.83 | 13.23 |
| 15_7_1 | 2.148 | 1.33 | 0.37 | 6.19 |
| 15_7_2 | 3.267 | 1 | 0.47 | 4.27 |
| 15_7_3 | 1.683 | 1 | 0.82 | 3.11 |
| 15_7_4 | 0.962 | 1.33 | 0.51 | 2.94 |
| 15_7_5 | 0.6 | 0.33 | 0.37 | 2.02 |
| 15_7_6 | 6.974 | 3 | 0.56 | 1.88 |
| 15_7_7 | 2.543 | 1.33 | 0.42 | 2.08 |
| 15_7_8 | 0.761 | 0.33 | 0.30 | 1.41 |
| 15_7_9 | 0 | 0 | 0 | 0.43 |
| 15_7_10 | 0.5 | 0.33 | 0.5 | 1.93 |
| 15_7_11 | 0 | 0 | 0 | 0.87 |
| 15_7_12 | 0 | 0 | 0 | 0.52 |
| 15_7_13 | 0 | 0 | 0 | 0.80 |
| 15_7_14 | 0 | 0 | 0 | 0.55 |
| 15_7_15 | 0 | 0 | 0 | 1.06 |
| 15_7_16 | 0 | 0 | 0 | 0.36 |
| 15_7_17 | 0 | 0 | 0 | 0.46 |
| 15_7_18 | 1.8 | 3 | 0.76 | 0.91 |
| 15_7_19 | 0 | 0 | 0 | 0.46 |

Tabla 2. Resultados obtenidos para el conjunto de instancias $(m,n)=(15,7)$.

De nuevo, en la Tabla 2 se aprecian comportamientos similares a los obtenidos anteriormente. No obstante, merece la pena destacar que en esta ocasión los tiempos

requeridos son ligeramente superiores debido a la mayor dificultad de éstos (esto se aprecia con mayor claridad en las instancias de las Tablas 3 y 4).

| Instancia | Valor alcanzado | Mal colocados (%) | Tiempo mejor | Tiempo total |
|-----------|-----------------|-------------------|--------------|--------------|
| 20_10_0 | 13.466 | 11 | 19.09 | 85.41 |
| 20_10_1 | 5.683 | 2.25 | 8.80 | 32.04 |
| 20_10_2 | 5.375 | 3.25 | 17.02 | 21.28 |
| 20_10_3 | 6.200 | 3 | 11.01 | 13.94 |
| 20_10_4 | 3.002 | 3 | 4.32 | 11.2 |
| 20_10_5 | 10.136 | 6.5 | 2.55 | 11.33 |
| 20_10_6 | 3.4 | 2.5 | 0.46 | 8.49 |
| 20_10_7 | 0.6 | 1.5 | 0.4 | 6.058 |
| 20_10_8 | 1.788 | 2 | 0.42 | 6.32 |
| 20_10_9 | 1.7 | 1.25 | 0.44 | 5.57 |
| 20_10_10 | 8.9 | 4.75 | 0.38 | 6.64 |
| 20_10_11 | 13.336 | 5.5 | 0.46 | 6.48 |
| 20_10_12 | 0.9 | 9.5 | 3.54 | 5.41 |
| 20_10_13 | 0 | 0 | 0 | 0.32 |
| 20_10_14 | 5.4 | 2.25 | 0.56 | 3.99 |
| 20_10_15 | 2 | 4 | 0.49 | 3.95 |
| 20_10_16 | 0 | 0 | 0 | 0.41 |
| 20_10_17 | 0 | 0 | 0 | 0.31 |
| 20_10_18 | 0 | 0 | 0 | 0.45 |
| 20_10_19 | 10.351 | 6.25 | 1.06 | 4.09 |

Tabla 3. Resultados obtenidos para el conjunto de instancias $(m,n)=(20,10)$.

| Instancia | Valor alcanzado | Mal colocados (%) | Tiempo mejor | Tiempo total |
|-----------|-----------------|-------------------|--------------|--------------|
| 25_12_0 | 7.447 | 1.8 | 100.9 | 166.06 |
| 25_12_1 | 12.148 | 5.2 | 39.67 | 86.073 |
| 25_12_2 | 3.713 | 1.2 | 9.07 | 53.907 |
| 25_12_3 | 4.456 | 4.2 | 9.61 | 42.47 |
| 25_12_4 | 5.745 | 5.6 | 4.17 | 36.73 |
| 25_12_5 | 32.676 | 14.2 | 3.27 | 42.45 |
| 25_12_6 | 4.967 | 3 | 16.78 | 21.67 |
| 25_12_7 | 12.308 | 5.2 | 13.10 | 21.79 |
| 25_12_8 | 2.909 | 1 | 0.63 | 14.8 |
| 25_12_9 | 10.044 | 4.4 | 4.12 | 18.57 |
| 25_12_10 | 4.603 | 3.4 | 0.43 | 15.93 |
| 25_12_11 | 1.341 | 1.2 | 0.57 | 11.92 |
| 25_12_12 | 1.2 | 0.8 | 0.50 | 12.76 |
| 25_12_13 | 0.1 | 0.2 | 0.28 | 10.70 |
| 25_12_14 | 4.110 | 2.6 | 0.3 | 13.17 |
| 25_12_15 | 5.735 | 3.6 | 10.49 | 10.62 |
| 25_12_16 | 0 | 0 | 0 | 0.50 |
| 25_12_17 | 32.177 | 10.2 | 3.09 | 14.03 |
| 25_12_18 | 5.465 | 3.4 | 0.42 | 8.943 |
| 25_12_19 | 1.131 | 0.8 | 0.74 | 8.092 |

Tabla 4. Resultados obtenidos para el conjunto de instancias $(m,n)=(25,12)$.

Finalmente, en las Tablas 3 y 4 mostramos los resultados obtenidos para las instancias más complejas. Es apreciable tanto en los porcentajes de individuos mal colocados como en los tiempos requeridos para la obtención de la solución que a medida que el tamaño del problema crece, la complejidad aumenta debido a las múltiples combinaciones posibles. No obstante, hay que reseñar que el valor ideal deseable por todos los grupos (valor alcanzado = 0) no siempre es posible alcanzarlo y que, por tanto, los porcentajes tan bajos obtenidos en individuos mal colocados son muy destacables.

Estos resultados nos parecen prometedores, tanto en calidad de las soluciones como en tiempo de computación. Sin embargo, como ya se ha señalado, no existen resultados previos con los que compararlos u otros métodos conocidos para resolver este problema.

6. Aplicación a la Universidad Pablo de Olavide de Sevilla

La Universidad Pablo de Olavide (UPO) se funda en 1997 en Sevilla (España) sobre los cimientos de la antigua Universidad Laboral. Inicialmente, la UPO contó con tres edificios rehabilitados donde, sin ningún criterio de concentración, se fueron alojando los profesores los primeros años. Es más, con idea de no beneficiar a ningún departamento, podíamos encontrar a profesores de cualquiera de los departamentos existentes prácticamente en todas las plantas disponibles para despachos. Varios años más tarde y una vez que otro grupo de edificios habían sido también rehabilitados para aulas y despachos, la Universidad se plantea redistribuir a su plantilla bajo el criterio de la mayor concentración posible, al menos para el profesorado que trabaja a tiempo completo en dicha Universidad. En ese momento, la UPO contaba con 6 edificios para la distribución del profesorado. Cada edificio cuenta con tres plantas para despachos y unos 25 puestos de trabajo de media por planta. Además, la UPO contaba con un total de 9 departamentos con un total aproximado de 425 profesores a tiempo completo. Finalmente, la holgura que conseguimos para nuestro problema fue únicamente de 2 despachos. Por tanto, nuestro problema era del tipo 9_6_2. Obsérvese que, dado que hay más departamentos que edificios, varios de los departamentos se verán obligados a compartir edificio.



Figura 1. Plano general de la Universidad Pablo de Olavide.

Dado que el criterio que se iba a seguir era el de la concentración del profesorado de un mismo departamento, la valoración que seguimos para cada uno de los despachos fue la de distancia a la sede. Así, $w_{g,h}^p$ representa la distancia del despacho h al edificio p si éste fuese la sede del departamento g .

Una vez introducidos los datos del problema, el algoritmo encontró una buena solución en 3.7 segundos, quedando la distribución de la siguiente manera: Los departamentos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 alcanzaron el 100% en la colocación del su profesorado en los edificios donde se encuentran sus sedes, mientras que los departamentos 8 y 9 alcanzaron el

71,05% y 75% respectivamente. De manera global, concluimos que el 96,94% del profesorado se encuentra en el edificio de su sede.

7. Conclusiones

Presentamos un algoritmo tabú para un problema de distribución de espacios en el que debemos distribuir habitaciones entre personas divididas en grupos de tal forma que los miembros de un mismo grupo estén lo más cerca posible a la sede de su grupo. Es por esto que la valoración que cada grupo dará a una habitación variará dependiendo de la sede de éste.

El algoritmo propuesto es un metaheurístico de búsqueda local basado en la búsqueda tabú. Intercalamos apropiadamente distintas fases de acercamiento e intensificación. En la fase de acercamiento consideramos movimientos simples para la mejora inmediata de la solución, mientras que para la fase de intensificación consideramos movimientos del tipo “cambio de sedes” para explorar otras estructuras sobre la base de una misma solución.

Contrastamos el algoritmo con 80 instancias cuya dificultad aumenta gradualmente y donde comprobamos que la eficiencia del algoritmo es alta. Lógicamente, mientras mayor holgura tenga el problema, es decir, mayor diferencia entre la oferta y la demanda, la solución que encontramos es de mejor calidad.

Finalmente, aplicamos el algoritmo al caso real que nos presenta la Universidad Pablo de Olavide de Sevilla para la óptima distribución del profesorado bajo el criterio de la concentración de éste de los departamentos que la componen. Aunque el problema tiene únicamente una holgura de dos despachos, el algoritmo nos proporciona una solución con un nivel de concentración global del profesorado del 96,24%.

Referencias

- [1] Burke, E. y Carter, M., *Practice and Theory of Automated Timetabling*, Vol. II, Selected Papers of the First International Conference, Edinburgh, UK, Ed. Springer, 1998.
- [2] Carter, M., *A Lagrangian Relaxation Approach to the Classroom Assignment Problem*, *INFOR*, 27, N° 2, 1989.
- [3] Ciriani, V., Pisanti, N. y Bernasconi, A., *Room allocation: a polynomial subcase of the quadratic assignment problem*, *Discrete Applied Mathematics*, 144, pp. 263-269, 2004.
- [4] Díaz, J. A. y Fernández, E., *A Tabu search heuristic for the generalized assignment problem*, *European Journal of Operational Research*, 132, pp. 22-38, 2001.
- [5] Gandibleux, X., Morita, H. y Katoh, N., *Use of a genetic heritage for solving the assignment problem with two objectives*. En *Evolutionary Multi-Criterion Optimization* (C. Fonseca, P. Fleming, E. Zitzler, K. Deb, L. Thiele Eds.). EMO 2003, Second International Conference, Faro, Portugal, April 2003 Proceedings. *Lecture Notes in Computer Sciences* 2632, pp. 43-57, Springer.
- [6] Gandibleux, X., Morita, H. y Katoh, N., *A population-based metaheuristic for solving assignment problems with two objectives*, in *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, por aparecer.
- [7] M. Garey y D. Johnson, *Computers and Intractability*. New York: Freeman, 1979.

- [8] Glover, F., *Future Paths for Integer Programming and links to artificial intelligence*, Computers & Operational Research, 5, pp. 533-549, 1986.
- [9] Glover, F. y Laguna, M., *Tabu Search*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997.
- [10] Herault, L. y Privault, C., *Solving a Real World Assignment Problem with a Metaheuristic*, Journal of Heuristics, 4, pp. 383-398, 1998.
- [11] Kelly, J. P., Laguna, M. y Glover, F., *A Study on Diversification Strategies for the Quadratic Assignment Problem*, Computers and Operations Research, 21, no. 8, pp. 885-893, 1994.
- [12] Laguna, M., Kelly, J. P., González Velarde, J. L. y Glover, F., *Tabu Search for the Multilevel Generalized Assignment Problem*, European Journal of Operational Research, 82, pp. 176-189, 1995.
- [13] López García, L., Pérez de la Torre, L., Rodríguez Romano, N. y Posada Bolívar, A., *El problema de asignación de salones: solución con la heurística Búsqueda Tabú*, Actas del 2º Congreso Español de Metaheurísticas, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados (MAEB), Gijón, 2003.
- [14] Middendorf, M., Freischle, F. y Schmeck, H., *Multi Colony Ant Algorithms*, Journal of Heuristics, 8, pp. 305-320, 2002.
- [15] Osorio, M.A. y Laguna, M., *Logic Cuts for Multilevel Generalized Assignment Problems*, European Journal of Operational Research, 151, pp. 238-246, 2003.
- [16] Yagiura, M., Iwasaki, S., Ibaraki, T. y Glover, F., *A very large-scale neighborhood search algorithm for the multi-resource generalized assignment problem*, Discrete Optimization, 1, pp. 87-98, 2004.
- [17] Wang, Y.-Z., *An application of genetic algorithm methods for teacher assignment problem*, Expert Systems with Applications, 22, pp. 295-302, 2002.

Análisis input-output de descomposición estructural aplicado a los casos de Andalucía y Madrid

RUEDA CANTUCHE, JOSÉ MANUEL

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica.

Universidad Pablo de Olavide

Correo electrónico: jmruecan@upo.es

RESUMEN

El proceso de comparación estructural de una economía a través de la producción, el valor añadido bruto en términos absolutos y el empleo arroja una serie de interrogantes sobre las distintas fuentes de variación estructurales en los procesos productivos a nivel sectorial entre dos regiones. El análisis input-output de descomposición estructural estudia dichas fuentes a partir de cuatro tipos diferentes de causas: diferencias en procesos tecnológicos, en demanda final interior, en comercio exterior y en la productividad laboral. En este trabajo se aplica una variante del procedimiento propuesto por Skolka (1989) para el análisis de las estructuras productivas de una misma región en distintos momentos del tiempo, que consiste en la realización de un análisis interregional (entre regiones) dentro de un mismo período, a saber, entre una región como la Comunidad de Madrid, caracterizada por ser una economía de aglomeración, y Andalucía, una de las regiones menos desarrolladas en España.

Palabras clave: análisis input-output; cambio estructural; economía regional.

Clasificación JEL: R11; D57; C67.

2000MSC: 93D25.

Input-Output Structural Decomposition for Andalusia and Madrid (Spain)

ABSTRACT

The structural comparison of an economy, as represented, for example, by variations in the level of outputs, value added and of employment, raises questions about the sources of structural differences between two different regions through different production processes of individual industries. Input-output structural decomposition can ascribe the source of these differences to four kinds of causes: production technological processes, domestic final demand, foreign trade and labour productivity. Through input-output analysis, this paper develops a variant of Skolka's (1989) procedure for intertemporal structural analysis of a region, which consists in an inter-regional analysis for a predetermined period of time between Andalusia, one of the less developed regions in Spain, and the Community of Madrid, which is a good example of an agglomeration economy.

Keywords: input-output analysis; structural change; regional economy.

JEL classification: R11; D57; C67.

2000MSC: 93D25.



1. Introducción

Las diferencias estructurales que se pueden producir entre dos economías a nivel sectorial pueden analizarse a través de la producción, del valor añadido bruto y del empleo de cada una de ellas, no sin arrojar determinadas incógnitas sobre los orígenes y/o causas de dichas diferencias. No obstante, el *análisis input-output de descomposición estructural* permite identificar estas fuentes de variación en cuatro categorías diferentes: diferencias en procesos tecnológicos, en la demanda final interior, en el comercio exterior y en la productividad del trabajo.

Según el trabajo de Skolka (1989), el análisis del cambio o variación estructural, ya sea de manera intertemporal en el primer caso o entre regiones en el segundo, está fuertemente relacionado con dos aspectos fundamentales:

- (a) Las fuentes de los cambios o variaciones en las posiciones de mercado de los distintos sectores. El estudio de este aspecto lo abordaremos aplicando el análisis input-output de descomposición estructural sobre la lógica del modelo input-output a las diferencias en la producción, el valor añadido y el empleo propiciadas por distintos procesos tecnológicos, variaciones en la demanda final interior, el comercio exterior y la productividad del trabajo.
- (b) Las divergencias estructurales motivadas por la acción directriz de los gobiernos en la realización de sus respectivas políticas económicas. Este aspecto no sólo es difícil de estudiar sino que se escapa a nuestras pretensiones en este documento, por lo que centraremos nuestra atención en el apartado anterior.

El objetivo de este documento no es analizar el cambio estructural a lo largo de un periodo en una región o país determinado sino analizar dos estructuras productivas tan dispares como son la de la Comunidad de Madrid y la de Andalucía. Por ello, sería más correcto hablar a partir de ahora en términos de variaciones o diferencias más que de cambios, puesto que ello implicaría en alguna medida el transcurso del tiempo. Por

un lado, tenemos una Comunidad Autónoma uniprovincial cuya capital de provincia es precisamente una de las ciudades más grandes y abiertas del país y en la que se desarrollan, sobre todo, economías de aglomeración en torno al sector servicios. Por otro lado, tenemos una economía, como la andaluza, formada por ocho provincias y que figura en los últimos puestos en términos de desarrollo de España e incluso de toda la Unión Europea. En definitiva, nuestro objetivo será establecer las causas y fuentes que originan la diferencia en términos de producción, valor añadido y empleo que separan una estructura productiva caracterizada como una economía de aglomeración y una economía poco desarrollada.

En el siguiente apartado se explican los aspectos metodológicos sobre el análisis de descomposición estructural que van a servir de marco para el análisis de resultados, que se exponen en la sección tercera para los casos de Andalucía y Madrid. Finalmente, en el cuarto apartado se expondrán las conclusiones a las que se llegan a la vista de los resultados obtenidos.

2. Análisis input-output de descomposición estructural: metodología

El análisis de descomposición estructural puede definirse según Rose y Miernyk (1988) como un método para distinguir los grandes cambios en una economía por medio de un estudio estático comparativo de un conjunto de parámetros clave. Sus orígenes se remontan al clásico trabajo de Leontief (1941) sobre la estructura económica de los Estados Unidos. Más tarde, en los años sesenta, autores como Chenery, Shishido y Watanabe (1963) y Carter (1960) desarrollaron aún más este método. En nuestro trabajo aplicaremos un conjunto de ecuaciones que Skolka (1984 y 1989) propone en uno de sus principales trabajos para la economía austríaca, aunque la aplicación se establezca para comparaciones interregionales (Fay y Fink, 1976).

La disparidad entre dos estructuras productivas cualesquiera se puede presentar a través de la producción, el valor añadido y el empleo. De tal manera que para cada sector obtendremos lo siguiente:

$$\Delta x_j = x_j^M - x_j^A \quad (1)$$

$$\Delta v_j = v_j^M - v_j^A \quad (2)$$

$$\Delta I_j = I_j^M - I_j^A \quad (3)$$

donde x hará referencia a la producción, v al valor añadido e I al número de empleados en cada sector j para Andalucía y Madrid.

A su vez podemos definir las siguientes variables: la proporción para cada sector del valor añadido bruto sobre su producción total ($a_{v(j)}$) y la proporción del número de empleados sobre el valor añadido bruto total para cada sector ($a_{I(j)}$). De esta manera, junto con los postulados del modelo input-output de Leontief sobre la producción en función de la demanda final obtendremos las siguientes expresiones a partir de (1), (2) y (3). Esto es,

$$\Delta x_j = x_j^M - x_j^A = [I - A^M]^{-1} Y^M - [I - A^A]^{-1} Y^A \quad (4)$$

$$\Delta v_j = v_j^M - v_j^A = a_{v(j)}^M x_j^M - a_{v(j)}^A x_j^A \quad (5)$$

$$\Delta I_j = I_j^M - I_j^A = a_{I(j)}^M v_j^M - a_{I(j)}^A v_j^A \quad (6)$$

siendo para Madrid por ejemplo:

$$(I - A^M) X^M = Y^M$$

$$(I - A^M)^{-1} Y^M = X^M$$

donde X^M es el vector columna de producción, Y^M el vector columna de demanda final interior (excluidas las importaciones respectivas), A^M la matriz de coeficientes técnicos interior correspondiente e I la matriz identidad.

Asimismo, las expresiones (4), (5) y (6) pueden transformarse de la manera siguiente:

$$\Delta x_j = x_j^M - x_j^A = \left[(I - A^M)^{-1} - (I - A^A)^{-1} \right] Y^A + (I - A^M)^{-1} (Y^M - Y^A) \quad (7)$$

$$\Delta v_j = v_j^M - v_j^A = \left[a_{v(j)}^M - a_{v(j)}^A \right] x_j^A + a_{v(j)}^M \left[x_j^M - x_j^A \right] \quad (8)$$

$$\Delta I_j = I_j^M - I_j^A = \left[a_{I(j)}^M - a_{I(j)}^A \right] v_j^A + a_{I(j)}^M \left[v_j^M - v_j^A \right] \quad (9)$$

de manera que se pueden identificar las variaciones de producción, valor añadido y empleo como una suma ponderada de aquellas diferencias originadas por los coeficientes técnicos (de producción, empleo o valor añadido) y aquellas otras procedentes, según el caso, de variaciones en la demanda final, la producción y el valor añadido. Ciertamente, las ponderaciones que se obtienen en cada uno de los casos no dejan de ser meras imposiciones del propio método matemático. Esto es, en el caso temporal resulta evidente que el periodo 1 es posterior al periodo 0 y estudiamos la diferencia o cambio estructural del primero respecto al segundo. Sin embargo, no está totalmente claro que, al tomar diferencias entre regiones en un mismo momento del tiempo, sepamos distinguir quién difiere de quién. Por ello, en este documento hemos partido de la hipótesis a priori de que se estudian las diferencias estructurales de Madrid respecto a Andalucía y como consecuencia se establecen las ponderaciones que en las expresiones (7), (8) y (9) figuran.

En la expresión (7) las diferencias en los valores de producción sólo vienen explicadas a partir de la matriz de coeficientes técnicos respectiva de Andalucía y Madrid y a partir de la demanda final. En la expresión (8) las variaciones en el valor añadido vendrán originadas por las diferencias de producción de (7) y la contribución del valor añadido por unidad producida de cada sector. Por último, en la expresión (9) obtendremos las variaciones en el empleo en virtud de las diferencias de valor añadido (8) y las variaciones de la productividad en el empleo de cada rama productiva. No

obstante, como es evidente, dichos factores no son los únicos que pueden explicar las diferencias de valor añadido, empleo y producción existentes entre dos estructuras productivas. En nuestro análisis, y siguiendo a Skolka (1989), desagregaremos aún más los factores que integran la demanda final para que en la ecuación (7) se obtengan variaciones de producción debidas a diferencias en los procesos tecnológicos, en la composición de bienes y servicios dentro de la demanda final y las exportaciones, la composición de la demanda final (consumo frente a formación bruta de capital), la dependencia importadora en general, entre otros.

El proceso de descomposición estructural que hemos seguido (Skolka, 1989) parte de la especificación inicial del modelo de demanda de Leontief. Esto es, para Madrid por ejemplo:

$$\begin{aligned} (I - A^M) X^M &= Y^M \\ (I - A^M)^{-1} Y^M &= X^M \end{aligned}$$

De esta manera, la producción para cada sector en Andalucía y Madrid se puede establecer matricialmente de la forma siguiente:

$$\left[I - A^{M(d)} \right]^{-1} Y_{(d)}^M = X^M \quad (10)$$

$$\left[I - A^{A(d)} \right]^{-1} Y_{(d)}^A = X^A \quad (11)$$

donde (d) hace referencia al carácter interior de los valores de producción, demanda final y matriz de coeficientes técnicos.

Así, la demanda final regional de Andalucía, por ejemplo, puede expresarse en función de dos grupos de componentes o fuentes de variación: las exportaciones y la demanda final interior formada por el consumo y la formación bruta de capital ($k=2$). Esto es,

$$Y_{(d)i}^A = Y_{(d)ik}^A + Y_{(d)ie}^A \quad (12)$$

donde obtendremos la demanda final interior en Andalucía del sector i de cada componente k sumada a las exportaciones andaluzas del sector i correspondiente.

Si a la expresión (12) le sumamos y restamos la siguiente expresión:

$$Y_{(d)ik}^A \left(\frac{E_A}{D_A} \right)$$

en la que E_A y D_A son las exportaciones y la demanda final total de Andalucía, obtendremos:

$$Y_{(d)i}^A = Y_{(d)ik}^A + Y_{(d)ie}^A + Y_{(d)ik}^A \left(\frac{E_A}{D_A} \right) - Y_{(d)ik}^A \left(\frac{E_A}{D_A} \right) \quad (13)$$

que agrupando convenientemente:

$$Y_{(d)i}^A = Y_{(d)ie}^A + \frac{Y_{(d)ik}^A}{D_A} (D_A + E_A) - \frac{Y_{(d)ik}^A}{D_A} (E_A) \quad (14)$$

Por otro lado, sabemos que la demanda final andaluza total se compone de las exportaciones (E_A) y de la demanda final interior (D_A), con lo que tendremos:

$$Y_{(t)}^A = D_A + E_A \quad (15)$$

y sustituyendo en (14):

$$Y_{(d)i}^A = Y_{(d)ie}^A + \frac{Y_{(d)ik}^A}{D_A} Y_{(t)}^A - \frac{Y_{(d)ik}^A}{D_A} (E_A) \quad (16)$$

Por último, si en cada sumando de la expresión (16) multiplicamos y dividimos por las cantidades convenientes obtendremos:

$$Y_{(d)i}^A = Y_{(d)ie}^A \left(\frac{E_A Y_{(t)}^A}{E_A Y_{(t)}^A} \right) + \frac{Y_{(d)ik}^A}{D_A} Y_{(t)}^A \left(\frac{Y_{(t)k}^A}{Y_{(t)k}^A} \right) - \frac{Y_{(d)ik}^A}{D_A} (E_A) \left(\frac{Y_{(t)}^A Y_{(t)k}^A}{Y_{(t)}^A Y_{(t)k}^A} \right) \quad (17)$$

donde $Y_{(t)k}^A$ hace referencia al valor total del componente k de la demanda final interior en Andalucía. Así, si construimos en forma matricial los siguientes vectores:

$$B_{(d)}^D = \begin{bmatrix} \frac{Y_{(d)11}^A}{Y_{(t)1}^A} & \dots & \frac{Y_{(d)1k}^A}{Y_{(t)k}^A} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{Y_{(d)n1}^A}{Y_{(t)1}^A} & \dots & \frac{Y_{(d)nk}^A}{Y_{(t)k}^A} \end{bmatrix}_{(nxk)}$$

$$B_{(d)}^E = \begin{bmatrix} \frac{Y_{(d)le}^A}{E_A} \\ \vdots \\ \frac{Y_{(d)ne}^A}{E_A} \end{bmatrix}_{(nx1)}$$

$$C_{(d)} = \begin{bmatrix} \frac{Y_{(t)1}^A}{D_A} \\ \vdots \\ \frac{Y_{(t)k}^A}{D_A} \end{bmatrix}_{(k \times 1)}$$

y siendo además:

$$C_{(d)}^E = \frac{E_A}{Y_{(t)}^A}$$

podemos establecer ya a partir de (17) las siguientes expresiones para Andalucía y, análogamente, para Madrid:

$$\left[I - A^{A(d)} \right]^{-1} \left[B_{(d)}^D C_{(d)} \left(1 - C_{(d)}^E \right) + B_{(d)}^E C_{(d)}^E \right]^A Y_{(t)}^A = X^A \quad (18)$$

$$\left[I - A^{M(d)} \right]^{-1} \left[B_{(d)}^D C_{(d)} \left(1 - C_{(d)}^E \right) + B_{(d)}^E C_{(d)}^E \right]^M Y_{(t)}^M = X^M \quad (19)$$

Por todo ello, tanto la demanda final como los inputs intermedios se ponderarán según la ecuación (7), la que se traduce finalmente en (18) y (19); además, se diferenciarán los efectos derivados de las variaciones en la demanda final tanto total como interior y de exportaciones; y se tomarán en cuenta asimismo las diferencias motivadas por variaciones en la composición de bienes y servicios que constituyen las demandas finales interiores así como las ponderaciones de cada componente de las demandas finales respectivas. Finalmente, aplicamos el procedimiento por etapas propuesto por Skolka (1989) para ir desgranando las distintas causas u orígenes de las diferencias de producción, de valor añadido y de empleo (véanse expresiones (18) y (19), (8) y (9), respectivamente) entre las regiones de Andalucía y Madrid. Este procedimiento presenta un conjunto de ecuaciones que progresivamente van

incorporando todos aquellos posibles efectos que puedan originar diferencias entre las dos regiones. El punto de partida se refiere, en el caso de la producción, a la ecuación (18) y se van alterando en cada una de las etapas los distintos componentes que la forman para alcanzar al final la ecuación (19). Adicionalmente, se calculan las variaciones respecto del valor añadido, según la ecuación (8), y del empleo, según la ecuación (9).

3. Principales resultados

Para llevar a cabo este trabajo hemos tenido que realizar algunos ajustes previos. En primer lugar, si el análisis estructural es nuestro objetivo, no es relevante manejar dos Tablas Input-Output de años distintos cuando la diferencia entre ellos es sólo de un año. En segundo lugar, hemos tenido que realizar una correspondencia entre las ramas de actividad de unas y otras tablas para poder homogeneizarlas y llegar a algunas conclusiones comparables. Con todo ello, los resultados que se presentan obedecen a los siguientes tipos de variaciones estructurales:

- (a) Diferencias en los procesos tecnológicos; a través de la estructura de inputs intermedios y de la participación del valor añadido sobre la producción.
- (b) Diferencias en la demanda final interior; a través de la composición de bienes y servicios de cada componente de la demanda final interior y del peso de cada uno de dichos componentes sobre la demanda final.
- (c) Diferencias en las exportaciones; a través de la contribución de las exportaciones al diferencial total de demanda final, de la composición de bienes y servicios exportados y de la proporción que significan las exportaciones sobre la demanda final.
- (d) Diferencias en la dependencia importadora; a través de los inputs intermedios y de las importaciones cuyo destino directo sea la demanda final.
- (e) Contribución de la demanda final interior al diferencial total de demanda final.
- (f) Diferencias en la productividad laboral.

Como se puede apreciar en la tabla que figura en el Anexo, la diferencia en términos de valor añadido bruto a precios básicos (VABpb) entre Madrid y Andalucía es de 2,3 billones de pesetas a favor de la primera. En lo que respecta al empleo, la Comunidad de Madrid ocupa a casi el mismo número de empleados que la Comunidad Andaluza aun siendo esta última en extensión casi ocho veces la primera. En este caso, Andalucía tiene casi 93.000 ocupados más que Madrid para esos años.

Asimismo, en la Tabla 1 se muestran los principales resultados de la descomposición de las diferencias de valor añadido y empleo por cada tipo de variación estructural especificado.

| TABLA 1. DESCOMPOSICIÓN ESTRUCTURAL: RESULTADOS | | |
|--|--|---|
| | VABpb (billones de pesetas) | Empleo (miles de personas) |
| Madrid | 11,642 | 1.735,500 |
| Andalucía | 9,301 | 1.828,386 |
| Diferencia | 2,341 | -92,886 |
| Diferencias en procesos tecnológicos | | |
| Inputs intermedios | -0,463 | -95,690 |
| Participación en el VABpb | 0,849 | -95,065 |
| Diferencias en la demanda final interior | | |
| Composición de bienes y servicios | 0,051 | -37,751 |
| Peso de cada componente de la demanda final | 0,025 | 2,875 |
| Diferencias en las exportaciones | | |
| Contribución de las exportaciones a las diferencias en la demanda final total | 2,247 | 445,744 |
| Composición de bienes y servicios exportados | 0,376 | -168,955 |
| Peso de las exportaciones sobre la demanda final | 0,788 | 63,002 |
| Diferencias en la dependencia importadora | | |
| Inputs intermedios | -0,275 | -174,106 |
| Demanda final | -0,378 | -139,220 |
| Contribución de la demanda final interior a las diferencias en la demanda final total | -0,879 | -130,341 |
| Diferencias en la productividad laboral | | 236,621 |
| Efectos totales de factores internos | -0,417 | -119,351 |
| Efectos totales de factores externos | 2,758 | 26,465 |
| Diferencia total | 2,341 | -92,886 |

Fuente: Elaboración propia. VABpb =Valor Añadido Bruto a precios básicos.

El componente tecnológico o la diferencia de las tecnologías de los procesos productivos entre las respectivas Comunidades Autónomas proporciona efectos en sentido contrario, dependiendo si hablamos de los efectos procedentes de los coeficientes técnicos de la matriz de inputs intermedios (-0,463 billones de pesetas) o de la estructura del valor añadido bruto sectorial (0,849 billones de pesetas).

Las diferencias procedentes de variaciones en la demanda final interior establecen su importancia fundamentalmente en la distinta composición de los bienes y servicios demandados más que en una variación en la participación del consumo y la formación bruta de capital sobre la demanda final interior. El efecto total es positivo en un valor de 0,076 billones de pesetas.

El comercio exterior es el factor clave para explicar las diferencias de valor añadido entre Madrid y Andalucía. Con respecto a las exportaciones, la contribución de las mismas al crecimiento de la demanda final total presenta un efecto sobre dicha diferencia de 2,247 billones de pesetas, seguido de la importancia que sobre la demanda final total obtienen las exportaciones para cada una de las estructuras productivas (0,788 billones) y la diferente composición de los bienes y servicios exportados por una u otra región (0,376 billones).

En lo que respecta a las importaciones tanto de inputs intermedios como de bienes y servicios destinados a la demanda final, las diferencias de valor añadido no se explican por la mayor o menor dependencia importadora, dadas las cifras negativas manejadas en la Tabla 1.

En definitiva, el diferencial de valor añadido entre Madrid y Andalucía se basa fundamentalmente en el comercio exterior, y en particular, en las exportaciones (2,758 billones de pesetas) más que en factores de demanda interior (-0,417 billones de pesetas). Además, es necesario señalar que cuando en este documento se habla de exportaciones e importaciones se refiere al punto de vista regional, de tal forma que la salida de productos desde Madrid hacia otras comunidades españolas u otros países se

consideraría exportación y la entrada de productos a Andalucía procedentes de otros puntos del país u otros países serían importaciones.

En términos de empleo es fácil constatar a partir de la Tabla 1 cómo el diferencial de número de empleados a favor de Andalucía obedece esencialmente a factores de demanda interna más que al componente exterior (en el lado de las exportaciones) o la productividad del trabajo. Conviene resaltar por último que el empleo en Andalucía respecto a Madrid depende, en gran medida, de cambios en la dependencia importadora tanto de inputs intermedios como de bienes y servicios destinados a la demanda final.

4. Conclusiones

Este documento plantea el estudio comparativo de las estructuras productivas de dos economías utilizando una variante del procedimiento de descomposición estructural planteado por Skolka (1989), esto es, realizándolo desde un punto de vista interregional¹ y no intertemporal. En el caso de las regiones de Andalucía y la Comunidad de Madrid, las diferencias en valor añadido bruto se fundamentan en el componente de comercio exterior más que en la demanda final interior, siendo al contrario en el caso del diferencial de empleo total entre las mismas. Asimismo, también tienen incidencias importantes en estas diferencias la dependencia importadora tanto de inputs intermedios como de productos destinados a la demanda final.

Sin embargo, el análisis input-output de descomposición estructural posee ciertas limitaciones implícitas al método de las que somos conscientes. Además, no debemos olvidar que el carácter estratégico de Madrid como capital de España respecto a la centralización de las empresas más importantes del país puede tener un efecto distorsionador en el ámbito de las exportaciones, atribuyéndoles una mayor importancia de la que se derivaría en caso contrario y consecuentemente sesgando las causas de las

¹ J. Skolka menciona trabajos similares de naturaleza interregional llevados a cabo por Balassa (1979) y Fay y Fink (1976).

diferencias respecto a Andalucía hacia el comercio exterior. Sin embargo, este sería motivo para otro estudio posterior.

Agradecimientos

El autor quiere expresar su agradecimiento a dos evaluadores anónimos, cuyas sugerencias contribuyeron notablemente a la mejora de la calidad del resultado final así como a todos aquellos que realizaron comentarios y sugerencias en la XII Conferencia de la Asociación Internacional de Input-Output (Macerata, 2002) y en las VIII Jornadas de ASEPUMA (Sevilla, 2000).

Bibliografía

- Balassa, B. (1979): “Accounting for Economic Growth: the case of Norway”, *Oxford Economic Papers* 41(3), 415-436.
- Carter, A. (1960): *Structural Change in the American Economy*, Cambridge: Harvard University Press.
- Chenery, H.B., Shishido, S. y Watanabe, T. (1963): “The Patterns of Japanese Growth, 1914-1954”, *Econometrica* 30(1), 98-139.
- Consejería de Hacienda de Madrid (Instituto de Estadística) (1999): *Tabla Input-Output y Contabilidad Regional de la Comunidad de Madrid 1996*. Madrid: Consejería de Hacienda de Madrid.
- Fay, J. y Fink, G. (1976): *Ein Input-Output-Vergleich der Brutto-Produktionsstruktur nach Wirtschaftsbereichen zwischen Osterreich und Ungarn*, Wiener Institut fuer Internationale Wirtschaftsvergleiche, Viena.
- Instituto de Estadística de Andalucía (1999): *Sistema de Cuentas Económicas de Andalucía. Marco Input-Output 1995*. Sevilla: Instituto de Estadística de Andalucía, vol. I y II.
- Leontief, W. (1941): *The Structure of the American Economy*. Nueva York: Oxford University Press.

- Pulido, A. y Fontela, E. (1993): *Análisis input-output. Modelos, datos y aplicaciones*. Madrid: Pirámide.
- Rose, A. y Miernyk, W. (1989): "Input-Output Analysis: the First Fifty years". *Economic Systems Research* 1(2), 229-271.
- Skolka, J. (1984): "Input-Output Anatomy of Changes in Employment Structure in Austria between 1964 and 1976", *Empirica (Austrian Economic Papers)* 11(2), 205-233.
- Skolka, J. (1989): "Input-Output Structural Decomposition Analysis for Austria", en Kurz, H.D., Dietzenbacher, E. y Lager, C. (1998): *Input-Output Analysis*. Edward Elgar. Cheltenham, Reino Unido, vol.III, 135-156.

ANEXO

VALOR AÑADIDO Y EMPLEO POR SECTORES: ANDALUCÍA (1995) Y MADRID (1996)

| | ANDALUCÍA | | MADRID | | Diferencia absoluta del VABpb | Diferencia en porcentaje del VABpb | Diferencia absoluta del empleo | Diferencia en porcentaje del empleo |
|--|-------------------|-------------------------|-------------------|-------------------------|-------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| | Empleo (ocupados) | VABpb(*) (millones pts) | Empleo (ocupados) | VABpb(*) (millones pts) | | | | |
| Agricultura, ganadería, caza, silvicultura y pesca | 210.885 | 715.971 | 18.900 | 20.368 | -695.603 | -97,16% | -191.985 | -91,04% |
| Industrias extractivas | 6.047 | 34.788 | 3.600 | 27.674 | -7.114 | -20,45% | -2.447 | -40,47% |
| Metalurgia | 4.365 | 71.464 | 4.100 | 30.806 | -40.658 | -56,89% | -265 | -6,07% |
| Cemento y derivados | 7.259 | 54.462 | 5.900 | 41.016 | -13.446 | -24,69% | -1.359 | -18,72% |
| Productos cerámicos, ladrillos, etc. Vidrio y piedra | 11.810 | 41.582 | 9.600 | 52.534 | 10.952 | 26,34% | -2.210 | -18,71% |
| Productos químicos básicos | 4.177 | 70.521 | 1.500 | 8.556 | -61.965 | -87,87% | -2.677 | -64,09% |
| Otros productos químicos | 4.032 | 18.280 | 24.000 | 193.591 | 175.311 | 959,03% | 19.968 | 495,24% |
| Productos metálicos | 19.918 | 60.692 | 30.300 | 113.609 | 52.917 | 87,19% | 10.382 | 52,12% |
| Maquinaria y equipo mecánico | 6.840 | 25.023 | 20.000 | 109.403 | 84.380 | 337,21% | 13.160 | 192,40% |
| Máquinas de oficina, precisión y óptica | 2.189 | 13.576 | 18.300 | 80.227 | 66.651 | 490,95% | 16.111 | 736,00% |
| Maquinaria y material eléctrico | 3.879 | 26.025 | 10.400 | 56.630 | 30.605 | 117,60% | 6.521 | 168,11% |
| Material electrónico, equipos de radio y TV | 1.588 | 9.269 | 16.000 | 106.786 | 97.517 | 1052,08% | 14.412 | 907,56% |
| Fabricación de vehículos de motor | 5.931 | 50.603 | 19.100 | 124.314 | 73.711 | 145,67% | 13.169 | 222,04% |

VALOR AÑADIDO Y EMPLEO POR SECTORES: ANDALUCÍA (1995) Y MADRID (1996) – (Continuación)

| | ANDALUCÍA | | MADRID | | Diferencia absoluta del VABpb | Diferencia en porcentaje del VABpb | Diferencia absoluta del empleo | Diferencia en porcentaje del empleo |
|---|-------------------|-------------------------|-------------------|-------------------------|-------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| | Empleo (ocupados) | VABpb(*) (millones pts) | Empleo (ocupados) | VABpb(*) (millones pts) | | | | |
| Construcción de otro material de transporte | 11.468 | 57.530 | 10.100 | 54.253 | -3.277 | -5,70% | -1.368 | -11,93% |
| Industria cárnica | 7.382 | 48.182 | 4.700 | 20.091 | -28.091 | -58,30% | -2.682 | -36,33% |
| Industrias lácteas | 3.141 | 25.895 | 2.100 | 9.643 | -16.252 | -62,76% | -1.041 | -33,14% |
| Molinería, pan, galletas, etc. | 20.428 | 67.958 | 9.900 | 34.188 | -33.770 | -49,69% | -10.528 | -51,54% |
| Industria conservera, grasas y aceites y otros productos alimenticios | 21.437 | 171.646 | 6.800 | 27.725 | -143.921 | -83,85% | -14.637 | -68,28% |
| Bebidas y tabaco | 11.606 | 100.112 | 8.100 | 108.496 | 8.384 | 8,37% | -3.506 | -30,21% |
| Industria textil | 5.540 | 25.418 | 3.300 | 9.632 | -15.786 | -62,11% | -2.240 | -40,43% |
| Confeción y peletería | 19.297 | 42.469 | 17.200 | 52.261 | 9.792 | 23,06% | -2.097 | -10,87% |
| Cuero y calzado | 3.035 | 7.606 | 4.200 | 13.085 | 5.479 | 72,04% | 1.165 | 38,39% |
| Industria del papel | 3.581 | 31.110 | 6.400 | 41.737 | 10.627 | 34,16% | 2.819 | 78,72% |
| Edición y artes gráficas | 8.653 | 18.463 | 42.700 | 290.536 | 272.073 | 1473,61% | 34.047 | 393,47% |
| Madera y corcho | 8.919 | 18.583 | 9.400 | 34.137 | 15.554 | 83,70% | 481 | 5,39% |
| Fabricación de muebles | 16.078 | 32.731 | 22.800 | 59.931 | 27.200 | 83,10% | 6.722 | 41,81% |
| Caucho y materias plásticas | 4.240 | 16.570 | 9.000 | 47.515 | 30.945 | 186,75% | 4.760 | 112,26% |
| Otras industrias manufactureras y reciclaje | 6.047 | 16.435 | 3.500 | 20.616 | 4.181 | 25,44% | -2.547 | -42,12% |
| Energía, gas y agua | 13.034 | 244.494 | 17.100 | 179.686 | -64.808 | -26,51% | 4.066 | 31,20% |
| Construcción | 165.689 | 826.308 | 161.500 | 951.590 | 125.282 | 15,16% | -4.189 | -2,53% |

VALOR AÑADIDO Y EMPLEO POR SECTORES: ANDALUCÍA (1995) Y MADRID (1996) – (Continuación)

| | ANDALUCÍA | | MADRID | | Diferencia absoluta del VABpb | Diferencia en porcentaje del VABpb | Diferencia absoluta del empleo | Diferencia en porcentaje del empleo |
|---|-------------------|-------------------------|-------------------|-------------------------|-------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| | Empleo (ocupados) | VABpb(*) (millones pts) | Empleo (ocupados) | VABpb(*) (millones pts) | | | | |
| Comercio y talleres de vehículos | 371.436 | 1.698.295 | 227.500 | 1.437.106 | -261.189 | -15,38% | -143.936 | -38,75% |
| Hoteles y restaurantes | 125.230 | 423.271 | 85.400 | 819.843 | 396.572 | 93,69% | -39.830 | -31,81% |
| Transporte por ferrocarril | 2.082 | 17.223 | 7.600 | 12.077 | -5.146 | -29,88% | 5.518 | 265,03% |
| Otro tipo de transporte terrestre | 64.572 | 306.103 | 71.900 | 333.729 | 27.626 | 9,03% | 7.328 | 11,35% |
| Transporte marítimo, aéreo y actividades anexas | 15.486 | 74.384 | 30.700 | 254.751 | 180.367 | 242,48% | 15.214 | 98,24% |
| Correos y telecomunicaciones | 21.177 | 204.340 | 39.700 | 358.023 | 153.683 | 75,21% | 18.523 | 87,47% |
| Intermediación financiera | 35.430 | 412.536 | 53.300 | 868.250 | 455.714 | 110,47% | 17.870 | 50,44% |
| Seguros y actividades auxiliares a la intermediación financiera | 10.844 | 55.365 | 32.700 | 194.601 | 139.236 | 251,49% | 21.856 | 201,55% |
| Actividades inmobiliarias y alquileres | 15.830 | 825.261 | 12.900 | 1.404.515 | 579.254 | 70,19% | -2.930 | -18,51% |
| Actividades informáticas | 3.965 | 36.835 | 19.600 | 121.401 | 84.566 | 229,58% | 15.635 | 394,33% |
| Actividades jurídicas, de contabilidad, etc. | 14.094 | 72.805 | 33.900 | 301.210 | 228.405 | 313,72% | 19.806 | 140,53% |
| Servicios técnicos | 6.716 | 36.185 | 22.900 | 165.071 | 128.886 | 356,19% | 16.184 | 240,98% |
| Publicidad | 3.516 | 117.583 | 13.100 | 134.471 | 16.888 | 14,36% | 9.584 | 272,58% |
| Otros servicios a las empresas e I+D | 55.666 | 197.233 | 55.300 | 150.767 | -46.466 | -23,56% | -366 | -0,66% |
| Educación | 118.028 | 566.453 | 102.700 | 414.279 | -152.174 | -26,86% | -15.328 | -12,99% |

VALOR AÑADIDO Y EMPLEO POR SECTORES: ANDALUCÍA (1995) Y MADRID (1996) – (Continuación)

| | ANDALUCÍA | | MADRID | | Diferencia absoluta del VABpb | Diferencia en porcentaje del VABpb | Diferencia absoluta del empleo | Diferencia en porcentaje del empleo |
|--|-------------------|-------------------------|-------------------|-------------------------|-------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| | Empleo (ocupados) | VABpb(*) (millones pts) | Empleo (ocupados) | VABpb(*) (millones pts) | | | | |
| Sanidad y servicios sociales | 120.545 | 625.498 | 88.600 | 410.207 | -215.291 | -34,42% | -31.945 | -26,50% |
| Administración Pública, Seguridad social, etc. | 106.318 | 489.074 | 179.100 | 800.564 | 311.490 | 63,69% | 72.782 | 68,46% |
| Otras actividades prestadas a la comunidad | 118.956 | 199.110 | 138.100 | 541.292 | 342.182 | 171,86% | 19.144 | 16,09% |
| TOTAL | 1.828.386 | 9.301.320 | 1.735.500 | 11.642.793 | 2.341.473 | 25,17% | -92.886 | -5,08% |

(*) VABpb = Valor Añadido Bruto a precios básicos.

Fuente: IEA (1999) y Consejería de Hacienda de Madrid (1999).

Volumen 1 (junio de 2006)

Editorial

Páginas 3–4

Progreso técnico: una aproximación desde la Teoría de Grupos de Transformaciones de Lie

Technical progress: an approach from Lie Transformation Group Theory

Fedriani Martel, Eugenio M.; Tenorio Villalón, Ángel F.

Páginas 5–24

Algoritmo Tabú para un problema de distribución de espacios

Tabu search algorithm for a room allocation problem

G. Hernández-Díaz, Alfredo; Guerrero Casas, Flor M.; Caballero Fernández, Rafael; Molina Luque, Julián

Páginas 25–37

Análisis Input-Output de descomposición estructural aplicados a los casos de Madrid y Andalucía

Input-Output structural decomposition for Andalusia and Madrid (Spain)

Rueda Cantuche, José Manuel

Páginas 38–57