REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (11). Páginas 33–40.
Junio de 2011. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=47

Una herramienta de análisis teórico en la teoría de la empresa bajo incertidumbre

Rodríguez-Puerta, Inmaculada
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla
Correo electrónico: irodpue@upo.es

Sebastiá Costa, Francisco
Departamento Economía Aplicada Cuantitativa II
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)
Correo electrónico: fransecos@yahoo.es

Álvarez-López, Alberto A.
Departamento Economía Aplicada Cuantitativa II
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)
Correo electrónico: aalvarez@cee.uned.es

Buendía, Mónica
Departamento Economía Aplicada Cuantitativa II
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)
Correo electrónico: mbuendia@cee.uned.es

RESUMEN

En este trabajo presentamos una reformulación de un lema de Lippman y McCall –inicialmente planteado para una única variable aleatoria– que permite que sea aplicado al caso de varias variables aleatorias, e ilustramos su utilización en la teoría de la empresa bajo incertidumbre. Llevamos esto a cabo en un modelo reciente de la teoría, para el cual mostramos cómo el lema permite comparar, de forma más directa que la utilizada por sus autores, los respectivos niveles óptimos que elige la empresa con y sin incertidumbre. También hacemos uso del lema, en este mismo modelo, para estudiar el efecto de una variación en la aversión al riesgo, el cual no había sido estudiado anteriormente.

Palabras clave: modelización de incertidumbre; empresa bajo incertidumbre; incertidumbre en varias variables.
Clasificación JEL: D81; C00.
MSC2010: 91B38; 91B30; 91B16.

Artículo recibido el 20 de enero de 2011 y aceptado el 29 de abril de 2011.

A Theoretical Analysis Tool
in the Theory of the Firm under Uncertainty

ABSTRACT

In this paper we present a reformulation of a lemma due to Lippman and McCall –initially formulated a unique random variable– to be applied to the case of several random variables, and we illustrate its use in the theory of the firm under uncertainty. We have performed this on a recent model of the theory, for which the respective optimal levels chosen by the firm with and without uncertainty are compared in a more direct way than that used originally by its authors. We also make use of the lemma, in the context of the same model, to study the effect of a variation in risk aversion, which had not been studied before.

Keywords: uncertainty modelling; firm under uncertainty; uncertainty in several variables.
JEL classification: D81; C00.
MSC2010: 91B38; 91B30; 91B16.

1. Introducción

En la teoría de la empresa bajo incertidumbre, se estudian distintos aspectos sobre la decisión óptima que debe tomar una empresa que opera bajo incertidumbre en una o varias de las variables que intervienen en su función beneficio. Una de las primeras cuestiones que se plantean es la relación que presenta esta decisión óptima en comparación con la que se tomaría en el caso de certidumbre total. Esto es lo primero que analiza Sandmo (1971) en su modelo seminal. Para este modelo básico, en el que se considera una única fuente de incertidumbre (en el precio al que será vendido el producto), se puede demostrar que la introducción de incertidumbre induce una reducción en el nivel de producción óptimo con respecto a la situación sin incertidumbre. Este resultado es obtenido por Sandmo mediante una técnica de McCall (1967), pero puede demostrarse también mediante la aplicación de un lema recogido en Lippman–McCall (1981), el cual incluimos en el apéndice de este trabajo, y que es válido para el caso de una única variable aleatoria.

Sin embargo, a pesar de la antigüedad del citado lema, no hemos encontrado ningún autor que lo aplique en modelos de empresa bajo incertidumbre. Más aún, incluso en Lippman–McCall (1981), se demuestra el resultado de Sandmo comentado anteriormente con otro método diferente.[1]

En su lugar, el método más frecuentemente utilizado es el estudio del signo de ciertas covarianzas. Por ejemplo, en el caso del modelo de Sandmo, en el cual la función beneficio viene dada por $\pi(x) = Px - C(x)$, donde P es la variable aleatoria precio, dicho lema permite obtener la desigualdad:

$$\mathsf{E}\big[u'(\pi)P\big] < \mathsf{E}\big[u'(\pi)\big]\,\mathsf{E}[P],$$

para el caso de una empresa con aversión al riesgo (más aún, tal que $u'' < 0$). Sin embargo, puesto que $\mathsf{E}\big[u'(\pi)P\big] = \mathsf{E}\big[u'(\pi)\big]\,\mathsf{E}[P] + \mathsf{cov}\big(u'(\pi), P\big)$, tal desigualdad es obtenida habitualmente en la literatura mediante el estudio del signo de $\mathsf{cov}\big(u'(\pi), P\big)$. Este análisis es sencillo cuando se trabaja en modelos con una sola variable aleatoria que sea fuente de incertidumbre, pero cuando el número es superior puede resultar difícil obtener conclusiones de un modo analítico. Un ejemplo de este hecho lo encontramos en Dalal–Alghalith (2009), donde se desarrolla un método gráfico para llevar a cabo un estudio de esta índole.

En este trabajo obtenemos el resultado básico de Dalal–Alghalith (2009) de una forma analítica y más directa, mediante una adecuada reformulación del lema original de Lippman–McCall (1981) que permite su aplicación al caso de varias variables. Asimismo, con la ayuda de esta reformulación del lema, enunciamos y demostramos, para el modelo citado, un resultado nuevo sobre el efecto de una variación en la aversión al riesgo.[2]

---

[1] Una excepción son Álvarez-López–Rodríguez-Puerta (2009, 2011), donde se aplica ese lema en modelos con una sola fuente de incertidumbre, a diferencia del modelo del presente trabajo.

[2] Un efecto de este tipo no se ha estudiado para el modelo de Dalal–Alghalith (2009).

En la sección 2 se enuncia y demuestra el lema, y en la sección 3 se recogen sus aplicaciones al modelo de Dalal–Alghalith (2009). La última sección está dedicada a las conclusiones.

2. Reformulación del lema de Lippman–McCall (1981)

Enunciamos y demostramos el lema que vamos a utilizar en el resto del trabajo:[3]

Lema 1. *Sea g y h dos funciones reales definidas sobre $\mathbb{R}$, con g estrictamente creciente y h estrictamente positiva, y sea f una función real medible definida sobre $\mathbb{R}^p$. Si Z es una variable aleatoria p-dimensional tal que las esperanzas de $f(Z)\,h\big(f(Z)\big)$ y $f(Z)\,g\big(f(Z)\big)\,h\big(f(Z)\big)$ son finitas, y tal que el conjunto $\{f(Z) \neq 0\}$ tiene probabilidad positiva, entonces:*

$$\mathsf{E}\big[f(Z)\,g\big(f(Z)\big)\,h\big(f(Z)\big)\big] > g(0)\,\mathsf{E}\big[f(Z)\,h\big(f(Z)\big)\big],$$

y se tiene la desigualdad en el sentido contrario si g es estrictamente decreciente.

Demostración. Denotemos por A^+, A^- y A^0 el conjunto de los vectores z de $\mathbb{R}^p$ tales que $f(z) > 0$, $f(z) < 0$ y $f(z) = 0$, respectivamente, y por F la función de distribución de la variable aleatoria Z. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[f(Z)\,g\big(f(Z)\big)\,h\big(f(Z)\big)\big] &= \int_{A^+} f(z)\,g\big(f(z)\big)\,h\big(f(z)\big)\,dF(z) \\
&\quad + \int_{A^-} f(z)\,g\big(f(z)\big)\,h\big(f(z)\big)\,dF(z) \\
&\quad + \int_{A^0} f(z)\,g\big(f(z)\big)\,h\big(f(z)\big)\,dF(z) \\
&> g(0)\Big(\int_{A^+} f(z)\,h\big(f(z)\big)\,dF(z) + \int_{A^-} f(z)\,h\big(f(z)\big)\,dF(z)\Big) \\
&= g(0)\,\mathsf{E}\big[f(Z)\,h\big(f(Z)\big)\big].
\end{aligned}$$

Nótese que la hipótesis de probabilidad positiva del conjunto $\{f(Z) \neq 0\}$ asegura que la desigualdad anterior es efectivamente estricta. □

3. Aplicación al modelo de Dalal–Alghalith (2009)

En el modelo de Dalal–Alghalith (2009) se considera incertidumbre simultáneamente en dos variables: el precio y la producción. La riqueza de la empresa (de forma simplificada) viene dada por:

$$W(y) = pvy - c(y) + W_0,$$

[3] Una versión de este lema puede leerse en la tesis doctoral de uno de los autores de este artículo (cf. Sebastiá, 2011).

donde y es el nivel de producción en ausencia de incertidumbre (el cual también puede ser interpretado como el nivel de producción programado por la empresa), v es un factor aleatorio con $\mathsf{E}[v]=1$ (de modo que yv es la producción finalmente obtenida), y p es el precio al que se venderá la producción, con $\bar{p}\equiv\mathsf{E}[p]$. La función de costes es denotada por c, con $c'>0$ y $c''\geq 0$, y W_0 es la riqueza inicial de la empresa.

Se considera que la empresa es aversa al riesgo (más en concreto: $u''<0$), tal que $u'>0$ y que elige el nivel de producción y de modo que maximiza la utilidad esperada de su riqueza. Es decir, resuelve el problema:

$$\max_y \mathsf{E}\big[u\big(W(y)\big)\big].$$

La condición de primer orden viene dada por:

$$\mathsf{E}\big[u'\big(W(y^*)\big)\big(pv-c'(y^*)\big)\big]=0,$$

donde y^* denota el valor óptimo. Obsérvese que, en caso de certidumbre, la cantidad óptima y_c^* que elige la empresa satisface: $\bar{p}-c'(y_c^*)=0$.

El óptimo y^* puede verse como la abscisa del punto de intersección de las gráficas de las siguientes funciones:

$$G(y)\equiv\bar{p}-\mathsf{E}\big[u'\big(W(y)\big)\,pv\big]/\mathsf{E}\big[u'\big(W(y)\big)\big] \quad \text{y} \quad F(y)\equiv\bar{p}-c'(y).$$

La segunda es conocida, y los autores estudian las distintas posibilidades para la primera. Teniendo en cuenta que el punto de intersección de la gráfica de la función F con el eje de abcisas es $(y_c^*,0)$ (pues $\bar{p}-c'(y_c^*)=0$), los autores determinan finalmente la posición relativa entre y^* e y_c^* en función del signo de $\mathsf{cov}(p,v)$.[4]

Este resultado se puede obtener analíticamente, sin necesidad de recurrir a cuestiones de representación gráfica. Si aplicamos el Lema 1 a la variable aleatoria bidimensional $Z=(p,v)$, a la función $g(x)=u'\big((x+\mathsf{E}[pv])y^*-c(y^*)+W_0\big)$, que es estrictamente decreciente (pues $u''<0$), a la función $h\equiv 1$, y a la función continua (y por tanto medible) $f(s,t)=st-\mathsf{E}[pv]$, se obtiene:

$$\mathsf{E}\big[u'\big(W(y^*)\big)\big(pv-\mathsf{E}[pv]\big)\big]<0,$$

desigualdad que es equivalente a:

$$\frac{\mathsf{E}\big[u'\big(W(y^*)\big)pv\big]}{\mathsf{E}\big[u'\big(W(y^*)\big)\big]}<\mathsf{E}[pv],$$

pues $u'>0$. Teniendo en cuenta que el primer miembro de esta desigualdad es igual a $c'(y^*)$ (por la condición de primer orden del problema), y que $\mathsf{E}[pv]=\bar{p}+\mathsf{cov}(p,v)$, se obtiene:

$$c'(y^*)<\bar{p}+\mathsf{cov}(p,v).$$

[4]Cf. Dalal–Alghalith (2009), Proposición 1, p. 86. Nótese que $G(0)=\mathsf{cov}(p,v)$. La notación para F es nuestra.

Si consideramos ahora la función creciente $H(y) \equiv c'(y) - \bar{p}$, entonces:

$$H(y_c^*) = 0, \quad \text{y} \quad H(y^*) = c'(y^*) - \bar{p} < \mathsf{cov}(p,v).$$

Si $\mathsf{cov}(p,v) \leq 0$, entonces $H(y^*) < 0 = H(y_c^*)$, de donde $y^* < y_c^*$. Pero si fuera $\mathsf{cov}(p,v) > 0$, podría darse cualquiera de los tres casos: $y^* < y_c^*$, $y^* = y_c^*$ o $y^* > y_c^*$. Este es exactamente el resultado principal obtenido en Dalal–Alghalith (2009).

Por otra parte, los autores citados llevan a cabo un detallado estudio del efecto en el nivel óptimo y^* de la variación de distintos parámetros del modelo (por ejemplo, la riqueza inicial W_0, o las varianzas de las variables aleatorias p y v), pero no estudian el comportamiento de la empresa ante una *variación en la aversión al riesgo*. Con la ayuda del Lema 1, podemos obtener un resultado sobre este efecto. Para ello, consideramos dos posibles funciones de utilidad en las condiciones del modelo: u_1, u_2, y comparamos el nivel óptimo obtenido a partir de cada una, respectivamente: y_1^*, y_2^*, bajo la hipótesis de que la aversión absoluta al riesgo para la primera es menor que para la segunda, es decir: $r_1 < r_2$, donde $r_i = -u_i''/u_i'$ para $i \in \{1,2\}$. La siguiente proposición especifica el resultado.

Proposición 1. *Si $r_1 < r_2$, entonces $y_1^* > y_2^*$.*

Demostración. Para cada $i \in \{1,2\}$, pongamos $U_i(y) \equiv \mathsf{E}\big[u_i\big(W(y)\big)\big]$; entonces:

$$U_i'(y) = \mathsf{E}\big[u_i'\big(W(y)\big)\big(pv - c'(y)\big)\big],$$

y de acuerdo con la condición necesaria de primer orden: $U_i'(y_i^*) = 0$.

Consideremos las funciones reales de variable real $h(s) = u_2'\big([s + c'(y_2^*)]y_2^* - c(y_2^*) + W_0\big)$, y $g(s) = k\big([s + c'(y_2^*)]y_2^* - c(y_2^*) + W_0\big)$ donde $k \equiv u_1'/u_2'$. Entonces ambas funciones son estrictamente positivas, y además g es estrictamente creciente. En efecto, se tiene:

$$g'(s) = y_2^* k'\big([s + c'(y_2^*)]y_2^* - c(y_2^*) + W_0\big),$$

pero $k' = k \cdot (r_2 - r_1) > 0$, de acuerdo con la hipótesis. Aplicando el Lema 1 a estas funciones h y g, y a la variable aleatoria $Z = (p,v)$ y a la función continua (y por ende medible) $f(s,t) = st - c'(y_2^*)$, se obtiene:

$$U_1'(y_2^*) = \mathsf{E}\big[u_1'\big(W(y_2^*)\big)\big(pv - c'(y_2^*)\big)\big] > g(0)\,\mathsf{E}\big[u_2'\big(W(y_2^*)\big)\big(pv - c'(y_2^*)\big)\big] = g(0)\,U_2'(y_2^*) = 0;$$

de donde $U_1'(y_2^*) > 0 = U_1'(y_1^*)$. El resultado se concluye del hecho de que la función $y \mapsto U_1'(y)$ es estrictamente decreciente. Nótese que la derivada de esta última función es:

$$\mathsf{E}\big[u_1''\big(W(y)\big)\big(pv - c'(y)\big)^2 - u_1'\big(W(y)\big)\,c''(y)\big],$$

la cual es estrictamente negativa al ser $u_1'' < 0$, $u_1' > 0$ y $c'' \geqslant 0$. $\square$

Hemos obtenido, pues, que el nivel óptimo de producción que la empresa planifica *disminuye* cuando aumenta la aversión al riesgo, y *aumenta* cuando disminuye la aversión al riesgo.

4. Conclusiones

Hemos llevado a cabo una reformulación de un lema debido a Lippman–McCall (1981) para que sea aplicable al caso de varias variables aleatorias, y hemos presentado el nuevo lema como una herramienta que puede ser de utilidad en modelos de empresa bajo incertidumbre.

En particular, en el modelo de Dalal–Alghalith (2009), en el que existe incertidumbre tanto en el precio como en la producción, es posible realizar un estudio comparativo entre la decisión óptima que tomaría una empresa en presencia de incertidumbre y la que tomaría en ausencia de ella. Este análisis es realizado por sus autores con ayuda de un método gráfico. En el presente trabajo se ha demostrado el mismo resultado mediante la aplicación del lema citado, de una forma analítica y más directa.

Asimismo, se ha ilustrado la aplicabilidad del lema demostrando un resultado nuevo, dentro del marco del modelo de Dalal–Alghalith (2009): al aumentar la aversión al riesgo de la empresa, ésta planifica un nivel óptimo de producción menor.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer, tanto a dos revisores anónimos como al editor, sus observaciones y sugerencias, que han contribuido a mejorar sensiblemente este trabajo. Álvarez-López ha disfrutado de financiación a cuenta del Proyecto de Investigación de la CICYT con referencia ECO2008-06395-C05-03.

Referencias

Álvarez-López, A. A., Rodríguez-Puerta, I. (2009): "Teoría de la empresa bajo incertidumbre con mercado de futuros: el papel de los costes fijos y de un impuesto sobre los beneficios". *Rect@*, vol. 10(1), pp. 253–265.

Álvarez-López, A. A., Rodríguez-Puerta, I. (2011): "A Methodological Contribution in the Theory of the Firm under Uncertainty". En *Dynamics, Games and Sciences II (DYNA 2008, in honor of M. Peixoto and D. Rand)*, A. A. Pinto, M. M. Peixoto y D. A. Rand (editores), Springer Proceedings in Mathematics, vol. 2, Springer, cap. 7. [En imprenta.]

Dalal, A. J., Alghalith, M. (2009): "Production decisions under joint price and production uncertainty". *European Journal of Operational Research*, vol. 197(1), pp. 84–92.

Lippman, S.A., McCall, J. J. (1981): "The Economics of Uncertainty: Selected Topics and Probabilistic Methods". En *Handbook of Mathematical Economics*, K. Arrow y M. D. Intriligator (editores), North-Holland, cap. 6, pp. 247–260.

McCall, J. J. (1967): “Competitive production for constant risk utility functions”. *The Review of Economic Studies*, vol. 34(4), pp. 417–420.

Sandmo, A. (1971): “On the theory of the competitive firm under price uncertainty”. *The American Economic Review*, vol. 61(1), pp. 65–73.

Sebastiá, F. (2011): *La Empresa con Múltiples Fuentes de Incertidumbre. Una Aplicación a la Industria Ganadera*. Tesis doctoral. Departamento de Economía Aplicada Cuantitativa II, UNED. [Pendiente de defensa.]

Apéndice

En esta sección recogemos el lema de Lippman–McCall (1981):[5]

Lema 2. *Sea ψ y ϕ dos funciones reales definidas sobre $\mathbb{R}$ tales que $\psi > 0$ y ϕ es estrictamente creciente. Si $\xi = \psi \cdot \phi$, y X es una variable aleatoria no degenerada, de varianza positiva y tal que la esperanza de $X\,\psi(X)$ es finita, entonces:*

$$\mathsf{E}\big[X\,\xi(X)\big] > \phi(0)\,\mathsf{E}\big[X\,\psi(X)\big],$$

y se tiene la desigualdad contraria si ϕ es estrictamente decreciente.

[5]El lema es un resultado parcial en la demostración del Teorema 2 en el artículo citado (cf. p. 252).