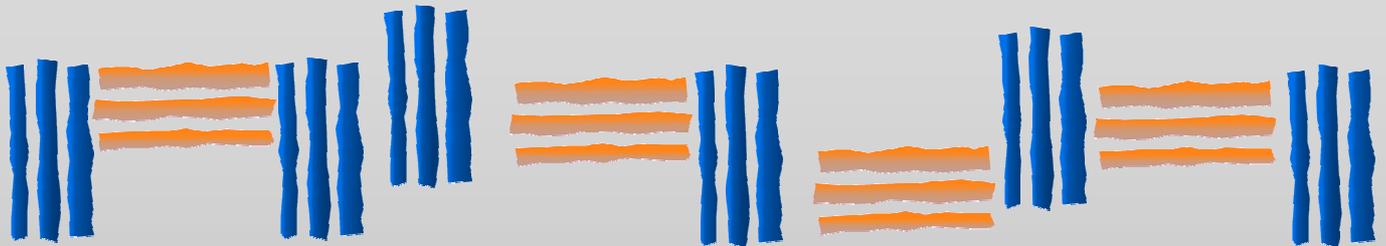


REVISTA DE
MÉTODOS CUANTITATIVOS
PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA



UNIVERSIDAD
**PABLO_D
OLAVIDE**
SEVILLA

Número 6
Diciembre de 2008
ISSN: 1886-516X
D.L: SE-2927-06

**REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA**

**Journal of Quantitative Methods for
Economics and Business Administration**

Número 6. Diciembre de 2008.

ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.

URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/>

Editores:

Dr. Eugenio M. Fedriani Martel
Universidad Pablo de Olavide
Ctra. de Utrera, Km 1 - 41013
Sevilla (Spain).
Correo-e: efedmar@upo.es

Dr. Alfredo García Hernández-Díaz
Universidad Pablo de Olavide
Ctra. de Utrera, Km 1 - 41013
Sevilla (Spain).
Correo-e: agarher@upo.es

Comité Editorial:

Dr. S. Ejaz Ahmed, University of Windsor, Ontario (Canadá)
Dr. Ignacio Contreras Rubio, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. Miguel Ángel Hinojosa Ramos, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. Matías Irigoyen Testa, Universidad Nacional del Sur, Buenos Aires (Argentina)
Dr. M. Kazim Khan, Kent State University, Ohio (EE.UU.)
Dra. María Amparo León Sánchez, Universidad de Pinar del Río (Cuba)
Dr. Jesús López-Rodríguez, Universidad de A Coruña, (España)
Dr. Cecilio Mar Molinero, University of Kent, Canterbury (Reino Unido)
Dra. Ana M. Martín Caraballo, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dra. M^a Carmen Melgar Hiraldo, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. José Antonio Ordaz Sanz, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. Andrés Rodríguez-Pose, London School of Economics, Londres (Reino Unido)
Dr. José Manuel Rueda Cantuche, IPTS-DG J.R.Centre-European Commission
Dra. Mariagrazia Squicciarini, VTT Technical Research Centre (Finlandia)

Editorial

La Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa sigue creciendo, pero aún no hemos perdido de vista nuestro objetivo inicial: ser un medio de comunicación gratuito y útil para todos los que investigan en técnicas Matemáticas, Estadísticas o Econométricas y sus posibles aplicaciones al ámbito económico o empresarial. Seguimos publicando artículos en Español o Inglés, con la única condición de ser inéditos y ajustarse a la temática de la Revista. Como en ocasiones anteriores, aprovecharemos esta editorial para comentar los principales cambios producidos en la Revista y para informar de la evolución de su conocimiento entre la comunidad científica internacional.

Lo primero que creemos que debemos destacar aquí es la incorporación de nuevos prestigiosos investigadores al Equipo Editorial. Incluimos el Comité en la segunda página de cada número de la Revista, aunque actualmente, en la web, solo está disponible (para no complicar en exceso la descarga de artículos al usuario) en las editoriales que publicamos cada cierto tiempo. Consideramos que estos doctores que se han incorporado complementan bastante bien los perfiles de los que ya colaboraban con nosotros, pero todavía creemos conveniente incorporar algún investigador más, por lo que es probable que se produzcan nuevas adhesiones en fechas próximas.

Algunos otros hechos concretos que nos hacen ser optimistas respecto a nuestro crecimiento son los siguientes:

- La evolución del número de visitas.
- El incremento en el número de bases de datos científicas que nos van incorporando.
- La calidad y la cantidad de los artículos recibidos para su evaluación.

A continuación, pasaremos a comentar brevemente cada uno de estos aspectos, que pueden ser considerados indicios de calidad de nuestra publicación periódica (seguimos cumpliendo escrupulosamente con el compromiso de puntualidad en nuestra publicación, pues publicamos el primer número de cada año en junio y el segundo en diciembre).

La difusión de nuestra labor puede ser aproximada por el número de visitas que recibimos. En concreto, nos llena de satisfacción ver que seguimos recibiendo un número creciente de visitas procedentes de todo el mundo. En cuanto a cuantificación, en el pasado mes de noviembre superamos ampliamente la cifra de 10.000 visitas a nuestra página web y es casi seguro que acabaremos 2008 superando las 11.111 visitas (no es un número al que se le suele dar importancia estadística, pero nos ha parecido lo suficientemente

curioso como para dedicarle un comentario y relajar el tono serio habitual en las editoriales).

Desafortunadamente, no tenemos constancia del número de descargas de los artículos que publicamos, pero algunas de las bases de datos que nos incorporan sí cuentan con esas estadísticas. Así, por ejemplo, RePec publica mensualmente el número de descargas de cada artículo (solo cuentan las descargas que se efectúan a través de su web) e, incluso, incorpora varias clasificaciones sobre las revistas de todo el mundo con contenidos en Internet sobre Economía y Empresa. Concretamente, en el mes de octubre de 2008, había 743 revistas científicas en dicha clasificación y en el mes de noviembre ya había 756. Sorprendentemente (al menos para los editores de RevMetCuant), a pesar del poco tiempo que lleva indexada en RePec, RevMetCuant era en octubre de 2008 (con datos hasta septiembre), la cuarta revista con mayor número de accesos a los resúmenes en RePec (en proporción a los artículos publicados). Es más, en la clasificaciones publicadas este mes de noviembre (referentes a datos de octubre de 2008), RevMetCuant ha escalado posiciones en todas ellas: mensuales, trimestrales y anuales. Destaca sobremanera la magnífica tercera plaza conseguida tanto en el ratio entre el número de visitas a los resúmenes y el número de artículos accesibles (esto es, publicados) como en el ratio entre el número de descargas de artículos y el número de artículos accesibles. Incluimos ambas clasificaciones en las siguientes figuras.

Top Journals by File Downloads 2008-10

Ranked by Downloads/# of downloadable items and Views/# of items

Rank	Journal	File Downloads				Abstract Views			
		2008 10	3 months	12 months	Total	2008 10	3 months	12 months	Total
1	Fedgazette Federal Reserve Bank of Minneapolis	57.0	336.0	1467.0	7282.0	1.7	4.0	15.7	99.6
2	World Bank Economic Review Oxford University Press	6.3	17.0	60.3	453.4	5.8	17.4	71.3	374.5
3	Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa = Journal of Quantitative Methods for Economics and Business Administration Universidad Pablo de Olavide, Department of Quantitative Methods for Economics and Business Administration	5.5	10.1	27.9	27.9	23.9	66.1	189.4	189.4
4	International Journal of Applied Econometrics and Quantitative	5.4	19.3	76.9	187.9	19.5	63.4	249.8	571.8

```
http://logec.repec.org/scripts/seriesstat.pl?topnum=25;listall=on;
citems=on;seriestype=redif-article;bymin=10;.cgifields=listall;
.cgifields=citems;sortby=ld
```

Top Journals by Abstract Views 2008-10

Ranked by Downloads/# of downloadable items and Views/# of items

Click on a column heading to sort by a different category

Rank	Journal	File Downloads				Abstract Views			
		2008 10	3 months	12 months	Total	2008 10	3 months	12 months	Total
1	Revista Ingeniería Industrial Instituto Tecnológico de Celaya, Departamento de Ingeniería Industrial	4.9	12.0	41.5	41.5	45.0	123.1	404.7	404.7
2	Estudios Economicos de Desarrollo Internacional Euro-American Association of Economic Development	3.6	10.1	43.8	232.4	31.2	86.8	354.2	1562.8
3	Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa = Journal of Quantitative Methods for Economics and Business Administration Universidad Pablo de Olavide, Department of Quantitative Methods for Economics and Business Administration	5.5	10.1	27.9	27.9	23.9	66.1	189.4	189.4
4	Panorama Administrativo Journal	2.0	5.9	20.8	24.6	20.7	61.3	194.1	224.2

<http://logec.repec.org/scripts/seriesstat.pl?topnum=25;listall=on;cititems=on;seriestype=redif-article;bymin=10;.cgifields=listall;.cgifields=cititems;sortby=la>

Hay que reconocer que estas clasificaciones se ven fuertemente influidas porque, antes de diciembre de 2008, solo teníamos 20 artículos publicados (frente a números mayores en otras prestigiosas revistas), pero también debemos tener en cuenta que llevamos muy poco tiempo en la base de datos y que las revistas que aparecen delante de la nuestra en una y otra clasificaciones son distintas. Estos y otros indicios nos hacen ser optimistas sobre los índices reales de difusión de nuestros contenidos.

Otras mejoras objetivas de la Revista pueden apreciarse directamente en nuestra página web. En opinión de nuestros visitantes más próximos, hemos mejorado nuestra web y esto se puede comprobar por: la mejora en el aspecto, la inclusión de versión inglesa de todos los contenidos (antes solo se podía acceder a la versión española), el incremento del número de páginas web que nos citan y desde las que se puede acceder a la nuestra, etc.

Poco a poco, vamos incorporando a nuestra página de enlaces los de las bases de datos que nos citan. Seguimos trabajando para incluir nuestros artículos en las más prestigiosas bases de datos científicas y creemos posible (una vez que, con este sexto número, cumplimos los requisitos de antigüedad) entrar incluso en la restrictiva Journal Citation Report, del Institute for Scientific Information - ISI. Esperamos poder informar pronto de algunos otros logros en este sentido.

Con respecto a números anteriores, se ha incrementado el número de artículos rechazados. Creemos que esto no debe ser considerado un paso atrás en la calidad de los artículos recibidos, sino simplemente una consecuencia lógica del número de trabajos que se reciben para su evaluación. De momento, el número de artículos que se publican en cada volumen sigue

siendo más o menos el mismo, aunque no tendremos problema en incrementar el número de páginas de los volúmenes o el número de artículos aceptados, siempre que nos lleguen artículos que sean considerados válidos por parte de nuestros revisores.

Para finalizar esta Editorial, como en ocasiones previas, publicamos la lista de los revisores anónimos que han participado, aparte de los miembros del Equipo Editorial (que seguimos participando en estas labores) y de los que no han aceptado aparecer en este listado. Podemos seguir presumiendo de haber cumplido escrupulosamente con el doble anonimato en los procesos de revisión por pares. Como se puede comprobar, hay evaluadores de la Universidad Pablo de Olavide, pero también otros muchos pertenecientes a otras instituciones. Sobre todo en el caso de estos últimos, a los que no tenemos tan cerca, queremos agradecer su colaboración desinteresada y destacar que hay autores que siguen incluyéndolos en sus secciones de agradecimientos.

Prof. Dr. D. Raúl Brey Sánchez;
Prof.^a Dra. D.^a M.^a Dolores Caro Vela;
Prof.^a Dra. D.^a Ana Fernández Carazo;
Prof. Dr. D. Osvaldo A. Fosado Téllez;
Prof.^a Dra. D.^a Patricia Herranz Peinado;
Prof. Dr. D. Manuel A. Hidalgo Pérez;
Prof.^a Dra. D.^a Sara López Pintado;
Prof. Dr. D. Julián Molina Luque;
Prof.^a Dra. D.^a Pilar Moreno Navarro;
Prof. Dr. D. Rafael Moyano Franco;
Prof.^a Dra. D.^a Concepción Paralera Morales;
Prof. Dr. D. Rafael Pino Mejías;
Prof. Dr. D. José Manuel Ramírez Hurtado;
Prof.^a Dra. D.^a Laura Riesgo Álvarez;
Prof.^a Dra. D.^a Manuela Segovia González;
Prof. Dr. D. Ángel F. Tenorio Villalón.

Los Editores también desean aprovechar estas líneas para desear a nuestros lectores, y a cuantos colaboran con nosotros, un año 2009 muy fructífero en el plano profesional y científico, así como una larga etapa de feliz desarrollo personal.

LOS EDITORES.



Aplicación de la Teoría de Grafos para mejorar la planificación de rutas de trabajo de una empresa del sector de la distribución automática

PUCHADES CORTÉS, VANESA

Semacaf Máquinas de Café S.L.

Correo electrónico: semacaf@alcoi.com

MULA BRU, JOSEFA

Centro de Investigación de Gestión e Ingeniería de Producción

Universidad Politécnica de Valencia

Correo electrónico: fmula@cigip.upv.es

RODRÍGUEZ VILLALOBOS, ALEJANDRO

Departamento de Organización de Empresas

Universidad Politécnica de Valencia

Correo electrónico: arodriguez@doe.upv.es

RESUMEN

En la actualidad, la gestión de rutas es un aspecto fundamental en las empresas cuya actividad se basa principalmente en el transporte, ya que supone elevados costes de carburantes, mano de obra, etc. En este artículo, se estudia el caso de la empresa Semacaf Máquinas de Café S.L., perteneciente al sector de la distribución automática, que quiere evaluar la efectividad de su política actual de rutas y compararla con la política óptima obtenida mediante las aplicaciones informáticas *Grafos* y *Rutas*, basadas en algoritmos pertenecientes a la Teoría de Grafos.

En este trabajo se aplica el algoritmo del Problema del Viajante, que se adapta a las características del problema de la empresa y que cumple los objetivos de minimizar los costes anteriormente mencionados, así como de evaluar la política actual de gestión de rutas de la empresa.

Palabras clave: Teoría de Grafos; planificación de rutas; problema del viajante; sector del vending.

Clasificación JEL: C61; L00.

2000MSC: 90B10; 90B90.

An application of Graph Theory to improve the planning of work routes for a company in the vending sector

ABSTRACT

Currently, the routing management is an important aspect in those companies whose activity is mainly based on the transport, since it involves high costs of fuel, manpower, etc. In this paper, the case of the company Semacaf Máquinas de Café S.L. is studied. This company belongs to the sector of automatic distribution and pursues to evaluate the effectiveness of its current policy about planning routes and to compare it with the optimal policy obtained through the software applications, *Grafos* and *Rutas*, based on algorithms belonging to Graph Theory.

In this paper, the Traveling Salesman Problem (TSP) is applied, due to the characteristics of the problem and because it accomplishes the objectives of minimizing the previously mentioned costs, as well as evaluating the current policy of routing management of the company.

Keywords: Graph Theory; routing planning; travelling salesman problem; vending sector.

JEL classification: C61; L00.

2000MSC: 90B10; 90B90.



1 Introducción

Actualmente, la Teoría de Grafos permite esquematizar y resolver muchos problemas en diferentes campos de la ciencia y la tecnología. En particular, también se viene utilizando dicha teoría para modelar y resolver distintos problemas referidos a la eficiencia del transporte.

Los problemas de rutas de vehículos o de distribución física de mercancías desde almacenes a clientes aparecen en la literatura científica como *Vehicle Routing Problems*, o más comúnmente como VRP. También se puede encontrar, aunque en menor medida, referencias como *Vehicle Scheduling Problems*. En términos generales, un problema de rutas de vehículos consiste en determinar las rutas de un conjunto (o flota) de vehículos que deben iniciar un recorrido (y finalizarlo) en los almacenes (o depósitos) para atender la demanda de servicio de un conjunto disperso de clientes sobre una red.

El transporte es uno de los sectores que más aporta a la generación de riqueza (desde hace años, por encima del 5% del valor añadido bruto nacional de España). El transporte por carretera muestra un comportamiento netamente superior al resto de los modos y actividades de transporte (ferroviario, marítimo y aéreo) en cuanto a generación de valor por parte de los operadores españoles. Por el contrario, el sector del transporte está integrado en su mayoría por pequeñas empresas, con desigual situación frente a la formación de sus trabajadores. Una gran parte del tejido empresarial se mantiene con estructuras anticuadas en su funcionamiento y la formación no forma parte de su cultura. Según Ministerio de Fomento (2001), el equipamiento informático del sector es escaso y su hábito de uso mínimo.

En este artículo se expone el método actual de gestión de rutas llevada a cabo por la empresa objeto de la aplicación: una empresa de *vending*, cuyo negocio consiste en la distribución de productos de consumo para máquinas expendedoras automáticas (aperitivos, café, bebidas y refrescos, etc.). Como otras pymes, esta empresa está sujeta a la incertidumbre del mercado (en términos de consumo, coste de los combustibles, complejidad de planificación, etc.) y le resulta particularmente interesante la integración de las herramientas más adecuadas para la resolución de sus problemas de gestión de rutas. En concreto, el caso real presentado servirá para demostrar cómo las técnicas de investigación operativa relativas al cálculo de rutas y el uso de tecnologías de la información pueden ayudar a contrarrestar los desequilibrios existentes entre la importancia del sector y su capacidad-calidad de servicio.

Para ello, en este trabajo fue necesario analizar todos los factores que se tienen en cuenta a la hora de elaborar las rutas diarias de cada operario: la planificación inicial de las rutas llevada a cabo por el jefe de taller y la encargada de control y gestión de los equipos, así como los cambios llevados a cabo por los operarios en esta ruta decidiendo el orden de las visitas en base a diferentes factores no considerados en la determinación de la ruta inicial, tales como: el consumo diario actual del cliente, la zona geográfica, las necesidades específicas del cliente, la comodidad, el tráfico, etc.

Este estudio pretende acercar a las pymes la utilidad y bondad de las técnicas de investigación operativa (en ocasiones más próxima a la investigación científica pura que a la realidad cotidiana de las empresas). Una de las aportaciones de esta investigación es cuantificar el grado de mejora potencial en términos de reducción de costes en una empresa del sector de la distribución (*vending*). Además, en esta ocasión se utilizará un novedoso software de planificación de rutas y gestión de flotas.

El documento se ha estructurado de la siguiente forma. En la Sección 2 se resumen los modelos principales basados en la Teoría de Grafos con los que puede afrontarse el problema tratado en la presente publicación y otros similares; además, se justifica la selección del modelo usado y su implantación en la empresa. La Sección 3 sirve para comentar brevemente las herramientas utilizadas para la obtención de la ruta óptima. La Sección 4 describe el caso de estudio; una primera parte se dedica a la planificación actual de las rutas de trabajo de la empresa y después se plantea la propuesta de mejora para la planificación de rutas actual de la empresa. Finalmente, en la Sección 5 se exponen las conclusiones obtenidas a lo largo de este trabajo y las líneas futuras de actuación.

2 Revisión de modelos basados en la Teoría de Grafos

Los historiadores de la ciencia y de las matemáticas establecen el inicio de la Teoría de Grafos con el trabajo de Euler (1736). En 1852, Francis Guthrie formuló el problema de los cuatro colores para colorear un mapa cartográfico. Este problema puede considerarse como el más famoso y productivo de la Teoría de Grafos e hizo que un gran número de matemáticos, tales como Cayley, Hamilton, De Morgan, Kempe, Tait o Ramsey, se preocupasen por estudiar y desarrollar esta teoría. Sin embargo, se tardó más de un siglo en demostrar su resultado (Appel y Haken, 1977a,b), lo que requirió del uso de ordenadores potentes para su consecución. Por su parte, Hierholzer (1873) proporcionó una caracterización de los grafos denominados eulerianos como aquellos que son

conexos y todos sus nodos tienen valencia par. No obstante, el término “grafo” es introducido por primera vez en el trabajo de Sylvester (1878). A continuación se revisan los modelos correspondientes a dos grandes grupos de problemas basados en la programación lineal.

Por una parte, están los problemas de transporte, asignación y transbordo, que forman parte de los problemas de flujo de red (Taha, 2004):

- Problema de transporte: trata una situación en la cual se envía un bien desde uno o varios puntos de origen hasta uno o varios puntos de destino con el objetivo de determinar la cantidad enviada, satisfaciendo al mismo tiempo las restricciones de la oferta y la demanda, y minimizando el coste total del envío. Este problema también se caracteriza por suponer que el coste de envío en una ruta determinada es directamente proporcional al número de unidades enviadas en esa ruta. En lo referente a su resolución, se utiliza el algoritmo de transporte. El algoritmo de transporte es un método de resolución para problemas de transporte que emplea el método simplex. La segunda fase del algoritmo (es decir, obtener una solución básica inicial del problema) utiliza habitualmente alguno de estos tres métodos (Winston, 2005): método de la esquina noroeste; método del coste menor; y método de aproximación de Vogel. La diferencia entre los tres métodos es la “calidad” de la solución básica inicial que producen, en el sentido de que una mejor solución inicial proporciona un valor objetivo más pequeño. En general, el método de Vogel genera la mejor solución básica inicial y el método de la esquina noroeste la peor, aunque la ventaja de este último es que implica menos cálculos (Taha, 2004). En cuanto a las variantes que podrían surgir en este tipo de problemas, éstas pueden ser (Hillier y Lieberman, 2006): suministro total no igual a la demanda total, maximización de la función objetivo, rutas con capacidad limitada y rutas no aceptables. En general, este problema puede aplicarse en más áreas de la empresa, como, por ejemplo, el control de inventarios, los horarios de empleo y la asignación de personal. No obstante, para este último la resolución mediante el método simplex no es la mejor alternativa debido a que el problema se formula con un modelo de programación lineal entera.

- Problema de asignación: tiene una estructura similar al problema de transporte en el cual se trata de asignar el mejor recurso para cada tarea. Los problemas de asignación poseen métodos de resolución mucho más eficaces que los de transporte

en general. Al igual que en el problema del transporte, en este problema también se observan casos especiales (Anderson *et al.* 2004): oferta y demanda desiguales, problemas de maximización y problemas con asignación inaceptable.

- Problema de transbordo: determina cuántas unidades deberán embarcarse por cada uno de los arcos de la red, de manera que todos los nodos de la red se satisfagan al coste mínimo de transporte. Al igual que en los problemas de transporte y asignación, se puede formular este tipo de problemas con varias variantes, como son por ejemplo (Anderson *et al.* 2004): suministro total no igual a la demanda total, maximización de la función objetivo, rutas con capacidad limitada y rutas inaceptables.

- Problema del viajante, es un caso particular de los problemas de transporte, que trata de determinar el recorrido que, comenzando por una determinada ciudad, pase por todas las demás una sola vez y vuelva finalmente a la primera, de manera que se minimice la distancia total recorrida. Algunos de los elementos principales de esta tipología de problemas son: la red de transporte (red de carreteras en este caso), la flota de vehículos, la situación geográfica de los clientes, la ubicación del centro operativo, los servicios a atender (demandas y/o consumos) etc.

Las características diferentes de los clientes, la demanda, los almacenes y los vehículos, así como de las restricciones operativas sobre las rutas, horarios, etc. dan lugar a gran número de variantes del problema. En la literatura, algunos autores han intentado clasificar y simplificar la gran variedad de posibles problemas, como por ejemplo los criterios propuestos por Bodin y Golden (1981) y Desrochers *et al.* (1990), que intentan reflejar y ordenar las características principales en aspectos tales como: el almacén o depósito, la flota, la demanda, el servicio y el objetivo a alcanzar. Esta clasificación de los problemas ha facilitado tanto el desarrollo de modelos matemáticos y estrategias de resolución como la toma de decisiones por parte de las empresas.

Por otra parte, se ha realizado una síntesis de los tipos de problemas englobados en los modelos de optimización de redes. Los problemas de redes surgen en una gran cantidad de situaciones (redes de transporte, eléctricas, comunicaciones, etc.) y en áreas tan diversas como producción, distribución, localización de instalaciones, administración de recursos, etc. (Hillier y Lieberman, 2006):

- Problema del árbol de expansión mínima: persigue unir los nodos de una red,

directa o indirectamente, buscando la longitud más corta en las ramas de conexión. Uno de los algoritmos empleados para resolver este tipo de problemas es el algoritmo de Kruskal, cuyo objetivo es construir un árbol formado por arcos sucesivamente seleccionados de mínimo peso a partir de un grafo ponderado en los arcos. La aplicación típica de este problema es el diseño de redes telefónicas en oficinas con el mínimo coste total, aunque también se utiliza para el diseño de redes de transporte, el diseño de redes de telecomunicaciones, TV por cable, sistemas distribuidos, interpretación de datos climatológicos, etc.

- Problema de la ruta más corta: busca el camino mínimo entre un punto de origen y un punto de destino en una red (en nuestro caso, de transporte). Este problema también permite modelar otras situaciones como por ejemplo minimizar el coste total de una secuencia de actividades (reemplazo de equipos), minimizar la distancia total recorrida (confiable) o determinar la mejor ruta. Además, tiene en cuenta las probabilidades de que ocurra o no un suceso

- Problema de flujo máximo: su objetivo es transportar la cantidad máxima de flujo desde un punto de partida hasta un punto final. Es importante conocer la capacidad de la red para saber cuánto puede enviarse desde un nodo fuente a un nodo destino, aunque esto también puede hacerse definiendo los cortes; es decir, la capacidad de corte es igual a la suma de las capacidades de los arcos asociados, y entre todos los cortes posibles en la red, el corte con la capacidad menor proporciona el flujo máximo en la red. Son muchas las situaciones que pueden modelarse mediante una red con índice máximo de flujo, como por ejemplo, los movimientos de tráfico, los sistemas hidráulicos, los circuitos eléctricos, los transportes de mercancías, las capacidades de redes telemáticas, etc.

- Problema del flujo restringido de coste mínimo: busca determinar los flujos en los diferentes arcos, minimizando el coste total, al mismo tiempo que satisface las restricciones del flujo en los arcos y las cantidades de la oferta y la demanda en los nodos. En cuanto a las aplicaciones de este problema en la vida real, se encuentran por ejemplo en la comercialización de productos en una red de producción-distribución, la programación del empleo, etc.

En último lugar se describen brevemente los métodos CPM (*Critical Path Method*) y PERT (*Program Evaluation and Review Technique*). Según Taha (2004), CPM y PERT son métodos basados en redes y diseñados para ayudar en la

planificación, programación y control de proyectos, cuyo objetivo es proporcionar los medios analíticos para programar las actividades. La diferencia principal entre PERT y CPM es la manera en que se realiza la estimación de tiempo. PERT supone que el tiempo para realizar cada una de las actividades es una variable aleatoria descrita por una distribución de probabilidad, mientras que CPM infiere que los tiempos de las actividades se conocen en forma determinista y se pueden variar cambiando el nivel de los recursos utilizados. Estos métodos se utilizan para la planificación y control de diversas actividades, tales como: construcción de presas, apertura de caminos, pavimentación, construcción de casas y edificios, reparación de barcos, investigación de mercados, movimientos de colonización, estudios económicos regionales, auditorías, planificación de carreras universitarias, distribución de tiempos de salas de operaciones, ampliaciones de fábrica, planificación de itinerarios para planes de venta, censos de población, etc.

Dadas las características del caso de estudio, el modelo de análisis que más se adapta a sus necesidades y que, por tanto, se aplica para la obtención de la ruta óptima, es el problema del viajante, ya que el objetivo de este modelo es encontrar en qué orden deben recorrerse los nodos de la red de modo que se minimice la distancia total recorrida. Además, se cuenta con facilidad para encontrar software implementando el algoritmo.

3 Herramientas propuestas

En este trabajo se han utilizado dos herramientas para la obtención de la ruta óptima: *Grafos* y *Rutas*. La herramienta *Grafos* es un software desarrollado por Rodríguez-Villalobos (2008) para la construcción, edición y análisis de grafos. Abarca toda clase de problemas relacionados con la Teoría de Grafos, y otras disciplinas relacionadas como la ingeniería de organización industrial, la logística y el transporte, investigación operativa, diseño de redes, etc., por lo que se puede utilizar para el modelado y resolución de problemas reales. La herramienta *Rutas* (Rodríguez-Villalobos, 2008) permite capturar, almacenar, manipular, analizar y desplegar visualmente en un mapa la información geográficamente introducida, que servirá posteriormente para resolver una parte del problema planteado. El objetivo de esta aplicación es el desarrollo de una herramienta informática de características profesionales que permita la resolución de problemas reales de flotas de vehículos capacitados o CVRP (*Capacitated Vehicle*

Routing Problems), el cálculo de rutas y su gestión. Algunos ejemplos de sus posibles aplicaciones son: localización de clientes; centros de tránsito y almacenes; cálculo y gestión de distancias, tiempos y costes de transporte; gestión de flotas de vehículos; reducción de costes y tiempos de transporte; exportar información sobre localizaciones e itinerarios para otro software cartográfico (*Google Earth, OziExplorer, GPS Visualize*, etc.). Ambas aplicaciones resuelven problemas relacionados con la Teoría de Grafos, en la cual se basa este trabajo, aunque cada una de ellas ha servido para proporcionar por una parte la información necesaria para la localización de los clientes y la distancia entre ellos (*Rutas*) y los resultados que han facilitado la obtención de la ruta óptima (*Grafos*).

4 Caso de estudio

Semacaf Máquinas de Café S.L. es una pyme perteneciente al sector de la distribución automática, cuya actividad empresarial es la compra y distribución de máquinas *vending* y de agua refrigerada. Esta actividad pone a disposición del consumidor una amplia gama de productos a través de un nuevo modelo de distribución, constituyendo al tiempo, un punto de vista diferenciado de lo tradicional, puesto que no requiere la presencia humana de un vendedor. Es un sistema mucho más agresivo que se instala en los propios ámbitos de trabajo, ocio, colectividades y tránsito de la población, disponiendo de un horario extenso y con niveles de higiene y calidad equiparables, como mínimo, a los de los establecimientos convencionales

La empresa objeto de estudio distribuye sus máquinas principalmente en entornos laborales, centros públicos y privados y en empresas dedicadas al sector servicios. Cualquier empresa del mercado se enfrenta a variables externas que afectan su gestión. En el caso de estudio, destaca la tendencia en los precios de los productos energéticos, ya que la actividad de la empresa supone un desplazamiento continuo de todos los operarios a todos los clientes. El estudio realizado se basa en la media de los precios del carburante en el periodo estudiado (enero, febrero y marzo de 2007), aunque actualmente éstos se han incrementado en un 30%, aproximadamente. A continuación, la Figura 1 refleja la evolución de los precios del carburante desde el año 2001, destacando el incremento constante de los precios y el continuo acercamiento del precio del gasóleo al de la gasolina.

Céntimo/ €

MEDIA ANUAL DE LOS PRECIOS DE LOS CARBURANTES.

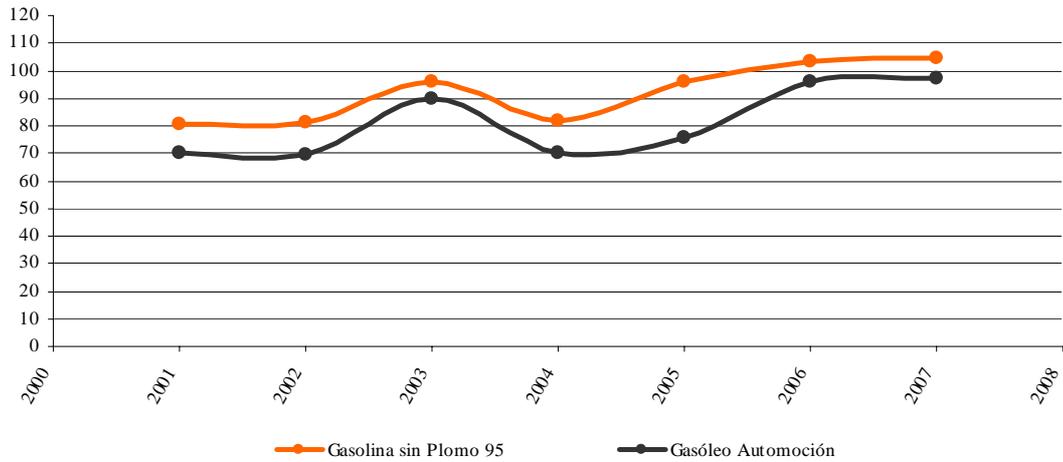


Figura 1. Evolución de los precios de los carburantes. Fuente: CORES (Corporación de Reservas Estratégicas de Productos Petrolíferos): www.cores.es.

4.1 Planificación actual de las rutas de trabajo de la empresa

La planificación actual de las rutas de trabajo depende de unos factores muy importantes: localización del cliente, consumo mensual y tipo de máquina. Posteriormente, el operario realiza cambios en esta ruta basándose en unos criterios previstos y que dan lugar a la ruta replanificada: jornada laboral de los clientes, media mensual de consumo, ubicación de las máquinas y dimensión de la posición, ampliación del número de máquinas instaladas en un mismo cliente, modificación de la capacidad de la máquina, nueva línea de negocio de la empresa, periodo de caducidad de los productos, etc. Sin embargo, existen otros factores imprevistos que también podrían condicionar la ruta del operario y obligarle a modificar el itinerario de las visitas respecto a la ruta inicial y replanificada (Figura 2).

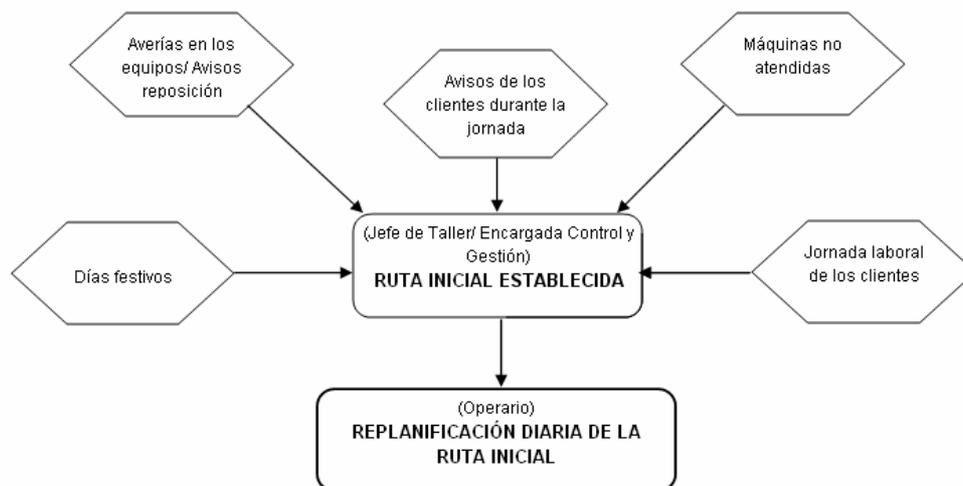


Figura 2. Replanificación de las rutas iniciales.

4.2 Propuesta de mejora

A partir de la herramienta *Rutas* se obtienen las matrices “Distancia” (km) y “Tiempo” (min). Estas facilitan la obtención de una tercera matriz “Costes” (€) que es función de las dos anteriores, mediante la siguiente fórmula:

$$f_{ij} = Km_{ij} \times Cu + t_{ij} \times Cm + CTributos \quad (1)$$

Como puede observarse, existe una parte fija y una variable. Esta última se expresa en función de los kilómetros y del tiempo, mientras que la fija se basa en un gasto que absorbe la empresa desde el momento en que el vehículo entra en funcionamiento. Por tanto los parámetros empleados son:

Km_{ij}: distancia en km del nodo *i* al nodo *j*.

Cu: se obtiene de la siguiente forma: en primer lugar se calcula los litros que consume el vehículo al recorrer un km (€/km) y, en segundo lugar, se calcula el precio medio del gasóleo durante el periodo estudiado.

t_{ij}: distancia en minutos del nodo *i* al nodo *j*.

Cm: para calcular este coste ha sido necesario conocer el total anual de horas trabajadas por el operario (horas ordinarias establecidas por el convenio, extraordinarias y festivas) y el salario bruto anual del trabajador. A partir de estos datos, se ha obtenido el coste por minuto del trabajador.

CTributos: el coste tributario diario hace referencia a los costes fijos que soporta la empresa (seguro del automóvil, impuesto de circulación, impuesto de la ITV) prorrateados.

En el modelo propuesto, la variable costes se formula como la suma de los costes de combustible, salariales y tributarios. Aunque estos son los componentes fundamentales de los costes directos de las empresas de transporte, el modelo se podría extender fácilmente introduciendo otras variables como son los gastos en neumáticos, mantenimiento, reparaciones y amortización y financiación de los vehículos.

El siguiente paso es evaluar y comparar el modelo actual con el propuesto (replanificado a partir de las matrices) siendo el modelo actual la ruta inicial y la ruta replanificada calculadas con los datos obtenidos de las matrices “Distancia” (km), “Costes” (€) y “Tiempo” (min). A partir de los datos obtenidos de la ruta inicial, se

construye en una hoja de cálculo tres matrices cuadradas para cada día de la semana, conteniendo los datos en km, min y € respectivamente. En estas matrices se incluyen todos los valores de todos los nodos que pertenecen a una misma jornada. Posteriormente, estas matrices se transforman en formato TXT para importarlas directamente a la aplicación *Grafos*. Una vez introducidas las matrices en la aplicación, se procede a hacer el análisis de rutas con el algoritmo para el problema del viajante a coste mínimo. De este modo, la aplicación proporciona una solución en el grafo y una ventana de análisis con la función objetivo obtenida, además de añadirse posteriormente la secuencia obtenida del análisis. A continuación, se muestran las Tablas 1, 2 y 3 que resumen, respectivamente, el ahorro mensual, anual, y extrapolado para todas las rutas de la empresa y para los tres parámetros analizados.

Km.	1ª Semana	2ª Semana	3ª Semana	4ª Semana	TOTAL
Ahorro Mensual					
Valores Máx s/ Valores Minimos	317 Km	276,5 Km	249,6 Km	280 Km	1.123,1 Km
R.Óptima s/ R.Inicial.	49,2 Km	27,9 Km	48,2 Km	27,9 Km	154,2 Km
Ahorro Anual	1ª Semanas	2ª Semanas	3ª Semanas	4ª Semanas	TOTAL
Valores Máx s/ Valores Minimos	3566 Km	3110,6 Km	2808 Km	3150 Km	12.634,6 Km
R.Óptima s/ R.Inicial.	1107 Km	627,75 Km	1107 Km	627,75 Km	1.734 Km
Ahorro Anual Extrapolado para las 7 Rutas					TOTAL
Valores Máx s/ Valores Minimos					88.442 Km
R.Óptima s/ R.Inicial.					12.138 Km

Tabla 1. Tabla resumen del ahorro en km.

Minutos.	1ª Semana	2ª Semana	3ª Semana	4ª Semana	TOTAL
Ahorro Mensual					
Valores Máx s/ Valores Minimos	749 min	1630 min	672 min	476 min	3527 min
R.Óptima s/ R.Inicial.	61 min	31 min	61 min	31 min	184 min
Ahorro Anual	1ª Semanas	2ª Semanas	3ª Semanas	4ª Semanas	TOTAL
Valores Máx s/ Valores Minimos	8426 min	18337 min	7560 min	5355 min	39678 min
R.Óptima s/ R.Inicial.	1370 min	706 min	1370 min	706 min	4152 min
Ahorro Anual Extrapolado para las 7 Rutas					TOTAL
Valores Máx s/ Valores Minimos					277.746 min
R.Óptima s/ R.Inicial.					29.064 min

Tabla 2. Tabla resumen del ahorro en minutos.

€.	1ª Semana	2ª Semana	3ª Semana	4ª Semana	TOTAL
Ahorro Mensual					
Valores Máx s/ Valores Minimos	69,45 €	57,60 €	61,00 €	48,00 €	236,05 €
R.Óptima s/ R.Inicial.	23,55 €	20,22 €	23,55 €	20,22 €	87,54 €
Ahorro Anual	1ª Semanas	2ª Semanas	3ª Semanas	4ª Semanas	TOTAL
Valores Máx s/ Valores Minimos	736,31 €	648,00 €	686,25 €	540,00 €	2.610,00 €
R.Óptima s/ R.Inicial.	529,87 €	454,95 €	529,87 €	545,95 €	984,82 €
Ahorro Anual Extrapolado para las 7 Rutas					TOTAL
Valores Máx s/ Valores Minimos					18.270,00 €
R.Óptima s/ R.Inicial.					6.893,74 €

Tabla 3. Tabla resumen del ahorro en euros.

Desde el punto de vista de los costes, *Grafos* proporciona un total de 16 valores mínimos. Esto significa que de las veinte jornadas diarias analizadas que componen cada mes estudiado (Semana 1-Lunes ó S1-L,... Semana 4-Viernes ó S4-V) la aplicación ha obtenido en dieciséis de éstas costes mínimos óptimos. Por tanto, el coste global de esta ruta disminuye dado que se repite la misma secuencia de visitas durante la primera y tercera semana, y durante la segunda y la cuarta semana para todos los meses analizados. Estos resultados comparados con el único valor mínimo que ha generado la ruta inicial confirman que las secuencias provistas por dicha aplicación ayudan a reducir el coste a la empresa. La diferencia entre los valores mínimos obtenidos frente a los máximos, suponen un ahorro anual total de 2.610 € para esta ruta. Al comparar la ruta inicial con la ruta óptima obtenida en *Grafos*, anualmente la empresa ahorraría la cantidad de 984,82 € para la ruta estudiada siempre y cuando se modificara la ruta inicial y la adaptara a los resultados obtenidos con la aplicación *Grafos*. Si se extrapolan los resultados para las siete rutas que actualmente tiene la empresa, la diferencia entre los valores mínimos y máximos supondría un coste máximo adicional de 18.270 € anuales para todas las rutas en el caso de que los operarios desviasen sus rutas para atender las incidencias, mientras que la cantidad que se ahorraría la empresa si modificase sus rutas iniciales y las adaptase a los resultados obtenidos con *Grafos* sería aproximadamente de 6.893,74 € anuales.

A continuación, se muestra un ejemplo para una de las jornadas estudiadas, concretamente la que representa los miércoles de la primera y tercera semana de cada mes (S1-3-X). En la Figura 3 se representa la ruta inicial planificada por la empresa y, en la Figura 4, la ruta óptima obtenida con *Grafos*.

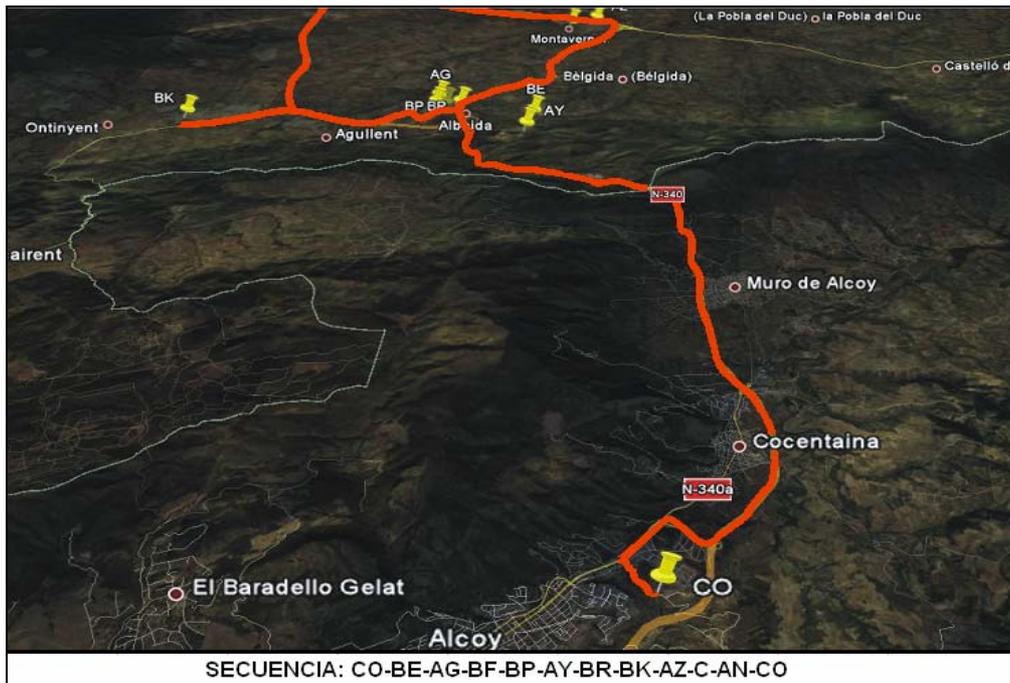


Figura 3. Representación de la ruta inicial planificada por la empresa para la jornada S1-3 X con Google Earth 2008.

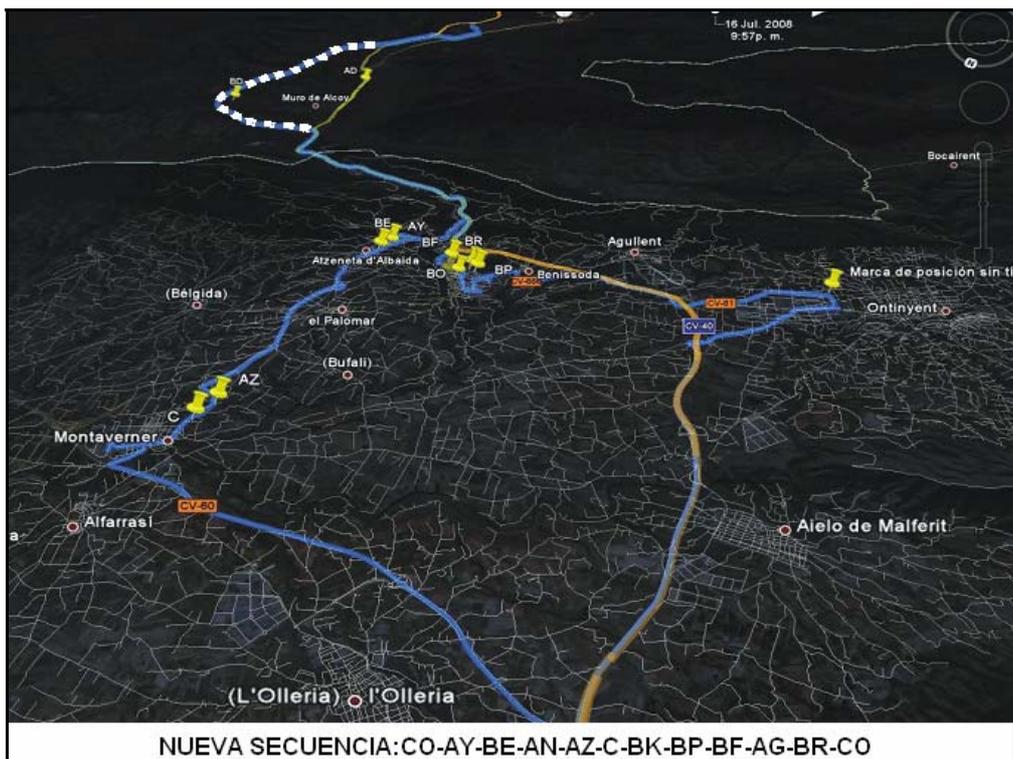


Figura 4. Representación de la ruta óptima obtenida para la jornada S1-3 X, software *Rutas*, Google Earth 2008.

Las figuras anteriores muestran dos rutas a simple vista similares, aunque al observar la secuencia se aprecia la diferencia. La Figura 3 muestra la ruta inicial fijada por la empresa y llevada a cabo por el operario durante la jornada escogida, los resultados obtenidos en el análisis fueron los siguientes: distancia de 87 km, tiempo de

desplazamiento efectivo estimado de 107 minutos y coste de la ruta de 23,2 € La Figura 4 muestra la secuencia obtenida para la misma jornada tras haber aplicado el algoritmo del Problema del Viajante. A continuación, se resumen los resultados obtenidos: distancia de 74,6 km, tiempo de desplazamiento efectivo estimado de 89 minutos y coste de la ruta de 17,63 € Una vez que se han estudiado todas las rutas, aunque se omitan por razones de espacio, se observa que siguiendo la misma ruta pero cambiando la secuencia de visitas a los clientes se consigue un ahorro en coste, tiempo y distancia recorrida.

5 Conclusiones

La aplicación *Grafos* ha optimizado la ruta inicial a través del cambio de la secuencia de visitas planteada en la ruta inicial, demostrando que puede mejorarse dicha ruta mediante el algoritmo del problema del viajante y utilizando los tres factores analizados en este trabajo (kilómetros, tiempo y coste en €).

Así ha podido demostrarse que la gestión de rutas es una de las áreas de gestión de la empresa que permite reducir costes si se optimizan eficazmente. Una de las utilidades de las diferencias entre los valores mínimos y máximos es que ayudan a entender el coste que supone desviarse de la ruta establecida para atender avisos, por ejemplo, de averías y reposiciones. Por tanto, comparando estos datos, se considera necesario replantear en un futuro qué le resultaría más rentable a la empresa: tener un operario que atienda las incidencias que surjan durante una jornada, desviándose de la ruta, o contratar un técnico para los avisos, evitando que el operario se desvíe de la ruta inicial planificada.

Aunque los resultados obtenidos con las rutas iniciales demuestran que la gestión de rutas de la empresa era efectiva, sería positivo que esta se plantease la posibilidad de reajustar las rutas iniciales en función de los resultados obtenidos con *Grafos* para optimizarlas, ya que el sistema propuesto facilitaría a la empresa poder planificar nuevas rutas o añadir nuevos clientes a las rutas existentes en la jornada más apropiada. También, es importante que la empresa controle los gastos y los reduzca en la medida de sus posibilidades, ya que como ocurre con el precio del gasóleo, hay variables que no pueden controlarse y que incrementan el gasto de la empresa, con lo que una buena política de gestión de rutas es el mejor aliado para frenar en parte estos gastos.

En cuanto a las líneas futuras de actuación, a corto plazo la empresa tiene previsto estudiar la viabilidad del sistema de gestión de rutas propuesto antes de adaptar o modificar su sistema actual de rutas. El objetivo fundamental tras implantar el método de optimización sería replantearse todas las rutas iniciales propuestas y modificarlas, siguiendo el patrón de secuencias obtenido mediante *Grafos* para cada una de las jornadas. Finalmente, sería interesante poder incorporar al estudio nuevas variables que influyan sobre las rutas óptimas obtenidas con *Grafos*. De este modo, podrían preverse qué va a ocurrir en un futuro bajo el supuesto de unas condiciones dadas, haciendo posible el estudio de diferentes resultados cambiando una o varias variables, con lo que se podría conocer con exactitud la ruta más adecuada.

Referencias bibliográficas

- Anderson, D.R., Sweeney, D.J., Williams, T.A. (2004): Métodos Cuantitativos para los Negocios. 8ª edición. Thomson International.
- Appel, K., Haken, W. (1977a): Every planar map is four colorable. Part I. Discharging. *Illinois Journal of Mathematics* 21, 429–490.
- Appel, K., Haken, W. (1977b): Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics* 21, 491–567.
- Bodin, L., Golden, B. (1981): Classification in vehicle-routing and scheduling. *Networks* 11 (2), 97–108.
- Desrochers, M., Lenstra, J.K., Savelsbergh, M.W.P. (1990): A classification scheme for vehicle-routing and scheduling problems. *European Journal of Operational Research* 46 (3) 322–332.
- Euler, L. (1736): Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8, 128–140.
- Hierholzer, C. (1873): Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechnung zu umfahren. *Mathematische Annalen* 6, 30–32.
- Hillier, F.S., Lieberman, G.J. (2006): Introducción a la Investigación de Operaciones. 8ª edición. McGraw-Hill.
- Ministerio de Fomento (2001): Estudio socio-económico del sector del transporte por carretera. Consultrans.
- Rodríguez-Villalobos, A. (2008): Integración de un SIG con modelos de cálculo y optimización de rutas de vehículos CVRP y software de gestión de flotas. *Dirección y Organización* 35, 7–14.
- Sylvester, J.J. (1878): Chemistry and Algebra. *Nature* 17, 284.
- Taha, H.A. (2004): Investigación de Operaciones. 7ª edición. Prentice Hall, México.
- Winston, W.L. (2005): Investigación de Operaciones. Aplicaciones y Algoritmos. Ed. Thomson, México.

Prediction of individual automobile reported but not settled claim reserves for bodily injuries in the context of Solvency II

AYUSO GUTIÉRREZ, M. MERCEDES

Departament d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola

Universitat de Barcelona

Correo electrónico: mayuso@ub.edu

SANTOLINO PRIETO, MIGUEL Á.

Departament d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola

Universitat de Barcelona

Correo electrónico: msantolino@ub.edu

ABSTRACT

Automobile bodily injury (BI) claims remain unsettled for a long time after the accident. The estimation of an accurate reserve for Reported but not Settled claims is therefore vital for insurers. In accordance with the recommendation included in the Solvency II project, a statistical model is implemented for reserve estimation. Lognormality on empirical cost data is observed for different levels of BI severity. The individual claim provision is estimated by allocating the expected mean compensation for the predicted severity of the victim's injury, for which the upper bound is also computed. The severity is predicted by means of a heteroscedastic multiple choice model, because evidence has found that the variability in the latent severity of individuals travelling by car is not constant. It is shown that this methodology improves the accuracy of reserve estimation at all stages, as compared to the subjective assessment that has traditionally been made by practitioners.

Keywords: automobile accident; Solvency II; bodily injury claims; individual reported but not settled reserve (RBNS).

JEL classification: C35; C53; G22.

2000MSC: G2PO5; G2L12; G2H12.

Predicción de las reservas individuales para siniestros del automóvil con daños corporales pendientes de liquidación en el contexto de Solvencia II

RESUMEN

Los siniestros del automóvil con daños corporales suelen permanecer sin liquidar durante largos periodos después del accidente. Una adecuada estimación por siniestros comunicados pero no liquidados es por tanto de vital importancia para los aseguradores. Siguiendo las recomendaciones incluidas en el proyecto de Solvencia II, se implementa un método estadístico para la estimación de la reserva. En concreto, se observa que el coste de compensación se distribuye lognormalmente para diferentes niveles de gravedad del daño corporal. La provisión individual del siniestro la estimamos asignando el valor esperado de compensación media según la gravedad predicha de la lesión de la víctima, para la cual también se calcula el límite superior. La gravedad la predecimos mediante un modelo heterocedástico de elección múltiple, porque hallamos evidencias de que la variabilidad en la gravedad latente no es constante para los individuos que viajaban en un turismo. Se demuestra que la metodología propuesta mejora la precisión en la estimación de las reservas en todas las etapas, en comparación con la valoración subjetiva que ha sido tradicionalmente hecha por los peritos de la compañía.

Palabras clave: accidente de automóvil; Solvencia II; siniestros con daños corporales; reserva individual para siniestros pendientes de liquidación.

Clasificación JEL: C35; C53; G22.

2000MSC: G2PO5; G2L12; G2H12.



1. Introduction

Although the number of traffic accidents is declining in many developed countries, in most of them compensation payments to bodily injury (BI) victims are increasing (rising medical expenses, *judicial* inflation and so on). In the Spanish market, from which we have taken the sample used below, the compensation cost for seriously injured victims increased between 2001 and 2005 by an average of 10% annually (SCOR, 2006). Automobile liability insurance is compulsory in Spain. Therefore, BI victims involved in a motor accident have to be compensated by the insurer of the responsible driver. Indeed, the compensation of BI victims represents approximately 60% of the claim costs faced by Spanish motor insurers.

Motor accidents with BI victims involved are usually reported to the insurer shortly after they occur. Nevertheless, claims may remain unsettled for several fiscal years before victims are indemnified. That is why, firstly, the victim must be fully recovered and, subsequently, the compensation amount must be either agreed upon between the parties or set by judicial order. Therefore, insurance companies need accurate methods to calculate the necessary capital funds (reserves) to cover outstanding BI claims liabilities. In particular, they should pay special attention to the provision for Reported but not Settled claims, known as the RBNS reserve.

The actuarial literature has mainly focused on aggregate reserving techniques. Most statistical methods have been developed to compute the reserve for Incurred but not Reported claims (IBNR reserve), and therefore they do not consider the specific characteristics of each victim and accident in the estimation (for a thorough review see England and Verrall, 2002; 2006). Statistical methods based on individual information have projected compensation payments according to the victim information available in the accident year (Norberg, 1993; 1999; Haastrup and Arjas, 1996; Antonio *et al.*, 2006; Roholte Larsen, 2007). Thus, these techniques did not consider any variations in victim information during the claim processing, and the effects of these fluctuations on the reserves estimation.

In current practice, most motor insurance companies calculate compensation liabilities for reported BI claims on a case-by-case basis. Indeed, insurance adjusters assess compensation payments based on the claims information available, especially their own medical reports. In the Solvency II framework the individual evaluation of claims compensation payments is indicated as a permitted technique for reserving purposes

(CEIOPS, 2007). However, the European Committee in charge of the project notes that this valuation technique may be rather subjective. Thus, the Committee recommends applying statistical actuarial methods in order to estimate the RBNS reserve. In fact, Ayuso and Santolino (2007) presented an empirical application where a statistical model underestimated the final cost by 7%, whereas expert assessment was underestimating by 17%.

This paper presents a more general model than Ayuso and Santolino (2007) and discusses details about estimating individual RBNS claim reserves which take into account the compensation cost distribution for different levels of claim severity. The individual provision can be estimated at successive stages during the claim handling process. Our objective is to offer a statistical modelling framework that allows the insurer to calibrate the provision amount for the victim's compensation in response to variations of the expected BI severity of the victim (i.e. immediately after new information about his/her recovery status is available). Furthermore, since distributional assumptions about compensation payments are taken into account, the suggested approach can be used by the company to predict the upper bound reserve amount at the appropriate confidence level. The suggested methodology is applied to the usual stages of claim processing. At each stage, we compare the accuracy of the provision obtained by the proposed methodology with the direct assessment obtained by the insurer, based on internal medical reports.

Several authors have used ordered multiple choice models for the severity of motor accidents (Kockelman and Kweon, 2002; Abdel-Aty, 2003; Lee and Abdel-Aty, 2005; Zajac and Ivan, 2003; Austin and Faigin, 2003; Karlaftis *et al.*, 2003). They all assumed a constant variance in the random term for all individual claims. However, we found evidence that such an assumption seems to be restrictive and may be unrealistic in the case of casualties resulting from accidents involving different types of vehicles. Our model is more general because the severity of the victim's injury is predicted by means of a heteroscedastic ordered multiple choice model (HOMC)¹.

¹ An interesting development of HOMC models was proposed by O'Donnell and Connor (1996), who suggested that the victim's age, the speed, and the time of the accident were predictors of the error variance. More recently, Wang and Kockelman (2005) parameterized the error term variance as a function of vehicle type and vehicle weight. In our case, the error term variance is parameterized according to the victim's vehicle type.

In the next section we describe the database used in the empirical analysis, with special attention being paid to the BI compensation cost distribution. Subsequently, the provision for reported BI claims is estimated at each stage of claim processing, and compared with those directly calculated by the insurer. We demonstrate that the proposed methodology can help the insurance company to obtain a more accurate reserve for covering future compensation payments of motor BI victims. The main findings are summarized in the last section.

2. Motor BI claims database

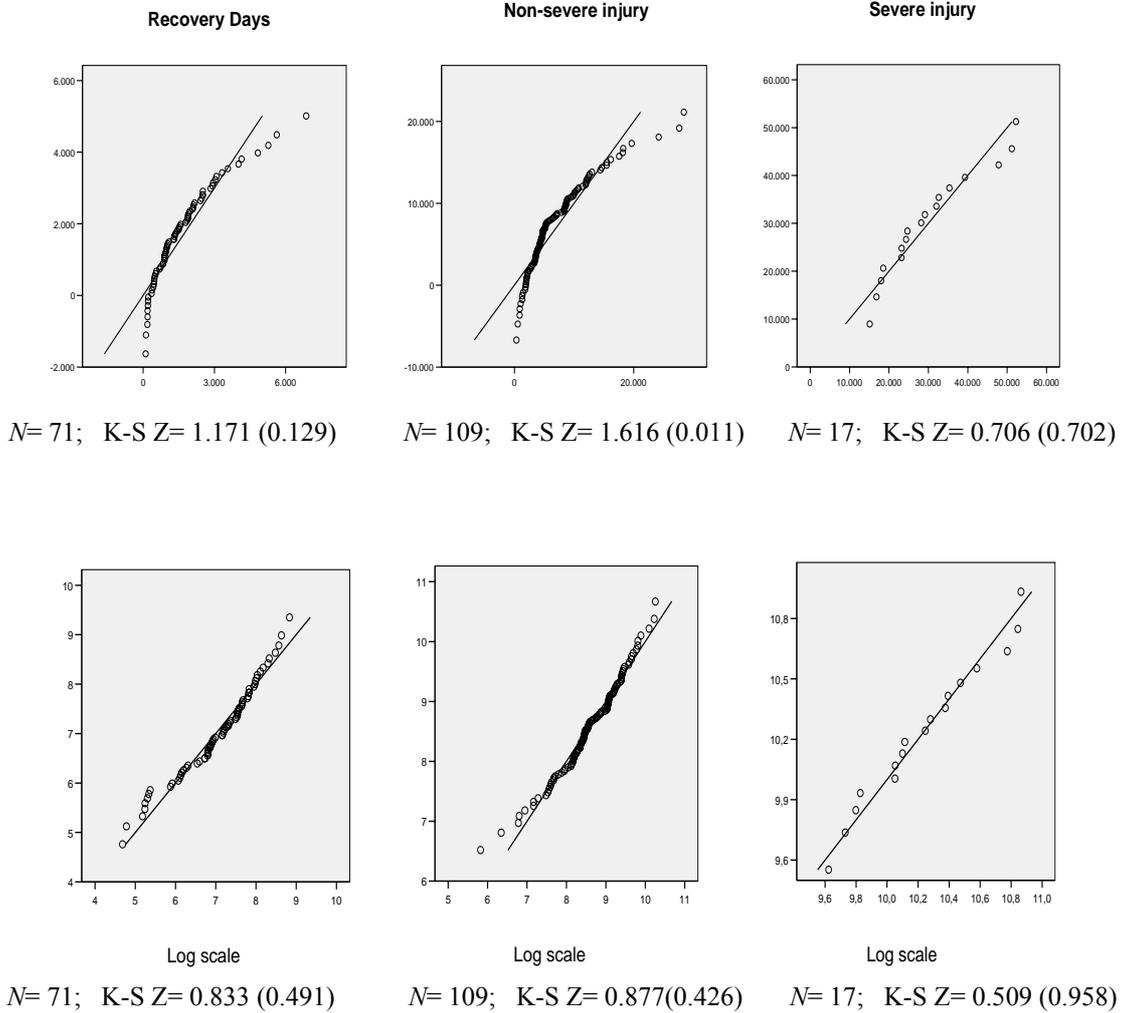
The dataset contains information from 197 non-fatal victims with BI damages involved in traffic accidents. The database was provided by a Spanish insurer who was legally responsible for the compensation payment. The compensation amount for all the victims was established by judicial order for the years 2001 to 2003 because the insurer and the claimant did not reach a prior agreement. Ayuso and Santolino (2007) used this data to model severity with a classical ordered logit model.

The dependent variable of the HOMC regression model is related to the BI severity of the victim. It has three categories: *Recovery Days*, *Non-severe Injury* and *Severe Injury*. These categories are defined according to the severity of injury assigned to sequelae² by the judicial verdict. The category *Recovery Days* represents casualties without sequelae. *Non-severe Injury* means casualties with fewer than 15 points for sequelae, while *Severe Injury* refers to victims with 15 or more points. The HOMC regression model has been estimated by using SPSS v.14.0.

The claim provision for each victim depends on the empirical compensation cost distribution and the severity of the injury. Outstanding BI claims are reserved by allocating the expected mean compensation cost of the forecasted level of BI severity. In Figure 1 the normal Q-Q plot and the Kolmogorov-Smirnov (K-S) test for the compensation cost distribution (in original and logarithmic scale) are presented per severity category.

² Note that sequela is defined as the definitive reduction of a person's physical or mental potential as a result of an accident. The injury severity of a sequela is measured according to a score interval. The definition and score interval of each sequela must agree with those stipulated in the Spanish disability scoring system (LOSSP 30/95). The aggregated score for sequelae ranges from 0 to 100.

Figure 1. Analysis of normality for the claims compensation cost data clustered by categories of severity, on original scale (*first row*) and logarithmic scale (*second row*)



Note that the null hypothesis of lognormality cannot be rejected for any category of BI severity. In contrast, there is evidence that normality of compensations cannot be accepted for observations classified as *Non-severe Injury*. The same outcome is obtained when the K-S test and the Q-Q plot of the observed compensation cost distribution are carried out for the whole sample. Consequently, we assume that compensation cost data are lognormally distributed. Predictions on the original scale are obtained with the well-known characteristics of the lognormal distribution, i.e. if $\ln(y) \sim N(\mu, \sigma^2)$ then $E[y] = e^{\mu+0,5\sigma^2}$ and $\text{Var}[y] = e^{2\mu+2\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$.

Descriptive statistics of the compensation cost data for each category of BI severity are presented in Table 1.

Table 1. Descriptive statistics of the compensation cost variable (in euros)

	<i>Estimated mean compensation cost (log scale)</i>	<i>Standard deviation (log scale)</i>	<i>Expected mean compensation cost (original scale)</i>	<i>Standard deviation (original scale)</i>
<i>Recovery Days</i>	7.110	0.953	1927.74	2345.143
<i>Non-Severe Injury</i>	8.620	0.808	7680.44	7371.380
<i>Severe Injury</i>	10.273	0.403	31388.74	13195.383
<i>Total</i>	8.219	1.264	8249.01	16387.109

Regression variables and descriptive statistics for the total sample are presented in Table 2. Explanatory variables refer to attributes of the victim such as age and gender, characteristics of the accident, and medical information collected during the recovery period³. Regarding the accident characteristics, we include as regressors the year that the accident took place, the victim's vehicle type (i.e. if it was a car or another type) and if the casualty was a passenger (not the driver) of the damaged vehicle.

With respect to medical information, we consider the number of sequelae and recovery days⁴ stated by the insurer's medical expert at the first and last examination, and we also incorporate a dichotomous variable which indicates whether the forensic doctor examined the victim and considered that the accident had not caused any sequelae. Under Spanish law the forensic report is compulsory only if the lawsuit follows a penal but not a civil procedure. A control variable (*foren*) was included in the model to prevent civil lawsuits from being treated as missing values in our dataset.

³ Note that here fewer variables than Ayuso and Santolino (2007) have been used. In addition, a new regression including information from the forensic report has been estimated. Variables did not improve the explanatory capacity of the model were excluded.

⁴ A distinction is made between recovery days with and without disability for working.

Table 2. Explanatory variables and descriptive statistics

		Mean	Standard Deviation
<i>logcom</i>	Compensation amount (on logarithmic scale) awarded by verdict.	8.219	1.264
<i>year</i>	Accident year (1=1994; 2=1995; ...; 10=2003).	6.975	1.430
<i>year2</i>	Accident year (squared).	50.680	17.151
<i>car</i>	1 if the victim's vehicle is a car; 0=otherwise (e.g. motorbike, pedestrians).	0.650	0.478
<i>age</i>	Victim's age (1 if age 0 to 9; 2 if 10 to 19; and so forth).	3.930	1.606
<i>gender</i>	1 if male; 0=otherwise.	0.497	0.501
<i>passen</i>	1 if the victim is passenger of the insured vehicle; 0=otherwise.	0.091	0.289
<i>seq</i>	Number of sequelae (permanent injuries) expected in first medical report.	1.092	1.340
<i>rdd</i>	Number of recovery days with disability for working expected in first medical report.	53.563	53.971
<i>rdnd</i>	Number of recovery days without disability for working expected in first medical report.	29.109	45.472
<i>same</i>	1 if last medical report is the same as the first one; 0=otherwise.	0.316	0.467
<i>seq_last</i>	Number of sequelae (permanent injuries) stated in last medical report.	1.114	1.655
<i>varseq</i>	Sequelae number variation across reports (last minus first).	0.009	0.917
<i>rdd_last</i>	Number of recovery days with disability for working stated in last medical report.	53.131	63.027
<i>varrdd</i>	Variation in the number of recovery days unable to work across reports (last minus first).	2.079	37.601
<i>rdnd_last</i>	Number of recovery days without disability for working stated in last medical report.	37.596	59.699
<i>foren</i>	1 if forensic doctor states the victim has no sequelae; 0 otherwise.	0.342	0.477

N=197 (71 victims classified as *Recovery Days*; 109 victims as *Non-severe Injury*; 17 victims as *Severe Injury*).

3. Estimated reserves for reported but not settled BI claims

In this section we deal with the estimation of claims reserves according to the information about the BI victim available to the insurer at different moments of the claim handling process. These are: i) a first reserve estimation carried out at the time the accident is reported to the insurance company; ii) a second estimation when the company has the initial medical evaluation of BI damages; iii) a third when the victim is fully recovered; and iv) a fourth estimation that is computed when the company has the forensic report. Each outstanding BI claim is reserved by allocating the expected mean compensation cost of the severity level predicted by a heteroscedastic ordered multiple choice model. Finally, the aggregated reserve at each stage of the claim handling process is computed as the sum of individual provisions.

An overview of the heteroscedastic ordered logit model specification and the interpretation of results can be found in Appendix 1.

3.1 Reserve estimation when claims are reported

The initial reserve estimation is based on the information available when claims are reported to the insurer. Thereby, we allocate to each observation the expected mean compensation cost of the severity level predicted by the first HOMC model (Table A.1, Stage 1). A comparison with the total amount which was awarded by judges is presented in Table 3. The first row of Table 3 shows the number of victims according to the BI severity awarded in the judicial verdict. The sum of observed compensations awarded to these victims is reported in second row. The aggregated reserve for outstanding claims is estimated for each category of BI severity (5th row), which is obtained by multiplying the empirical mean compensation cost of each severity category (3rd row and also Table 1) by the predicted frequency of victims derived from the HOMC model (4th row). The sixth and seventh rows of Table 3 present the percentage of observed compensations covered by the estimated reserve and by the upper-bound estimate of the reserve for a 95% confidence level. The same design is followed for the tables in the next stages.

Table 3. Provision derived from the severity level predicted by the HOMC model (victim information available before any medical report)

	Level of severity			Total
	Recovery Days	Non-Severe Injury	Severe Injury	
Observed frequency (judge)	71	109	17	197
Total observed amount awarded by judges (euros)	126693.80	799054.14	530422.16	1456170.10
Expected mean compensation (euros)	1927.74	7680.44	31388.74	8249.01
Predicted frequency (HOMC model)	51	146	-	197
Total provision from the HOMC (euros)	98314.74	1121344.24	0	1219658.98
Total provision from the HOMC / Total observed amount awarded by judges	77.60%	140.33%	0.00%	83.76%
Confidence limit* of the HOMC / Total observed amount awarded by judges	99.35%	158.48%	0.00%	93.32%

* 95% confidence limit.

Note that, at this point, severely injured victims are not correctly predicted by the heteroscedastic ordered logit model. Also, victims without sequelae (classified as *Recovery Days*) are not sufficiently forecasted. Due to these constraints in the prediction of BI severity, the economic resources are concentrated on claims from the second category (*Non-severe Injury*) when the provision is calculated. The overprovision of claims from the intermediate category is not enough to counterbalance the under-provision of claims from the extreme categories. As a result, the total reserve only covers about 84% of the entire compensation

amount of outstanding BI claims. Note that this first estimation of reserves has been carried out with very little information about the victims.

3.2 Reserve estimation after the first medical report

With the first medical report an initial professional assessment of damages is submitted to the insurer. In Table 4 the estimated provision based on the injury severity predicted by the heteroscedastic model (Table A.1, Stage 2) is compared with the provision based on the direct classification of the medical expert. The same criterion of allocating the expected mean cost of the corresponding severity category was applied. Note that the total number of BI victims is now different to that in the previous stage. This is due to the fact that we have taken into account only those victims for whom the first medical report was submitted. As a consequence, the expected mean compensation cost for each level of BI severity, which is directly observed from the sub-sample of BI victims for whom the first medical report was submitted, appears to be slightly different from the one presented for the whole sample (Table 2).

Table 4. Provision derived from the medical expert's classification vs. provision derived from the HOMC model prediction (victim information available after the first medical report)

	Level of severity				Total
	No injury	Recovery Days	Non-Severe Injury	Severe Injury	
Observed frequency (judge)*	-	40	67	12	119
Total observed amount awarded by judges (euros)	-	66314.27	554278.55	394015.05	1014607.87
Expected mean compensation (euros)	-	1766.76	8465.21	33061.09	9699.37
Observed frequency (first medical expert classification)	4 [†]	42	65	8	119
Predicted frequency (HOMC model)	-	39	70	10	119
Total provision from medical report/ Total observed amount awarded by judges	-	111.90%	99.27%	67.13%	87.61%
Total provision from the HOMC/ Total observed amount awarded by judges	-	103.90%	106.91%	83.91%	97.78%
Confidence limit ^{††} of the HOMC/ Total observed amount awarded by judges	-	134.53%	124.51%	101.36%	109.71%

* Only victims for whom the first medical report was submitted.

[†] Medical expert awarded neither recovery days nor sequelae to the victim.

^{††} 95% confidence limit.

Compensations of severely injured victims were again underprovisioned (Table 4). When the HOMC model was applied, in aggregated terms, the misclassified claims were mainly diverted to the *Non-severe Injury* category. In contrast, following the medical expert's evaluation, the *Recovery Days* claims were primarily overclassified and therefore

overprovisioned. Since the individual provision of a *Non-severe Injury* claim is higher than that of a *Recovery Days* claim, the aggregated provision seems to fit better the proposed methodology. The estimated provision derived from our methodology covered about 98% of the total compensation amount, whereas the provision based on the medical expert's classification covered only 88% of that amount.

3.3 Reserve estimation after the last medical report

At this stage the insurer has the last medical report indicating that the victim has fully recovered. Consequently, the sub-sample is composed of victims for whom the insurance company had the first and last medical reports. Thus, as in the previous stage, the expected mean compensations for each severity level have changed (Table 5, third row). The estimated provision according to HOMC predictions (Table A.1, Stage 3) and that directly derived from the medical expert's classification are presented in Table 5. Note that in contrast to the medical expert's classification the number of victims predicted by the HOMC model at each level of BI severity is now closer to the judge's evaluation. It should be emphasized that the estimated reserve is again close to meeting future compensations, with the point and upper-bound estimates covering 95% and 107% of the empirical compensation payments, respectively.

Table 5. Provision derived from the medical expert's classification vs. provision derived from the HOMC model prediction (victim information available after the last medical report)

	Level of severity				Total
	No injury	Recovery Days	Non-Severe Injury	Severe Injury	
Observed frequency (judge)*	-	40	63	11	114
Total observed amount awarded by judges (euros)	-	66314.27	493812.97	364884.22	925011.46
Expected mean compensation (euros)	-	1766.76	7980.54	33476.80	9045.22
Observed frequency (last medical expert classification)	4 [†]	50	50	10	114
Predicted frequency (HOMC model)	-	42	63	9	114
Total provision from medical report/ Total observed amount awarded by judges	-	133.21%	80.80%	91.75%	88.88%
Total provision from the HOMC/ Total observed amount awarded by judges	-	111.90%	101.81%	82.57%	94.95%
Confidence limit ^{††} of the HOMC/ Total observed amount awarded by judges	-	143.68%	119.14%	101.64%	107.09%

* Only victims for whom the first and last medical reports were submitted.

[†] Medical expert awarded neither recovery days nor sequelae to the victim.

^{††} 95% confidence limit.

3.4 Reserve estimation after forensic report

Lastly, the reserve was computed when the insurer also had the victim information provided by the forensic report, if one existed. This was the last stage in claim processing before the case was taken to trial. In our analysis the sample size was, at that moment, equal to the sample size used in the previous stage, after the last medical report. Therefore, when estimating the provision the same expected mean compensation costs for the different levels of BI severity were considered (Table 5, third row).

The results are shown in Table 6. According to the classification of severity by the forensic doctor we observed an overprovision for covering the compensations of *Severe Injury* victims. Consequently, the total reserve exceeded the real final compensation amount by more than 26%. In contrast, the proposed methodology provided a more accurate estimation for reserving BI claims. The total provision estimated by means of the HOMC model represented 96% of the total amount.

Table 6. Provision derived from the forensic classification[‡] vs. provision derived from the HOMC model prediction (available victim information after the forensic report)

	Level of severity			Total
	Recovery Days	Non-Severe Injury	Severe Injury	
Observed frequency (judge)*	40	63	11	114
Total observed amount awarded by judges (euros)	66314.27	493812.97	364884.22	925011.46
Expected mean compensation (euros)	1766.76	7980.54	33476.80	9045.22
Observed frequency (forensic classification)	40	54	20	114
Predicted frequency (HOMC model)	40	65	9	114
Total provision from forensic report/ Total observed amount awarded by judges	106.57%	87.27%	183.49%	126.61%
Total provision from the HOMC/ Total observed amount awarded by judges	106.57%%	105.05%	82.57%	96.57%
Confidence limit [†] of the HOMC/ Total observed amount awarded by judges	137.58%	122.65%	101.64%	108.53%

[‡] We considered the medical expert's classification (in the last report) for those victims without a forensic report. When the forensic doctor set the sequelae but did not assess them, we considered the mean score of the corresponding interval according to the legislative scale.

* Only victims for whom the first and last medical reports were submitted.

[†] 95% confidence limit.

Summarizing, our methodology presents significant advantages over the provision directly derived from medical reports when it comes to computing the claims reserve⁵. First,

⁵ This happens in all stages, not only in the last stage as illustrated in Ayuso and Santolino (2007).

an initial reserve estimation based on the severity prediction of the victim's injury may be computed at the time the accident is reported and, therefore, before any medical evaluation is available. For the remaining stages of claims processing, it is shown that our methodology offers a more balanced claims reserve estimation than does the provision derived directly from medical evaluations. In this regard, the reserve based directly on the information collected in internal medical reports covered on average less than 90% of claims payments. However, when the reserve was calculated following the forensic evaluation, claims were more than 26% overprovisioned. In contrast, the reserve estimated by the proposed methodology ranges between 95% and 98% of claims payments for all the stages with medical information.

Before concluding, an example of the individual provision of BI claims is presented. Let us suppose that the insurer wants to estimate the capital required to meet the compensation liabilities of four traffic victims with BI damages. Moreover, the available accident information is not the same for each victim because they refer to different stages of claim processing. Let us suppose that victim A is at stage I (before any medical report), victim B is at stage II (after the first medical report), victim C is at stage III (after the last medical report), and finally, victim D is at the last stage (after the forensic report). The results for this example are reported in Table 7. The allocated individual provision is the expected mean compensation for the corresponding predicted severity of the injured victim, and thus it depends on both the severity level and the claim information stage.

Table 7. An example of provisions for four outstanding BI claims according to the HOMC model prediction (in brackets, the insurer classification of BI severity and the obtained provision)

Victim	Information stage	Observed Cost (euros)	Predicted severity*	Individual provision	Confidence limit (95%) of the claim provision
A	1	19661	NSI (-)	7680.44 (8249.01 [†])	19805.67 (35189.50)
B	2	553	NSI (RD)	8465.21 (1766.76)	20127.42 (5018.66)
C	3	968	RD (RD)	1766.76 (1766.76)	5018.66 (5018.66)
D	4	3370	NSI (NSI)	7980.54 (7980.54)	18762.41 (18762.41)
Total		24552		25892.95 (19763.07)	46137.76 (49143.15)

* RD: Recovery Days; NSI: Non-Severe Injury.

[†] The estimated mean compensation of all victims is allocated.

When analyzing victim A, we observed a final compensation amount of 19661 euros. When there was no medical information available (stage I) the HOMC model predicted this victim as *Non-severe Injury*, and 7680.44 euros were allocated to reserves. At that moment, if the HOMC prediction was not available, the estimated mean compensation of all victims would be 8249.01 euros. Victim B is at stage II, i.e. right after the insurer received the first internal medical evaluation of BI damages. According to the HOMC model prediction the victim was classified as *Non-severe Injury*, and so 8465.21 euros were allocated. However, since the medical expert considered that the victim did not have sequelae (only *Recovery Days*), the insurer reserved 1766.76 euros. The individual provision for the remaining victims, C and D, was computed in the same fashion.

According to our results, the estimated reserve of these BI claims based on the insurance staff's evaluation was not enough to cover their compensation payments. In contrast, when the reserve was computed by means of the proposed methodology the estimated provision represented 105.5% of the final compensation payments. On the other hand, when the limit of the provision with a confidence level of 95% was computed, we observed that the upper limit of the total provision derived from the medical expert's classification was larger than the one from the model. This was due to the large sample variance of the provision allocated to victim A, which is estimated from the entire compensation cost distribution (Table 1), and proves that the statistical model that takes into account non constant variance performs better than an approach based on expert assessment rather than statistical analysis.

4. Conclusions

The time period from the occurrence of a motor accident to the point at which victims are compensated for BI damages is long. As a consequence, the insurer is faced with calculating reserves for Reported but not Settled claims. With the aim of promoting objective techniques, insurers are encouraged by the Solvency II project to implement statistical actuarial methods for reserve estimation (CEIOPS, 2007). Insurance companies traditionally assess the compensation cost for a known BI claim (not yet paid) according to their own medical reports. Subsequently, they compute the total RBNS reserve as the sum of individual provisions. Unfortunately, there are often substantial differences between the claim compensation assessed by insurance staff and the amount finally awarded by the judicial verdict.

In this paper a statistical reserving methodology for outstanding BI claims based on individual data has been presented. Empirical compensation cost data grouped by severity levels of victims' injuries are shown to follow a lognormal distribution function. Each claim is provisioned by allocating the expected mean compensation cost of the predicted BI severity. The upper limit of the reserve with an appropriate confidence level is also estimated. The RBNS reserve is computed at the main stages of the claim handling process. It is shown that the proposed methodology is able to estimate the RBNS reserve for claims with different levels of available information. As compared to reserves based on internal medical reports, our methodology performs better at all stages.

Another feature of this paper is that we apply a heteroscedastic ordered multiple choice model to predict the severity of victims' injuries, showing that individuals travelling by car present different variability in latent severity. This qualitative modelling approach allows us to monitor the probability transition of expected severity of each claim at successive stages of the handling process without making additional assumptions regarding price variations, such as the evolution of the inflation rate, the cost of medical services or wages. In addition, and due to the independence of economic factors, the methodology could be applied to estimate the reserve for BI claims settled in a period other than the period under review, without any substantial changes in the explanatory variables' behaviour being expected. In this regard, only assumptions concerning the evolution of the mean compensation cost per severity level would be required.

Acknowledgements

The authors are grateful for the valuable suggestions from research affiliates of Risk in Finance and Insurance at the University of Barcelona. We also thank the two anonymous referees for the general and specific comments. This work has received support from the Spanish Ministry of Science and Innovation and FEDER grants SEJ2005-00741/ECON and ECO2008-01223/ECON.

References

- ABDEL-ATY, M. (2003) Analysis of Driver Injury Severity Levels at Multiple Locations Using Ordered Probit Models. *Journal of Safety Research*, 34, 597–603.
- ANTONIO, K., BEIRLANT, J., HOEDEMAKERS, T. & VERLAAK, R. (2006) Lognormal Mixed Models for Reported Claim Reserves. *North American Actuarial Journal*, 10, 30–48.
- AUSTIN, R. & FAIGIN, B. (2003) Effect of Vehicle and Crash Factors on Older Occupants. *Journal of Safety Research*, 34, 441–452.

- AYUSO, M. & SANTOLINO, M. (2007) Predicting Automobile Claims Bodily Injury Severity with Sequential Ordered Logit Models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 4, 71–83.
- CEIOPS (2007) QIS 4 Technical Specifications. Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors CEIOPS DOC-23/07.
- ENGLAND, P. & VERALL, R. (2002) Stochastic Claims Reserving in General Insurance. *British Actuarial Journal*, 8, 443–544.
- ENGLAND, P. & VERALL, R. (2006) Predictive distributions of outstanding liabilities in general insurance. *Annals of Actuarial Science*, 1, 221–270.
- HAASTRUP, S. & ARJAS, E. (1996) Claims Reserving in Continuous Time: a Non-parametric Bayesian Approach. *ASTIN Bulletin*, 26, 139–164.
- KARLAFTIS, M.G., KOTZAMPASSAKIS, I. & KANELLAIDIS, G. (2003) An Empirical Investigation of European Drivers' Self-Assessment. *Journal of Safety Research*, 34, 207–213.
- KOCKELMAN, K. & KWEON, Y. (2002) Driver Injury Severity: An Application of Ordered Probit Models. *Accident Analysis & Prevention*, 34, 313–321.
- LEE, C. & ABDEL-ATY, M. (2005) Comprehensive Analysis of Vehicle-Pedestrian Crashes at Intersections in Florida. *Accident Analysis & Prevention*, 37, 775–786.
- NORBERG, R. (1993) Prediction of Outstanding Liabilities in Non-Life Insurance. *ASTIN Bulletin*, 23, 95–115.
- NORBERG, R. (1999) Prediction of Outstanding Claims II: Model Variations and Extensions. *ASTIN Bulletin*, 29, 5–25.
- O'DONELL, C.J. & CONNOR, D.H. (1996) Predicting the Severity of Motor Vehicle Accident Injuries Using Models of Ordered Multiple Choice. *Accident Analysis & Prevention*, 28, 739–756.
- ROHOLTE LARSEN, C. (2007) An Individual Claims Reserving Model. *ASTIN Bulletin*, 37, 113–132.
- SCOR (2006) Nivel y Evolución del Coste Medio Daño Corporal Grave por Accidentes de Circulación Ocurridos en España. SCOR Global P&C (Spanish document).
- WANG, X. & KOCKELMAN, K. (2005) Use of Heteroscedastic Ordered Logit Model to Study Severity of Occupant Injury: Distinguishing the Effects of Vehicle Weight and Type. *Transportation Research Record*, 1908, 195–204.
- ZAJAC, S. & IVAN, J. (2003) Factors Influencing Injury Severity of Motor Vehicle-Crossing Pedestrian Crashes in Rural Connecticut. *Accident Analysis & Prevention*, 35, 369–379.

APPENDIX 1

The heteroscedastic ordered logit model

The heteroscedastic ordered logit model is based on a continuous unobserved variable y^* , which collects the bodily injury severity, that is modelled by means of a linear regression. The observed variable y_i is discrete, with J ordered response categories. In our case, it consists of three categories: *Recovery Days*, *Non-severe Injury* and *Severe Injury*. The cumulative probability that subject i belongs to category j or lower ones is,

$$P(y_i \leq j | \mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i) = \frac{e^{(\mu_j - \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}) / \sigma_i}}{1 + e^{(\mu_j - \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}) / \sigma_i}}, \quad j=1, \dots, J, \quad i=1, \dots, N,$$

where the μ_j 's are the model thresholds (with $\mu_0 = -\infty$ and $\mu_J = +\infty$), $\boldsymbol{\beta} (K \times 1)$ is the column vector of K unknown parameters, and $\mathbf{x}_i (1 \times K)$ is the row vector of K observed regressors. We assume that the residual term ε_i follows a normal distribution with zero expected value and σ_i^2 variance. Note that $(\hat{\mu}_j - \mathbf{x}_i \hat{\boldsymbol{\beta}})$ is the predictor of the expected mean value, and σ_i is the standard deviation. Usually, σ_i is parameterized as $\exp(\mathbf{z}_i \boldsymbol{\tau})$ to ensure its positivity, and $\mathbf{z}_i \hat{\boldsymbol{\tau}}$ is the variance predictor, with $\hat{\boldsymbol{\tau}} (G \times 1)$ the column vector of G unknown scale parameters (O'Donnell and Connor, 1996; Wang and Kockelman, 2005). The constraint of the homoscedastic ordered logit model related to opposite marginal effects on the two extreme categories is reduced by the inclusion of scale parameters $\boldsymbol{\tau}$. Parameter estimates are usually obtained by maximum likelihood, applying any algorithm (e.g. Newton-Raphson) in the maximization process.

The estimation results of the heteroscedastic ordered logit model

Parameter estimates for variables used at each stage in the prediction of the individual BI severity level are shown in Table A.1. At the bottom of Table A.1 we list the percentage of BI victims for which the model correctly predicted the final BI severity. In order to make comparisons the percentage of victims for which the severity was accurately classified in medical reports is also indicated. Note that in the first stage there is not yet any information from medical reports and so no percentage is included. In the last stage, if the forensic doctor did not examine the victim we considered the severity classification made in the last internal medical report.

Table A.1. Estimation of parameters at the successive stages (heteroscedastic ordered logit model)

	Stage I (Model before any medical report)		Stage II (Model after first medical report)		Stage III (Model after last medical report)		Stage IV (Model after forensic report)	
	Coefficient	P-value	Coefficient	P-value	Coefficient	P-value	Coefficient	P-value
μ_1	-0.041	0.979	4.167	0.097*	4.114	0.178	3.744	0.592
μ_2	2.996	0.059*	8.168	0.004***	8.462	0.011**	17.331	0.049**
<i>year</i>	0.795	0.129	1.237	0.118	1.429	0.152	2.291	0.330
<i>year2</i>	-0.082	0.066*	-0.104	0.111	-0.124	0.129	-0.179	0.357
<i>car</i>	-1.462	0.000***	-0.608	0.159	-0.770	0.112	-1.074	0.443
<i>age</i>	0.142	0.101	0.194	0.082*	0.245	0.049**	0.590	0.086*
<i>gender</i>	-0.895	0.003***	-0.877	0.016**	-1.162	0.008***	-2.369	0.072*
<i>passen</i>	0.472	0.319	0.678	0.134	0.643	0.206	-0.275	0.878
<i>seq</i>	-	-	0.701	0.002***	-	-	-	-
<i>rdd</i>	-	-	0.015	0.001***	-	-	-	-
<i>rdnd</i>	-	-	0.008	0.078*	-	-	-	-
<i>same</i>	-	-	-	-	-0.823	0.065*	-2.686	0.170
<i>seq_last</i>	-	-	-	-	0.676	0.006***	1.825	0.039**
<i>varseq</i>	-	-	-	-	-0.686	0.031**	-2.172	0.049**
<i>rdd_last</i>	-	-	-	-	0.014	0.005***	0.021	0.110
<i>varrdd</i>	-	-	-	-	-0.014	0.018**	-0.036	0.082*
<i>rdnd_last</i>	-	-	-	-	0.007	0.059*	0.017	0.046**
<i>foren</i>	-	-	-	-	-	-	-10.159	0.005***
<i>car (scale)</i>	-0.165	0.377	-0.649	0.028**	-0.582	0.055*	0.695	0.074*
	<i>N</i> = 197; pseudo- <i>R</i> ² = 0.189; χ^2 = 33.844(0.000)		<i>N</i> = 119; pseudo- <i>R</i> ² = 0.611; χ^2 = 56.046(0.000)		<i>N</i> = 114; pseudo- <i>R</i> ² = 0.647; χ^2 = 6.847(0.077)		<i>N</i> =114; pseudo- <i>R</i> ² = 0.861; χ^2 = 57.511(0.000)	
<i>Claims correctly predicted by the model (%)</i>	63.452%		72.269%		78.070%		91.228%	
<i>Claims correctly classified by medical reports (%)</i>	-		62.185%		61.403%		83.333% [†]	

*** indicates 1% significance level; ** indicates 5% significance level; * indicates 10% significance level.

[†]We consider the medical expert's classification (in the last report) for those claims without a forensic report. When the forensic doctor sets the sequelae but he/she does not assess them, we consider the mean score of the corresponding interval according to the legislative scale.

Table A.1 shows that the chi-square statistic is significant at all stages. For a given stage of the estimation the statistic was computed as the difference between minus two times the log-likelihood for the model with the variables included in the previous stage and that for the current model. The statistic estimation takes into account the sample size at each stage. The statistical significance thus means that the incoming information at each stage has explanatory power with regard to the severity of a victim's injury.

The variable *gender* has a significant coefficient at all stages, and the variable *age* behaves in a similar way. The negative sign of the *gender* parameter indicates that men are less likely to suffer serious injuries than are women. On the other hand, the *age* parameter is positive and thus older victims have a greater probability of having serious injuries resulting from the accident. In relation to the information from medical reports, both the number of recovery days (regarding disability and no disability for working) and the number of sequelae considered by the insurer's medical expert are positively related to the severity of a victim's injury. Notice that the variables *varseq* and *varrdd* are significant in the last two stages. These variables register variations in the expert evaluation across medical reports. Therefore, the parameters' significance illustrates that the initial medical report provides information that is relevant to the explanation of injury severity, even when the company already has the final report or the forensic examination results. Concerning the last phase of the estimation, it should be emphasized that the percentage of cases accurately estimated by the model increased notably when the forensic information was included (Table A.1). This relationship between the forensic report and the accuracy of estimations indicates a strong influence of the forensic evaluation on the level of severity awarded by the judge.

Finally, we would like to point out that the scale parameter *car* is statistically significant in three of the four analyzed stages and, therefore, the heteroscedastic variance specification is accepted. Individuals travelling by car at the moment of the accident exhibit different variability in latent injury severity compared to those travelling by motorbike or pedestrians.

Modelización financiero-actuarial de un seguro de dependencia

HERRANZ PEINADO, PATRICIA

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide

Correo electrónico: pherpei@upo.es

GUERRERO CASAS, FLOR M.

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide

Correo electrónico: fguecas@upo.es

SEGOVIA GONZÁLEZ, M. MANUELA

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide

Correo electrónico: mmseggon@upo.es

RESUMEN

España ha seguido la tendencia de otros países en cuanto a la cobertura de las personas dependientes, es decir, aquellas que necesitan ayuda para realizar las tareas básicas de la vida diaria, y lo ha hecho mediante la aprobación de la Ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de Dependencia, que se basa en la financiación pública. A pesar de los esfuerzos para el desarrollo de la Ley, ésta no está dando los frutos que debiera haber dado y se hace necesaria la existencia de productos privados de cobertura que puedan atender a las necesidades de aquellos que los demandan. Dado los escasos estudios que sobre este tema existen todavía en nuestro país, el establecer una aproximación a las primas de un seguro privado de dependencia puede servir de referencia para el análisis de su comercialización por parte de las aseguradoras. En este trabajo se trata de analizar una serie de cuestiones que den respuesta a dos objetivos. Por una parte, establecer un modelo financiero-actuarial que sirva como apoyo en el diseño de productos privados que cubran la dependencia y, por otra, realizar una aproximación a las bases técnicas actuariales que lleven a la cuantificación de las primas.

Palabras clave: dependencia; matemática actuarial; seguros.

Clasificación JEL: G22; I39.

2000MSC: 62P05; 62P20; 91B30; 00A06.

Artículo recibido el 4 de noviembre de 2008 y aceptado el 5 de diciembre de 2008.

Long Term Care Insurance Actuarial Model

ABSTRACT

Spain has followed the trend of other countries about long term care, that is, people who need help to perform the basic tasks of daily living. In December 2006, Spanish Parliament approved the law called *Ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de Dependencia*, with public financing. This law is not producing the expected results, and it makes necessary the existence of private insurance. Currently, there are few studies on long term care in our country. An approach to premiums of a private insurance can serve as reference for the studies by insurers. This work tries to study a series of questions responding simultaneously to two goals, establishing an actuarial model and, on the other hand, computing private insurance premiums.

Keywords: long term care; actuarial mathematics; insurance.

JEL classification: G22; I39.

2000MSC: 62P05; 62P20; 91B30; 00A06.



1. INTRODUCCIÓN

El término *dependencia* ha entrado a formar parte del vocabulario cotidiano de la sociedad española desde la aprobación de la Ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de Dependencia (Ley 39/2006 de 14 de diciembre), aunque no es un fenómeno nuevo. A lo largo de la historia, muchas personas han sufrido dificultades para realizar las tareas que son cotidianas en nuestra vida diaria (alimentarse, asearse, trasladarse, etc.), bien a consecuencia de un accidente o por un proceso degenerativo, hasta incluso llegar a una situación en la que se produzca la imposibilidad de realizarlas y necesitar la ayuda de otra persona.

Según esta Ley de Dependencia antes nombrada, se define la dependencia como el *“estado de carácter permanente en que se encuentran las personas que, por razones derivadas de la edad, la enfermedad o la discapacidad, y ligadas a la falta o a la pérdida de autonomía física, mental, intelectual o sensorial, precisan de la atención de otra u otras personas o ayudas importantes para realizar actividades básicas de la vida diaria o, en el caso de las personas con discapacidad intelectual o enfermedad mental, de otros apoyos para su autonomía personal”*. Es importante remarcar que la dependencia tiene un aspecto diferenciador con la discapacidad y es que *“precisan de la atención de otra u otras personas”* para poder realizar las tareas básicas de la vida diaria. Por tanto, todo dependiente es considerado discapacitado, pero todo discapacitado no se considerará dependiente si no necesita ayuda de una tercera persona.

La sociedad ha ido cambiando a lo largo de la historia, pero el siglo XX, favorecido por los avances sociales, tecnológicos y científicos, se caracteriza por el fuerte cambio que se ha producido entre las sociedades de los países industrializados. Por un lado, la disminución de la mortalidad acompañada del aumento de la esperanza de vida y la disminución de la natalidad, han desembocado en el denominado “envejecimiento de la población” (mayor número de personas con edad superior a 65 años respecto al número de personas con edades inferiores a ésta) y es sabido que el deterioro de la salud producido por el paso del tiempo hace que la dependencia se concentre en las edades avanzadas de la vida. Por otro lado, en las últimas décadas, la tendencia que llevó a la ampliación de funciones características de los Estados de Bienestar hace que se estén produciendo debates sobre el sistema sanitario y su adaptación a las nuevas necesidades sociales, como es el caso de la dependencia.

España ha seguido esta tendencia y ha puesto en marcha la cobertura de la dependencia basada en la financiación pública. A pesar de los esfuerzos para el desarrollo de la Ley de Dependencia, ésta no está dando los frutos que debiera haber dado, entre otras causas, por el desfase existente de cuantías necesarias para la cobertura de los dependientes actuales de nuestro país, respecto a las aportadas por las diferentes administraciones públicas (Segovia,

Guerrero y Herranz, 2008). Es por ello, que la cobertura desde una perspectiva privada cobre importancia y justifique estudios como el presente.

En este trabajo se trata de analizar una serie de cuestiones que den respuesta a dos objetivos: por una parte, establecer un modelo financiero-actuarial que sirva como apoyo en el diseño de productos privados que cubran la dependencia; y por otra, realizar una aproximación a las bases técnicas actuariales que lleven a la cuantificación de las primas.

Estudios como Albarrán, Ayuso, Guillén y Monteverde (2005), Albarrán y Alonso (2006), Pociello, Varea y Martínez (2001), Pociello y Varea (2004) entre otros, abordan el planteamiento de un modelo financiero-actuarial basado en los modelos de múltiples estados siguiendo los pasos de los propuestos por Haberman y Pitacco (1999). En este trabajo se pretende que el modelo (y su cuantificación) sea lo más cercano posible a la realidad, de tal manera que sea útil como herramienta para la tarificación de productos de cobertura de la dependencia y, por consiguiente, valioso para una entidad aseguradora. Para su consecución, se deben hacer algunas concesiones y restricciones a los diferentes modelos teóricos que se pueden proponer para que su tratamiento desde el punto de vista económico sea viable.

En la Sección 2 se propone un modelo actuarial de múltiples estados adecuado al estudio específico de la dependencia, dando los posibles estados en los que un individuo puede estar a lo largo de su vida y las probabilidades de transición. Todo esto nos servirá de base para que en la Sección 3 se pueda dar una formulación para el cálculo financiero actuarial de un seguro de dependencia, tanto sea de capital único como en forma de renta. En la Sección 4 daremos una aproximación a la tarificación de un seguro de dependencia privado a modo de ejemplo práctico, pudiéndose consultar las primas en las tablas que aparecen en el Anexo. Finalmente, en la Sección 5 mostraremos las principales conclusiones y discusiones sobre el tema tratado.

2. PROPOSICIÓN DE UN MODELO ACTUARIAL DE MÚLTIPLES ESTADOS PARA EL ESTUDIO DE LA DEPENDENCIA

Los modelos de múltiples estados son una poderosa herramienta para su aplicación en muchas áreas de las ciencias actuariales, particularmente en la valoración de seguros de enfermedad y de invalidez. El trabajo de Haberman y Pitacco (1999) es el primero que estudia, unificando criterios, los problemas actuariales que se presentan en el desarrollo de estos seguros, describiendo los modelos de múltiples estados basados en los procesos estocásticos de Markov (Ayuso *et al.*, 2001). El uso de las cadenas de Markov en el ramo de vida y su extensión a otros ramos ha sido ya propuesto por otros autores tanto a tiempo continuo como discreto (Hoem, 1971). La más reciente historia de estos modelos ha sido descrita por Seal (1977) y Daw (1979),

que presentan una pequeña visión histórica y nos remonta a las investigaciones de Bernoulli (1766) para el estudio de la morbilidad y mortalidad de la viruela, resolviendo las ecuaciones diferenciales bajo determinadas restricciones y construyendo la primera tabla de mortalidad. Hamza (1900) representa un avance importante en este campo, proporcionando una aproximación sistemática a las primas de invalidez, tanto en el campo discreto como continuo, y ofreciendo la notación que ha sido adoptada en las siguientes décadas, sirviéndonos de base en nuestro estudio.

En las situaciones de riesgo con múltiples estados, que pueden ser asimiladas a procesos y semiprocesos estocásticos de Markov, los actuarios pueden establecer las probabilidades de que el asegurado efectúe una transición de un estado a otro en un determinado momento. Lo ideal, cuando la variable “tiempo” entra en juego, es el uso de modelos de tipo continuo; en cambio, su uso práctico se complica, utilizándose en numerosas ocasiones en los estudios de corte actuarial los modelos de tipo discreto con intervalos de tiempo anual.

2.1. Conceptos y acercamiento al modelo de múltiples estados

La evolución de un riesgo asegurable puede ser vista como la secuencia de una serie de eventos cuyo cálculo actuarial determina la cuantificación de la prima. En el caso que nos ocupa, dichos eventos corresponden a las transiciones de un estado a otro; esta evolución se describe en términos de presencia del riesgo en cada momento del tiempo, perteneciendo cada estado a un juego de estados o un espacio de estados. Se ha de partir, por tanto, de la observación del estado de una persona en lo relativo a su nivel de actividad o grado de dependencia; definidos éstos, podemos hablar de transiciones, que no son más que las relaciones que se pueden establecer entre los distintos estados. En el problema que nos ocupa, nos encontramos con un modelo actuarial que refleja los diferentes estados en los que se puede encontrar un individuo a lo largo del tiempo, desde el punto de vista de la necesidad de ayuda para realizar las actividades de la vida diaria.

Un individuo puede encontrarse, desde la perspectiva de la dependencia, como:

- **Activo (*a*)**: cuando la persona no precisa ayuda para realizar las actividades básicas de la vida diaria.
- **Dependiente (*d*)**: que sí precise ayuda de una tercera persona para realizarlas.
- **Fallecido (*f*)**: muerto.

Al contrario de lo que ocurre con el estudio del riesgo de fallecimiento en el que se trata de un riesgo “homogrado”, ya que no existe intensidad de la muerte, en el caso de la dependencia estamos ante un riesgo de tipo “heterogrado”, pudiendo considerarse de forma

general diferentes grados de actividad ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$) y múltiples intensidades de dependencia ($d_1, d_2, d_3, \dots, d_s, \dots$). Es decir, que una persona a lo largo de su vida puede encontrarse en diferentes niveles de actividad; podría estar al máximo grado o plena capacidad para realizar todas las actividades de la vida diaria, encontrarse en un nivel en el que pueda tener dificultades para llevarlas a cabo aunque sin precisar ayuda, o bien ser considerada “dependiente”. En ocasiones, la persona activa puede caer en periodos de dependencia temporal, necesitando ayuda para llevar a cabo las tareas de la vida diaria; y una vez que necesita dicha ayuda no siempre es de la misma intensidad, o bien su dependencia es reversible, siendo también múltiples los grados posibles de dependencia en función del nivel de deterioro que sufra el individuo y, por tanto, del grado de ayuda que necesite.

Desde un estado cualquiera, de actividad o de dependencia, se puede permanecer en el mismo estado o pasar a otro y, desde éste, volver al inicial. El único estado que no permite retorno es el de fallecido y, además, mientras que una persona no tiene por qué pasar por todos los grados de actividad y dependencia, es seguro que el estado de fallecido¹ será el final de todos.

Gráficamente, planteamos un modelo como nos muestra la Figura 1:

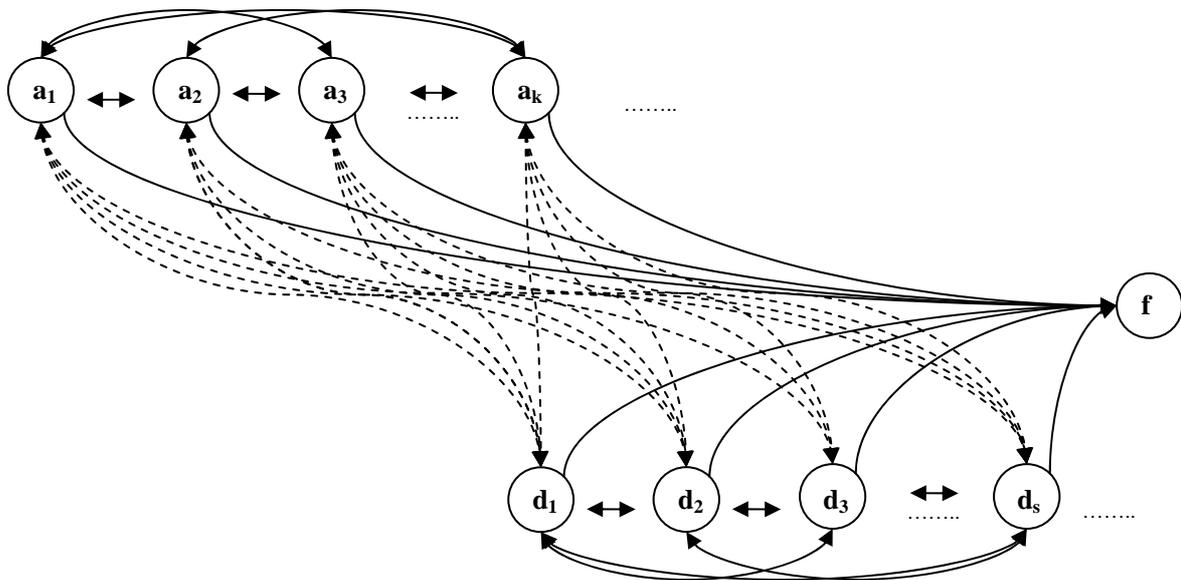


Fig.1: Juego de estados y de transiciones para diferentes grados de actividad y dependencia.

Las probabilidades de transición de unos estados a otros se expresan en la matriz de estados siguiente:

¹ El estado de fallecido, por su no retorno y por ser un estado seguro para cada individuo, es llamado “estado absorbente”.

	a_1	a_2	$a_3 \cdots \cdots a_k \cdots$	d_1	d_2	$d_3 \cdots \cdots d_s \cdots$	f		
a_1	$p^{a_1 a_1}$	$p^{a_1 a_2}$	$p^{a_1 a_3}$	$p^{a_1 a_k}$	$p^{a_1 d_1}$	$p^{a_1 d_2}$	$p^{a_1 d_3}$	$p^{a_1 d_s}$	$p^{a_1 f}$
a_2	$p^{a_2 a_1}$	$p^{a_2 a_2}$	$p^{a_2 a_3}$	$p^{a_2 a_k}$	$p^{a_2 d_1}$	$p^{a_2 d_2}$	$p^{a_2 d_3}$	$p^{a_2 d_s}$	$p^{a_2 f}$
\vdots									
a_k	$p^{a_k a_1}$	$p^{a_k a_2}$	$p^{a_k a_3}$	$p^{a_k a_k}$	$p^{a_k d_1}$	$p^{a_k d_2}$	$p^{a_k d_3}$	$p^{a_k d_s}$	$p^{a_k f}$
\vdots									
d_1	$p^{d_1 a_1}$	$p^{d_1 a_2}$	$p^{d_1 a_3}$	$p^{d_1 a_k}$	$p^{d_1 d_1}$	$p^{d_1 d_2}$	$p^{d_1 d_3}$	$p^{d_1 d_s}$	$p^{d_1 f}$
d_2	$p^{d_2 a_1}$	$p^{d_2 a_2}$	$p^{d_2 a_3}$	$p^{d_2 a_k}$	$p^{d_2 d_1}$	$p^{d_2 d_2}$	$p^{d_2 d_3}$	$p^{d_2 d_s}$	$p^{d_2 f}$
\vdots									
d_s	$p^{d_s a_1}$	$p^{d_s a_2}$	$p^{d_s a_3}$	$p^{d_s a_k}$	$p^{d_s d_1}$	$p^{d_s d_2}$	$p^{d_s d_3}$	$p^{d_s d_s}$	$p^{d_s f}$
\vdots									
f	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Considerando el tiempo como parámetro continuo y que tanto los estados de actividad como los de dependencia son ilimitados, el modelo que estamos planteando reflejaría en gran medida la vida de una persona y corresponde, matemáticamente, a un proceso estocástico de parámetro continuo con un conjunto de estados ilimitados. Pero un modelo deja de ser útil si no se puede formalizar o no es cuantificable, y actualmente no tenemos información estadística sobre la población para valorar este modelo “ideal”. En definitiva, dado que aún estamos en los inicios de los estudios de dependencia, se hace necesario reducir el modelo general a uno más sencillo. No obstante, este modelo se podrá tomar como punto de partida en futuros trabajos de investigación.

2.2. Modelo operativo, objetivo primordial y restricciones de partida

En este trabajo, con la intención de obtener un acercamiento al problema de la cuantificación del coste de cobertura de la dependencia, se plantea un modelo general con restricciones, haciendo uso de los datos estadísticos existentes en la actualidad.

Como restricción inicial, para nuestro estudio de la dependencia, tomaremos personas mayores de 65 años para las cuales su dependencia viene asociada al envejecimiento y al estado de salud de este colectivo. Nuestro objetivo primordial es establecer la probabilidad de caer en dependencia para un individuo que alcanza la edad de 65 años en estado de activo.

Proponemos las siguientes restricciones:

- I. Colectivo en el estado de inicio: individuos que se encuentran en el estado de activo a los 65 años.
- II. Las observaciones para la obtención de datos del colectivo son anuales.

- III. No se consideran diferentes graduaciones en la dependencia.
- IV. El espacio de estados es finito: activo, dependiente y fallecido.
- V. No se contempla la posibilidad de retorno de un estado de dependencia a la de activo.
- VI. Consideramos que el estado de un individuo solo depende del estado del año anterior.

Nuestro modelo corresponde a un proceso estocástico, concretamente a una cadena de Markov de parámetro discreto, en la que no se cumple la propiedad simétrica entre sus estados, ni existen clases comunicantes, y tiene un estado absorbente.

Para el estudio de sus probabilidades, el modelo operativo puede representarse gráficamente como se indica en la Figura 2.

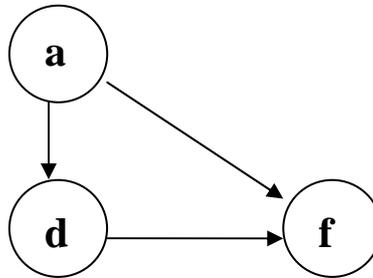


Fig.2: Juego de estados y de transiciones en caso de dependencia irreversible.

A continuación mostramos la tabla que recoge las probabilidades de transición (matriz de transición), en el transcurso de un año, asociados al grafo descrito en la Figura 2:

	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
<i>a</i>	p_x^{aa}	p_x^{ad}	p_x^{af}
<i>d</i>	0	p_x^{dd}	p_x^{df}
<i>f</i>	0	0	1

Definimos en primer lugar las probabilidades de muerte y supervivencia que vamos a utilizar y su notación, y posteriormente indicaremos su cálculo.

q_x es la probabilidad de que un individuo de edad x fallezca en el transcurso de un año.

p_x es la probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva a la edad $x+1$.

De la matriz de transición expuesta anteriormente, cabe definir las probabilidades asociadas a este modelo:

p_x^{aa} es la probabilidad de que un individuo en estado de activo a la edad x sobreviva en activo a la edad $x+1$.

p_x^{ad} es la probabilidad de que un individuo inicialmente activo a la edad x pase a ser dependiente en el transcurso del año siguiente.

p_x^{af} es la probabilidad de que un individuo inicialmente activo a la edad x fallezca en el transcurso del año siguiente; lo denotaremos como q_x^a .

p_x^{dd} es la probabilidad de que un individuo inicialmente dependiente a la edad x sobreviva en estado de dependiente a la edad $x+1$.

p_x^{df} es la probabilidad de que un individuo inicialmente dependiente a la edad x fallezca en el transcurso del año siguiente; lo denotaremos como q_x^d .

Como estamos ante una cadena de Markov, estas probabilidades están definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p_x^{aa} &= P \{S(x+1) = a / S(x) = a\} \\ p_x^{ad} &= P \{S(x+1) = d / S(x) = a\} \\ q_x^a &= P \{S(x+1) = f / S(x) = a\} \\ p_x^{dd} &= P \{S(x+1) = d / S(x) = d\} \\ q_x^d &= P \{S(x+1) = f / S(x) = d\} \end{aligned}$$

siendo $S(x)$ el estado en el que se encuentra un individuo a la edad x .

Las relaciones entre esas probabilidades son:

$$\begin{aligned} p_x^{aa} + p_x^{ad} + q_x^a &= 1 \\ p_x^{dd} + q_x^d &= 1 \\ p_x &= p_x^{aa} + p_x^{ad} \\ p_x + q_x &= 1 \end{aligned}$$

Generalizando el estudio de probabilidades de transición en el t -ésimo año para un individuo de edad inicial x , las probabilidades de transición cumplen las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov (López Cachero *et al.*, 1996), por las características del modelo:

$${}_t P_x^{aa} = {}_{t-1} P_x^{aa} \cdot p_{x+t-1}^{aa} = p_x^{aa} \cdot p_{x+1}^{aa} \cdot p_{x+2}^{aa} \cdots p_{x+t-1}^{aa} = \prod_{h=0}^{t-1} p_{x+h}^{aa}$$

$${}_t P_x^{ad} = {}_{t-1} P_x^{aa} \cdot p_{x+t-1}^{ad} = p_{x+t-1}^{ad} \cdot \prod_{h=0}^{t-2} p_{x+h}^{aa}$$

Donde:

${}_t P_x^{aa}$ es la probabilidad de que un individuo en estado de activo a la edad x sobreviva en activo a la edad $x+t$.

p_{x+t-1}^{aa} es la probabilidad de que un individuo en estado de activo a la edad $x+t-1$ sobreviva en activo a la edad $x+t$.

${}_t P_x^{ad}$ es la probabilidad de que un individuo inicialmente activo a la edad x pase a ser dependiente en el transcurso de t -ésimo año.

p_{x+t-1}^{ad} es la probabilidad de que un individuo inicialmente activo a la edad $x+t-1$ pase a ser dependiente en el transcurso del año siguiente.

3. FORMULACIÓN TEÓRICA A TIEMPO DISCRETO PARA EL CÁLCULO FINANCIERO-ACTUARIAL DE UN SEGURO DE DEPENDENCIA

Una vez establecidas teóricamente las probabilidades que serían necesarias para el estudio de un seguro de dependencia, nos proponemos formular, con la ayuda de la técnica actuarial de vida algunos casos de primas únicas y periódicas que corresponderían a la cobertura de esta contingencia, teniendo presente que las posibilidades de productos comerciales serían muy variadas. En concreto, una vez formulado el planteamiento del problema, procederemos a la formulación de seguros de dependencia de efectividad inmediata, o bien diferida, estudiados para prestaciones en forma de capital o renta y estableciendo las primas únicas y periódicas que correspondan.

Es una práctica habitual en la Matemática Actuarial contemplar la hipótesis de la distribución uniforme de los siniestros en el transcurso del período y, por ello, utilizaremos la actualización financiera desde la mitad de cada ejercicio. Para facilitar la comprensión de la formulación, el factor de actualización financiera aparecerá elevado a números enteros, sabiendo que el cambio se debería realizar en el cálculo de dicho factor de la siguiente manera:

v^t = factor de actualización financiera;

$$v^t = (1 + i)^{-\left(t - \frac{1}{2}\right)}, \text{ siendo } i \text{ el tipo de interés técnico.}$$

3.1. Planteamiento del problema

El diseño de un seguro de dependencia pasaría por establecer, de manera precisa, las diferentes coberturas en caso de caer en dependencia, pudiendo ser éstas tanto en forma de servicios como monetarias, y a su vez estas últimas en forma de capital o de renta, o combinando servicios y prestaciones monetarias. Las posibilidades de formulación son inmensas, tal y como ocurre con otros tipos de seguros; las compañías diseñarían productos específicos para su comercialización dependiendo del nicho del mercado al que se pretendieran dirigir.

Tal y como se realiza de manera general en la Matemática Actuarial, nos centraremos en la formulación de unos productos generales de los que se podrían obtener diferentes versiones. Plantearemos el problema como: la necesidad de establecer la cuantificación económica de un riesgo consistente en la posibilidad de ocurrencia del suceso “caer en dependencia” o “precisar la ayuda de terceras personas para realizar las actividades de la vida diaria” a partir de una edad de entrada en riesgo establecida en 65 años, para un individuo que en el momento de la contratación cuenta con una edad actuarial de x años.

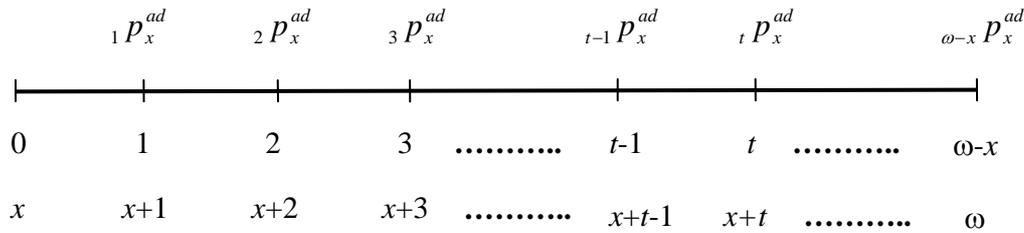
Realizaremos la formulación actuarial teórica para dos tipos de prestaciones: una en forma de capital indemnizatorio y otra en forma de renta periódica. Además, calcularemos para cada caso tanto la prima pura única como la prima pura periódica correspondiente.

3.2. Seguros de dependencia con prestación en forma de capital único

Se trata de seguros consistentes en el pago de un capital único en caso de caer en dependencia, pagadero en el momento de ocurrencia del siniestro, siempre que éste suceda a una edad actuarial superior estrictamente a los 65 años para una persona que en el momento de su contratación cuenta con una edad actuarial x . Hemos de tener en cuenta que este tipo de seguros tienen como premisa principal que se debe llegar a la edad de 65 años como activos para tener derecho a la prestación. No obstante, se podría generalizar este planteamiento a otros casos.

3.2.1. Seguro de dependencia inmediato y vitalicio

La cobertura del riesgo de dependencia en este seguro se establece de manera inmediata y mientras viva el asegurado; es decir, el seguro se contratará para edades superiores a 65 años, edad en la que la incapacidad no tiene asociada ninguna cobertura estatal por no provocar incapacidad para el trabajo. El horizonte temporal quedaría:



En este caso, el pago se realizaría en forma de prima única, teniendo un solo pago para toda la cobertura.

Por tanto, el cálculo de la prima pura única (Π_x) vendría determinado por la equivalencia financiero-actuarial de los capitales asegurados, en caso de que ocurriera la contingencia, actualizados actuarialmente al momento de inicio de la cobertura:

$$\begin{aligned} \Pi_x &= C \cdot {}_1P_x^{ad} \cdot v^1 + C \cdot {}_2P_x^{ad} \cdot v^2 + C \cdot {}_3P_x^{ad} \cdot v^3 + \dots + C \cdot {}_{\omega-x}P_x^{ad} \cdot v^{(\omega-x)} = C \cdot \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_tP_x^{ad} \cdot v^t = \\ &= C \cdot \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_{t-1}P_x^{aa} \cdot P_{x+t-1}^{ad} \cdot v^t \end{aligned} \quad (1)$$

Donde:

C es el capital único pagadero en caso de caer en dependencia.

${}_tP_x^{ad}$ es la probabilidad de que un individuo inicialmente activo a la edad x pase a ser dependiente en el transcurso del t -ésimo año.

${}_{t-1}P_x^{aa}$ es la probabilidad de que un individuo en estado de activo a la edad x sobreviva en activo a la edad $x+t-1$.

P_{x+t-1}^{ad} es la probabilidad de que un individuo inicialmente activo a la edad $x+t-1$ pase a ser dependiente en el transcurso del año siguiente.

También debe tenerse en cuenta que:

v^t es el factor de actualización financiera;

$v^t = (1+i)^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)}$, siendo i el tipo de interés técnico utilizado en la actualización financiera.

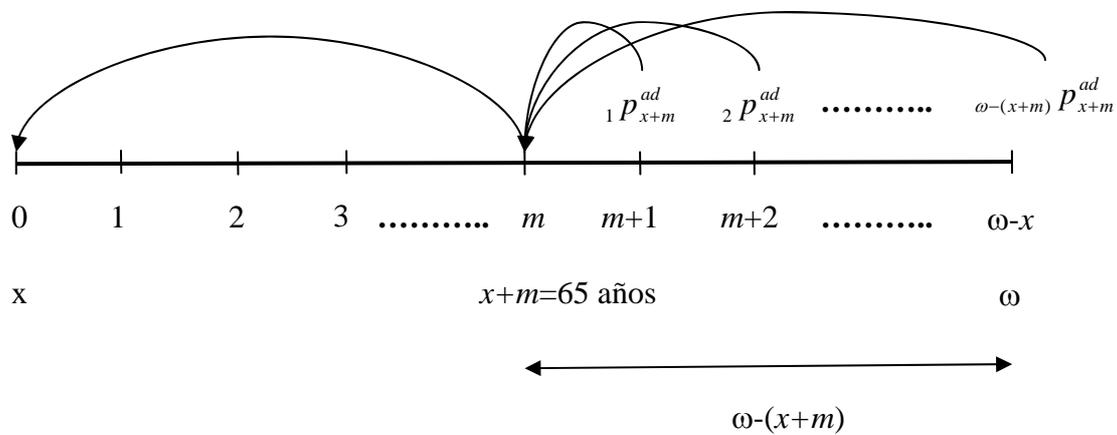
3.2.2. Seguro de dependencia diferido y vitalicio

En este tipo de seguro, la contratación se realizaría en una fecha cuya edad actuarial del asegurado fuera inferior a la edad de 65 años, siendo a partir de esta última cuando tendría

efectividad la cobertura por dependencia. Se trataría de la operación actuarial más razonable y económica.

La condición que llevaría asociada este seguro sería que, para tener derecho a la prestación, el asegurado debería llegar activo al cumplir los 65 años. Es razonable establecer un seguro de estas características debido a que si se tuviera una discapacidad en edades inferiores a la que se establece legalmente como edad de jubilación, el asegurado tendría derecho a una cobertura de carácter público como incapacitado laboral.

El horizonte temporal y su actualización financiero-actuarial se establecería tal y como aparece en el gráfico siguiente, siendo m los años de diferimiento:



En caso de que se realizase un pago único en concepto de prima pura, la equivalencia actuarial, siendo m los años de diferimiento, resultaría:

$$\begin{aligned}
 {}_m / \prod_x &= (C \cdot {}_1 P_{x+m}^{ad} \cdot v^1 + C \cdot {}_2 P_{x+m}^{ad} \cdot v^2 + C \cdot {}_3 P_{x+m}^{ad} \cdot v^3 + \dots + C \cdot {}_{\omega-(x+m)} P_{x+m}^{ad} \cdot v^{(\omega-(x+m))}) \cdot \\
 &\cdot {}_m P_x^{aa} \cdot v^m = C \cdot {}_m P_x^{aa} \cdot v^m \cdot \sum_{t=1}^{\omega-(x+m)} {}_t P_{x+m}^{ad} \cdot v^t \quad (2)
 \end{aligned}$$

El resto de definiciones de cada una de las probabilidades serían análogas a las ya expuestas, teniendo en cuenta la edad actuarial de la que se trata y el número de periodos que se contemple.

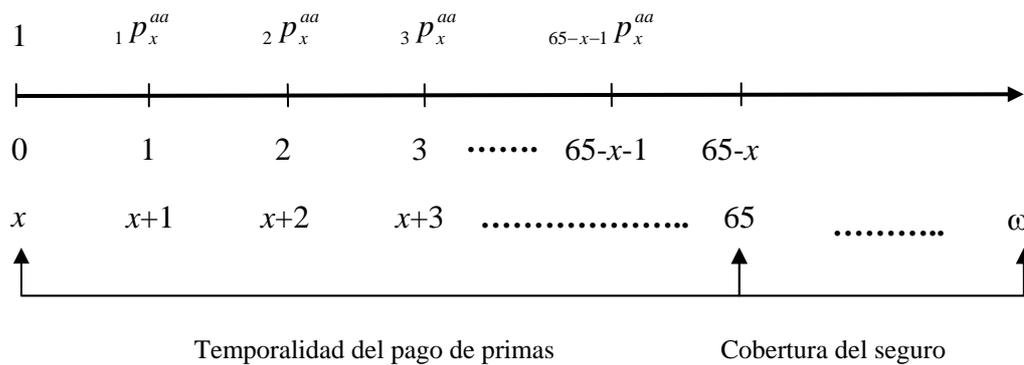
Si se estableciera como edad de inicio de la cobertura a los 65 años, la fórmula (2) se resumiría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
{}_{(65-x)/} \prod_x &= (C \cdot {}_1P_{65}^{ad} \cdot v^1 + C \cdot {}_2P_{65}^{ad} \cdot v^2 + C \cdot {}_3P_{65}^{ad} \cdot v^3 + \dots + C \cdot {}_{(\omega-65)}P_{65}^{ad} \cdot v^{(\omega-65)}) \cdot \\
&\cdot {}_{(65-x)}P_x^{aa} \cdot v^{(65-x)} = C \cdot {}_{(65-x)}P_x^{aa} \cdot v^{(65-x)} \cdot \sum_{t=1}^{\omega-65} P_{65}^{ad} \cdot v^t \quad (3)
\end{aligned}$$

Para establecer la periodicidad del pago de primas, las posibilidades son múltiples, dependiendo de la variación de las cuantías (constantes o variables), de la duración y del diferimiento.

Para ilustrar nuestro estudio, proponemos una variedad consistente en: *el pago de una prima constante de manera periódica, anual, prepagable, mientras el asegurado permaneciese en el estado de activo y con temporalidad hasta cumplir los 65 años*. Para su cálculo, debemos establecer el valor actual de dicha renta y realizar la equivalencia financiero-actuarial de la prima periódica con la prima única obtenida en el apartado anterior.

Antes de obtener la prima periódica anual, se necesita establecer el cálculo del valor actual de una renta actuarial unitaria de no dependencia, inmediata, prepagable y temporal hasta los 65 años. De este modo, la prima sería pagadera conforme a la supervivencia del asegurado en estado de activo:



La actualización de los valores de los pagos al momento de la contratación resultaría:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:(65-x)}^{aa} &= 1 + {}_1P_x^{aa} \cdot v^1 + {}_2P_x^{aa} \cdot v^2 + {}_3P_x^{aa} \cdot v^3 + \dots + {}_{65-x-1}P_x^{aa} \cdot v^{(65-x-1)} = \\
&= \sum_{t=0}^{65-x-1} P_x^{aa} \cdot v^t \quad (4)
\end{aligned}$$

En definitiva, si el pago de la prima única obtenida en (3) se realizase de manera periódica, tal y como hemos ilustrado en (4), se establecería la prima periódica anual de riesgo P :

$${}_{(65-x)/\Pi_x} = P \cdot \ddot{a}_{x:(65-x)}^{aa}$$

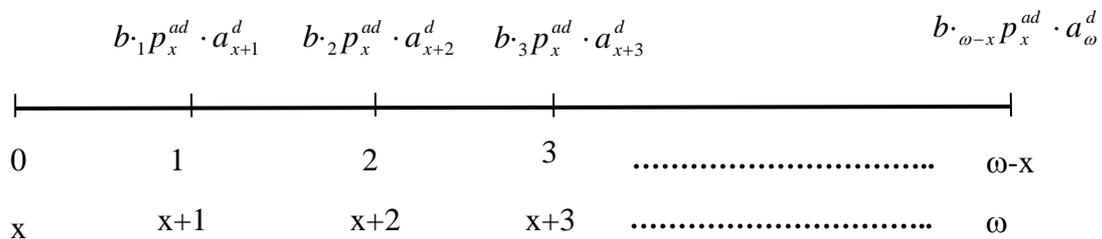
$$P = \frac{{}_{(65-x)/\Pi_x}}{\ddot{a}_{x:(65-x)}^{aa}} = \frac{{}_{(65-x)/\Pi_x}}{\sum_{t=0}^{65-x-1} {}_tP_x^{aa} \cdot v^t} = \frac{C \cdot {}_{65-x}P_x^{aa} \cdot v^{(65-x)} \cdot \sum_{t=1}^{\omega-65} {}_tP_{65}^{ad} \cdot v^t}{\sum_{t=0}^{65-x-1} {}_tP_x^{aa} \cdot v^t}$$

3.3. Seguro de dependencia con prestación en forma de renta

Se trata de un seguro consistente en el pago de una renta de manera vitalicia en el caso de caer en dependencia. Este seguro tiene las mismas premisas y características que se establecieron cuando la prestación se realizaba en forma de capital único; en cambio, se establecerán otras posibilidades al poder establecer la renta que origina la prestación con diferentes puntos de vista.

3.3.1. Seguro de dependencia inmediato y vitalicio con prestación en forma de renta vitalicia y constante

Análogamente a como se describió cuando la prestación consistía en el pago de un capital, el seguro de dependencia cuya característica consiste en el pago de una renta constante de cuantía b , de manera vitalicia desde el momento en que se cae en dependencia, vendría expresada sobre el horizonte temporal de la siguiente manera:



Su formulación actuarial quedaría:

$$\begin{aligned} \text{renta } \Pi_x &= b \cdot {}_1P_x^{ad} \cdot a_{x+1}^d \cdot v^1 + b \cdot {}_2P_x^{ad} \cdot a_{x+2}^d \cdot v^2 + b \cdot {}_3P_x^{ad} \cdot a_{x+3}^d \cdot v^3 + \dots \\ &\dots + b \cdot {}_{\omega-x}P_x^{ad} \cdot a_{\omega}^d \cdot v^{(\omega-x)} = b \cdot \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_tP_x^{ad} \cdot a_{x+t}^d \cdot v^t \end{aligned} \quad (5)$$

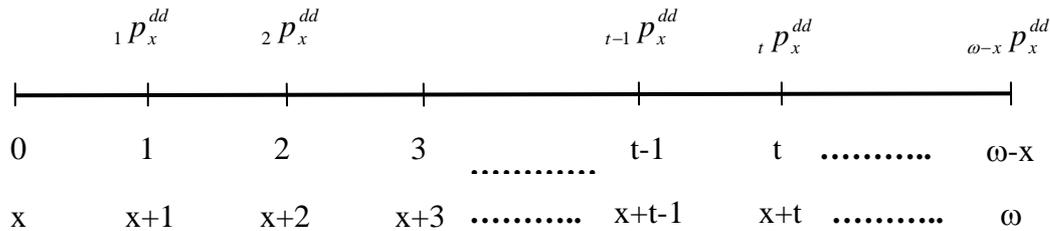
Donde:

b es la cuantía constante de la renta.

a_{x+t}^d es el valor actual de una renta unitaria vitalicia de una persona dependiente de edad $x+t$.

Es preciso establecer la formulación necesaria para la obtención del valor actual de la renta unitaria vitalicia que una persona obtendría una vez caída en dependencia. Para ello se recurre a la formulación actuarial de vida, que pretendemos adecuar al caso de asegurados con la discapacidad que nos ocupa.

Sea una persona de edad x y dependiente; para el cálculo del valor actual actuarial de una renta que percibiría mientras viviera, se debería establecer sus probabilidades de vida futura teniendo en cuenta su dependencia. De manera gráfica:



La actualización financiera de estos valores quedaría:

$$a_x^d = {}_1P_x^{dd} \cdot v^1 + {}_2P_x^{dd} \cdot v^2 + {}_3P_x^{dd} \cdot v^3 + \dots + {}_{\omega-x}P_x^{dd} \cdot v^{\omega-x} = \sum_{h=1}^{\omega-x} {}_hP_x^{dd} \cdot v^h \quad (6)$$

Donde:

${}_tP_x^{dd}$ es la probabilidad de que un individuo en estado de dependiente a la edad x permanezca vivo y dependiente a la edad $x+t$.

Generalizando en (6) para una edad actuarial $x+t$:

$$\begin{aligned} a_{x+t}^d &= {}_1P_{x+t}^{dd} \cdot v^1 + {}_2P_{x+t}^{dd} \cdot v^2 + {}_3P_{x+t}^{dd} \cdot v^3 + \dots + {}_{\omega-(x+t)}P_{x+t}^{dd} \cdot v^{\omega-(x+t)} = \\ &= \sum_{h=1}^{\omega-(x+t)} {}_hP_{x+t}^{dd} \cdot v^h \end{aligned} \quad (7)$$

Por consiguiente, sustituyendo en (5) con el resultado obtenido en (7), la formulación actuarial establecida para este tipo de seguro nos quedaría:

$${}_{renta} \Pi_x = b \cdot \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_tP_x^{ad} \cdot a_{x+t}^d \cdot v^t = b \cdot \sum_{t=1}^{\omega-x} \left({}_tP_x^{ad} \cdot v^t \cdot \sum_{h=1}^{\omega-(x+t)} {}_hP_{x+t}^{dd} \cdot v^h \right) \quad (8)$$

3.3.2. Seguro de dependencia diferido y vitalicio con prestación en forma de renta vitalicia y constante

Este seguro sería más acorde a la realidad si se estableciera de manera diferida y su pago pudiera realizarse tanto en forma de prima única como periódica.

En el caso de prima única, y de manera análoga al desarrollo elaborado en (2), en este caso su diferimiento resultaría:

$${}^m / \text{renta} \Pi_x = {}_m P_x^{aa} \cdot v^m \cdot b \cdot \sum_{t=1}^{\omega-(x+m)} {}_t P_{x+m}^{ad} \cdot a_{x+m+t}^d \cdot v^t \quad (9)$$

Siendo m los años de diferimiento y el desarrollo de a_{x+m+t}^d , puede deducirse del obtenido en la expresión (7).

Estableciendo en (9) un seguro para una persona que lo contrata a la edad x y cuya cobertura sobre la dependencia comenzaría a partir de los 65 años, obtenemos:

$${}^{(65-x)} / \text{renta} \Pi_x = {}_{(65-x)} P_x^{aa} \cdot v^{(65-x)} \cdot b \cdot \sum_{t=1}^{\omega-65} {}_t P_{65}^{ad} \cdot a_{65+t}^d \cdot v^t \quad (10)$$

Del mismo modo, en caso de que se realizase el pago de la prima de manera periódica mientras el asegurado permaneciese activo:

$$\begin{aligned} {}^{(65-x)} / \text{renta} \Pi_x &= P \cdot \ddot{a}_{x:(65-x)}^{aa} \\ P &= \frac{{}^{(65-x)} / \text{renta} \Pi_x}{\ddot{a}_{x:(65-x)}^{aa}} = \frac{{}^{(65-x)} / \text{renta} \Pi_x}{\sum_{t=0}^{65-x-1} {}_t P_x^{aa} \cdot v^t} \\ &= \frac{{}_{65-x} P_x^{aa} \cdot v^{(65-x)} \cdot b \cdot \sum_{t=1}^{\omega-65} {}_t P_{65}^{ad} \cdot a_{65+t}^d \cdot v^t}{\sum_{t=0}^{65-x-1} {}_t P_x^{aa} \cdot v^t} \end{aligned} \quad (11)$$

4. CASO PRÁCTICO: APROXIMACIÓN A LA TARIFICACIÓN DE UN SEGURO DE DEPENDENCIA PRIVADO

Se propone un ejemplo práctico para un seguro de dependencia privado, utilizando las técnicas actuariales desarrolladas en los apartados anteriores y, para ello, realizaremos las bases técnicas que nos permitirán cuantificar la prima.

La formulación obtenida anteriormente, y que nos sirve de base en este apartado, se apoya en las probabilidades de ocurrencia del riesgo que se pretende cubrir y es preciso realizar el cálculo de estas probabilidades. En el trabajo de Herranz (2007) encontramos el estudio estadístico necesario para el cálculo de probabilidades que se ha descrito en el modelo financiero-actuarial propuesto y que es necesario para la cuantificación económica del seguro de dependencia que se establezca. No debe olvidarse que el modelo teórico es simplificado y los seguros se deberían calcular en función de las probabilidades de ocurrencia (tablas de dependencia), que podrían a su vez calcularse según la intensidad de la dependencia.

4.1. Bases técnicas de un seguro

Las bases técnicas de un seguro deben ser ajustadas a lo que se establece al respecto en el Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre, por el que se aprueba el Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados. En su Capítulo 2, sección 8ª, artículo 77 “Normas generales sobre bases técnicas” detalla cómo deben ser éstas.

Siguiendo lo establecido en el Reglamento, las bases técnicas de un producto comprenden los siguientes apartados:

- a) Información genérica: en ella se dará explicación del riesgo asegurable conforme a la póliza respectiva, los factores de riesgo considerados en la tarifa y los sistemas de tarificación utilizados.
- b) Información estadística sobre el riesgo: se aportará información sobre la estadística que se haya utilizado.
- c) Recargo de seguridad: se destinará a cubrir las desviaciones aleatorias desfavorables de la siniestralidad esperada.
- d) Recargos para gastos de gestión: se detallará cuantía, suficiencia y adecuación de los recargos para gastos de administración y de adquisición.
- e) Recargo para beneficio o excedente: se destinará a remunerar los recursos financieros e incrementar la solvencia dinámica de la empresa.
- f) Cálculo de la prima: en función de las bases estadísticas y financieras, si procede, se establecerá la equivalencia actuarial para fijar la prima pura que corresponda al riesgo a cubrir y a los gastos de gestión de los siniestros. Tomando como base la prima pura y los recargos, se obtendrá la prima de tarifa o comercial.

Cuando se trata de seguros de vida, seguros de larga duración en los que la actualización financiera es de suma importancia, como ocurre también en el caso de los seguros que traten la

dependencia, la legislación dicta unas normas específicas, destacando la determinación de un tipo de interés técnico para los cálculos.

En este caso práctico, mostraremos las bases técnicas del producto que proponemos ateniéndonos al Reglamento.

a) Información genérica: el riesgo que asegura la contratación de esta póliza consiste en la cobertura de caer en dependencia² una vez superada la edad de 65 años. Para la cobertura de la dependencia del asegurado, éste deberá llegar en condición de no dependiente (activo) a la edad de 65 años. La consideración de dependiente será dictaminada por criterios médicos. A la firma del contrato deberá elegir la intensidad de la ayuda que pretende cubrir, tomando para ello el número de horas semanales de ayuda que precisará conforme a tres opciones:

1. Para cualquier número de horas semanales de ayuda.
2. Para un número de horas semanales superior a 15.
3. Para un número de horas semanales superior a 60.

Una vez que el asegurado se considere dependiente en función de la opción elegida (una vez elegida la opción, su cálculo se realiza del mismo modo expuesto en teoría pero con la probabilidad correspondiente), recibirá una renta vitalicia constante cuya cuantía corresponderá a la establecida a la firma del contrato. No obstante, el asegurado podrá optar por un capital equivalente al valor actual de la renta descrita en el párrafo anterior y calculado al tipo de interés técnico que se establezca en estas bases técnicas.

Las primas en concepto del precio del seguro, que se calcularán actuarialmente como se detalla posteriormente, serán pagaderas de manera nivelada, periódicas, temporales y de pago anticipado, siempre bajo la premisa de permanecer en estado de activo hasta los 65 años.

b) Información estadística sobre el riesgo: la información estadística utilizada para la justificación de algunos de los datos presentados en la presente nota técnica, se han obtenido tanto de estudios propios del riesgo como de publicaciones especializadas, concretamente:

² Recordemos que las premisas que en nuestro estudio se deben dar para estimar que una persona es dependiente son:

- a) La existencia de una limitación física, psíquica o intelectual que merma determinadas capacidades de la persona.
- b) La incapacidad de la persona para realizar por sí mismo las actividades de la vida diaria.
- c) La necesidad de asistencia o cuidados por parte de un tercero para poder realizar estas tareas.

- Tablas de dependencia realizadas en el trabajo de Herranz (2007) mediante el análisis de la Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estados de Salud de 1999 (EDDES) del Instituto Nacional de Estadística (2002). A pesar de su interés, se omite su explicación porque harían demasiado extenso este documento.
- Tablas de mortalidad suizas GRM-95 para hombres y GFR-95 para mujeres, disponibles en la Circular 5/2000 del Banco de España.
- Para el estudio de la mortalidad de los dependientes hemos acudido a estudios realizados en Estados Unidos: U.S. Department of Health and Human Services (1993).
- Publicación de Investigación Cooperativa entre Entidades Aseguradoras (ICEA, 2005).

En el artículo 33.1 del Reglamento de Ordenación y Supervisión de Seguros Privados se establece en su letra a) que el tipo de interés técnico aplicable para el cálculo de la provisión de seguros de vida será publicado anualmente por la Dirección General de Seguros. El tipo de interés técnico publicado por la Dirección General de Seguros el 29 de julio de 2005 asciende al 2,119 % anual. Éste deberá revisarse para establecer los cálculos oportunos dependiendo de la fecha en que se realicen.

c) Recargo de seguridad: se destina a cubrir las desviaciones aleatorias desfavorables de la siniestralidad esperada. De acuerdo con los apartados 3, 4 y 5 del artículo 45 del Reglamento de Ordenación de Seguros Privados de 20 de Noviembre de 1998, tomamos como recargo el 2% de la prima comercial. Aunque este tipo de recargo no se utiliza en el ramo de vida, debido a la nueva implantación de los seguros de dependencia y puesto que no se cuenta con una experiencia suficiente, hemos considerado oportuno incluirlo.

Definiremos el concepto de siniestralidad, tal y como viene marcado en la Orden de 23 de Diciembre de 1998 para el “Desarrollo de Preceptos de la Normativa de Seguros y Obligaciones de Información por Euro”, como la suma del importe de las prestaciones y de los gastos imputables a las prestaciones, pagados por la Entidad en cada ejercicio, corregida por la variación de la provisión de prestaciones.

d) Recargo para gastos: a partir de la entrada en vigor del Plan Contable para las Entidades Aseguradoras, aprobado por el Real Decreto 2014/1997 de 26 de diciembre, los gastos se reclasifican en gastos por destino y se distinguen los siguientes:

- Los gastos de gestión externa, denominados “gastos de adquisición” (g_1), incluyen fundamentalmente las comisiones, los de personal dedicado a la producción y las amortizaciones del inmovilizado afectado a esta actividad, los gastos de estudio,

tramitación de solicitudes y formalización de pólizas, así como los gastos de publicidad, propaganda y de la organización comercial vinculados directamente a la adquisición de los contratos de seguro.

- Los gastos de gestión interna se componen de “gastos de administración” y “otros gastos técnicos”:
 - Los gastos de administración (g_2) incluyen fundamentalmente los gastos de servicios por asuntos contenciosos vinculados a las primas, los gastos de gestión de cartera y cobro de las primas, del reaseguro cedido y aceptado, comprendiendo, en particular, los gastos del personal dedicado a dichas funciones y las amortizaciones del inmovilizado afectado al mismo.
 - Otros gastos técnicos (g_3) son aquellos que, formando parte de la cuenta técnica, no pueden ser imputados en aplicación del criterio establecido a uno de los destinos anteriormente relacionados, fundamentalmente los gastos de dirección general.
- Los gastos de gestión de siniestros (g_4), imputables a las prestaciones, incluyen fundamentalmente los gastos de personal dedicado a la gestión de siniestros y las amortizaciones del inmovilizado afectado a esta actividad, las comisiones pagadas por razón de gestión de siniestros y los gastos incurridos por servicios necesarios para su tramitación.

Debido a la nueva comercialización de este producto, se ha estimado oportuno acudir a los datos que sobre gastos de esta naturaleza se extraen del estudio técnico de ICEA. Se contemplan como un porcentaje de la prima comercial, del siguiente modo:

$$\text{Gastos de adquisición:} \quad g_1 = 20\% \cdot P''$$

$$\text{Gastos de administración:} \quad g_2 = 5\% \cdot P''$$

$$\text{Otros gastos técnicos:} \quad g_3 = 2\% \cdot P''$$

$$\text{Gastos de gestión de siniestros:} \quad g_4 = 1\% \cdot P''$$

e) Recargo para beneficio o excedente (B): se destina a remunerar los recursos financieros e incrementar la solvencia dinámica de la empresa. Se calcula como el 0,5% de la prima de tarifa.

f) Cálculo de la prima de tarifa o comercial: la prima de tarifa o comercial es el precio del seguro, es decir, la contraprestación que ha de satisfacer el tomador del seguro a la entidad aseguradora a cambio de obtener la cobertura deseada.

Según el Reglamento, en su artículo 77.1 letra f), se especifica que los gastos de gestión de los siniestros se integran en la prima de riesgo. Así pues, la *Prima de Riesgo* (P_r) vendrá determinada por:

- La *Prima de Riesgo Pura* (P) correspondiente al valor puro del riesgo, es decir, la valoración económica de la probabilidad de que el siniestro previsto en la cobertura efectivamente se produzca.
- Los *Gastos de Gestión de Siniestros* (g_4) $P_r = P + g_4 \cdot P''$.

Prima de Riesgo Pura (P): Calculamos la prima de riesgo pura aplicando la matemática actuarial específica para los cálculos de dependencia³.

Estableciéndolo para un asegurado que contrata a la edad x y cuya cobertura sobre la dependencia comenzaría a partir de los 65 años:

$${}_{(65-x)/renta} \Pi_x = {}_{(65-x)} P_x^{aa} \cdot v^{(65-x)} \cdot b \cdot \sum_{t=1}^{\omega-65} {}_t P_{65}^{ad} \cdot a_{65+t}^d \cdot v^t$$

El pago de prima periódica constante, prepagable y temporal resultaría:

$${}_{(65-x)/renta} \Pi_x = P \cdot \ddot{a}_{x:(65-x)}^{aa}$$

$$P = \frac{{}_{(65-x)/renta} \Pi_x}{\ddot{a}_{x:(65-x)}^{aa}} = \frac{{}_{(65-x)/renta} \Pi_x}{\sum_{t=0}^{65-x-1} {}_t P_x^{aa} \cdot v^t}$$

$$P = \frac{{}_{65-x} P_x^{aa} \cdot v^{(65-x)} \cdot b \cdot \sum_{t=1}^{\omega-65} {}_t P_{65}^{ad} \cdot a_{65+t}^d \cdot v^t}{\sum_{t=0}^{65-x-1} {}_t P_x^{aa} \cdot v^t}$$

Donde:

b es la cuantía constante de la renta contratada para la cobertura del coste de la dependencia.

a_{x+t}^d es el valor actual de una renta unitaria vitalicia de una persona dependiente de edad $x+t$.

${}_t P_x^{aa}$ es la probabilidad de que un individuo en estado de activo a la edad x sobreviva activo a la edad $x+t$.

³ Dado que estas bases técnicas se encuentran incluidas en el estudio propio de la dependencia, no vamos a incluir ningún análisis al respecto, a fin de que no resulte repetitivo.

${}_t P_x^{ad}$ es la probabilidad de que un individuo activo a la edad x pase a dependiente en el transcurso de t -ésimo año.

v^t es el factor de actualización financiera.

$v^t = (1+i)^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)}$, siendo i el tipo de interés técnico utilizado en la actualización financiera.

Desarrollando cada uno de los términos para su cálculo:

$${}_t P_x^{aa} = \prod_{h=0}^{t-1} P_{x+h}^{aa} = \frac{l_{x+t}^{aa}}{l_x^{aa}}$$

$${}_t P_x^{ad} = P_{x+t-1}^{ad} \cdot {}_{t-1} P_x^{aa} = P_{x+t-1}^{ad} \cdot \prod_{h=0}^{t-2} P_{x+h}^{aa} = P_{x+t-1}^{ad} \cdot \frac{l_{x+t-1}^{aa}}{l_x^{aa}}$$

$${}_t P_x^{dd} = \frac{l_{x+t}^{dd}}{l_x^{dd}}$$

$$a_x^d = \sum_{h=1}^{\omega-x} {}_h P_x^{dd} \cdot v^h$$

En el Anexo se adjunta, en las tablas números 1, 2 y 3, los cálculos correspondientes a las “primas únicas puras” para edades superiores a 40 años con carácter unitario, tanto para hombres como mujeres. A modo de ejemplo, si un hombre de 40 años quisiera contratar un seguro de cobertura de caer en dependencia en los términos especificados en esta nota técnica, debería pagar una prima única de 1,037 euros por cada euro anual de renta vitalicia en dependencia, si la cobertura que contratase fuese la de padecer una dependencia sin especificar el número de horas semanales de ayuda; de 0,79 euros por euro de renta anual si la cobertura fuese en caso de precisar ayuda más de 15 horas semanales; y de 0,35 euros por euro de renta anual si la ayuda superase las 60 horas semanales.

Una vez obtenida la prima de riesgo, la prima de tarifa o comercial (P'') sería la suma de la prima de riesgo más los recargos:

$$P'' = P_r + \lambda \cdot P'' + g_1 \cdot P'' + g_2 \cdot P'' + g_3 \cdot P'' + B \cdot P'',$$

siendo $P_r = P + g_4 \cdot P''$

$$P'' = P + \lambda \cdot P'' + g_1 \cdot P'' + g_2 \cdot P'' + g_3 \cdot P'' + g_4 \cdot P'' + B \cdot P''$$

$$P'' = \frac{P}{(1 - (\lambda + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + B))}$$

$$P'' = \frac{P}{1 - (0,2 + 0,05 + 0,02 + 0,01 + 0,005)} = \frac{P}{0,715}$$

A la firma del contrato se establecería la opción elegida y la cuantía de la renta asegurada, con el fin de poder realizar el cálculo de la prima de tarifa. Siguiendo el ejemplo descrito en el apartado anterior, la prima de tarifa sería de 1,45 euros por euro de renta anual vitalicia de coste de dependencia, en el caso de contratación de la opción de cobertura “necesitar cualquier número de horas de ayuda semanales”, de 1,10 euros en caso de que la opción fuese el precisar ayuda más de 15 horas semanales y de 0,49 euros si la opción fuese de más de 60 horas semanales.

En esta aproximación de nota técnica no incluimos las provisiones técnicas correspondientes a este tipo de seguro por considerar que no se diferenciarían suficientemente de las establecidas por la ley para los seguros de vida.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio se ha pretendido dar respuesta a dos aspectos de la cobertura privada de la dependencia: uno ha sido establecer un modelo financiero-actuarial que pudiera servir de apoyo en el diseño de productos privados que cubren la dependencia y otro la realización de una aproximación a las bases técnicas actuariales que permitan la cuantificación de las correspondientes primas. Dado los escasos estudios que sobre este tema existen todavía en nuestro país, el establecer una aproximación a las primas de un seguro privado de dependencia puede servir de referencia para el análisis de su comercialización por parte de las aseguradoras.

Para todo esto se han planteado una serie de condiciones y restricciones iniciales al problema que permitiesen la cuantificación económica en un entorno real. No obstante, debido a la complejidad del problema, hay determinados aspectos que se podrían considerar para futuros trabajos. Por una parte, en el estudio actuarial que hemos realizado para la formulación de un seguro de dependencia, se ha tomado como premisa el riesgo de caer en dependencia, pero no se han considerado los diferentes grados de ésta. Esto conllevaría un estudio mucho más preciso a nivel de formulación debido a que, tal y como se exponía en la Figura 1, las posibilidades de transición se ven incrementadas y, con ello, su complejidad.

En cuanto a las prestaciones de este tipo de seguros, se podría establecer para las indemnizaciones en forma de capital que éste se incrementara conforme transcurrieran los años, dependiendo del tramo en el que se produjera la incapacidad, estableciéndolo según las diferentes condiciones familiares, sociales y económicas del dependiente. En cuanto a la prestación en forma de renta, podría realizarse un pago de renta en forma creciente, por un lado, para adecuarse al incremento del índice de precios al consumo o pérdidas económicas en términos reales; y, por otro, podría establecerse un crecimiento añadido por cambios en el grado de dependencia que se produjeran en el asegurado.

Se ha expuesto, en el epígrafe correspondiente, que el pago de primas periódicas se realizaría de manera constante hasta llegar a la edad en que se haría efectiva la cobertura; en cambio, el pago de primas podría realizarse de manera muy variada: pago de prima nivelada por periodos inferiores al descrito, pago de primas crecientes conforme se aproxima la edad de cobertura, etc.

En definitiva, una vez establecida la base técnica de posibles seguros para la cobertura de la dependencia, se podría diseñar un producto comercial adecuado a la aseguradora que cubriese lo demandado por sus clientes.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBARRÁN, I.; AYUSO, M.; GUILLÉN, M.; MONTEVERDE, M. (2005): “A Multiple State Model for Disability Using the Decomposition of Death Probabilities and Cross-Sectional Data”. *Communications in Statistics–Theory and Methods*, nº 34, pp. 2063–2075.

ALBARRÁN, I.; ALONSO, P. (2006): “Clasificación de las personas dependientes a partir de la Encuesta de Discapacidades, Deficiencias y Estado de Salud de 1999”. *Revista Española de Salud Pública*, 80 (4), pp. 349–360.

AYUSO, M.; CORRALES, H.; GUILLÉN, M.; PÉREZ-MARÍN, A.M.; ROJO, J.L. (2001): “Estadística Actuarial Vida”. *Ediciones de la Universidad de Barcelona*.

BERNOULLI, D. (1766): “Essai d’une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l’inoculation pour prévenir”, *Royal Academy of Sciences in Paris*. Reviewed by Blower, S. (2004): *Reviews in Medical Virology*, 14, pp. 275–288.

DAW, R.H. (1979): “Smallpox and the double decrement table: a piece of actuarial pre-history”. *Journal of the Institute of Actuaries*, 106, pp. 229–318.

HABERMAN, S.; PITACCO, E. (1999): “Actuarial Models for Disability Insurance”. *Chapman & Hall / CRC Press*.

HAMZA, E. (1900): “Note sur la théorie mathématique de l’assurance contre le risque d’invalidité d’origine morbide, sénile ou accidentelle”. *Transactions of the 3rd International Conference of Actuaries*, Paris, pp. 154–203.

HERRANZ, P. (2007): “Análisis de la Dependencia de las Personas Mayores en España. Aproximación Actuarial a las Bases Técnicas de un Seguro de Dependencia Privado”. *Tesis Doctoral*.

HOEM, J. (1971): "Point Estimation of Forces of Transition in Demographic Models". *Journal of the Royal Statistical Society*, vol.33, nº 2, pp. 275–289.

ICEA (2005): "El Seguro de Vida. Estadística a Marzo de 2005". *Investigación Cooperativa de Entidades Aseguradoras*, Informe 929.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA (2002): "Metodología. Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estados de Salud 1999". *Recurso electrónico*, disponible en la web www.ine.es

LÓPEZ CACHERO, M.; LÓPEZ DE LA MANZANARA, J. (1996): "Estadística para Actuarios". *Fundación Mapfre Estudios, Editorial Mapfre*.

POCIELLO, E.; VAREA, J. (2004): "Modelos de financiación del Seguro de Dependencia". *Revista Gerencia de Riesgos y Seguros*. Estudios Fundación Mapfre.

POCIELLO, E.; VAREA, J.; MARTÍNEZ, A. (2001): "Construcción de tablas de dependencia: una aproximación metodológica". *Anales del Instituto de Actuarios Españoles 2001*.

SEAL, H.L. (1977): "Studies in the history of probability and statistics. XXXV. Multiple decrements or competing risks". *Biometrika*, 64, pp. 429–439.

SEGOVIA, M.M.; GUERRERO, F.M.; HERRANZ, P. (2008): "Análisis económico del comportamiento de la dependencia por regiones". *Rect@*, vol. Actas_16, Issue 1, 107.

U.S. DEPARTMENT OF HEALTH AND HUMAN SERVICES (1993): "Vital and Health Statistics. Health Data on Older Americans: United States 1992". *Series 3: Analytic and Epidemiological Studies*, nº 27.

REFERENCIAS NORMATIVAS:

Circular 5/2000 del Banco de España de 19 de septiembre en el que hace referencia a la Circular 1/2000 de 10 de febrero, publicada por la Dirección General de Seguros, sobre el uso de las tablas de mortalidad. BOE número 231, pág. 32733.

Ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de Dependencia (Ley 39/2006 de 14 de diciembre). BOE número 299 de 15 de diciembre de 2006, pp. 44142–44156.

Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre, por el que se aprueba el Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados. BOE número 282 de 25 de noviembre de 1998, pp. 38695–38742.

ANEXO. CÁLCULO DE LAS PRIMAS DE RIESGO

Tabla 1. Cálculo de la prima única de riesgo pura de un seguro de dependencia diferido y con prestación en forma de renta vitalicia

Necesidad de ayuda: Para cualquier número de horas semanales.

Edad inicial del colectivo 6 años y final 99 años

HOMBRES				Renta 1 € Tipo i 2,119%					CALCULO COBERTURA >65 AÑOS				
Edad x	Cabezas vivas de activos en estado activo l_x^{aa}	Edad x	Cabezas vivas de dependientes en estado dependiente l_x^{dd}	Probabilidad de caer en dependencia P_x^{ad}	Edad x	${}_{(65-x)}P_x^{aa}$	$v^{(65-x)}$	Coste cobertura	Π_x	Edad x	${}_tP_{65}^{ad}$	a_{65+t}^d	v^t
40	938.424	65	1.000.000	0,00554	40	0,84085	0,59826	2,06088	1,03671	65			
41	938.901	66	973.074	0,00568	41	0,84042	0,61094	2,06088	1,05814	66	0,00557	10,79378	0,97925
42	939.252	67	945.069	0,00583	42	0,84010	0,62388	2,06088	1,08016	67	0,00561	10,65263	0,95893
43	939.461	68	915.917	0,00600	43	0,83992	0,63710	2,06088	1,10280	68	0,00566	10,21407	0,93903
44	939.511	69	885.504	0,00620	44	0,83987	0,65060	2,06088	1,12611	69	0,00572	9,77820	0,91955
45	939.379	70	853.686	0,00898	45	0,83999	0,66439	2,06088	1,15013	70	0,00809	9,34703	0,90047
46	934.704	71	820.313	0,00933	46	0,84419	0,67847	2,06088	1,18038	71	0,00817	8,92288	0,88178
47	929.821	72	785.239	0,00974	47	0,84862	0,69284	2,06088	1,21172	72	0,00828	8,50841	0,86348
48	924.701	73	748.363	0,01021	48	0,85332	0,70753	2,06088	1,24425	73	0,00841	8,10631	0,84557
49	919.313	74	709.692	0,01075	49	0,85832	0,72252	2,06088	1,27806	74	0,00855	7,71862	0,82802
50	913.642	75	669.352	0,01850	50	0,86365	0,73783	2,06088	1,31324	75	0,01417	7,34667	0,81084
51	907.931	76	627.578	0,01962	51	0,86909	0,75346	2,06088	1,34951	76	0,01433	6,99119	0,79401
52	901.925	77	584.696	0,02088	52	0,87487	0,76943	2,06088	1,38728	77	0,01449	6,65239	0,77754
53	895.614	78	541.102	0,02230	53	0,88104	0,78573	2,06088	1,42666	78	0,01465	6,33014	0,76140
54	888.980	79	497.241	0,02390	54	0,88761	0,80238	2,06088	1,46776	79	0,01481	6,02393	0,74560
55	882.005	80	453.598	0,04258	55	0,89463	0,81938	2,06088	1,51072	80	0,02480	5,73291	0,73013
56	872.530	81	410.654	0,04651	56	0,90435	0,83675	2,06088	1,55948	81	0,02489	5,45607	0,71498
57	862.691	82	368.884	0,05100	57	0,91466	0,85448	2,06088	1,61069	82	0,02496	5,19206	0,70015
58	852.464	83	328.721	0,05612	58	0,92563	0,87258	2,06088	1,66456	83	0,02498	4,93935	0,68562
59	841.818	84	290.553	0,06194	59	0,93734	0,89107	2,06088	1,72132	84	0,02495	4,69606	0,67139
60	830.723	85	254.704	0,08414	60	0,94986	0,90996	2,06088	1,78128	85	0,03049	4,46000	0,65746
61	823.640	86	221.420	0,09508	61	0,95803	0,92924	2,06088	1,83466	86	0,03029	4,22860	0,64382
62	815.950	87	190.874	0,10794	62	0,96706	0,94893	2,06088	1,89120	87	0,02999	3,99872	0,63046
63	807.609	88	163.147	0,12325	63	0,97704	0,96904	2,06088	1,95122	88	0,02962	3,76689	0,61738
64	798.634	89	138.198	0,14176	64	0,98802	0,98957	2,06088	2,01496	89	0,02920	3,53061	0,60456
65	789.069	90	115.905	0,19079						90	0,03333	3,28838	0,59202
66	774.386	91	96.109	0,23150						91	0,03282	3,03919	0,57974
67	759.231	92	78.648	0,28665						92	0,03228	2,78210	0,56771
68	743.559	93	63.368	0,36414						93	0,03167	2,51555	0,55593
69	727.304	94	50.132	0,47772						94	0,03095	2,23656	0,54439
70	710.383	95	38.838	0,65320						95	0,02997	1,93761	0,53309
71	690.889	96	29.426	0,95418						96	0,02879	1,60102	0,52203
72	670.612	97	21.756	1,00000						97	0,01745	1,20073	0,51120
73	649.467	98	15.666	1,00000						98	0,00748	0,69238	0,50059
74	627.405	99	10.961							99	0,00000	0,00000	0,49020
75	604.418												
										COBERTURA		2,06088	

Tabla 1. Cálculo de la prima única de riesgo pura de un seguro de dependencia diferido y con prestación en forma de renta vitalicia (CONT.)

Necesidad de ayuda: Para cualquier número de horas semanales.

Edad inicial del colectivo 6 años y final 99 años

MUJERES				Renta 1 € Tipo $i = 2,119\%$ CALCULO PRIMA ÚNICA					CALCULO COBERTURA >65 AÑOS				
Edad x	Cabezas vivas de activos en estado activo l_x^{aa}	Edad x	Cabezas vivas de dependientes en estado dependiente l_x^{dd}	Probabilidad de caer en dependencia P_x^{ad}	Edad x	${}_{(65-x)}P_x^{aa}$	$v^{(65-x)}$	Coste cobertura	Π_x	Edad x	${}_tP_{65}^{ad}$	a_{65+t}^d	v^t
40	943.187	65	1.000.000	0,01181	40	0,81729	0,59826	2,70564	1,32293	65			
41	938.992	66	990.350	0,01215	41	0,82094	0,61094	2,70564	1,35699	66	0,01186	10,79378	0,97925
42	934.690	67	979.743	0,01254	42	0,82472	0,62388	2,70564	1,39213	67	0,01192	10,65263	0,95893
43	930.265	68	968.026	0,01296	43	0,82864	0,63710	2,70564	1,42839	68	0,01199	10,21407	0,93903
44	925.704	69	955.096	0,01345	44	0,83273	0,65060	2,70564	1,46584	69	0,01209	9,77820	0,91955
45	920.985	70	940.879	0,01342	45	0,83699	0,66439	2,70564	1,50457	70	0,01171	9,34703	0,90047
46	918.506	71	925.344	0,01403	46	0,83925	0,67847	2,70564	1,54060	71	0,01186	8,92288	0,88178
47	915.811	72	908.496	0,01473	47	0,84172	0,69284	2,70564	1,57788	72	0,01205	8,50841	0,86348
48	912.870	73	890.367	0,01554	48	0,84443	0,70753	2,70564	1,61650	73	0,01227	8,10631	0,84557
49	909.649	74	871.019	0,01646	49	0,84742	0,72252	2,70564	1,65660	74	0,01251	7,71862	0,82802
50	906.133	75	850.539	0,03100	50	0,85071	0,73783	2,70564	1,69827	75	0,02262	7,34667	0,81084
51	898.839	76	829.006	0,03323	51	0,85762	0,75346	2,70564	1,74833	76	0,02286	6,99119	0,79401
52	891.266	77	806.406	0,03576	52	0,86490	0,76943	2,70564	1,80055	77	0,02313	6,65239	0,77754
53	883.409	78	782.620	0,03864	53	0,87259	0,78573	2,70564	1,85505	78	0,02339	6,33014	0,76140
54	875.249	79	757.461	0,04190	54	0,88073	0,80238	2,70564	1,91202	79	0,02365	6,02393	0,74560
55	866.772	80	730.701	0,06757	55	0,88934	0,81938	2,70564	1,97163	80	0,03538	5,73291	0,73013
56	859.302	81	702.091	0,07527	56	0,89707	0,83675	2,70564	2,03092	81	0,03555	5,45607	0,71498
57	851.450	82	671.400	0,08430	57	0,90535	0,85448	2,70564	2,09308	82	0,03566	5,19206	0,70015
58	843.187	83	638.436	0,09492	58	0,91422	0,87258	2,70564	2,15838	83	0,03570	4,93935	0,68562
59	834.483	84	603.102	0,10744	59	0,92375	0,89107	2,70564	2,22710	84	0,03565	4,69606	0,67139
60	825.303	85	565.503	0,08711	60	0,93403	0,90996	2,70564	2,29959	85	0,02529	4,46000	0,65746
61	815.530	86	525.937	0,09557	61	0,94522	0,92924	2,70564	2,37646	86	0,02503	4,22860	0,64382
62	805.209	87	484.870	0,10492	62	0,95734	0,94893	2,70564	2,45793	87	0,02467	3,99872	0,63046
63	794.305	88	442.890	0,11541	63	0,97048	0,96904	2,70564	2,54447	88	0,02422	3,76689	0,61738
64	782.837	89	400.663	0,12742	64	0,98470	0,98957	2,70564	2,63645	89	0,02374	3,53061	0,60456
65	770.858	90	358.881	0,14704						90	0,02417	3,28838	0,59202
66	751.933	91	318.219	0,15648						91	0,02240	3,03919	0,57974
67	732.680	92	279.300	0,17521						92	0,02187	2,78210	0,56771
68	713.068	93	242.619	0,19755						93	0,02132	2,51555	0,55593
69	693.046	94	208.458	0,22394						94	0,02068	2,23656	0,54439
70	672.546	95	176.931	0,25408						95	0,01985	1,93761	0,53309
71	651.886	96	148.079	0,28910						96	0,01889	1,60102	0,52203
72	630.580	97	121.968	0,32967						97	0,01777	1,20073	0,51120
73	608.559	98	98.705	0,37674						98	0,01653	0,69238	0,50059
74	585.787	99	78.342							99	0,00000	0,00000	0,49020
75	562.271												
											COBERTURA 2,70564		

Tabla 2. Cálculo de la prima única de riesgo pura de un seguro de dependencia diferido y con prestación en forma de renta vitalicia

Necesidad de ayuda: Superior a 15 horas semanales.

Edad inicial del colectivo 6 años y final 99 años

HOMBRES					Renta 1 € Tipo i 2,119%					CALCULO COBERTURA >65 AÑOS			
Edad x	Cabezas vivas de activos en estado activo l_x^{aa}	Edad x	Cabezas vivas de dependientes en estado dependiente l_x^{dd}	Probabilidad de caer en dependencia p_x^{ad}	Edad x	${}_{(65-x)}P_x^{aa}$	$v^{(65-x)}$	Coste cobertura	Π_x	$\sum_{t=1}^{\omega-65} {}_tP_{65}^{ad} \cdot a_{65+t}^d \cdot v^t$			
										Edad x	${}_tP_{65}^{ad}$	a_{65+t}^d	v^t
40	941.659	65	1.000.000	0,00432	40	0,85326	0,59826	1,54184	0,78706	65			
41	941.873	66	973.074	0,00442	41	0,85306	0,61094	1,54184	0,80356	66	0,00434	10,79378	0,97925
42	941.962	67	945.069	0,00453	42	0,85298	0,62388	1,54184	0,82051	67	0,00436	10,65263	0,95893
43	941.910	68	915.917	0,00465	43	0,85303	0,63710	1,54184	0,83794	68	0,00439	10,21407	0,93903
44	941.699	69	885.504	0,00479	44	0,85322	0,65060	1,54184	0,85589	69	0,00443	9,77820	0,91955
45	941.308	70	853.686	0,00418	45	0,85358	0,66439	1,54184	0,87439	70	0,00378	9,34703	0,90047
46	937.184	71	820.313	0,00434	46	0,85733	0,67847	1,54184	0,89685	71	0,00384	8,92288	0,88178
47	932.849	72	785.239	0,00454	47	0,86132	0,69284	1,54184	0,92011	72	0,00391	8,50841	0,86348
48	928.272	73	748.363	0,00476	48	0,86556	0,70753	1,54184	0,94424	73	0,00399	8,10631	0,84557
49	923.423	74	709.692	0,00501	49	0,87011	0,72252	1,54184	0,96931	74	0,00408	7,71862	0,82802
50	918.285	75	669.352	0,01388	50	0,87498	0,73783	1,54184	0,99539	75	0,01093	7,34667	0,81084
51	913.221	76	627.578	0,01463	51	0,87983	0,75346	1,54184	1,02211	76	0,01102	6,99119	0,79401
52	907.855	77	584.696	0,01548	52	0,88503	0,76943	1,54184	1,04994	77	0,01112	6,65239	0,77754
53	902.176	78	541.102	0,01644	53	0,89060	0,78573	1,54184	1,07894	78	0,01122	6,33014	0,76140
54	896.164	79	497.241	0,01752	54	0,89657	0,80238	1,54184	1,10919	79	0,01132	6,02393	0,74560
55	889.802	80	453.598	0,02794	55	0,90298	0,81938	1,54184	1,14080	80	0,01702	5,73291	0,73013
56	882.202	81	410.654	0,03015	56	0,91076	0,83675	1,54184	1,17501	81	0,01708	5,45607	0,71498
57	874.210	82	368.884	0,03264	57	0,91909	0,85448	1,54184	1,21087	82	0,01713	5,19206	0,70015
58	865.795	83	328.721	0,03543	58	0,92802	0,87258	1,54184	1,24855	83	0,01714	4,93935	0,68562
59	856.927	84	290.553	0,03853	59	0,93763	0,89107	1,54184	1,28820	84	0,01712	4,69606	0,67139
60	847.567	85	254.704	0,05802	60	0,94798	0,90996	1,54184	1,33003	85	0,02355	4,46000	0,65746
61	840.008	86	221.420	0,06453	61	0,95651	0,92924	1,54184	1,37043	86	0,02341	4,22860	0,64382
62	831.835	87	190.874	0,07198	62	0,96591	0,94893	1,54184	1,41322	87	0,02320	3,99872	0,63046
63	823.006	88	163.147	0,08059	63	0,97627	0,96904	1,54184	1,45865	88	0,02293	3,76689	0,61738
64	813.538	89	138.198	0,09066	64	0,98763	0,98957	1,54184	1,50689	89	0,02262	3,53061	0,60456
65	803.478	90	115.905	0,15437						90	0,03353	3,28838	0,59202
66	789.304	91	96.109	0,18793						91	0,03313	3,03919	0,57974
67	774.627	92	78.648	0,23340						92	0,03268	2,78210	0,56771
68	759.399	93	63.368	0,29734						93	0,03216	2,51555	0,55593
69	743.551	94	50.132	0,39127						94	0,03152	2,23656	0,54439
70	726.995	95	38.838	0,53695						95	0,03063	1,93761	0,53309
71	710.195	96	29.426	0,78748						96	0,02954	1,60102	0,52203
72	692.457	97	21.756	1,00000						97	0,02169	1,20073	0,51120
73	673.679	98	15.666	1,00000						98	0,00930	0,69238	0,50059
74	653.792	99	10.961							99	0,00000	0,00000	0,49020
75	632.773												
										COBERTURA		1,54184	

Tabla 2. Cálculo de la prima única de riesgo pura de un seguro de dependencia diferido y con prestación en forma de renta vitalicia (CONT.)

Necesidad de ayuda: Superior a 15 horas semanales.

Edad inicial del colectivo 6 años y final 99 años

MUJERES					CALCULO PRIMA ÚNICA					CALCULO COBERTURA >65 AÑOS			
Edad x	Cabezas vivas de activos en estado activo l_x^{aa}	Edad x	Cabezas vivas de dependientes en estado dependiente l_x^{dd}	Probabilidad de caer en dependencia P_x^{ad}	Edad x	${}_{(65-x)}P_x^{aa}$	$v^{(65-x)}$	Coste cobertura	Π_x	Edad x	${}_tP_{65}^{ad}$	a_{65+t}^d	v^t
40	947.501	65	1.000.000	0,00755	40	0,84041	0,59826	1,79083	0,90040	65			
41	945.029	66	990.350	0,00774	41	0,84261	0,61094	1,79083	0,92188	66	0,00758	10,79378	0,97925
42	942.442	67	979.743	0,00794	42	0,84492	0,62388	1,79083	0,94400	67	0,00761	10,65263	0,95893
43	939.725	68	968.026	0,00817	43	0,84736	0,63710	1,79083	0,96679	68	0,00765	10,21407	0,93903
44	936.861	69	955.096	0,00844	44	0,84995	0,65060	1,79083	0,99030	69	0,00771	9,77820	0,91955
45	933.830	70	940.879	0,00512	45	0,85271	0,66439	1,79083	1,01456	70	0,00455	9,34703	0,90047
46	931.382	71	925.344	0,00534	46	0,85495	0,67847	1,79083	1,03879	71	0,00465	8,92288	0,88178
47	928.714	72	908.496	0,00561	47	0,85741	0,69284	1,79083	1,06384	72	0,00475	8,50841	0,86348
48	925.796	73	890.367	0,00591	48	0,86011	0,70753	1,79083	1,08981	73	0,00487	8,10631	0,84557
49	922.594	74	871.019	0,00626	49	0,86310	0,72252	1,79083	1,11677	74	0,00500	7,71862	0,82802
50	919.092	75	850.539	0,02229	50	0,86639	0,73783	1,79083	1,14478	75	0,01724	7,34667	0,81084
51	913.720	76	829.006	0,02366	51	0,87148	0,75346	1,79083	1,17591	76	0,01736	6,99119	0,79401
52	908.048	77	806.406	0,02522	52	0,87692	0,76943	1,79083	1,20833	77	0,01749	6,65239	0,77754
53	902.066	78	782.620	0,02699	53	0,88274	0,78573	1,79083	1,24211	78	0,01764	6,33014	0,76140
54	895.754	79	757.461	0,02900	54	0,88896	0,80238	1,79083	1,27737	79	0,01779	6,02393	0,74560
55	889.095	80	730.701	0,03514	55	0,89562	0,81938	1,79083	1,31421	80	0,02014	5,73291	0,73013
56	880.934	81	702.091	0,03811	56	0,90391	0,83675	1,79083	1,35449	81	0,02025	5,45607	0,71498
57	872.388	82	671.400	0,04145	57	0,91277	0,85448	1,79083	1,39674	82	0,02032	5,19206	0,70015
58	863.429	83	638.436	0,04520	58	0,92224	0,87258	1,79083	1,44114	83	0,02035	4,93935	0,68562
59	854.025	84	603.102	0,04938	59	0,93240	0,89107	1,79083	1,48788	84	0,02032	4,69606	0,67139
60	844.142	85	565.503	0,06953	60	0,94331	0,90996	1,79083	1,53720	85	0,02604	4,46000	0,65746
61	835.787	86	525.937	0,07760	61	0,95274	0,92924	1,79083	1,58546	86	0,02586	4,22860	0,64382
62	826.838	87	484.870	0,08688	62	0,96305	0,94893	1,79083	1,63658	87	0,02560	3,99872	0,63046
63	817.255	88	442.890	0,09766	63	0,97435	0,96904	1,79083	1,69086	88	0,02527	3,76689	0,61738
64	807.056	89	400.663	0,11036	64	0,98666	0,98957	1,79083	1,74851	89	0,02490	3,53061	0,60456
65	796.289	90	358.881	0,05207						90	0,01016	3,28838	0,59202
66	779.767	91	318.219	0,09961						91	0,01810	3,03919	0,57974
67	762.818	92	279.300	0,11082						92	0,01770	2,78210	0,56771
68	745.401	93	242.619	0,12407						93	0,01728	2,51555	0,55593
69	727.456	94	208.458	0,13958						94	0,01679	2,23656	0,54439
70	708.903	95	176.931	0,15711						95	0,01615	1,93761	0,53309
71	692.221	96	148.079	0,17724						96	0,01540	1,60102	0,52203
72	674.637	97	121.968	0,20022						97	0,01453	1,20073	0,51120
73	656.052	98	98.705	0,22646						98	0,01354	0,69238	0,50059
74	636.403	99	78.342							99	0,00000	0,00000	0,49020

Tabla 3. Cálculo de la prima única de riesgo pura de un seguro de dependencia diferido y con prestación en forma de renta vitalicia

Necesidad de ayuda: Superior a 60 horas semanales.

Edad inicial del colectivo 6 años y final 99 años

HOMBRES					Renta 1 € Tipo i 2,119%					CALCULO COBERTURA >65 AÑOS			
					CALCULO PRIMA ÚNICA					$\sum_{t=1}^{\omega-65} {}_tP_{65}^{ad} \cdot a_{65+t}^d \cdot v^t$			
Edad x	Cabezas vivas de activos en estado activo l_x^{aa}	Edad x	Cabezas vivas de dependientes en estado dependiente l_x^{dd}	Probabilidad de caer en dependencia p_x^{ad}	Edad x	$(65-x)P_x^{aa}$	$v^{(65-x)}$	Coste cobertura	Π_x	Edad x	${}_tP_{65}^{ad}$	a_{65+t}^d	v^t
40	948.131	65	1.000.000	0,00244	40	0,85655	0,59826	0,68617	0,35162	65			
41	947.560	66	973.074	0,00249	41	0,85707	0,61094	0,68617	0,35929	66	0,00245	10,79378	0,97925
42	946.866	67	945.069	0,00254	42	0,85770	0,62388	0,68617	0,36717	67	0,00246	10,65263	0,95893
43	946.033	68	915.917	0,00261	43	0,85845	0,63710	0,68617	0,37528	68	0,00248	10,21407	0,93903
44	945.045	69	885.504	0,00269	44	0,85935	0,65060	0,68617	0,38363	69	0,00250	9,77820	0,91955
45	943.879	70	853.686	0,00217	45	0,86041	0,66439	0,68617	0,39224	70	0,00199	9,34703	0,90047
46	940.176	71	820.313	0,00226	46	0,86380	0,67847	0,68617	0,40213	71	0,00202	8,92288	0,88178
47	936.260	72	785.239	0,00236	47	0,86741	0,69284	0,68617	0,41237	72	0,00206	8,50841	0,86348
48	932.098	73	748.363	0,00248	48	0,87128	0,70753	0,68617	0,42299	73	0,00211	8,10631	0,84557
49	927.659	74	709.692	0,00262	49	0,87545	0,72252	0,68617	0,43402	74	0,00216	7,71862	0,82802
50	922.927	75	669.352	0,00669	50	0,87994	0,73783	0,68617	0,44549	75	0,00536	7,34667	0,81084
51	918.671	76	627.578	0,00702	51	0,88402	0,75346	0,68617	0,45704	76	0,00541	6,99119	0,79401
52	914.103	77	584.696	0,00738	52	0,88844	0,76943	0,68617	0,46906	77	0,00547	6,65239	0,77754
53	909.211	78	541.102	0,00780	53	0,89322	0,78573	0,68617	0,48157	78	0,00552	6,33014	0,76140
54	903.976	79	497.241	0,00826	54	0,89839	0,80238	0,68617	0,49462	79	0,00558	6,02393	0,74560
55	898.378	80	453.598	0,00602	55	0,90399	0,81938	0,68617	0,50825	80	0,00386	5,73291	0,73013
56	892.277	81	410.654	0,00641	56	0,91017	0,83675	0,68617	0,52257	81	0,00390	5,45607	0,71498
57	885.759	82	368.884	0,00683	57	0,91687	0,85448	0,68617	0,53757	82	0,00393	5,19206	0,70015
58	878.791	83	328.721	0,00728	58	0,92414	0,87258	0,68617	0,55332	83	0,00394	4,93935	0,68562
59	871.337	84	290.553	0,00776	59	0,93204	0,89107	0,68617	0,56987	84	0,00394	4,69606	0,67139
60	863.359	85	254.704	0,02155	60	0,94065	0,90996	0,68617	0,58733	85	0,01023	4,46000	0,65746
61	854.333	86	221.420	0,02336	61	0,95059	0,92924	0,68617	0,60611	86	0,01018	4,22860	0,64382
62	844.710	87	190.874	0,02537	62	0,96142	0,94893	0,68617	0,62600	87	0,01010	3,99872	0,63046
63	834.449	88	163.147	0,02760	63	0,97324	0,96904	0,68617	0,64713	88	0,00999	3,76689	0,61738
64	823.570	89	138.198	0,03011	64	0,98610	0,98957	0,68617	0,66957	89	0,00987	3,53061	0,60456
65	812.123	90	115.905	0,05694						90	0,01681	3,28838	0,59202
66	799.212	91	96.109	0,06464						91	0,01664	3,03919	0,57974
67	785.750	92	78.648	0,07385						92	0,01643	2,78210	0,56771
68	771.687	93	63.368	0,08498						93	0,01620	2,51555	0,55593
69	756.949	94	50.132	0,09848						94	0,01590	2,23656	0,54439
70	741.440	95	38.838	0,11464						95	0,01548	1,93761	0,53309
71	725.500	96	29.426	0,13419						96	0,01496	1,60102	0,52203
72	708.550	97	21.756	0,15785						97	0,01432	1,20073	0,51120
73	690.482	98	15.666	0,18660						98	0,01356	0,69238	0,50059
74	671.220	99	10.961							99	0,00000	0,00000	0,49020
75	650.732												
										COBERTURA		0,68617	

Tabla 3. Cálculo de la prima única de riesgo pura de un seguro de dependencia diferido y con prestación en forma de renta vitalicia (CONT.)

Necesidad de ayuda: Superior a 60 horas semanales.

Edad inicial del colectivo 6 años y final 99 años

MUJERES					CALCULO PRIMA ÚNICA					CALCULO COBERTURA >65 AÑOS			
Edad x	Cabezas vivas de activos en estado activo l_x^{aa}	Edad x	Cabezas vivas de dependientes en estado dependiente l_x^{dd}	Probabilidad de caer en dependencia p_x^{ad}	Edad x	$(65-x) P_x^{aa}$	$v^{(65-x)}$	Coste cobertura	Π_x	Edad x	${}_t P_{65}^{ad}$	a_{65+t}^d	v^t
40	951.816	65	1.000.000	0,00343	40	0,85610	0,59826	0,90032	0,46112	65			
41	950.152	66	990.350	0,00350	41	0,85760	0,61094	0,90032	0,47171	66	0,00344	10,79378	0,97925
42	948.369	67	979.743	0,00357	42	0,85921	0,62388	0,90032	0,48261	67	0,00345	10,65263	0,95893
43	946.451	68	968.026	0,00366	43	0,86095	0,63710	0,90032	0,49384	68	0,00346	10,21407	0,93903
44	944.383	69	955.096	0,00376	44	0,86283	0,65060	0,90032	0,50541	69	0,00349	9,77820	0,91955
45	942.142	70	940.879	0,00257	45	0,86489	0,66439	0,90032	0,51734	70	0,00233	9,34703	0,90047
46	939.327	71	925.344	0,00267	46	0,86748	0,67847	0,90032	0,52989	71	0,00237	8,92288	0,88178
47	936.292	72	908.496	0,00278	47	0,87029	0,69284	0,90032	0,54287	72	0,00241	8,50841	0,86348
48	933.008	73	890.367	0,00292	48	0,87335	0,70753	0,90032	0,55633	73	0,00247	8,10631	0,84557
49	929.440	74	871.019	0,00307	49	0,87671	0,72252	0,90032	0,57030	74	0,00252	7,71862	0,82802
50	925.572	75	850.539	0,00840	50	0,88037	0,73783	0,90032	0,58481	75	0,00668	7,34667	0,81084
51	921.313	76	829.006	0,00881	51	0,88444	0,75346	0,90032	0,59997	76	0,00673	6,99119	0,79401
52	916.742	77	806.406	0,00927	52	0,88885	0,76943	0,90032	0,61574	77	0,00679	6,65239	0,77754
53	911.846	78	782.620	0,00980	53	0,89362	0,78573	0,90032	0,63216	78	0,00686	6,33014	0,76140
54	906.605	79	757.461	0,01039	54	0,89879	0,80238	0,90032	0,64929	79	0,00692	6,02393	0,74560
55	901.001	80	730.701	0,01904	55	0,90438	0,81938	0,90032	0,66717	80	0,01202	5,73291	0,73013
56	893.466	81	702.091	0,02039	56	0,91201	0,83675	0,90032	0,68705	81	0,01205	5,45607	0,71498
57	885.532	82	671.400	0,02191	57	0,92018	0,85448	0,90032	0,70790	82	0,01208	5,19206	0,70015
58	877.168	83	638.436	0,02360	58	0,92895	0,87258	0,90032	0,72979	83	0,01209	4,93935	0,68562
59	868.341	84	603.102	0,02547	59	0,93839	0,89107	0,90032	0,75283	84	0,01207	4,69606	0,67139
60	859.014	85	565.503	0,02829	60	0,94858	0,90996	0,90032	0,77713	85	0,01235	4,46000	0,65746
61	851.461	86	525.937	0,03064	61	0,95700	0,92924	0,90032	0,80064	86	0,01226	4,22860	0,64382
62	843.284	87	484.870	0,03323	62	0,96628	0,94893	0,90032	0,82553	87	0,01213	3,99872	0,63046
63	834.440	88	442.890	0,03608	63	0,97652	0,96904	0,90032	0,85196	88	0,01197	3,76689	0,61738
64	824.945	89	400.663	0,03929	64	0,98776	0,98957	0,90032	0,88003	89	0,01179	3,53061	0,60456
65	814.846	90	358.881	0,05726						90	0,01546	3,28838	0,59202
66	801.047	91	318.219	0,04881						91	0,01160	3,03919	0,57974
67	786.721	92	279.300	0,05381						92	0,01138	2,78210	0,56771
68	771.817	93	242.619	0,05965						93	0,01113	2,51555	0,55593
69	756.264	94	208.458	0,06641						94	0,01084	2,23656	0,54439
70	739.972	95	176.931	0,07396						95	0,01046	1,93761	0,53309
71	723.801	96	148.079	0,08251						96	0,01001	1,60102	0,52203
72	706.635	97	121.968	0,09212						97	0,00947	1,20073	0,51120
73	688.365	98	98.705	0,10291						98	0,00887	0,69238	0,50059
74	668.917	99	78.342							99	0,00000	0,00000	0,49020

Algunas aplicaciones de la Teoría de Lie a la Economía y las Finanzas

HERNÁNDEZ FERNÁNDEZ, ISABEL

Departamento de Geometría y Topología

Universidad de Sevilla

Correo electrónico: isaherfer@alum.us.es

MATEOS CONTRERAS, CONSUELO

Departamento de Geometría y Topología

Universidad de Sevilla

Correo electrónico: conmatcon@gmail.com

NÚÑEZ VALDÉS, JUAN

Departamento de Geometría y Topología

Universidad de Sevilla

Correo electrónico: jnvaldes@us.es

TENORIO VILLALÓN, ÁNGEL F.

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica

Universidad Pablo de Olavide

Correo electrónico: aftenorio@upo.es

RESUMEN

En este artículo, los autores pretenden mostrar y explicar cómo la Teoría de Lie se puede aplicar a la resolución de algunos problemas relativos a la Economía y a las Finanzas. Concretamente, se realiza un análisis de dos de esos problemas y se discuten tanto sus aspectos matemáticos como el acercamiento hecho desde la Teoría de Lie para su resolución. Igualmente, se indican los avances más recientes existentes en esta línea de investigación, mencionando también algunos problemas abiertos que pueden ser tratados en futuros trabajos.

Palabras clave: Matemática Financiera; Matemática Económica; progreso técnico; opciones con barrera móvil; grupos de Lie; álgebras de Lie.

Clasificación JEL: C02; C60; C65; G13; O30.

2000MSC: 91B28; 91B38; 17B99; 17B45; 17B30.

Some Applications of Lie Theory to Economics and Finance

ABSTRACT

This paper shows and explains two problems in Economics and Finance, both dealt with a Lie Theory approach. So, mathematical aspects for these approaches are put forward and discussed in several economic problems which have been previously considered in the literature. Besides, some advances on this topic are also shown, mentioning some open problems for future research.

Keywords: Financial Mathematics; Mathematical Economics; technical progress; moving barrier options; Lie groups; Lie algebras.

JEL classification: C02; C60; C65; G13; O30.

2000MSC: 91B28; 91B38; 17B99; 17B45; 17B30.



1. INTRODUCCIÓN

Es bien conocido el uso que puede hacerse de la Teoría de Lie en la resolución de problemas relativos a diversos campos científicos, todos ellos distintos de las Matemáticas. Habitualmente, dichas aplicaciones se enmarcan en las ciencias técnicas y experimentales (fundamentalmente, Física e Ingeniería). No obstante, la Teoría de Lie es aplicable a ámbitos distintos de los técnicos o de los experimentales, siendo tales aplicaciones unas grandes desconocidas para los investigadores en general. Con el presente artículo se pretende dar a conocer algunas aplicaciones de la Teoría de Lie a la Economía y, más concretamente, a las Finanzas, facilitando al investigador novel la posibilidad de incorporarse a esta prometedora línea de investigación.

En la literatura actual (nos referimos mayoritariamente a artículos de principios del s.XXI) existe la tendencia a estudiar la relación entre la Teoría de Lie y diversos problemas económicos y financieros. Dicha tendencia está proporcionando unas herramientas de estudio interesantes, que están basadas en las propiedades de las álgebras y los grupos de Lie. Teniendo este hecho en cuenta, nos interesaría hacer un breve recorrido histórico previo por algunos de los problemas y tópicos más significativos empleando la Teoría de Lie. Posteriormente analizaremos con más detalle algunos de estos trabajos y conceptos.

En primer lugar, queremos enfatizar el trabajo de Lo y Hui (2001, 2002), quienes estudiaron la valoración de derivados financieros y, más concretamente, de derivados multiactivos introduciendo diversas técnicas basadas en las álgebras de Lie. Previamente, Lo y Hui (2000a, 2000b) ya emplearon la Teoría de Lie para estudiar ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes dependientes del tiempo, modelos CEV (siglas en inglés de *elasticidad constante de varianza*) y opciones con barrera.

Independientemente, y empleando igualmente las álgebras de Lie, Björk y Landén (2002) hicieron un estudio para diversos modelos de tasa de interés, modelos introducidos previamente por el propio Björk (2001). Posteriormente, Polidoro (2003) realizó un estudio sobre un problema financiero correspondiente a la toma de decisiones bajo riesgo por parte de los agentes en el marco de la teoría de las funciones de utilidad¹. Para su estudio, empleó un tipo especial de grupos de Lie: los denominados *nilpotentes*.

Otra interesantísima aplicación de la Teoría de Lie a la Economía es la introducida por Basov (2004). Este describió algunos métodos basados en las propiedades de los grupos de Lie, para resolver el problema de *screening* multidimensional. También queremos resaltar el estudio realizado por Gaspar (2006), quien obtuvo un modelo general para la estructura de los precios a plazos basándose en la metodología dada por Björk y aplicando las álgebras de Lie. De hecho,

¹ El tratamiento del problema económico-financiero estudiado por Polidoro (2003) fue analizado críticamente en Hernández *et al.* (2008).

Björk (2001, 2004) estudió cómo las álgebras de Lie podían emplearse en el tratamiento de problemas referentes a volatilidades constantes y otros conceptos derivados de estas.

También deben reseñarse las aportaciones de Sato (1980, 1981, 1998) a la aplicación de la Teoría de Lie en el estudio de los progresos técnicos y los efectos a escalas. De hecho, Sato llegó a introducir un nuevo concepto, denominado *holoteticidad*, para poder determinar cuándo los efectos a escala podían diferenciarse por completo de los efectos producidos por los progresos técnicos. Es más, también tuvo que definir un nuevo tipo de progresos técnicos, los denominados *de tipo Lie*, consistentes en poseer también una estructura de grupo de Lie uniparamétrico. Para un estudio crítico del trabajo de Sato (tanto en relación a los conceptos como a las técnicas empleadas), recomendamos al lector consultar Fedriani y Tenorio (2006). En dicha referencia también se indicaban algunas incorrecciones o ambigüedades cometidas por Sato y se mostraban algunos de los problemas aún abiertos en relación con la invariancia económica (y en los que puede aplicarse la Teoría de Lie). Para ver un análisis de diversas aplicaciones de los grupos y álgebras de Lie a otros problemas económicos y financieros tratados en la literatura reciente, recomendamos el trabajo de Hernández *et al.* (2008).

El presente artículo persigue completar este último estudio citado y analizar críticamente otras dos aplicaciones de la Teoría de Lie a las Finanzas. Tras la lectura de este artículo, esperamos que la Teoría de Lie pueda ser vista como un recurso metodológico más para la investigación en Economía y Finanzas (en nuestra opinión, sumamente interesante y muy innovadora, pese al desconocimiento de su aplicabilidad). Finalmente, expondremos algunos avances y líneas futuras de investigación en la aplicación de la Teoría de Lie a la Economía y las Finanzas.

2. ALGUNAS NOCIONES ECONÓMICAS Y FINANCIERAS

En la presente sección, recordaremos y explicaremos los términos económicos y financieros que aparecen a lo largo del presente texto, para facilitar el seguimiento del mismo al lector poco habituado a ellos.

Se denomina *derivado financiero*² a cualquier producto financiero cuyo valor está basado en el precio que posee un determinado activo³. Consisten en operaciones hipotéticas cuya liquidación se realiza mediante la diferencia existente entre el precio de mercado del activo y el precio pactado en la operación hipotética. En vista de su definición, el posible catálogo de derivados financieros no está delimitado, ya que cualquier operación financiera podría dar lugar a un derivado financiero.

² En algunas referencias aparece con la denominación de *instrumento derivado*.

³ El activo del que depende el valor del derivado financiero se denomina *activo subyacente*.

En su origen, los derivados financieros tenían como función eliminar o reducir las consecuencias adversas producidas por cambios desfavorables en el activo sobre el que se define el derivado (es decir, eliminar el riesgo en las operaciones financieras). Hoy en día no solo tienen ese uso, sino que también se emplean como un producto financiero basado en la especulación con los precios del activo.

Existen también los denominados *derivados financieros multiactivos*, consistentes en productos financieros cuyo valor se basa en el precio que poseen varios activos (y no solamente uno como ocurría en el caso anterior).

En el presente artículo trataremos concretamente con uno de los más conocidos derivados financieros: las denominadas *opciones*. Se denomina *opción* al derecho a comprar o vender un activo en el futuro a un precio pactado. Debe tenerse en cuenta que, al comprar una opción, el comprador paga una prima por disfrutar del derecho adquirido, mientras que el vendedor cobra dicha prima. Por tanto, se realiza una transacción en el instante de la contratación de la opción⁴. Debe tenerse en cuenta que también pueden considerarse opciones multiactivos, en las que el derecho de compra o venta no se limita a un único activo, sino a varios.

Existen dos tipos de opciones estándar: las opciones de *estilo americano* y las de *estilo europeo*. Las primeras son aquellas en las que puedes ejercer tu derecho de compra-venta en cualquier momento anterior a la fecha de vencimiento del contrato; mientras que en las segundas solo puedes ejercer dicho derecho en la fecha de vencimiento. Cualquier otro tipo de opción se denomina *exótica*. Un caso particular de opciones exóticas son las opciones con barreras. Se denomina *opción con barrera*⁵ a toda opción cuya cancelación o activación depende del valor alcanzado durante un período de tiempo determinado por el precio del activo subyacente. Este valor será independiente del valor del activo en la fecha de vencimiento de la opción. Es decir, la activación o cancelación de la opción depende de que el precio del activo alcance unos determinados valores umbrales (de ahí la denominación de opciones con barrera).

Son varios los tipos de opciones con barreras existentes, dependiendo de los umbrales que le pongamos al valor del activo. Seguidamente indicamos los principales tipos y subtipos de opciones con barrera:

1. Opciones con barrera *de entrada (knock-in)*: la opción pasa a activarse y a ser estándar si el precio del activo subyacente alcanza el valor fijado en la barrera durante el período acordado.

⁴ Existe otro derivado financiero, denominado *futuro*, en el que solo se realiza un compromiso de compra-venta de un activo pero no se realiza ninguna transacción en el momento de su contratación.

⁵ También se las denomina *opción tipo barrera*.

- a. Opciones *abajo y de entrada (down-in)*: la barrera se fija por debajo del precio inicial del activo, activándose la opción cuando el precio llega a ser inferior a la barrera.
 - b. Opciones *arriba y de entrada (up-in)*: la barrera se fija por encima del precio inicial del activo, activándose la opción cuando el precio es superior a la barrera.
2. Opciones con barrera *de salida (knock-out)*: la opción deja de existir o expira sin valor cuando se alcanza el valor fijado en la barrera para el precio del activo.
- a. Opciones *abajo y de salida (down-out)*: la barrera se fija por debajo del precio inicial del activo, expirando la opción cuando el precio llega a ser inferior a la barrera.
 - b. Opciones *arriba y de salida (up-out)*: la barrera se fija por encima del precio inicial del activo, expirando la opción cuando el precio llega a ser superior a la barrera.

Teniendo en cuenta lo anterior, las opciones con barrera pueden contratarse de tal modo que la barrera sea doble (es decir, que sea arriba y abajo a la vez) e incluso puede establecerse una barrera móvil, que vaya ajustándose durante toda la vida de la opción hasta alcanzar la fecha de vencimiento.

Cualquier producto financiero (incluidas las opciones) presenta la problemática de la fijación de precios. En la fijación de precios, la empresa debe considerar tanto las necesidades del mercado hacia el producto ofertado como el proceso productivo (con sus costes y objetivos de rentabilidad). Es decir, cuando se fijan los precios, la empresa busca obtener el máximo beneficio posible, para lo que debe buscar el equilibrio entre elegir un precio “competitivo” (más fácil de vender) y un precio que permita unos márgenes más amplios. Frecuentemente se busca realizar el mayor número de ventas posibles (para que los ingresos sean apropiados), pero es obvio que no deben establecerse los precios de los productos sin tener en cuenta el coste, ya que este es un dato objetivo e importante del que suele disponer el empresario, mientras que los datos correspondientes a la demanda no son siempre tan fáciles de conocer o determinar y, además, esta facilidad depende del producto, concretamente de su elasticidad. No obstante, los productos financieros no siguen exactamente el mismo proceso que los productos (o servicios) de empresas no financieras y presentan características particulares. Así, por ejemplo, en los productos de renta fija el precio se marca por subasta pública, mientras que en los productos de renta variable el precio lo marca el mercado.

A la hora de determinar los precios de un producto financiero (en nuestro caso, de las opciones), suele considerarse el modelo CEV. Este modelo, introducido por Cox (1975),

extiende el de Black-Scholes para la fijación de precios e introduce la posibilidad de considerar una volatilidad estocástica. En el modelo CEV, se supone que el precio $S(t)$ del activo sigue el siguiente proceso de difusión⁶ en función del tiempo t :

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)^{\beta/2} dZ(t),$$

donde $\mu(t)$ es el parámetro que indica la tasa de crecimiento⁷, $\sigma(t)$ es el parámetro de volatilidad⁸, β es el parámetro que determina la elasticidad de la función de volatilidad local y $Z(t)$ es un proceso de Wiener⁹. Debe tenerse en cuenta que el parámetro β suele elegirse en el intervalo $[0,2)$, porque es en tales casos en los que se puede asegurar alguna significación económica. Más concretamente, en dicho escenario, la volatilidad aumentará a medida que el precio del activo decrezca (Lu y Hsu, 2005). En el caso $\beta = 2$, estaríamos ante un movimiento Browniano estándar y, más concretamente, ante el modelo Black-Scholes.

Al exponer el modelo CEV, hemos nombrado el término *volatilidad*. Este es un término perteneciente al ámbito de los procesos estocásticos, siendo usado en Finanzas para medir el riesgo de un derivado financiero en un determinado período de tiempo. Más concretamente, la volatilidad mide la desviación estándar que presentan los cambios de valor de un determinado derivado financiero en un horizonte temporal específico. La volatilidad suele medirse tomando como periodo temporal un año completo; en caso de considerar un período de tiempo distinto a un año, estamos ante una volatilidad generalizada.

Lo usual es considerar un modelo con volatilidad constante durante toda la vida del derivado considerado. En consecuencia, no influiría ninguno de los cambios existentes en el precio del activo. Es por este motivo que se consideran procesos en los que la volatilidad no es constante, sino que ella misma es un proceso estocástico. Esta opción permite modelizar más correcta y rentablemente los derivados financieros.

A continuación, pasamos a tratar las nociones de efecto a escala y de cambio técnico en una economía dada. Consideramos una economía en la que K y L representan el capital y la mano de obra, respectivamente. Dicha economía se representa mediante una función de

⁶ Un proceso de difusión es cualquier solución de una ecuación diferencial estocástica; es decir, un proceso de Markov que depende continuamente del tiempo y con caminos parciales continuos.

⁷ Se denomina *coeficiente de tendencia* del proceso de difusión al producto $\mu(t)S(t)$.

⁸ Se denomina *coeficiente de difusión* del proceso al producto $\sigma(t)S(t)^{\beta/2}$.

⁹ Un *proceso de Wiener* es un proceso estocástico dependiendo continuamente del tiempo. El ejemplo más conocido de proceso de Wiener es el movimiento Browniano. Para una explicación de los procesos de Wiener y su funcionamiento, recomendamos a Karatsas y Shreve (1997).

producción neoclásica¹⁰ $Y = f(K, L)$, que sea continuamente diferenciable y globalmente quasi-cóncava¹¹. La función de producción anterior no siempre se mantiene constante, sino que sufre modificaciones a lo largo del tiempo. Dichas modificaciones pueden deberse bien a variaciones en el capital bien a mejoras en la investigación. Los conceptos empleados en Economía para representar estos cambios son el de *cambio técnico* y el más restrictivo de *progreso técnico*.

Por *cambio técnico* entendemos cualquier cambio en la función de producción que altera la relación entre consumos y producciones. El cambio técnico se denomina *progreso técnico* si la producción aumenta para cualquier consumo, con respecto al obtenido antes del cambio. Al introducirse un cambio técnico en una economía, la función de producción f se supone que no varía, pero sí lo hacen los niveles de producción. Por tanto, la función de producción tras el cambio técnico pasaría a expresarse como $\bar{Y} = \bar{f}(K, L, t)$, donde t es el parámetro de progreso técnico e \bar{Y} es la producción para el capital K y la mano de obra L tras el progreso técnico.

Para denotar un progreso técnico con parámetro t , suele emplearse la notación:

$$T_t : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2 \\ (K, L, t) \mapsto \bar{Y} = \bar{f}(K, L, t)$$

En caso de que no haya lugar a confusión con respecto al parámetro, el progreso técnico puede denotarse exclusivamente por T .

El progreso técnico puede definirse también como la variación de la economía en las necesidades del capital y de la mano de obra tras dicho progreso. Para ello, se emplea el concepto de *funciones ϕ y ψ de progreso técnico* de K y L , que combinan los dos factores mediante el parámetro de progreso técnico t :

$$T_t : \bar{K} = \phi(K, L, t), \quad \bar{L} = \psi(K, L, t).$$

Las variables \bar{K} y \bar{L} se denominan *capital efectivo* y *mano de obra efectiva*, respectivamente. Las funciones ϕ y ψ deben suponerse analíticas y reales respecto de las tres

¹⁰ Una función de producción $Y = f(K, L)$ se dice *neoclásica* si es homogénea de grado 1 (rendimiento a escala constante) y disminuye suavemente respecto de los factores individuales. Recuérdese que $Y = f(K, L)$ se dice que *disminuye suavemente respecto a un factor individual* si al aumentar uno de los factores de la producción, permaneciendo los demás constantes, las ganancias globales decrecen relativamente a partir de un cierto punto.

¹¹ Sea $f : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ una función diferenciable, al menos, hasta orden 2 y sea $\bar{a} \in \text{Dom}(f)$. La función f es quasi-cóncava en \bar{a} si y solo si la matriz hessiana de f en \bar{a} , $Hf(\bar{a})$, es semidefinida negativa.

variables (i.e. K , L y t). Además, las funciones ϕ y ψ son independientes respecto de las variables K y L ; es decir, se verifica la siguiente condición:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial K} & \frac{\partial \phi}{\partial L} \\ \frac{\partial \psi}{\partial K} & \frac{\partial \psi}{\partial L} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Al satisfacerse la condición anterior, puede aplicarse el Teorema de la Función Implícita¹² a la función vectorial $T = (\phi, \psi)$, formada por las dos funciones de progreso técnico, menos la función vectorial constante consistente en (\bar{K}, \bar{L}) . De este modo, podemos despejar las variables K y L en función de las variables \bar{K} y \bar{L} (pudiendo conocer las necesidades de capital y mano de obra tras el progreso técnico).

Sea la función de producción f y el progreso técnico T definido por (ϕ, ψ) . Se dice que f es una función *holotética* bajo el progreso técnico T si el efecto total del progreso técnico T sobre f puede ser representado por una función F estrictamente monótona. Esta condición puede expresarse como:

$$\bar{Y} = \bar{f}(K, L, t) = f(\bar{K}, \bar{L}) = f(\phi(K, L, t), \psi(K, L, t)) = g(f(K, L), t) = F_t(Y).$$

Para el estudio de la holoteticidad de una función de producción, es conveniente que el progreso técnico considerado satisfaga las tres propiedades de un grupo de Lie uniparamétrico:

1. Propiedad GL1: $T_t + T_{t'} = T_{t+t'}$, siendo:

$$T_t : \begin{cases} \bar{K} = \phi(K, L, t) \\ \bar{L} = \psi(K, L, t) \end{cases} \quad T_{t'} : \begin{cases} \bar{K} = \phi(K, L, t') \\ \bar{L} = \psi(K, L, t') \end{cases} \quad T_{t+t'} : \begin{cases} \bar{K} = \phi(K, L, t+t') \\ \bar{L} = \psi(K, L, t+t') \end{cases}$$

2. Propiedad GL2: $T_t^{-1} = T_{-t}$, siendo:

$$T_{-t} : \begin{cases} \bar{K} = \phi(K, L, -t) \\ \bar{L} = \psi(K, L, -t) \end{cases}$$

3. Propiedad GL3: $T_0 : \begin{cases} \bar{K} = \phi(K, L, 0) = K \\ \bar{L} = \psi(K, L, 0) = L \end{cases}$

¹² Teorema de la Función Implícita: Sean $f : \mathfrak{R}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{R}^m$ una función continuamente diferenciable definida como $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$ y un punto $(\vec{a}, \vec{b}) \in \mathfrak{R}^{n+m}$, tal que $f(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Si la matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\vec{a}, \vec{b}) \right)_{i,j}$ tiene determinante no nulo, entonces existen un entorno U de \vec{a} , otro V de \vec{b} y una única función $g : U \rightarrow V$ tal que $\vec{y} = g(\vec{x})$.

Cualquier progreso técnico T que satisfaga las propiedades GL1 a GL3 se denomina *progreso técnico de tipo Lie*. Suponiendo que el parámetro t representa el año en el que ocurre el progreso técnico, el capital efectivo \bar{K} y la mano de obra efectiva \bar{L} corresponden, respectivamente, al capital y mano de obra existentes en ese año. En consecuencia, las propiedades GL1 a GL3 se pueden interpretar como siguen:

- Propiedad GL1: si el capital y la mano de obra disponibles en los años t y t' se expresan con las funciones ϕ y ψ dependientes de los valores del capital y la mano de obra del año previo, el capital y la mano de obra existentes en cualquier momento pueden obtenerse mediante sumas del tipo $t+t'$. De este modo, conocida la variación del capital y de la mano de obra en el primer año (i.e. $t=1$), se obtiene la de cualquier año n considerando $n = \sum_{i=1}^n 1$.
- Propiedad GL2: el capital y la mano de obra en el momento inicial se obtienen a partir de las funciones de progreso técnico y empleando el parámetro $-t$.
- Propiedad GL3: el capital y la mano de obra iniciales son iguales a los efectivos si no tiene lugar el progreso técnico.

Debe tenerse en cuenta que no es ningún problema el suponer estas tres hipótesis en los progresos técnicos. Sato (1981) observó que todas las funciones de progreso técnico utilizadas en Economía verificaban las tres propiedades anteriores, con lo que tales hipótesis no son restrictivas (véase Fedriani y Tenorio (2006), para una detallada explicación de la aplicación hecha por Sato sobre los grupos uniparamétricos a la Economía y su fundamentación teórica).

De hecho, puede demostrarse que todos los tipos de progreso técnico anteriormente considerados pertenecen a los denominados *progresos técnicos de tipo proyectivo*. Estos últimos progresos técnicos son aquellos que se obtienen mediante la integración de una transformación infinitesimal asociada a un grupo de Lie proyectivo.

En una economía, los *efectos a escala* conllevan que los incrementos debidos a la dotación en la mano de obra y en el capital de la economía llevan a tasas de crecimiento de la productividad más alta o más bajas. Pueden considerarse tres tipos de efectos de escala:

1. *Rendimientos a escala constantes*: el incremento de mano de obra y capital conlleva un incremento proporcional de la productividad.
2. *Rendimientos a escala crecientes*: el incremento de mano de obra y capital conlleva un incremento de la productividad superior al proporcional.

3. *Rendimientos a escala decrecientes*: el incremento de mano de obra y capital conlleva un incremento inferior de la productividad.

Finalizamos la presente sección de preliminares explicando en qué consisten los problemas de *screening*. En un gran número de empresas, los aranceles no suelen ser proporcionales a las cantidades compradas; es decir, los aranceles suelen representarse de manera no lineal. La fijación no lineal de precios se basa en la existencia de información privada por parte de los consumidores; aunque esta información privada podría capturarse, en principio, asumiendo un número finito de tipos o un continuo 1-dimensional de tipos. No obstante, para especificar el pago, suele ser conveniente considerar una función de varias características (i.e. variables). Además, cada uno de los diferentes clientes puede evaluar de manera diferente cada una de estas características. Por tanto, el tipo de los clientes (con sus evaluaciones para cada una de las características) no puede determinarse, por tanto, mediante una característica de dimensión 1. Esta situación es la que hace plantearse los problemas de *screening* multidimensional

La formulación general de este tipo de problemas se debe a Armstrong (1996) y a Wilson (1993). Estos consideraron un monopolio que producía n bienes con una función de costes convexa. Las preferencias de un consumidor sobre los bienes producidos se parametrizaban mediante un vector m -dimensional. Los tipos de consumidores existentes se distribuyen siguiendo una función de densidad continuamente diferenciable definida sobre un conjunto convexo y acotado de \mathfrak{R}^m , siendo la función de densidad extensible por continuidad a la clausura de su dominio. Al monopolista le interesa maximizar sus beneficios mediante la elección de un arancel, que es una función del conjunto de paquetes de bienes a la recta real. De este modo, el arancel determina cuánto pagará un consumidor por un particular paquete de bienes. La formulación dada por Armstrong consideraba m preferencias y n bienes, obteniéndose una solución para algunos casos especiales. Para ello, supuso que las preferencias de los consumidores venían determinada por una función de utilidad que va aumentando en todos sus argumentos y que es continua, convexa y homogénea de grado 1. Posteriormente, el propio Armstrong y otros autores han continuado el estudio de la determinación de los aranceles en el ámbito del problema de *screening*.

3. APLICACIONES EMPÍRICAS DE PROGRESOS TÉCNICOS DE TIPO LIE

Como se ha indicado previamente, Sato (1980, 1981) introdujo el concepto de holoteticidad para poder distinguir los efectos a escala de los correspondientes al progreso técnico. Esta distinción de efectos fue un problema bastante importante y ampliamente discutido en la literatura económica, surgido en 1961 ante la discusión entre Solow (1961) y Stigler (1961). Fue Sato quien determinó las condiciones bajo las cuales ambos efectos son distinguibles por

separado. Tales condiciones fueron las que Sato modelizó en la definición de holoteticidad y de función de producción holotética bajo un progreso técnico de tipo Lie. Para más detalles sobre todo el planteamiento de Sato y la base matemática subyacente a dichos conceptos, recomendamos la revisión hecha por Fedriani y Tenorio (2006).

En sus trabajos, Sato definió y trató las funciones de progreso técnico de tipo proyectivo. Este tipo de progresos técnicos le permitía trabajar con todos los tipos utilizados habitualmente en la literatura económica. Pero dejó sin aclarar lo que pasaba con otros casos especiales de progresos técnicos proyectivos y cómo podían incorporarse estos a un modelo tradicional sobre el comportamiento del productor.

Mitchell (1987) buscó identificar aquellos casos especiales de progresos técnicos proyectivos (introducidos por Sato) que fuesen grupos uniparamétricos de transformaciones y que, además, pudiesen incorporarse a los modelos estándar de producción para medir cuál era el progreso técnico no absorbido como un efecto escala en la función de producción. Mitchell basó su trabajo en un modelo económico de producción con dos *inputs* y teniendo como resultado la producción de un único bien. Expresó esos factores como un vector real $\vec{x} = (x_1, x_2)$, de coordenadas no negativas, y supuso que el progreso técnico era exógeno. Esta última suposición conllevaba que los efectos del cambio técnico no afectarían a la expresión matemática de la función de producción y que el proceso de producción se produciría tras cualquier alteración en la productividad por parte de los factores productivos.

Si T es el progreso técnico considerado, este viene determinado por sus funciones de progreso técnico¹³ ϕ_1 y ϕ_2 , que representan la transformación de los factores nominales x_1 y x_2 (i.e. los valores existentes antes del cambio técnico) en los factores efectivos x_1' y x_2' , respectivamente. Por tanto, Mitchell expresó matemáticamente el progreso técnico T como sigue:

$$x' = (x_1', x_2') = [\phi_1(\vec{x}; \vec{a}), \phi_2(\vec{x}; \vec{a})] = \phi(\vec{x}; \vec{a}), \quad \vec{a} \in \mathfrak{R}^r, \quad (1)$$

teniendo en cuenta que $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ es un vector real r -dimensional que registra los cambios que acontecen bajo la acción de dicho progreso. Precisamente, el vector \vec{a} suele denominarse *vector de parámetros del progreso técnico*, siendo esta la nomenclatura que usa el propio Mitchell.

Para definir el progreso técnico que le interesa utilizar a Mitchell, es necesario que las funciones de progreso técnico satisfagan las propiedades de un grupo de Lie multiparamétrico de transformaciones (en este caso, r -paramétrico). Dichas propiedades son las siguientes:

¹³ La noción de *funciones del progreso técnico* fue explicada ampliamente en la Sección 2 del presente artículo, aunque solo se consideraba un parámetro de progreso técnico y no un vector de parámetros.

Propiedad 1 (elemento unidad): si no hay cambios debidos al progreso técnico, los factores efectivos tras el progreso técnico deben coincidir con los factores nominales. Matemáticamente, implica la existencia del vector $\vec{a}_0 = (0, \dots, 0) \in \mathfrak{R}^r$ y que las funciones de progreso técnico satisfagan la siguiente propiedad:

$$\vec{x}' = \phi(\vec{x}; \vec{a}_0) = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathfrak{R}^+ \times \mathfrak{R}^+$$

Propiedad 2 (operación composición): el cálculo de los factores efectivos tras dos progresos técnicos sucesivos puede realizarse calculando los factores efectivos tras un único progreso técnico, cuyo vector de parámetros de progreso técnico es una expresión funcional de los vectores de parámetros correspondientes a los progresos técnicos de partida. Matemáticamente, dados dos vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathfrak{R}^r$ de parámetros de progreso técnico, los factores efectivos \vec{x}'' (obtenidos tras aplicar consecutivamente los dos progresos técnicos) vendrían dados por la aplicación de un único progreso técnico determinado por un vector de parámetros $\vec{a}_3 \in \mathfrak{R}^r$; es decir, mediante la expresión siguiente:

$$\vec{x}' = \phi(\vec{x}; \vec{a}_1) \quad \text{y} \quad \vec{x}'' = \phi(\vec{x}'; \vec{a}_2) = \phi[\phi(\vec{x}; \vec{a}_1); \vec{a}_2] = \phi(\vec{x}; \vec{a}_3),$$

donde $\vec{a}_3 \in \mathfrak{R}^r$ es un vector que depende única y exclusivamente de los parámetros \vec{a}_1 y de \vec{a}_2 (i.e. $\vec{a}_3 = f(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, con $f : \mathfrak{R}^r \times \mathfrak{R}^r \rightarrow \mathfrak{R}^r$).

Propiedad 3 (elemento inverso): para cada vector de parámetros del progreso técnico $\vec{a}_1 \in \mathfrak{R}^r$, existe un segundo vector de parámetros $\vec{a}_2 \in \mathfrak{R}^r$ tal que los progresos técnicos generados por \vec{a}_1 y \vec{a}_2 se compensan recíprocamente uno con el otro; es decir:

$$\phi[\phi(\vec{x}; \vec{a}_1); \vec{a}_2] = \vec{x} = \phi[\phi(\vec{x}; \vec{a}_2); \vec{a}_1], \quad \forall \vec{x} \in \mathfrak{R}^+ \times \mathfrak{R}^+$$

Debe tenerse en cuenta que, la existencia del vector \vec{a}_0 en la Propiedad 1 y la definición de la función f de la Propiedad 2, implica que $f(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \vec{a}_0$.

Como ya se comentó en la Sección 2, la literatura suele considerar progresos técnicos verificando las tres propiedades anteriores y exigiendo que $r=1$ (i.e. lo que se denomina matemáticamente un grupo uniparamétrico). Por tanto, el progreso técnico presenta un único parámetro t , que representa el instante en que acontece dicho progreso.

En concreto, Mitchell estudia las funciones de progreso técnico denominadas *de tipo proyectivo*, las cuales fueron introducidas y definidas por Sato (1981) y con la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}
x_1' &= \phi_1(\bar{x}; t) = \frac{\exp(a_3 t) x_1 + (a_5 x_2 + a_1) \cdot t}{1 - (a_7 x_1 + a_8 x_2) \cdot t}, \\
x_2' &= \phi_2(\bar{x}; t) = \frac{\exp(a_6 t) x_2 + (a_4 x_1 + a_2) \cdot t}{1 - (a_7 x_1 + a_8 x_2) \cdot t},
\end{aligned} \tag{2}$$

donde $a_i \in \mathfrak{R}$ para $i=1,2,\dots,8$ y t es el único parámetro de progreso técnico. Para aplicaciones empíricas de este modelo, interesaría que la función de progreso técnico $\phi(\bar{x}; t)$ satisficiera las propiedades de grupo uniparamétrico y, de este modo, aplicar los resultados de Sato para diferenciar los efectos a escala de los efectos debidos al progreso técnico. Desafortunadamente, la Propiedad 2, referente a la composición de progresos técnicos, no es satisfecha por la expresión de la función de progreso técnico $\phi(\bar{x}; t)$, dada en (2).

Pese a esta contrariedad, Mitchell planteó una forma de esquivar el incumplimiento de la Propiedad 2 de grupo uniparamétrico. Supuso que en la ecuación (2) se cambiaba $a_i \cdot t$ por una función $a_i = a_i(t)$, para $i=1,\dots,8$. De este modo, se pasaba a tener un grupo 8-paramétrico en los que los ocho parámetros de progreso técnico formaban un vector $\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_8(t))$. Aunque podrían usarse las técnicas de Eisenhart (1933) para colapsar el número de parámetros de progreso técnico y obtener grupos uniparamétricos $\phi[x; a(t)] = \psi(x; t)$, Mitchell abogó por utilizar técnicas que lleven a parametrizaciones triviales en (2) que permitan verificar la Propiedad 2 de grupo uniparamétrico. Es por ello que busca la siguiente solución: consideró qué pasaría si a_1, \dots, a_8 eran constantes arbitrarias (*a priori*, no nulas) y se imponía que algunas de dichas constantes a_i fuesen iguales a 0.

En primer lugar, Mitchell supuso que solo una constante no se anula, con lo que quedan ocho posibles casos satisfaciendo las propiedades de grupo:

$$x_1' = x_1 + a_1 t, \quad x_2' = x_2, \tag{3}$$

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2 + a_2 t, \tag{4}$$

$$x_1' = \exp(a_3 t) x_1, \quad x_2' = x_2, \tag{5}$$

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2 + a_4 x_1 t, \tag{6}$$

$$x_1' = x_1 + a_5 x_2 t, \quad x_2' = x_2, \tag{7}$$

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = \exp(a_6 t) x_2, \tag{8}$$

$$x_1' = x_1 / (1 - a_7 x_1 t), \quad x_2' = x_2 / (1 - a_7 x_1 t), \tag{9}$$

$$x_1' = x_1 / (1 - a_8 x_2 t), \quad x_2' = x_2 / (1 - a_8 x_2 t), \tag{10}$$

La segunda opción consistía en permitir que dos de las constantes no se anulen. Son once los casos adicionales que se obtienen:

$$\dot{x}_1 = x_1 + a_1 t, \quad \dot{x}_2 = x_2 + a_2 t, \quad (11)$$

$$\dot{x}_1 = x_1 + (a_5 x_2 + a_1) t, \quad \dot{x}_2 = x_2, \quad (12)$$

$$\dot{x}_1 = x_1 + a_1 t, \quad \dot{x}_2 = \exp(a_6 t) x_2, \quad (13)$$

$$\dot{x}_1 = \exp(a_3 t) x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2 + a_2 t, \quad (14)$$

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2 + (a_4 x_1 + a_2) t, \quad (15)$$

$$\dot{x}_1 = \exp(a_3 t) x_1, \quad \dot{x}_2 = \exp(a_6 t) x_2, \quad (16)$$

$$\dot{x}_1 = \exp(a_3 t) x_1 / (1 - a_8 x_2 t), \quad \dot{x}_2 = x_2 / (1 - a_8 x_2 t), \quad (17)$$

$$\dot{x}_1 = x_1 / (1 - a_7 x_1 t), \quad \dot{x}_2 = (x_2 + a_4 x_1 t) / (1 - a_7 x_1 t), \quad (18)$$

$$\dot{x}_1 = (x_1 + a_5 x_2 t) / (1 - a_8 x_2 t), \quad \dot{x}_2 = x_2 / (1 - a_8 x_2 t), \quad (19)$$

$$\dot{x}_1 = x_1 / (1 - a_7 x_1 t), \quad \dot{x}_2 = \exp(a_6 t) x_2 / (1 - a_7 x_1 t), \quad (20)$$

$$\dot{x}_1 = x_1 / [1 - (a_7 x_1 + a_8 x_2) t], \quad \dot{x}_2 = x_2 / [1 - (a_7 x_1 + a_8 x_2) t], \quad (21)$$

Finalmente, Mitchell concluía su artículo con la siguiente afirmación: cualquier investigación empírica sobre las fuentes del progreso técnico debía buscar la identificación de aquellos tipos de progreso técnico que no pueden ser absorbidos por la función de producción mediante efectos a escala. El listado de Mitchell incluye un amplio número de modelos de progreso de tipo Lie (i.e. verificando las propiedades de grupo uniparamétrico), muchos de los cuales no han sido empleados aún en estudios empíricos relativos a la Economía. En cualquier caso, dicho listado no es exhaustivo y creemos que sería de interés obtener un listado completo que permitiese determinar todos los modelos válidos para tratamientos empíricos.

4. TEORÍA DE LIE Y FIJACIÓN DE PRECIOS PARA OPCIONES CON BARRERA MÓVIL Y CON PARÁMETROS TEMPORALES

A principios del presente siglo, Lo y Hui (2001, 2002) presentaron una metodología basada en las álgebras de Lie, que permitía fijar el precio de diferente derivados financieros con parámetros dependientes del tiempo. La presente sección muestra el siguiente paso en la investigación de dichos autores, aplicando la metodología anterior al problema de la fijación de precios de las opciones con barrera móvil (Lo y Hui, 2006). La metodología anteriormente indicada aplicaba como fundamentación teórica el Teorema de Wei-Norman (Wei y Norman, 1963) y que nunca se había aplicado al campo de las Finanzas. Lo y Hui ajustan y aplican este modelo basado en las álgebras de Lie al problema de la evaluación de las opciones con barrera móvil y con parámetros dependientes del tiempo. Para realizar dicha evaluación, supusieron que el valor del activo subyacente sigue el siguiente proceso de difusión CEV (puede ser conveniente recordar aquí lo visto en la Sección 2):

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)^{\beta/2} dZ(t), \quad 0 \leq \beta < 2 \quad (22)$$

donde $\mu(t)$ es la media del precio de las acciones en el instante t , $\sigma(t) \cdot S(t)^{\beta/2}$ es la varianza instantánea de dicho precio, $dZ(t)$ es un proceso de Wiener y β es el factor de elasticidad.

Partiendo de la ecuación (22), la varianza instantánea del cambio porcentual en el precio se define como $\sigma(t)^2 / S(t)^{2-\beta}$, siendo además una función inversa directa del precio de las acciones. Lo y Hui usaron sus métodos previos basados en álgebras de Lie y derivaron los núcleos analíticos de las fórmulas de fijación de precios para las opciones con barrera móvil y parámetros dependientes del tiempo: tanto las de tipo *up-and-out* como las de tipo *down-and-out*. De hecho, empleando el principio del máximo para ecuaciones parabólicas en derivadas parciales (dado por Friedman, 1964), la aproximación y metodología propuesta por Lo y Hui podía aplicarse para dar muy estrictamente las cotas superiores e inferiores de los precios exactos de las opciones CEV con barreras fijas. Posteriormente, De Sanctis (2007) presentó una revisión sobre los trabajos relativos a la fijación de precios de derivados financieros con parámetros dependientes del tiempo. En dicha revisión, se explicaba cómo se fijarían los precios empleando tanto la ecuación de Black-Scholes como el modelo CEV¹⁴. En las conclusiones de su artículo, De Sanctis indica que las soluciones obtenidas por Lo y Hui pertenecen a un subespacio de funciones invariantes bajo la acción del grupo de Lie que está asociado de manera natural al álgebra de Lie que usan Lo y Hui para resolver la ecuación. También comenta la existencia de diversos resultados que permitirían describir algebraicamente dichos subespacios de funciones, con lo que la ecuación en derivadas parciales de partida podría reducirse a un conjunto de ecuaciones algebraicas¹⁵. Centrándonos en las expresiones y cálculos matemáticos, Lo y Hui (2006) partieron de la ecuación diferencial de operador lineal de primer orden:

$$\frac{dU(t)}{dt} = H(t)U(t) \quad ; \quad U(0) = 1 \quad (23)$$

donde H y U eran operadores lineales dependientes del tiempo en un espacio de Banach o uno de dimensión finita. El Teorema de Wei-Norman determina la expresión que tienen las soluciones de la ecuación (23) en un entorno del instante inicial $t = 0$. Dicho Teorema solo exigía como hipótesis que el operador H pudiese escribirse como combinación lineal de los elementos de una base de un álgebra de Lie de dimensión finita; es decir, que pudiese escribirse como sigue:

$$H(t) = \sum_{n=1}^N a_n(t)L_n, \quad (24)$$

¹⁴ Para este último modelo, De Sanctis repite todos los cálculos previamente realizados por Lo y Hui (2006).

¹⁵ No obstante, no se explicitan ni se comentan cuáles son los resultados a los que se hace referencia ni se concreta cómo se pasaría de la ecuación en derivadas parciales al sistema de ecuaciones algebraicas.

siendo a_n funciones escalares dependientes del tiempo y L_n los elementos en una base de un álgebra de Lie resoluble N -dimensional o generadores del álgebra de Lie simple real desplegada de dimensión 3. Bajo esta hipótesis, el Teorema de Wei-Norman afirma que el operador U de la expresión (23) es expresable en un entorno de $t = 0$ de la siguiente forma:

$$U(t) = \prod_{n=1}^N \exp[g_n(t)L_n] \quad (25)$$

siendo g_n funciones escalares dependientes de la variable t y a determinar *a posteriori*. Lo y Hui dan un ejemplo en el que calculan dichas funciones g_n , lo cual hacen sustituyendo la ecuación (25) en la (23) y comparando dicho resultado con la expresión (22), término a término. De este modo, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dg_n(t)}{dt} = \sum_{m=1}^N \eta_{nm} a_m(t), \quad g_n(0) = 0 \quad (26)$$

donde η_{nm} son funciones no lineales de las g_n . El procedimiento anterior les permitía a Lo y Hui reducir la ecuación diferencial (22) al conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales dado en (26), cuya resolución es más sencilla.

Si se aplica todo lo anterior a las opciones CEV europeas estándares con parámetros dependientes del tiempo, se escribiría la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial P(S, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma(\tau)^2 S^\beta \frac{\partial^2 P(S, \tau)}{\partial S^2} + [r(\tau) - d(\tau)] S \frac{\partial P(S, \tau)}{\partial S} - r(\tau) P(S, \tau) \quad (27)$$

para $0 \leq \beta < 2$. En esta ecuación¹⁶, P es el valor de la opción, S es el precio del activo subyacente, τ es el tiempo al vencimiento, σ es la volatilidad, r es la tasa de interés libre de riesgo y d son los dividendos generados. La ecuación (27) puede reescribirse como sigue, mediante el cambio de variables $x = \sqrt{S^{(2-\beta)}}$:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \tau} = \frac{1}{8} \tilde{\sigma}(\tau)^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left[\tilde{\mu}(\tau)x - \frac{(4-\beta)\tilde{\sigma}(\tau)^2}{4(2-\beta)x} \right] \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \left[\frac{(4-\beta)\tilde{\sigma}(\tau)^2}{8(2-\beta)x} - r(\tau) - \frac{\tilde{\mu}(\tau)}{2} \right] u(x, \tau) \equiv H(\tau)u(x, \tau), \quad (28)$$

¹⁶ La ecuación (27) es introducida en Cox (1975) y en Cox y Ross (1976).

siendo $\tilde{\sigma}(\tau) = (2 - \beta)\sigma(\tau)$, $\tilde{\mu}(\tau) = (2 - \beta)[r(\tau) - d(\tau)]$ y $u(x, \tau) = xP(S, \tau)$. Esta nueva forma de expresar la ecuación (27), les permitió a Lo y Hui dar otra fórmula para el operador $H(\tau)$ mediante los generadores de un álgebra de Lie. La expresión a la que hacemos referencia para H es la siguiente:

$$H(\tau) = a_1(\tau)K_+ + a_2(\tau)K_0 + a_3(\tau)K_- + b(\tau), \quad (29)$$

donde

$$\begin{aligned} K_- &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{4 - \beta}{(2 - \beta)x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{4 - \beta}{(2 - \beta)x^2} \right] \\ K_0 &= \frac{1}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2 - \beta} \right), \quad K_+ = \frac{1}{2} x^2 \\ a_3(\tau) &= \frac{1}{4} \tilde{\sigma}(\tau)^2, \quad a_2(\tau) = \tilde{\mu}(\tau) \\ a_1(\tau) &= 0, \quad b(\tau) = -\frac{1 - \beta}{2(2 - \beta)} \tilde{\mu}(\tau) - r(\tau) \end{aligned} \quad (30)$$

Como se indicó antes, la expresión (29) buscaba escribir el operador H como una combinación de los generadores de un álgebra de Lie. Pues bien, dichos generadores son los operadores K_+ , K_0 y K_- que aparecen en la ecuación (30). De hecho, los tres operadores anteriores generan el álgebra de Lie simple $\mathfrak{su}(1,1)$, cuya ley viene dada por los siguientes corchetes no nulos:

$$[K_+, K_-] = -2K_0, \quad [K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm} \quad .$$

Haciendo uso de las ecuaciones (28) y (29), Lo y Hui definieron el operador de evolución $U(\tau, 0)$, como sigue:

$$u(x, \tau) = \exp \left[\int_0^\tau d\tau' b(\tau') \right] \cdot U(\tau, 0) \cdot u(x, 0) \quad (31)$$

Con lo que, sustituyendo la expresión anterior en (28), obtuvieron la ecuación siguiente, para el operador de evolución:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U(\tau, 0) = H_I(\tau) U(\tau, 0), \quad U(0, 0) = 1 \quad (32)$$

siendo:

$$H_I(\tau) = a_1(\tau)K_+ + a_2(\tau)K_0 + a_3(\tau)K_- \quad . \quad (33)$$

Debido a que el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$ es simple y desplegada de dimensión 3, la hipótesis del Teorema de Wei-Norman¹⁷ se satisface y el operador de evolución $U(\tau,0)$ puede ser expresado mediante la siguiente fórmula explícita:

$$U(\tau,0) = \exp[c_1(\tau)K_+] \cdot \exp[c_2(\tau)K_0] \cdot \exp[c_3(\tau)K_-] \quad (34)$$

Como se indicó anteriormente, los coeficientes $c_i(\tau)$ para la expresión del operador $U(\tau,0)$, dados por el Teorema de Wei-Norman, se calcularían sustituyendo la ecuación (34) en la (32) y comparando el resultado obtenido con la expresión (33). De este modo, Lo y Hui dieron una fórmula exacta y explícita para el operador $U(\tau,0)$ y, en consecuencia, para la solución $u(x, \tau)$, para la ecuación (28) de fijación de los precios.

La expresión anteriormente obtenida para fijar los precios de las opciones les permitió dar las correspondientes fórmulas para las opciones con barrera móvil. Debe tenerse en cuenta que, para ello, tuvieron que añadir a los cálculos una función auxiliar que recogiese la información de la barrera. El resultado final fue el que mostramos a continuación:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, \tau) \equiv \exp[\gamma \cdot K_+] \cdot u(x, \tau) &= \exp\left[\int_0^\tau d\tau' b(\tau')\right] \cdot \exp[\gamma K_+] \cdot \exp\left\{-\frac{\gamma \exp[c_2(\tau)]}{1 + \gamma c_3(\tau)} K_+\right\} \times \\ &\exp\left\{[c_2(\tau) - 2 \ln|1 + \gamma c_3(\tau)] K_0\right\} \times \exp\left[\frac{c_3(\tau)}{1 + \gamma c_3(\tau)} K_-\right] \cdot \tilde{u}(x,0). \end{aligned} \quad (35)$$

En concreto, Lo y Hui usaron todos los cálculos anteriores con el fin de calcular las opciones con barrera móvil tanto de tipo *up-and-out* como las de tipo *down-and-out*. Obviamente, las expresiones obtenidas requerían ser escritas como funciones exponenciales e integrales en las que intervienen integrales de Fourier-Bessel, funciones de Bessel e incluso la transformada de Weber.

De este modo, Lo y Hui obtuvieron las formulas de fijación de precio para las opciones con barrera móvil, usando técnicas basadas en la aplicación de las álgebras de Lie y dentro del modelo CEV.

Igualmente, abrieron una línea de trabajo que permite realizar comparaciones eficientes de fijaciones de precios, suministrando herramientas con las que precisar la gestión de riesgos en derivados equitativos con barrera. De hecho, tales herramientas solo requerirían considerar la tasa de interés, la volatilidad y los dividendos en el modelo de valoración de la opción CEV.

¹⁷ Recuérdese que la hipótesis del Teorema de Norman-Wei aparece en la expresión (24) y que se corresponde a la expresión (33) para la ecuación diferencial (32), correspondiente al problema de las opciones CEV europeas.

5. CONCLUSIONES

Queremos concluir el presente artículo enfatizando las muchas posibilidades que presenta la aplicación de la Teoría de Lie al ámbito de la Economía y las Finanzas. Aunque en estas páginas solo se muestran explícitamente dos posibles usos de esta Teoría, son muchas más las referencias existentes, las cuales permiten vislumbrar otros muchos temas que podrían abordarse desde la perspectiva de la Teoría de Lie.

AGRADECIMIENTOS

Los autores quisiéramos agradecer a los revisores y a los editores todas las sugerencias y comentarios realizados, los cuales han resultado sumamente valiosos para mejorar la calidad del presente artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- M. Armstrong (1996): Multiproduct Nonlinear Pricing. *Econometrica* **64**, pp. 51–75.
- S. Basov (2004): Lie groups of partial differential equations and their application to the multidimensional screening problems. *Econometric Society 2004 Australasian Meetings* **44**.
- T. Björk (2001): A geometric view of interest rate theory. En: E. Jouini, J. Cvitanic and M. Musuella (eds.): *Option pricing, Interest Rates and Risk Management*, Cambridge University Press, pp. 241–277.
- T. Björk (2004): On the Geometry of Interest Rate Models. En: R.A. Carmona, E.C. Çinlar, I. Ekeland, E. Jouini, J. A. Scheinkman and N. Touzi (eds.): *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2003*, Springer-Verlag, pp. 133–216.
- T. Björk and C. Landén (2002): On the construction of finite dimensional realizations for nonlinear forward rate models. *Fin. Stoch.* **6**, pp. 303–331.
- J. Cox (1975): Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions. *Working Paper*, Stanford University.
- J.C. Cox and S.A. Ross (1976): The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics* **3**, pp. 145–166.
- A. De Sanctis (2007): Lie Theory to Value Financial Derivatives with Time Dependent Parameters. *Int. Math. Forum* **2**:10, pp. 499–503.
- L.P. Eisenhart (1933): *Continuous groups of transformations*, Princeton University Press.
- E.M. Fedriani y Á.F. Tenorio (2006): Progreso técnico: una aproximación desde la Teoría de Grupos de Transformaciones de Lie. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa* **1**, pp. 5–24.
- A. Friedman (1964): *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall.

- R.M. Gaspar (2006): Finite Dimensional Markovian Realizations for Forward Price Term Structure Models. En: A.N. Shiryaev, M.R. Grossinho, P.E. Oliveira and M.L. Esquivel (eds.): *Stochastic Finance*, Springer, pp. 265–320.
- I. Hernández, C. Mateos, J. Núñez and Á.F. Tenorio (2008): Lie Theory: Applications to Problems in Mathematical Finance and Economics. *Applied Mathematics and Computation*. To appear.
- I. Karatsas and S. Shreve (1997): *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag.
- C.F. Lo, C.H. Hui and P.H. Yuen (2000a): Constant elasticity of variance option pricing model with time-dependent parameters. *Int. J. Theor. Appl. Fin.* **3**:4, pp. 661–674.
- C.F. Lo, C.H. Hui and P.H. Yuen (2000b): Option risk measurement with time-dependent parameters. *Int. J. Theor. Appl. Fin.* **3**:3, pp. 581–589.
- C.F. Lo and C.H. Hui (2001): Valuation of financial derivatives with time-dependent parameters. *Quantitative Finance* **1**, pp. 73–78.
- C.F. Lo and C.H. Lui (2002): Pricing multi-asset financial derivatives with time-dependent parameters-Lie algebraic approach. *Int. J. Math. Math. Sci.* **32**:7, pp. 401–410.
- C.F. Lo and C.H. Lui (2006): Lie algebraic approach for pricing moving barrier options with time-dependent parameters, *J. Math. Ann. Appl.* **323**:2, pp. 1455–1464.
- R. Lu and Y.-H. Hsu (2005): Valuation of Standard Options under the Constant Elasticity of Variance Model, *Int. J. Bus. Econ.* **4**:2, pp. 157–165.
- T.M. Mitchell (1987): Toward empirical applications of Lie-group technical progress functions, *Economics Letters* **25**, pp. 111–116.
- S. Polidoro (2003): A Nonlinear PDE in Mathematical Finance. En: F. Brezzi, A. Buffa, S. Corsaro and A. Murli (eds.): *Numerical Mathematics and Advanced Application*, Springer, pp. 429–433.
- R. Sato (1980): The impact of technical change on the holotheticity of production functions. *Economic Studies* **47**, pp. 767–776.
- R. Sato (1981): *Theory of technical change and economic invariance. Application of Lie groups*, Academic Press.
- R. Sato and R.V. Ramachandran (1998): *Symmetry and Economic Invariance: an introduction*, Kluwer.
- R.M. Solow (1961): Comment on Stigler. En: *Output, Input and Productivity Measurement*, Princeton University Press, pp. 64–68.
- G.J. Stigler (1961): Economic problems in measuring changes in productivity. En: *Output, Input and Productivity Measurement*, Princeton University Press, pp. 47–63.
- J. Wei and E. Norman (1963): Lie algebraic solution of linear differential equations. *Journal of Mathematical Physics* **4**, pp. 575–581.
- R. Wilson (1993): *Non Linear Pricing*, Oxford University Press.

Volumen 6 (diciembre de 2008)

Editorial

Páginas 3–6

Aplicación de la Teoría de Grafos para mejorar la planificación de rutas de trabajo de una empresa del sector de la distribución automática

An application of Graph Theory to improve the planning of work routes for a company in the vending sector

Puchades Cortés, Vanesa; Mula Bru, Josefa; Rodríguez Villalobos, Alejandro

Páginas 7–22

Prediction of individual automobile reported but not settled claim reserves for bodily injuries in the context of Solvency II

Predicción de las reservas individuales para siniestros del automóvil con daños corporales pendientes de liquidación en el contexto de Solvencia II

Ayuso Gutiérrez, M. Mercedes; Santolino Prieto, Miguel Á.

Páginas 23–41

Modelización financiero-actuarial de un seguro de dependencia

Long Term Care Insurance Actuarial Model

Herranz Peinado, Patricia; Guerrero Casas, Flor M.; Segovia González, M. Manuela

Páginas 42–73

Algunas aplicaciones de la Teoría de Lie a la Economía y las Finanzas

Some Applications of Lie Theory to Economics and Finance

Hernández Fernández, Isabel; Mateos Contreras, Consuelo; Núñez Valdés, Juan;

Tenorio Villalón, Ángel F.

Páginas 74–94