

## Bifurcaciones de codimensión 2 en un modelo dinámico del mercado potencial y actual: aplicación al mercado cervecero español

VELASCO MORENTE, FRANCISCO  
Departamento de Economía Aplicada I  
Universidad de Sevilla  
Correo electrónico: [velasco@us.es](mailto:velasco@us.es)

NADAL MORALES, PURIFICACIÓN  
Departamento de Economía Aplicada I  
Universidad de Sevilla  
Correo electrónico: [pnadal@us.es](mailto:pnadal@us.es)

GONZÁLEZ ABRIL, LUIS  
Departamento de Economía Aplicada I  
Universidad de Sevilla  
Correo electrónico: [luisgon@us.es](mailto:luisgon@us.es)

ORTEGA RAMÍREZ, JUAN ANTONIO  
Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos  
Universidad de Sevilla  
Correo electrónico: [ortega@lsi.us.es](mailto:ortega@lsi.us.es)

### RESUMEN

En este trabajo, a partir de la continuación de las bifurcaciones de codimensión 1 en un modelo dinámico discreto aplicado al mercado actual y potencial de las organizaciones, se establecen las condiciones necesarias para la existencia de bifurcaciones de codimensión 2. Como caso práctico, se estudia el caso del mercado cervecero español, considerando como referencia la marca “San Miguel”, analizando su evolución e interpretación económica.

**Palabras clave:** bifurcaciones de codimensión 2; mercado cervecero español.  
**Clasificación JEL:** C61; C62; M39.  
**2000MSC:** 37C; 37G; 37N40.

# Bifurcations of Codimension 2 in a Dynamical Model of Current and Potential Market: An Application to the Spanish Beer Market

## ABSTRACT

In this work we establish the necessary conditions for the existence of bifurcations of codimension 2 in a discrete dynamic model applied to the current and potential market of the organizations, starting from the continuation of the codimension 1 bifurcations. The case of the market Spanish brewer is studied and we analyse its evolution and interpret the economical results obtained.

**Keywords:** codimension 2 bifurcations; Spanish brewer market.

**JEL classification:** C61; C62; M39.

**2000MSC:** 37C; 37G; 37N40.



## 1. INTRODUCCIÓN

En Landa y Velasco (2004) y Velasco *et al.* (2007), se exponen cómo las organizaciones mercantiles pueden mantener sus cuotas de mercado en equilibrio durante determinados periodos de tiempo. Esto no significa que la solución de equilibrio tenga que durar de manera permanente, ya que la estrategia de cada organización competitiva, en un mercado de referencia y para un producto cualquiera de ese mercado, ha de ir encaminada a conseguir la cuota de mercado más elevada posible; pero no es menos cierto que cualquier comportamiento competitivo encaminado a conseguir ese objetivo será respondido por las organizaciones competidoras que defenderán sus respectivas posiciones de mercado. Un entorno agresivo, un esfuerzo de marketing mal orientado u otras causas, hacen que la posición conseguida por cada organización competitiva no permanezca, necesariamente, en equilibrio estable.

Podemos ver en Gandolfo (1997), Lorenz (1997), Vílchez *et al.* (2002), Velasco *et al.* (2002), Vílchez *et al.* (2003), Landa y Velasco (2004), Vílchez *et al.* (2004), Bosi *et al.* (2005), Haunsmied *et al.* (2005), He XZ y Westerhoff FH (2005), Li MQ (2005), Wagener (2005), Wei-Bing-Zhang (2006), Magnitskii y Siderov (2006) y Chang *et al.* (2007), entre otros, ejemplos económicos en los que se estudian bifurcaciones en modelos económicos. En el trabajo de Velasco *et al.* (2007) se hace un estudio de la estabilidad del sistema y de las bifurcaciones de codimensión 1 en un modelo económico discreto y se analiza bajo qué condiciones, si se realizan pequeñas variaciones en los parámetros del modelo, éstas van a implicar que el comportamiento del mismo sea cualitativamente diferente en un entorno del punto fijo. En particular, se estudió la estabilidad del modelo referido al mercado cervecero español y se encontraron las bifurcaciones de codimensión 1 asociadas a cada uno de los valores de los parámetros del modelo.

En este artículo estudiamos las bifurcaciones de codimensión 2, que vienen caracterizadas por dos condiciones independientes que involucran simultáneamente dos parámetros. El interés de esta búsqueda radica en que la aparición de estas bifurcaciones lleva asociada un comportamiento para ambos mercados mucho más complejo que el descrito hasta el momento por el espacio paramétrico de cada bifurcación de codimensión 1. Para ello, hemos de partir de los puntos en los que existen bifurcaciones de codimensión 1, realizar la continuación de dichos puntos obligando a que cumplan las condiciones de no degeneración de la correspondiente bifurcación y comprobar para qué valores de los parámetros no se cumple alguna de las condiciones impuestas. Se ha realizado un estudio exhaustivo de todas las posibles combinaciones entre dos parámetros a fin de obtener todas y cada una de las bifurcaciones de codimensión 2 en el sistema dinámico discreto. Los posibles comportamientos de la dinámica de un sistema en un entorno de una bifurcación de codimensión 2 se comentan en el Anexo.

El resto del artículo está estructurado como sigue: en la segunda sección se comenta brevemente el modelo dinámico discreto propuesto en Velasco *et al.* (2007). En la tercera sección se exponen los conceptos necesarios que se van a utilizar a lo largo del trabajo. En la cuarta sección, realizamos la continuación de los puntos de bifurcación de codimensión 1 para los valores de los parámetros relevantes y se obtienen las principales bifurcaciones de codimensión 2 en el modelo presentado. Se finaliza con una sección de conclusiones y posibles trabajos futuros.

## 2. EL MODELO

Si se representan por  $x_t = x(t)$  e  $y_t = y(t)$  al número de compradores potenciales y al número de clientes actuales de una marca determinada en el instante  $t$ , respectivamente, el incremento del número actual de clientes,  $\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$ , viene dado por aquellas personas que son atraídas al producto, debido al efecto que produce el contacto de las personas que componen el mercado actual con aquellas que constituyen el mercado potencial, es decir,  $a(t) x(t) y(t)$ , donde  $a(t)$  es la llamada *tasa de contacto global*. Feitchinger (1992) supone que esta tasa de contacto global es proporcional al número de clientes actuales del período de tiempo correspondiente, es decir,  $a(t) = a y(t)$ . Además, a ese poder de atracción habrá que sustraerle el número de clientes actuales que dejan el mercado de la organización para pasar al mercado potencial,  $b y(t)$ , y los que dejan de ser clientes actuales por muerte o emigración,  $e y(t)$ ; ambos se consideran proporcionales al número de clientes actuales, donde  $b$  es la proporción en la que los clientes actuales cambian a un marca rival, pasando por tanto a engrosar el número de clientes potenciales y  $e$  es la tasa por desaparición de los clientes en general. Consideremos, también el esfuerzo de publicidad,  $c$ , que realiza la organización, es decir, la publicidad tratará de atraer hacia el mercado actual elementos que pertenecen al mercado potencial, donde hemos de hacer notar que una mala actuación en publicidad puede hacer que este valor tenga efectos negativos, con lo que no podemos despreciar el hecho de que sea negativo. De forma análoga el incremento del número de clientes potenciales  $x(t)$  tiene la misma estructura pero teniendo en cuenta que los signos (+ y -) cambian su sentido. Se ha de tener en cuenta también que en este caso hemos de añadir una tasa de entrada, que viene dada por el número de personas que se incorporan al mercado potencial del producto y que denotamos por  $k$ , debido a un incremento<sup>2</sup> en su poder adquisitivo. Nuestro sistema dinámico lo podemos expresar por tanto como sigue:

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + k - ax_t y_t^2 + by_t - cx_t \\ y_{t+1} = y_t + ax_t y_t^2 - by_t - ey_t + cx_t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, a, b, k, e, c \geq 0 \quad (1)$$

En Velasco *et al.* (2007) se explican con más detalle las ecuaciones de este sistema dinámico, así como la posibilidad de que en algunos casos los valores de los parámetros  $c$ ,  $k$  y  $b$  sean negativos y se exponen, además, tanto las condiciones de estabilidad del modelo como las condiciones para la obtención de las bifurcaciones de codimensión 1. A lo largo del artículo quedará constancia de los signos de los parámetros.

## 3. BIFURCACIONES DE CODIMENSIÓN 2 DE LOS PUNTOS FIJOS DE UN SISTEMA DINÁMICO DISCRETO

Sea un sistema dinámico discreto bi-paramétrico (Wiggins (1990), Guckenheimer (1993), Kuznetsov (1998)):

$$x \rightarrow f(x, \alpha) \quad (2)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^2$  y  $f$  es suficientemente suave. Supongamos que para el valor del parámetro  $\alpha = \alpha^0$ , el sistema (1) tiene un punto fijo o de equilibrio en  $x = x^0$ , para el que se satisface alguna condición de bifurcación Fold, Flip o Neimark-Sacker. Entonces

<sup>2</sup> Si suponemos una marca de alto poder adquisitivo, hablaremos de incremento. Ahora bien, si hemos bajado en nuestro poder adquisitivo, hablamos de decremento.

la ecuación de punto fijo,  $f(x, \alpha) - x = \theta$ , donde  $\theta$  representa el vector nulo, y la correspondiente condición de bifurcación  $\psi(x, \alpha) = 0$ , que se le impone a los multiplicadores de la matriz Jacobiana  $J = f_x$  evaluada en  $(x, \alpha)$ , define una curva  $\Gamma$  en el espacio  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Cada punto  $(x^0, \alpha^0) \in \Gamma$  corresponde a un punto de bifurcación  $x^0$  del sistema (2) que satisface la condición de bifurcación relevante para el valor del parámetro  $\alpha^0$ . La curva de bifurcación  $B$  sobre el plano paramétrico es la proyección estándar  $\pi : (x, \alpha) \rightarrow \alpha$ , que proyecta  $\Gamma$  sobre la curva de bifurcación  $B = \pi(\Gamma)$  en el plano paramétrico.

Si el sistema (2) tiene en  $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0)$  un equilibrio  $x = x^0$ , con un multiplicador  $\mu = 1$ , entonces el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f(x, \alpha) - x = \theta, x \in \mathbb{R}^n \\ \det(f_x(x, \alpha) - I) = 0 \end{cases}$$

define genéricamente<sup>3</sup> una variedad unidimensional suave  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+2}$  que pasa por el punto  $(x^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0)$ . Cada punto  $(x, \alpha) \in \Gamma$  define un punto fijo  $x$  del sistema (2) con un multiplicador  $\mu = 1$  para el valor del parámetro  $\alpha$ . La proyección estándar traslada  $\Gamma$  sobre la curva  $B = \pi(\Gamma)$  en el plano paramétrico y es sobre esta curva donde se cumple la bifurcación Fold.

Análogamente, la bifurcación Flip viene definida genéricamente por el sistema:

$$\begin{cases} f(x, \alpha) - x = \theta, x \in \mathbb{R}^n \\ \det(f_x(x, \alpha) + I) = 0 \end{cases}$$

con un multiplicador  $\mu = -1$ .

Para el caso de la bifurcación de Neimark-Sacker, hemos de suponer un sistema dinámico plano  $n = 2$ , tal como:

$$x \rightarrow f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$$

donde suponemos que en  $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0)$  hay un punto fijo  $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$  con un par de multiplicadores no reales sobre el círculo unidad:  $\mu_{1,2} = e^{\pm i \theta_0}$ ,  $0 < \theta_0 < \pi$ . Se considera entonces el sistema de tres ecuaciones escalares en  $\mathbb{R}^4$  con coordenadas  $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)$  siguiente:

$$\begin{cases} f(x, \alpha) - x = \theta, x \in \mathbb{R}^2 \\ \det(f_x(x, \alpha)) - 1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

La bifurcación de Neimark-Sacker viene definida genéricamente por el sistema (3) en el punto de equilibrio  $x^0$  en el valor paramétrico  $\alpha^0$ .

Si en la segunda ecuación de (3) tenemos dos puntos multiplicadores reales  $\mu_1 = \tau$ ,  $\mu_2 = \frac{1}{\tau}$ , con  $\tau > 1$ , entonces al punto de equilibrio se le denomina silla neutral.

En general, si variamos los parámetros  $(\alpha_1, \alpha_2)$  simultáneamente, entonces se pueden obtener bifurcaciones de codimensión 2 sobre la curva  $\Gamma$  o sobre  $B$ , ya que podemos tener los siguientes casos: i) pueden aproximarse otros multiplicadores al círculo unidad haciendo variar la dimensión de la variedad centro, ii) pueden dejar de cumplirse las condiciones de no-degeneración para la bifurcación de codimensión 1.

<sup>3</sup> El término genérico indica que el rango de la matriz jacobiana es máximo, es decir,  $n+1$ .

Si se considera la curva de bifurcación Fold  $B_T$ , entonces un punto cualquiera sobre esta curva corresponde a un punto fijo con un multiplicador simple  $\mu = 1$  y ningún otro multiplicador sobre el círculo unidad. La restricción del sistema dinámico (2) sobre la variedad centro es unidimensional y tiene la forma  $\xi \rightarrow \xi + a \xi^2 + O(\xi^3)$ . Además, en un punto de bifurcación Fold no degenerado se tiene que  $a \neq 0$ . De forma similar, si se considera la curva de bifurcación Flip  $B_F$ , el multiplicador es  $\mu = -1$  y la restricción del sistema dinámico (2) sobre la variedad centro en un punto Flip no degenerado tiene la forma  $\xi \rightarrow -\xi + b \xi^3 + O(\xi^4)$ , donde  $b \neq 0$ . Ahora bien, si seguimos una curva de bifurcación Neimark-Sacker  $B_{NS}$ , entonces un punto cualquiera sobre dicha curva es un punto fijo con un par simple de multiplicadores no reales sobre el círculo unidad  $\mu_{1,2} = e^{\pm i \theta_0}$ , siendo éstos los únicos multiplicadores sobre el círculo unidad. En este caso la variedad centro bidimensional y el sistema (2) sobre dicha variedad centro viene dada en notación compleja como  $z \rightarrow z e^{i \theta_0} (1 + d_1 |z|^2) + O(|z|^4)$ , donde  $d_1 \in \mathbb{R}$ . En este caso, las condiciones de no-degeneración son de dos tipos: i) ausencias de resonancias fuertes, es decir  $e^{i q \theta_0} \neq 1$ ,  $q = 1, 2, 3, 4$ , ii) no-degeneración cúbica, es decir  $c = \text{Re}(d_1) \neq 0$ .

En general, los puntos de degeneración que se pueden obtener en los sistemas genéricos en tiempo discreto con dos parámetros, al moverse en las curvas de codimensión 1, son once (Kuznetsov, 1998)<sup>4</sup>:

1)  $\mu_1 = 1$ ,  $a = 0$  (bifurcación cúspide), con forma normal  $\eta \rightarrow \eta + \beta_1 + \beta_2 \eta + s \eta^3 + O(\eta^4)$  y  $s = \text{sign}(f_{xxx}(0,0)) = \pm 1$ , con condiciones de no-degeneración:

- i)  $f_{xxx}(0,0) \neq 0$ ;
- ii)  $(f_{\alpha_1} f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2} f_{x\alpha_1})(0,0) \neq 0$ .

2)  $\mu_1 = -1$ ,  $b = 0$  (bifurcación Flip generalizada), con forma normal

$\eta \rightarrow -(1 + \beta_1)\eta + \beta_2 \eta^3 + s \eta^5 + O(\eta^6)$ ,  $s = \text{sign}(D_1(0)) = \pm 1$ , con condiciones de no degeneración:

i)  $D_1(0) = \left( \frac{1}{15} f_{x^5} + \frac{1}{2} f_x f_{x^4} - [f_x]^4 \right) (0,0) \neq 0$ ;

ii) La aplicación  $\alpha \rightarrow (\mu(\alpha) + 1, B(\alpha))$  es regular en  $\alpha = 0$ , donde  $\mu(0) = 1$  y

$B(0) = \frac{1}{4} [f_{xx}(0,0)]^2 + \frac{1}{6} f_{xxx}(0,0) \neq 0$ .

3)  $\mu_{1,2} = e^{\pm i \theta_0}$ ,  $c = 0$  (bifurcación de Chenciner);

$$\begin{cases} \rho \rightarrow \rho (1 + \beta_1 + \beta_2 \rho^2 + L_2(\beta) \rho^4) + \rho^6 R(\rho, \beta), \\ \varphi \rightarrow \varphi + \theta(\beta) + \rho^2 Q(\rho, \beta) \end{cases} \quad (\text{Forma normal})$$

Condiciones de no-degeneración:

- i)  $e^{i q \theta_0} \neq 1$ ,  $q = 1, 2, \dots, 6$ ;

---

<sup>4</sup> Al realizar los diversos cambios de sistema de referencia para cada bifurcación, surgen unos parámetros  $\beta_i$ , que son funciones de los parámetros del modelo y que caracterizan la bifurcación en particular. En el caso que nos ocupa los casos 9), 10) y 11) no son válidos ya que nuestro modelo es bidimensional.

ii) la aplicación  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r(\alpha) - 1 \\ \text{Re}(d_1(\alpha)) \end{pmatrix}$  es regular en  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;

iii)  $L_2(0) = \text{Re}(d_1(0)) \neq 0$ .

4)  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  (Resonancia 1:1);

5)  $\mu_1 = \mu_2 = -1$  (Resonancia 1:2);

6)  $\mu_{1,2} = e^{\pm i \theta_0}$ ,  $\theta_0 = \frac{2\pi}{3}$  (Resonancia 1:3);

7)  $\mu_{1,2} = e^{\pm i \theta_0}$ ,  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  (Resonancia 1:4);

8)  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = -1$ ;

9)  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_{2,3} = e^{\pm i \theta_0}$ ;

10)  $\mu_1 = -1$ ,  $\mu_{2,3} = e^{\pm i \theta_0}$ ;

11)  $\mu_{1,2} = e^{\pm i \theta_0}$ ,  $\mu_{3,4} = e^{\pm i \theta_1}$ .

Las bifurcaciones obtenidas están caracterizadas por dos condiciones independientes (bifurcación de codimensión 2) y no hay otras bifurcaciones de codimensión 2 en los sistemas dinámicos discretos genéricos (Kuznetsov, 1998).

#### 4. ESTUDIO DE BIFURCACIONES LOCALES DE CODIMENSIÓN 2 EN EL MERCADO CERVECERO ESPAÑOL

Al ir recorriendo alguna de las curvas de bifurcación de codimensión 1, obtenida al proyectar sobre el plano paramétrico, el sistema formado por la ecuación del punto de equilibrio y las condiciones de bifurcación impuestas sobre los multiplicadores de la matriz Jacobiana, se pueden obtener valores de los parámetros del sistema que den lugar, en un entorno de los mismos, a nuevos comportamientos del modelo en estudio, bien porque exista un número mayor de multiplicadores que se aproximen al círculo unidad, o bien porque se dejen de cumplir algunas de las condiciones de no degeneración, que nos indica que ocurre una bifurcación de codimensión 2.

Basándonos en ello, nos planteamos completar el análisis realizado en Velasco *et al.* (2007) del comportamiento de los mercados actuales y potenciales del mercado cervecero español, tomando como referencia la marca San Miguel, estudiando la aparición de bifurcaciones de codimensión 2 en este sistema. El interés de esta búsqueda radica en que la aparición de estas bifurcaciones lleva asociada un comportamiento para ambos mercados mucho más complejo que el descrito por las bifurcaciones de codimensión 1 (ver Anexo).

De Velasco *et al.* (2007) se sigue que los multiplicadores de la matriz jacobiana del sistema (1) particularizada en el punto de equilibrio vienen dados por:

$$\mu_1 = \frac{-A + \sqrt{(A+2)^2 - 4B}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{-A - \sqrt{(A+2)^2 - 4B}}{2}$$

donde  $A = b + c + e + \frac{ak^2}{e^2} - \frac{2a(b+e)k^2}{ce^2 + ak^2} - 2$ ,  $B = ce + \frac{ak^2}{e}$ , y las regiones de estabilidad

e inestabilidad puede observarse en la Figura 1. Además, se obtuvo que  $x^* = 12,766677$ ,  $y^* = 8,327809$  es un punto de equilibrio<sup>5</sup>; asimismo este punto fijo es un foco estable, ya que verifica la desigualdad  $4B > (A+2)^2$ ,  $B < A+2$ , pues los

<sup>5</sup> Los valores de población vienen expresados en tantos de millón.

valores correspondientes de  $A$  y  $B$ , dentro del mercado cervecero español, que vienen dados en Velasco *et al.* (2007) son:  $A = -1.991$ ,  $B = 0.0001$ . Los valores de los parámetros vienen dados en la tabla que exponemos a continuación:

$a$	$b$	$c$	$k$	$e$
0.0034	0.0001	0.0001	0.0790	0.3616

Varias son las ideas que nos hacen pensar que el mercado cervecero español puede tender a alcanzar alguno de esos tipos de bifurcaciones de codimensión 2:

1. Si observamos el plano paramétrico (Figura 1), vemos que la situación del punto  $(A, B)$  con los valores obtenidos está muy próxima al punto de corte de la recta  $A = -2$  con la parábola  $(A + 2)^2 - 4B = 0$ , que es la condición necesaria para la existencia de una *resonancia fuerte 1:1*; es decir, los dos multiplicadores tienen el valor unitario.
2. Los multiplicadores de la matriz jacobiana en el punto crítico tienen su parte real muy próxima al valor uno y su parte imaginaria muy cercana al valor cero. Sabemos que una de las condiciones para la existencia de una *resonancia fuerte 1:1* es que la matriz jacobiana en el punto crítico tenga un multiplicador real igual a uno con multiplicidad dos.

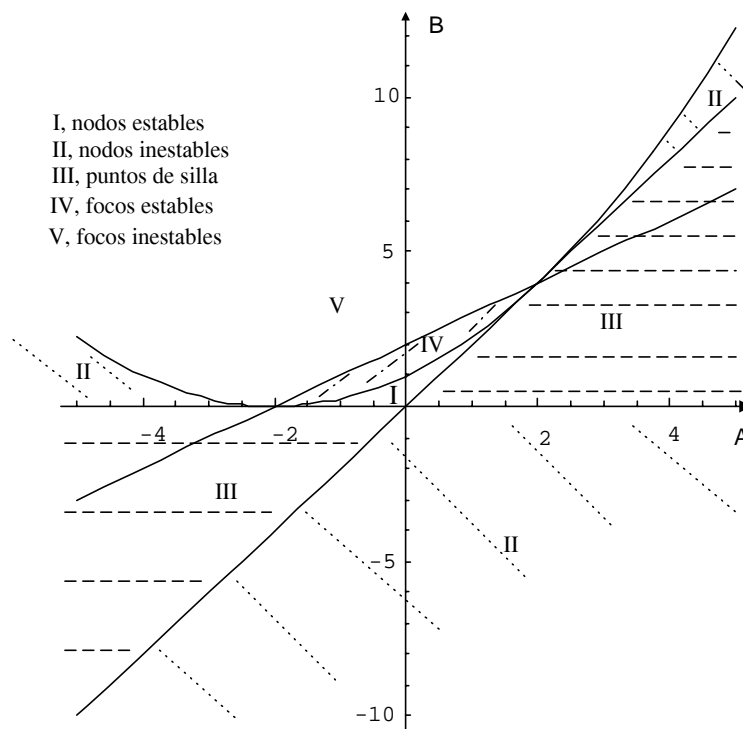


Figura 1. Representación gráfica de las regiones de estabilidad e inestabilidad del sistema dinámico (1).

3. El coeficiente  $a(0)$  de la forma normal asociada que encontramos en los puntos críticos de algunas de las bifurcaciones de Neimark-Sacker halladas, tiene un valor muy próximo a cero<sup>6</sup>; por lo cual, pequeñas variaciones en los valores de los parámetros pueden tener como resultado la anulación de dicho coeficiente. Sabemos que una de las condiciones de no-degeneración para este tipo de bifurcación es que dicho coeficiente no sea nulo.

<sup>6</sup> Ver Velasco *et al.* (2007), concretamente las páginas 436, 438, 440, 442 y 444.



#### 4.1. Influencia conjunta del esfuerzo de publicidad ( $c$ ) y el paso a una marca rival ( $b$ )

Comenzamos nuestro análisis partiendo del punto de bifurcación de Neimark-Sacker que encontramos en el mercado cervecero español para el valor crítico del esfuerzo de publicidad<sup>7</sup>  $c=0.019101486$  y realizamos la continuación de dicho punto, utilizando para ello el software CONTENT, donde realizamos la simulación numérica activando dos parámetros conjuntamente (el esfuerzo de publicidad y cada uno de los restantes) y obtenemos en el punto crítico: los valores de los multiplicadores, los valores de los parámetros y los valores de ambos mercados. De esta forma conseguimos que, al proyectar sobre el plano paramétrico, obtengamos la gráfica de continuación para los puntos de Neimark-Sacker<sup>8</sup>.

Al variar conjuntamente ambos parámetros, encontramos dos puntos de bifurcación cuyos datos recogemos en la tabla siguiente:

Tipo bif.	Valor $c$	Valor $b$	Cl. Pot.	Cl. Act.
DN (Chenciner)	-0.015689665	-0.021536786	52078520	83278461
R1	-0.060613800	-0.078177474	$1.237359 \cdot 10^{-6}$	88278461

y cuya gráfica de continuación puede apreciarse en la Figura 2. A continuación, vamos a realizar el análisis de los datos obtenidos, tanto para estas bifurcaciones como para las que obtenemos posteriormente, bajo dos enfoques: el teórico-analítico y el económico-práctico.

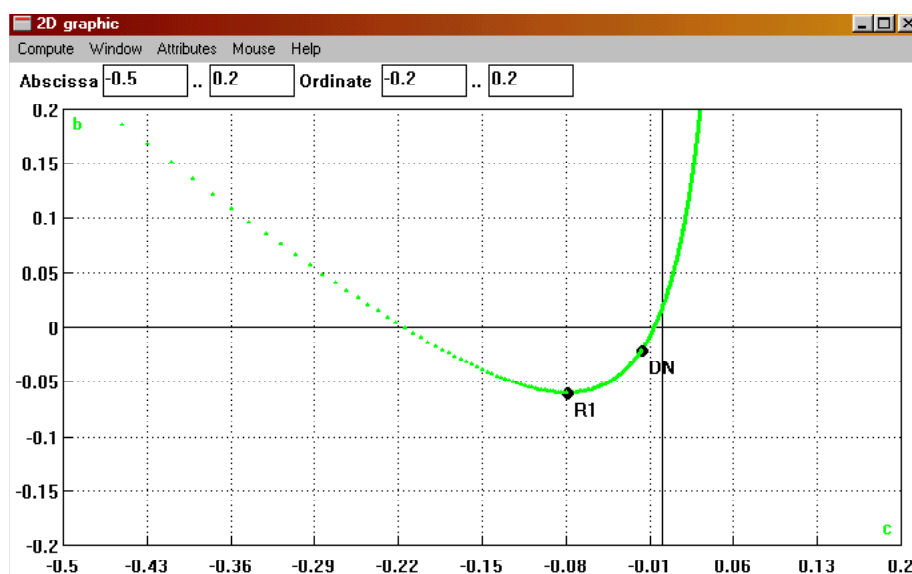


Figura 2. Bifurcaciones de codimensión 2 con el esfuerzo de publicidad y el paso a una marca rival.

\* Respecto a la bifurcación de Chenciner (DN) encontrada, debemos realizar las siguientes consideraciones:

- Esta bifurcación se presenta para los valores de los parámetros  $c = -0.015689665$  y  $b = -0.021536786$  que, hasta este momento, no habíamos tenido en consideración, ya

<sup>7</sup> Ver página 437 en Velasco *et al.* (2007) para los detalles de la obtención del punto de bifurcación N-S.

<sup>8</sup> Al ir construyendo la continuación de la curva de Neimark-Sacker, la simulación gráfica se para en cada punto de bifurcación de codimensión 2 que encuentra, dándole unas iniciales que corresponden al tipo de bifurcación. Así, tenemos que:

- DN representa una bifurcación Neimark-Sacker degenerada o una bifurcación de Chenciner.
- R1, R2, R3 y R4 representan, respectivamente, las bifurcaciones: *Resonancia 1:1*, *Resonancia 1:2*, *Resonancia 1:3* y *Resonancia 1:4*.

que, aunque en valor absoluto son menores que uno, toman valores negativos. Ahora bien, podemos aplicar el modelo a valores de los parámetros no convencionales, si observamos el efecto que ello representa en el sistema de ecuaciones que define la relación dinámica entre el mercado potencial y el actual. Así, si sustituimos este valor del esfuerzo de publicidad en las ecuaciones mencionadas, vemos que dicho esfuerzo contribuye a detraer personas del mercado actual del producto para aumentar el mercado potencial de dicho producto. Este hecho suele ocurrir cuando el esfuerzo de publicidad está mal orientado y no es bien acogido por los clientes del producto en estudio. En cambio, al sustituir el paso a una marca rival, el efecto es el contrario, ya que ahora se restarían personas del mercado potencial que pasarían a formar parte del mercado actual.

- Este comportamiento se refleja claramente sobre los valores de los clientes actuales y potenciales encontrados, ya que, como los valores de estos parámetros no influyen sobre el equilibrio alcanzado por el mercado actual, éste permanece inalterable; en cambio, el mercado potencial pierde un gran número de individuos, lo que lleva implícito que la población consumidora sufra un importante retroceso.

- Por otro lado, sabemos que el comportamiento del sistema después de la aparición de este tipo de bifurcación de codimensión 2 puede llegar a ser muy complicado, pudiendo tender el mercado a ciclos estables o inestables que aparecen y desaparecen y que pueden tener una alta periodicidad<sup>9</sup>.

- Desde el punto de vista analítico debemos indicar que este tipo de bifurcación no se puede detectar si se consideran, tan solo, los multiplicadores de la matriz jacobiana en el punto crítico, ya que ambos son complejos conjugados de módulo unitario. El problema añadido es que se infringe una de las condiciones de no-degeneración, porque en este caso se anula el coeficiente  $a(0)$  de la forma normal asociada.

\* Respecto a la bifurcación resonancia 1:1 (R1)<sup>10</sup>:

- Los valores críticos de los parámetros:  $c = -0.0606138$ ,  $b = -0.078177474$  vuelven a ser negativos, pero se conservan en módulo menor que uno.

- Esta bifurcación solo presenta un interés teórico, pues se observa un hundimiento del mercado potencial que queda fuera de una estructura razonable de un sistema comercial.

- Bajo el enfoque analítico podemos añadir que, como era de esperar, los multiplicadores de la matriz jacobiana son ambos reales e iguales a uno:  $\mu_1 = 1$ ;  $\mu_2 = 1$ .

Además, el sistema restringido a la variedad centro bidimensional en el valor crítico de los parámetros, se puede transformar en el sistema dinámico en tiempo continuo:

$$\begin{cases} \xi_1' = \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2' = \xi_2 + 0.0387791\xi_1\xi_2 + O(\|\xi\|^3) \end{cases}$$

donde  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ .

La influencia entre el esfuerzo de publicidad y cada uno de los parámetros restantes no ha producido ningún tipo de bifurcación de codimensión 2.

En la siguiente subsección pasamos a estudiar la influencia entre la tasa de entrada y el resto de los parámetros. Las posibilidades en este caso se describen a continuación.

<sup>9</sup> Ver Anexo, donde se comenta la aparición y desaparición de ciclos en la bifurcación DN.

<sup>10</sup> Ver Anexo, donde se comenta el comportamiento de esta bifurcación.

## 4.2. Influencia conjunta de la tasa de entrada ( $k$ ) y la tasa de salida ( $e$ )

Ambas tasas tienen influencia no solo en el equilibrio del mercado potencial sino también en el equilibrio del mercado actual. En este caso, los puntos críticos de bifurcaciones de codimensión 2 se detallan en la siguiente tabla<sup>11</sup>:

Tipo bif.	Valor $k$	Valor $e$	Cl. Pot.	Cl. Act
R4	0.931981	0.715682	14303370	49620045
R3	1.190810	0.777457	13118120	58362867
R2	1.409835	0.816451	12117189	65797323

y que pueden observarse en la Figura 3. Analizamos ahora cada una de las bifurcaciones encontradas:

\* *Resonancia fuerte 1:4* (R4) respecto a la cual debemos realizar las siguientes indicaciones:

- Esta bifurcación de codimensión 2 aparece en los valores críticos de la tasa de entrada y de salida  $k=0.931981$ ,  $e=0.715682$  que, aunque permanecen dentro del intervalo de definición de los parámetros de ajuste, implican un aumento muy significativo de ambas, ya que se traduce en un incremento de nueve décimas en la tasa de entrada y de siete décimas en la tasa de salida del mercado.

- Ahora bien, esta bifurcación solo tiene un interés teórico debido a que, al ser la tasa de entrada en el mercado mayor que la tasa de salida del mismo (la razón entre ambas es 1.3), se produce un incremento excesivo de la población consumidora que solo tiene sentido si se produce un aumento no esperado de la población adulta.

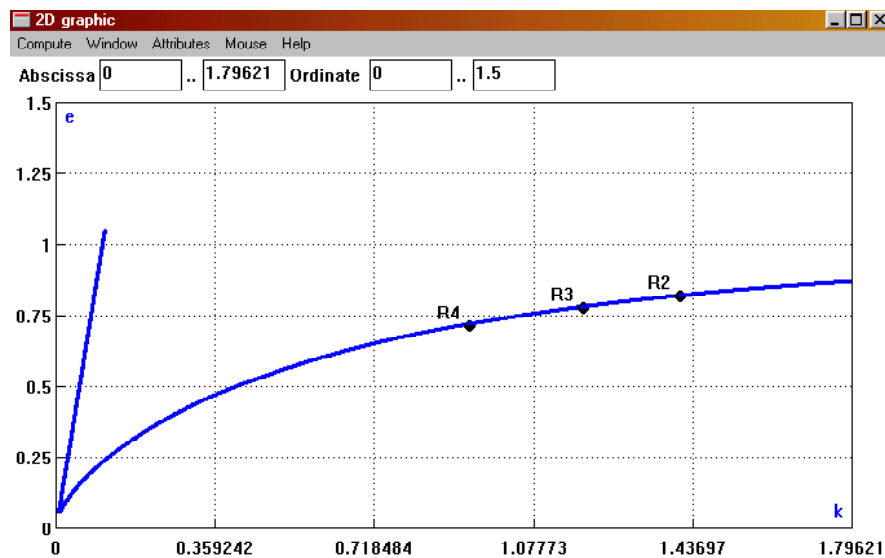


Figura 3. Bifurcaciones de codimensión 2 con la tasa de entrada y de salida del mercado.

- El comportamiento del sistema en un entorno de una bifurcación de este tipo es muy complejo, pudiendo aparecer, a su vez, distintos tipos de bifurcaciones al variar los parámetros. La descripción exacta del comportamiento del sistema para este caso requeriría la computación numérica de algunas curvas de bifurcación que lleva aparejada este tipo de resonancia (ver Anexo).

- Analíticamente podemos añadir que los multiplicadores de la matriz jacobiana en el punto crítico son:  $\mu_1 = e^{i \pi/2}$ ;  $\mu_2 = e^{-i \pi/2}$ , con lo cual queda reflejado que se infringe la

<sup>11</sup> Los valores de los clientes actuales y potenciales se obtienen utilizando los valores de equilibrio obtenidos en la ecuación (15) y el valor de la población (17) en Velasco *et al.* (2007).

condición de no-degeneración  $e^{iq\theta} \neq 1$ ;  $q = 1, 2, 3, 4$ , ya que  $\theta = \pi/2$ .

\* *Resonancia 1:3 (R3)*

- Esta bifurcación se produce para  $k=1.1908108$ ,  $e=0.77745704$ , donde la tasa de entrada presenta, de nuevo, un valor no convencional al ser casi dos décimas mayor que uno. Dos son las razones que nos impulsan a tenerla en consideración: la primera es precisamente su proximidad al intervalo exigido para el ajuste de los parámetros; la segunda es que su valor se puede traducir en que se ha producido un incremento no controlado de la población adulta.

- Al igual que ocurre con el caso anterior, esta bifurcación solo presenta un interés analítico, ya que el aumento de población se traduce en un aumento exagerado de la población consumidora al volver a ser la tasa de entrada en el mercado superior a la tasa de salida del mismo.

- Sabemos que para este tipo de bifurcación se tiene una bifurcación de Neimark-Sacker que implica que una curva cerrada e invariante rodea al equilibrio; es decir, en principio se tendría un comportamiento cíclico. Ahora bien, para los valores de los parámetros cercanos a los del punto crítico, la aplicación asociada a la forma normal presenta un ciclo de periodo tres que corresponde a tres nuevos puntos fijos silla. Si se consideraran los términos de orden superior se puede hablar, incluso, de que se producen estructuras homoclínicas que desembocan en comportamientos muy complejos (ver Anexo).

- Por último, podemos indicar que los multiplicadores de la matriz jacobiana en el punto fijo son  $\mu_1 = e^{i 2\pi/3}$ ;  $\mu_2 = e^{-i 2\pi/3}$ , con lo cual queda reflejado que se infringe la condición de no-degeneración  $e^{iq\theta} \neq 1$ ;  $q = 1, 2, 3, 4$ , ya que  $\theta = 2\pi/3$ .

\* *Resonancia 1:2 (R2)*

- Los valores críticos de los parámetros son  $k=1.4098356$ ,  $e=0.81645175$ , lo que nos indica que la tasa de salida ha sufrido un aumento muy considerable pero se mantiene dentro del intervalo de definición del ajuste al mercado cervecero español. No ocurre lo mismo con la tasa de entrada en el mercado, la cual vuelve a aumentar y además se mantiene superior a la tasa de salida del mismo (aumenta incluso la razón entre ambas) llevándonos, de nuevo, a un incremento incontrolado de la población consumidora.

- Analíticamente podemos añadir que el comportamiento que puede presentar el sistema en un entorno del punto crítico nos lleva a la aparición de periodo doble, algo que podíamos esperar, pues aparece el multiplicador  $-1$  con multiplicidad dos. Al considerar los términos de orden superior, pueden aparecer comportamientos de difícil descripción, ya que su estructura implica la existencia de ciclos de gran periodo que aparecen y desaparecen (ver Anexo).

Debemos hacer notar que hemos realizado las simulaciones numéricas para obtener las curvas de puntos de Neimark-Sacker viendo qué influencia tienen sobre el sistema la variación simultánea de dos parámetros de ajuste. Hemos encontrado diversos tipos de bifurcaciones de codimensión 2 cuyo estudio no hemos reflejado, ya que se producen para valores de los parámetros lejos de los valores exigidos para el ajuste del modelo al sistema cervecero español. Aunque, indudablemente, presentan un interés teórico, no aportan nada nuevo, al no encontrar ninguna bifurcación cúspide.

Reflejamos en la Figura 4 una proyección de todas las bifurcaciones encontradas partiendo del punto crítico  $c = 0.019101486$  sobre los ejes formados por el parámetro  $c$  y la variable  $x$ . Se pueden ver otras proyecciones sin más que variar los ejes.

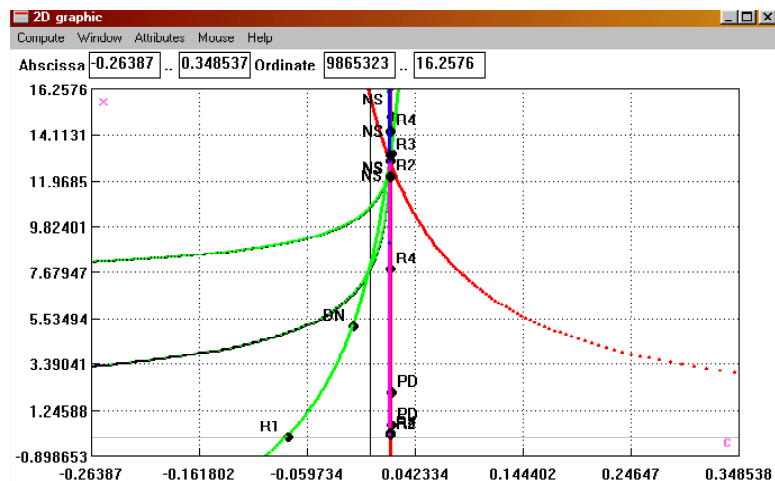


Figura 4. Proyección de las bifurcaciones de codimensión 2 sobre la variable  $x$  y el parámetro  $c$ .

### 4.3. Curva de bifurcación de duplicación del periodo

A fin de completar el análisis del mercado cervecero español, hemos buscado las nuevas bifurcaciones de codimensión 2 que pueden aparecer cuando recorremos la curva de bifurcación para las bifurcaciones de duplicación del periodo que hemos encontrado. Aunque sabemos que inicialmente no tienen relevancia económica, nos parece interesante no solo reflejar todas las situaciones posibles con las que deben enfrentarse los mercados en estudio sino también analizar, desde un aspecto más teórico, los comportamientos más singulares a los que pueden tender los mercados antes mencionados.

Para lograr este objetivo, partiendo del valor crítico del esfuerzo de publicidad<sup>12</sup>  $c=1.8417928$ , hemos realizado las simulaciones numéricas y las simulaciones gráficas variando, nuevamente, los parámetros de dos en dos y estudiando como repercutían sobre los mercados estas variaciones. Las diversas simulaciones gráficas<sup>13</sup> aparecen en la Figura 5 y la Figura 6. Esta última es una ampliación de la figura anterior donde pueden apreciarse las bifurcaciones encontradas con mayor claridad para los valores  $(c, x) \in [1.341, 2.009] \times [-1.02, 1.97]$ .

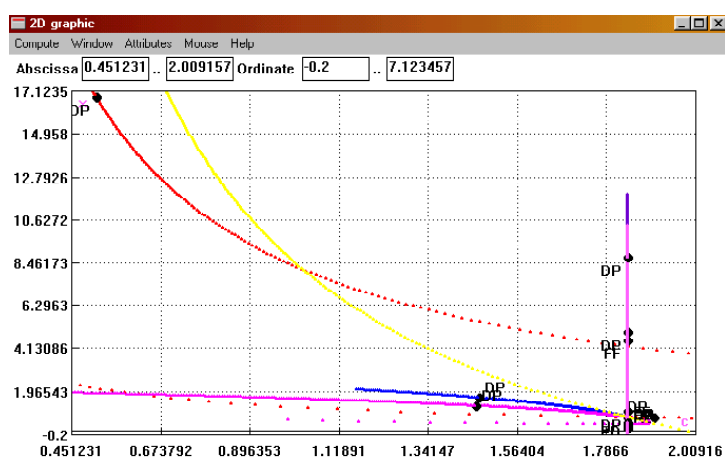


Figura 5. Bifurcaciones de codimensión 2 con ejes la variable  $x$  y el parámetro  $c$ .

<sup>12</sup> Velasco *et al.* (2007), página 436.

<sup>13</sup> Hemos representado la variable  $x$ , que representa a los clientes potenciales del mercado cervecero, frente a las variaciones del parámetro  $c$ , que representa el esfuerzo de publicidad adicional que se realiza sobre el mercado.

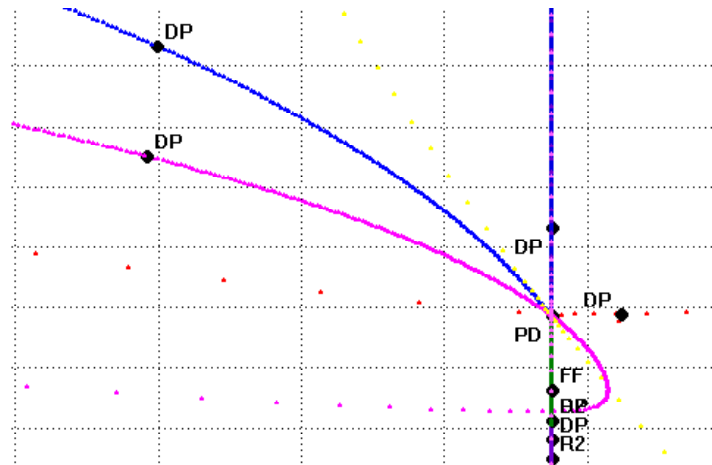


Figura 6. Ampliación de las bifurcaciones de codimensión 2,  $(c, x) \in [1.341, 2.009] \times [-1.02, 1.97]$ .

## 5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Una de las conclusiones más sobresalientes de este trabajo es que se han encontrado bifurcaciones Flip degeneradas (denotadas por DP), las cuales están asociadas a la aparición de un multiplicador real igual a  $-1$ , pero que vulneran la condición de no degeneración, al anularse el coeficiente del término cúbico de la forma normal a una bifurcación Flip no degenerada. El comportamiento del sistema en un entorno del punto crítico para este tipo de bifurcación depende de la región del plano paramétrico en la que estemos situados, pudiendo incluso coexistir dos ciclos de periodo dos. Se puede apreciar gráficamente que, salvo en una de las bifurcaciones de este tipo que hemos encontrado, se produce el hundimiento del mercado potencial. Hay dos razones que nos impulsan a no considerar ni siquiera esta posibilidad: la primera es que esta bifurcación proviene de una situación que no está incluida en la lógica de un sistema de mercados; y la segunda se debe a que, de nuevo, los valores de los parámetros implicados (la tasa de contacto y el esfuerzo de publicidad) no pertenecen al intervalo exigido para el ajuste al mercado cervecero español.

A parte del estudio analítico realizado al modelo se ha de destacar la bifurcación de Chenciner (DP) para los valores  $c = -0.015689665$ ;  $b = -0.02153676786$ , en que el mercado puede tender a ciclos estables o inestables que aparecen y desaparecen, con las repercusiones añadidas acerca de la variabilidad del número de individuos en los mercados. Como se comenta en la cuarta sección, esto puede muy bien ser debido a una mala orientación en el esfuerzo de publicidad, haciendo que ella sea contraproducente para los objetivos de aumentar el número de clientes de la marca. Ha habido ocasiones en el que por motivos de sensibilización de la población, lo que en unos años podría ser una buena publicidad, acaba siendo una aberración unos años después. No hay más que ver la evolución que ha habido en la publicidad, no solo en lo relativo a productos de alcohol, sino en todos los ámbitos. No hay más que recordar la publicidad reciente acerca del alcohol y de los accidentes de tráfico. Es por ello por lo que hay que tener muy en cuenta la sensibilidad de la población, con la forma de introducir en nuestro caso el alcohol, aunque sea de baja graduación, es que no solo se ha de tomar con moderación sino, lo que es mucho más importante, con responsabilidad.

Dentro del modelo aparecen, además, singularidades de codimensión 2 no estudiadas con anterioridad, que son la suma de una bifurcación Fold y otra Flip (denotadas por FF). Estas singularidades están asociadas a la aparición de dos multiplicadores reales, uno igual a  $1$  y otro igual a  $-1$ .

Indicar, por último, que aparecen también resonancias fuertes que no aportan nada nuevo al estudio ya realizado.

Como posibles trabajos futuros, estamos trabajando en un nuevo modelo que describa algunos de los comportamientos de los consumidores, tal como el descontento existente con dicha marca y la repercusión en los clientes actuales y potenciales.

## **AGRADECIMIENTOS**

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por las ayudas PAI-2008/00000607, PAI-2007/00000633 y por el proyecto de excelencia P06-TIC-02141 de la Junta de Andalucía. Así mismo, ha sido subvencionado por el proyecto del Ministerio de Educación y Ciencia TSI2006-13390-C02-02. Los autores desean agradecer los comentarios de los revisores que hacen que este trabajo tenga una mejor lectura.

## **REFERENCIAS**

BISCHI, G.I., DIECI, R., RODANO, G., SALTARI, E. (2001). Multiple attractors and global bifurcations in a Kaldor-type business cycle model. *Journal of Evolutionary Economics*, 11 (5): 527–554.

BRAUN, M. (1990). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*, Grupo editorial Americana, México D.F.

CHANG, J.J., CHANG, W.Y., LAI, C.C., WANG, P. (2007). Equilibrium dynamics in an endogenous growth model of money and banking, *Journal of Money Credit and Banking*, 39, 7: 1683–1710.

DONG, J., ZHANG, D., NAGURNEY, A.(1996). A projected dynamical systems model of general financial equilibrium with stability analysis. *Mathematical and computer Modelling*, 24 (2): 35–44.

FEICHTINGER, G. (1992). Hopf bifurcation in an advertising diffusion model, *Journal of Economic Behavior and Organization* 17, 401–411.

GANDOLFO, G. (1997). *Economic Dynamics*, third ed., Springer-Verlag, Berlin.

GOVAERTS, W.J. (2000). *Numerical Methods for Bifurcations of dynamical equilibria*, SIAM, Philadelphia.

GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P. (1993). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, fourth ed., Springer-Verlag, New York.

GUCKENHEIMER, J., MYERS, M., STURMFELS, B. (1997). Computing Hopf Bifurcations I, *Siam J. Numer. Anal.*, 34 (1): 1–21.

JOOSTER, R. (1996). Deterministic evolutionary dynamics: A unifying approach. *Journal of Evolutionary Economics*, 6 (3): 313–324.

KUZNETSOV, Y.A. (1998). *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Applied Mathematical Sciences, second ed., Springer, New York.

- KUZNETSOV, Y.A., LEVITIN, V.V. (2004). CONTENT. A multiplatform environment for analysing dynamical systems, <http://www.math.uu.nl/people/Kuznet/CONTENT>
- LANDA, J., VELASCO, F. (2004). Análisis dinámico del mercado actual y potencial de las organizaciones. *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, 13 (1): 131–140.
- MITRA, T., NISHIMURA, K. (2005). Intertemporal complementarity and optimality study of a two-dimensional dynamical system, *International Economic Review*, 46 (1): 93–131.
- NADAL, P. (2004). Bifurcaciones en modelos dinámicos discretos: Una aplicación al mercado cervecero, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla.
- NAGURNEY, A., ZHANG, D. (1996). On the stability of an adjustment process for spatial price equilibrium modelled as a projected dynamical system, *Journal of Economics Dynamics & Control*, 20 (1-3): 43–62.
- ORTEGA, J.A., MARTÍNEZ, R., TORRES, J., TORO, M., GONZÁLEZ, L., VELASCO, F., ANGULO, C. (2005). Metodología semicualitativa para razonar sobre sistemas dinámicos. *Computación y sistemas. Revista Iberoamericana de Computación*. Vol. 8. Núm. 3: 231–251.
- PERRINGS, C. (1998). Resilience in the dynamics of economy-environment systems, *Environmental & Resource Economics*, 11 (3-4): 503–520.
- TSE, N.S.F., ROBB, F.F. (1994). Dynamical Systems Theory applied to Management Accounting-Chaos in cost behaviour in a standard costing system setting. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 16 (5): 269–279.
- VELASCO, F., BEGINES, F., NADAL, P., CHAMIZO, C., VÍLCHEZ, M. (2002). Continuación de los equilibrios de un sistema dinámico económico con bifurcaciones de codimensión 1 y 2, *Computación y Sistemas* 5 (3): 169–179.
- VELASCO, F., NADAL, P., GONZALEZ, L., VILCHEZ, M.L. (2007). Estudio de la estabilidad y de las bifurcaciones de los equilibrios de un sistema dinámico. Aplicación al mercado cervecero español. *Estudios de Economía Aplicada*, 25 (1)(on line): 419–452.
- VÍLCHEZ, M., VELASCO, F., GARCÍA, J. (2002). Bifurcaciones transcricas y ciclos límite en un modelo dinámico de competición entre dos especies. Una aplicación a la pesquería de *engraulis encrasicholus* de la región suratlántica española, *Estudios de Economía Aplicada*, 20 (3): 651–677.
- VÍLCHEZ, M., VELASCO, F., GONZÁLEZ L., ORTEGA, J. (2003). Bifurcaciones de Hopf: Análisis cualitativo y aplicación a un modelo bioeconómico de pesquerías, *Computación y Sistemas*, 6 (4): 273–283.
- VÍLCHEZ, M., VELASCO, F., HERRERO, I. (2004). An optimal control problem with Hopf bifurcations and application to the striped venus fishery in the gulf of Cadiz, *Fisheries Research*, 67 (3): 295–306.
- WIGGINS, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag.



## ANEXO

### Bifurcación de Chenciner o de Neimark-Sacker degenerada(DN)

Dado el sistema discreto  $x \rightarrow f(x, \alpha)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ , donde la función  $f$  es suave, con un punto fijo en  $x=0$ , en el que se tiene una bifurcación de Neimark-Sacker ( $\mu_{1,2} = e^{\pm i \theta_0}$ ). Este sistema se puede pasar a coordenadas polares y se obtiene un sistema que depende de unos nuevos parámetros que son funciones de los parámetros del modelo inicial. Al realizar el diagrama de bifurcación correspondiente, aparecen tres regiones paramétricas delimitadas por una recta de bifurcación de Neimark-Sacker y una curva de bifurcación. En la primera región el *map* presenta un único punto fijo que es estable. En la segunda se tiene un punto fijo inestable que tiende hacia un círculo invariante estable. En la tercera, el punto fijo es estable y tiene dos círculos invariantes, uno inestable más cercano al punto fijo y otro estable más alejado. Así, al pasar en una determinada dirección la recta de bifurcación, el punto fijo pasa de estable a inestable y los dos círculos invariantes colisionan desapareciendo el inestable. Análogamente, al atravesar en una determinada dirección la curva de bifurcación, el punto fijo permanece estable, pero la colisión de los dos círculos invariantes hace que surja un círculo invariante silla. La situación se complica cerca de la curva de bifurcación, ya que en un entorno de la misma pueden darse variedades invariantes estables e inestables de intersecciones de puntos de silla que dan lugar a una estructura homoclínica.

Se puede ver Kuznetsov (1998) para un estudio más extenso de las bifurcaciones de codimensión 2 para un *map*.

### Resonancias fuertes

Al tratar con las resonancias fuertes se suele aproximar el sistema dinámico discreto en el punto de equilibrio por un sistema dinámico continuo determinado. Esto permite predecir bifurcaciones globales de curvas invariantes cerradas que ocurren en los sistemas dinámicos discretos cerca de bifurcaciones homoclínicas o heteroclínicas del sistema dinámico continuo aproximado. Aunque la estructura exacta de la bifurcación del sistema discreto es diferente que la del sistema dinámico aproximado, su uso suministra información que es disponible solo para el análisis del sistema discreto.

### Bifurcación R 1:1

Sea el sistema dinámico discreto  $x \rightarrow f(x, \alpha)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ , con un punto fijo en  $x = \theta$ , para  $\alpha = \theta$  y con multiplicador unitario doble  $\mu_{1,2} = 1$ . Este sistema puede ser representado por un sistema dinámico continuo cuyo comportamiento se describe por la bifurcación de Bogdanov-Takens. El diagrama de bifurcación describe las bifurcaciones del *map* aproximadamente, los equilibrios corresponden a puntos fijos, mientras que los ciclos límite se interpretan como curvas cerradas invariantes. Sobreviven del diagrama correspondiente al sistema continuo dos curvas de bifurcación, una Fold y otra Neimark-Sacker que se encuentran tangencialmente en un punto de codimensión dos, y para unos determinados valores de los parámetros existe una curva invariante cerrada que se bifurca desde el punto fijo estable. Existen otros tipos de comportamientos más complejos que dan lugar a tangencias homoclínicas en dos curvas de bifurcación suaves.

### Bifurcación R 1:2

Sea el sistema dinámico discreto  $x \rightarrow f(x, \alpha)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ , con un punto fijo en  $x = \theta$ , para  $\alpha = \theta$  y con multiplicador unitario doble  $\mu_{1,2} = -1$ . En el diagrama de

bifurcación del sistema dinámico continuo asociado aparecen puntos de equilibrio que se bifurcan del trivial mediante una bifurcación *pitchfork*. Así mismo, aparecen bifurcaciones Hopf que hacen que el equilibrio pase de estable a inestable apareciendo ciclos límites. Se construye un *map* aproximante para el cual la bifurcación *pitchfork* conserva su sentido, mientras que las bifurcaciones Hopf se transforman en bifurcaciones Neimark-Sacker con curvas invariantes cerradas que conservan la estabilidad de los ciclos límites. Como el *map* aproxima la segunda iteración del *map* original, resulta que la bifurcación *pitchfork* se transforma en una de doble periodo. Como en los casos de las bifurcaciones de codimensión dos descritas previamente, existen un conjunto de bifurcaciones más complejas. Las colisiones entre las variedades invariantes sillar y las curvas invariantes cerradas se sustituyen por infinitas series de bifurcaciones en las que se envuelven estructuras homoclínicas.

### **Bifurcación R 1:3**

Sea el sistema dinámico discreto  $x \rightarrow f(x, \alpha)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ , con un punto fijo en  $x = \theta$ , para  $\alpha = \theta$  y con multiplicadores simples  $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$  para  $\theta_0 = 2\pi/3$ . El sistema dinámico continuo asociado presenta un punto de equilibrio trivial y tres puntos de equilibrio no triviales. Aparecen una línea de bifurcación de Hopf y una curva de bifurcación sobre la cual el sistema tiene un ciclo heteroclínico similar a un triángulo y que conecta los tres puntos de equilibrio no triviales. El *map* original siempre tiene un punto fijo trivial que sufre una bifurcación de Neimark-Sacker. Además, cerca del punto de codimensión dos presenta un ciclo silla de periodo tres que corresponde a los tres puntos fijos (sillas) no triviales, que a su vez corresponden con los tres equilibrios (sillas) ya mencionados. Así mismo, se producen cerca de la resonancia R1:3 comportamientos más complejos, ya que las variedades estables e inestables se intersectan formando una estructura homoclínica.

### **Bifurcación R 1:4**

Sea el sistema dinámico discreto  $x \rightarrow f(x, \alpha)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ , con un punto fijo en  $x = \theta$ , para  $\alpha = \theta$  y con multiplicadores simples  $\mu_{1,2} = \pm i$ . El sistema dinámico continuo asociado presenta ocho regiones en las cuales hay comportamientos tan diversos tales como lazos homoclínicos, ciclos heteroclínicos cuadrados, ciclos heteroclínicos en forma de trébol, conexiones heteroclínicas nodo-silla u órbitas heteroclínicas nodo-silla degeneradas.