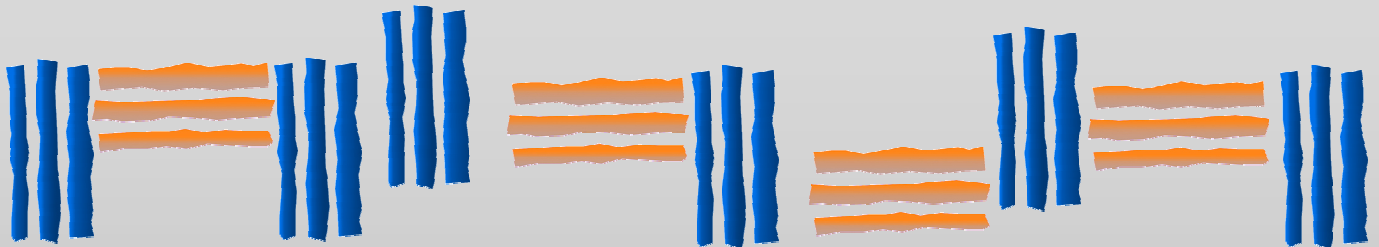


REVISTA DE
MÉTODOS CUANTITATIVOS
PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA



UNIVERSIDAD
**PABLO_D
OLAVIDE**
SEVILLA

Número 10
Diciembre de 2010
ISSN: 1886-516X
D.L: SE-2927-06

**REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA**

**Journal of Quantitative Methods for
Economics and Business Administration**

Número 10. Diciembre de 2010.
ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/>

Editores:

Dr. Eugenio M. Fedriani Martel
Universidad Pablo de Olavide
Ctra. de Utrera, km 1 - 41013
Sevilla (Spain).
Correo-e: efedmar@upo.es

Dr. Alfredo García Hernández-Díaz
Universidad Pablo de Olavide
Ctra. de Utrera, km 1 - 41013
Sevilla (Spain).
Correo-e: agarher@upo.es

Comité Editorial:

Dr. S. Ejaz Ahmed, University of Windsor, Ontario (Canadá)
Dr. Carlos A. Coello Coello, CINVESTAV-IPN, México D.F. (México)
Dr. Ignacio Contreras Rubio, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dra. Manuela Coromaldi, University of Social Sciences UNISU, Roma (Italia)
Dr. Miguel Ángel Hinojosa Ramos, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. Matías Irigoyen Testa, Universidad Nacional del Sur, Buenos Aires (Argentina)
Dr. M. Kazim Khan, Kent State University, Ohio (EE.UU.)
Dr. Manuel Laguna, University of Colorado at Boulder, Colorado (EE.UU.)
Dra. María Amparo León Sánchez, Universidad de Pinar del Río (Cuba)
Dr. Jesús López-Rodríguez, Universidad de A Coruña, (España)
Dr. Cecilio Mar Molinero, University of Kent, Canterbury (Reino Unido)
Dra. Ana M. Martín Caraballo, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dra. M^a Carmen Melgar Hiraldo, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. Gábor Nagy, University of Kent, Canterbury (Reino Unido)
Dr. José Antonio Ordaz Sanz, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. Andrés Rodríguez-Pose, London School of Economics, Londres (Reino Unido)
Dr. José Manuel Rueda Cantuche, IPTS-DG J.R. Centre-European Commission
Dra. Mariagrazia Squicciarini, OECD, París (Francia)
Dra. Mariangela Zoli, Università degli Studi di Roma 'Tor Vergata', Roma (Italia)

Editorial

Este es el décimo número de la Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa. Para celebrar esta efeméride hemos realizado varias modificaciones estructurales que esperamos sean del agrado de nuestros lectores y colaboradores. Los más relevantes de estos cambios tienen (y tendrán, pues se irán aplicando, poco a poco, hasta junio de 2011) reflejo en nuestra nueva página web (ya anunciada en la Editorial de diciembre de 2009). Esta nueva web ha centrado nuestros esfuerzos en este último año y tiene algunas características que consideramos interesantes y que comentamos a continuación. Mantiene las funcionalidades de la anterior versión, como: nuestro buscador (que permite localizar, en los contenidos de la Revista, palabras en cualquier parte del texto, autores, etc.), las metaetiquetas en todas las páginas, la guía de enlaces, el servicio de alertas para los suscriptores y abundantes hipervínculos. Permite un acceso personalizado, con el que se pueden obtener: información del estado de los documentos enviados para evaluación, certificados de pertenencia al comité científico o al elenco de revisores, etc. Facilita listados varios: completo de revisores, de indicios de calidad de la Revista, de bases de datos en las que se encuentra indexada, etc. Sugiere consejos para los autores (prácticos, para mejorar los documentos antes de su envío para evaluación, como los que antes se encontraban diseminados por las distintas editoriales). Gestiona de forma automatizada los documentos que se envían para su revisión. Proporciona el enlace directo a las bases de datos que nos incluyen. Supone un avance importante en nuestra lucha contra el correo *spam*. Se ha estructurado de forma que se pueda leer correctamente en diferentes navegadores y aunque no se carguen los estilos. Ha sido diseñada de modo que cumpla con las normas XHTML y CSS del W3C... Creemos que estas nuevas funcionalidades permitirán más agilidad en la gestión de los trabajos y un consiguiente incremento en el número de artículos publicados en cada volumen. Como nuestra Revista no tiene límite en el número de artículos publicados por volumen, seguiremos publicando todos los artículos que hayan sido aceptados en la fecha de publicación del volumen.

A 1 de diciembre de 2010, la Revista ha recibido 17.946 visitas. Además, cada mes se incrementa el número de documentos recibidos para su evaluación. Lógicamente, este incremento en el número de documentos ha venido acompañado de una mayor cantidad de propuestas rechazadas. No es que hayamos decidido incrementar las exigencias para la publicación; sigue siendo una prioridad de la Revista conseguir que los autores puedan publicar sus trabajos de investigación, por lo que nuestros revisores anónimos procuran ser muy constructivos y sugerir posibilidades de mejora para aquellos documentos que no cumplan con los estándares mínimos de calidad que se le deben exigir a un documento científico.

Nuestra presencia en bases de datos internacionales se está viendo incrementada progresivamente. Aunque la Revista cumple con todos los criterios para ser incluida en JCR-ISI y en JCR-ISI (Social Sciences), aún está a la espera de obtener una respuesta de los responsables de dichas prestigiosas e influyentes bases de datos. Sí está ya incluida en la gran mayoría del resto de bases de datos de sus campos de conocimiento. Aparte de las que ya se han comentado en editoriales anteriores (ver, por ejemplo, la editorial del Volumen 4: <http://www.upo.es/RevMetCuant/editorial2.pdf>), querríamos destacar nuestra presencia en: Latindex, cumpliendo todas las características que evalúan; Scopus; DICE, página en la que CSIC, ANECA y CINDOC miden la Difusión y Calidad Editorial de las Revistas Españolas de Humanidades y Ciencias Sociales y Jurídicas; IN~RECS, índice de impacto de las revistas españolas de Ciencias Sociales desarrollado por la Universidad de Granada y según la cual (en la última clasificación publicada, la de 2009) RevMetCuant está en el segundo cuartil, concretamente en la posición cuadragésima (40 de 120 revistas consideradas, clasificadas por el número de citas que reciben); REDALYC; DULCINEA; otras bases de datos del estilo de *Open Access Journals in Mathematics & Statistics*; etc.

Al final de esta editorial, como en ocasiones previas, publicamos la lista de los revisores anónimos que han accedido a aparecer en esta relación (actualizada a 1 de diciembre de 2010).

Prof. Dr. D. S. Ejaz Ahmed;	Prof. ^a Dra. D. ^a Macarena Lozano Oyola;
Prof. Dr. D. José Tomás Alcalá Nalváiz;	Prof. Dr. D. Antonio Miguel Márquez Durán;
Prof. ^a Dra. D. ^a M. ^a Teresa Arévalo Quijada;	Prof. Dr. D. Francisco José Martínez Estudillo;
Prof. Dr. D. Francisco J. Blancas Peral;	Prof. ^a Dra. D. ^a Ana M. Martín Caraballo;
Prof. Dr. D. Raúl Brey Sánchez;	Prof. ^a Dra. D. ^a M. ^a Carmen Melgar Hiraldo;
Prof. ^a Dra. D. ^a M. ^a Dolores Caro Vela;	Prof. Dr. D. Julián Molina Luque;
Prof. Dr. D. Ignacio Contreras Rubio;	Prof. ^a Dra. D. ^a Pilar Moreno Navarro;
Prof. ^a Dra. D. ^a Manuela Coromaldi;	Prof. Dr. D. Rafael Moyano Franco;
Prof. ^a Dra. D. ^a Juana Domínguez Domínguez;	Prof. Dr. D. Francisco Javier Muñoz Almaraz;
Prof. ^a Dra. D. ^a Mónica Domínguez Serrano;	Prof. Dr. D. José Javier Núñez Velázquez;
Prof. Dr. D. Eugenio M. Fedriani Martel;	Prof. Dr. D. José Antonio Ordaz Sanz;
Prof. ^a Dra. D. ^a Ana Fernández Carazo;	Prof. ^a Dra. D. ^a Concepción Paralera Morales;
Prof. Dr. D. Javier Fernández Navas;	Prof. Dr. D. Nelson Perera;
Prof. ^a Dra. D. ^a Inmaculada Fortes Ruiz;	Prof. Dr. D. Rafael Pino Mejías;
Prof. Dr. D. Osvaldo A. Fosado Téllez;	Prof. Dr. D. José Manuel Ramírez Hurtado;
Prof. ^a Dra. D. ^a Flor M. ^a Guerrero Casas;	Prof. ^a Dra. D. ^a Laura Riesgo Álvarez;
Prof. Dr. D. Germán Héctor González;	Prof. ^a Dra. D. ^a Inmaculada Rodríguez Puerta;
Prof. Dr. D. Alfredo García Hernández-Díaz;	Prof. Dr. D. José Manuel Rueda Cantuche;
Prof. ^a Dra. D. ^a Patricia Herranz Peinado;	Prof. Dr. D. Sixto Sánchez Merino;
Prof. Dr. D. Manuel Hidalgo Pérez;	Prof. Dr. D. Luis Vicente Santana Quintero;
Prof. Dr. D. Miguel Ángel Hinojosa Ramos;	Prof. ^a Dra. D. ^a M. ^a Manuela Segovia González;
Prof. Dr. D. Matías Irigoyen Testa;	Prof. ^a Dra. D. ^a Mariagrazia Squicciarini;
Prof. ^a Dra. D. ^a M. ^a Amparo León Sánchez;	Prof. ^a Dra. D. ^a Cecilia Téllez Valle;
Prof. ^a Dra. D. ^a Sara López Pintado;	Prof. Dr. D. Ángel F. Tenorio Villalón;
Prof. Dr. D. Jesús López Rodríguez;	Prof. Dr. D. Carlos Usabiaga Ibáñez.

Como a los lectores y autores, les agradecemos su ayuda, que hace posible que este proyecto siga adelante. A partir de este momento, la lista de revisores será accesible a través de nuestra página web, por lo que no será necesaria la publicación periódica de estos listados.

LOS EDITORES.





The Similarity between the Square of the Coefficient of Variation and the Gini Index of a General Random Variable

GONZÁLEZ ABRIL, LUIS

Departamento de Economía Aplicada I

Universidad de Sevilla (España)

Correo electrónico: luisgon@us.es

VELASCO MORENTE, FRANCISCO

Departamento de Economía Aplicada I

Universidad de Sevilla (España)

Correo electrónico: velasco@us.es

GAVILÁN RUIZ, JOSÉ MANUEL

Departamento de Economía Aplicada I

Universidad de Sevilla (España)

Correo electrónico: gavi@us.es

SÁNCHEZ-REYES FERNÁNDEZ, LUIS MARÍA

Departamento de Economía Aplicada I

Universidad de Sevilla (España)

Correo electrónico: luiss-rf@us.es

ABSTRACT

In this paper, several identities concerning expectation, variance, covariance, cumulative distribution functions, the coefficient of variation, and the Lorenz curve are obtained and they are used in establishing theoretical results. Furthermore, a graphical representation of the variance is proposed which, together with the aforementioned identities, enables the square of the coefficient of variation to be considered as an equality measure in the same way as is the Gini index. A study of the similarities between the theoretical expression of the Gini index and the square of the coefficient of variation is also carried out in this paper.

Keywords: concentration measures; cumulative distribution function; Lorenz curve; mean difference.

JEL classification: C100; C190.

MSC2010: 62-09; 62P20; 91B02.

Similitud entre el cuadrado del coeficiente de variación y el índice de Gini en una variable aleatoria general

RESUMEN

En este trabajo se obtienen diversas identidades relativas a la esperanza, varianza, covarianza, función de distribución acumulada, coeficiente de variación y curva de Lorenz que se usarán para obtener resultados teóricos interesantes. Se construye, además, una representación gráfica de la varianza, la cual, utilizando las propiedades obtenidas, nos indica que el cuadrado del coeficiente de variación se puede considerar como una medida de igualdad, de igual forma que se considera al índice de Gini. En este artículo también se lleva a cabo un estudio de las similitudes entre la expresión teórica del índice de Gini y el cuadrado del coeficiente de variación.

Palabras clave: medidas de concentración; función de distribución; curva de Lorenz; diferencia media.

Clasificación JEL: C100; C190.

MSC2010: 62-09; 62P20; 91B02.



1 INTRODUCTION

Powerful tools, which are specifically designed for certain increasingly difficult problems, are currently under development. Nevertheless, it is not always necessary to design new tools, but to give a new interpretation to other known tools. Thus, there are easy relationships between the main characteristics of a random variable which are widely known but remained unused. In this paper, several identities are obtained from a very simple but powerful result. One particular result leads us to study the square of the coefficient of variation and the Gini index.

The Gini index or Gini coefficient (Gini 1912) is perhaps one of the main inequality measures in the discipline of Economics and it has been applied in many studies. Furthermore, this index can be used to measure the dispersion of a distribution of income, or consumption, or wealth, or a distribution of any other kind (Xu 2004) since, from the statistical point of view, it is a function of the mean difference. Its attractiveness to many economists is that it has an intuitive geometric interpretation, that is, it can be defined as twice a ratio of two regions defined by the line of perfect equality (45-degree line) and the Lorenz curve in the unit box. Furthermore, it is an important component of the Sen index of poverty intensity (Xu and Osberg 2002).

There are two main different approaches for analyzing theoretical results of the Gini index: the one is based on discrete distributions; the other on continuous distributions. Both approaches can be unified (Dorfman 1979), but for some purposes the continuous formulation is more convenient, yielding insights that are not as accessible when the random variable is discrete (Yitzhaki and Schechtman 2005). For this reason, a continuous formulation is considered in this paper.

The major drawback when the Gini index is used is that two very different distributions can have the same value of this index and, therefore, it is not possible to declare which distribution is more equitable. This problem has been faced in the literature by means of stochastic dominance (Fishburn 1980) and inverse stochastic dominance (Muliere and Scarsini 1989). It is worth noting that a more general study is carried out in (Núñez 2006), where several approaches are presented. In this paper, to avoid this situation, it is proved that the square of the coefficient of variation can be thought of as the ratio of the area that lies between the curve of equality and the Lorenz curve in the same way as can the Gini index and, therefore, it can be used as “the most natural” measure to discriminate between two distributions when their Gini indices are the same. Let us note that the square of the coefficient of variation¹ was firstly proposed as a transfer measure in (Shorrocks and Foster 1987) and later in (Davies and Hoy 1994), another possibilities were set up in (Ramos and Sordo 2003). Furthermore, it will also be shown that both coefficients have

¹The main drawback of this coefficient is that it is very sensitive to extreme values (Bartels 1977).

a similar definition. Hence, by using the definition of the coefficient of variation, the Gini index can be defined for any random variable with a non-zero expectation and not only for non-negative expectations.

The rest of the paper is organized as follows: Section 2 presents a result which forms the basis of later developments since it provides identities on probability theory. Notes on mean difference, independence, covariance, and variance are given in Section 3. In Section 4, two equality measures of a non-negative random variable, the Gini index, and the square of the covariation coefficient, are obtained from the previous identities and a relationship between variance, expectation, the cumulative distribution function and the Lorenz curve is given, which provides us with a graphical interpretation of the variance. The identities are generalized and the Gini index is considered for any random variable. Finally, conclusions are drawn.

2 MAIN RESULT

Let us see a simple but important result:

Theorem 1 *Let $g(x)$ be a function such that $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^r |g(x)| dx < \infty$ for $r = 0, 1$. Hence*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x g(x) dx = \int_0^{\infty} (G^*(x) + G^*(-x)) dx \quad (1)$$

where

$$G^*(x) = G_{g(\cdot)}^*(x) = I(x) \int_x^{\infty} g(u) du - I(-x) \int_{-\infty}^x g(u) du, \quad (2)$$

and $I(x) = I_{(0,+\infty)}(x)$ is the indicator function of the interval $(0, +\infty)$.

Proof. It is straightforward by integration by parts. ■

Its generalization to two variables is an immediate consequence of this result.

Corollary 2 *Let $g(x, y)$ be a function such that $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r |y|^s |g(x, y)| dx dy < \infty$, for $r, s = 0, 1$. Hence*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy g(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (G^*(x, y) + G^*(x, -y) + G^*(-x, y) + G^*(-x, -y)) dx dy \quad (3)$$

where $G^*(x, y) = G_{g(x, \cdot)}^*(y)(x)$. ■

The expression of $G^*(x)$ is useful to simplify the thesis of Corollary 2; nevertheless an even simpler expression can be used. If $G = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du$ and $G(x) = \int_{-\infty}^x g(u) du$ are defined, then (1) can be written as:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x g(x) dx = \int_0^{\infty} (G - G(x) - G(-x)) dx. \quad (4)$$

Let $g(x)$ and $g(x, y)$ be the marginal probability density function (pdf) of a random variable X and the joint pdf of a continuous random vector (X, Y) , respectively. Hence, from (2) and (3):

$$G^*(x) = \begin{cases} -F_X(x) & \text{if } x < 0 \\ 1 - F_X(x) & \text{if } x > 0 \end{cases} \quad (5)$$

and

$$G^*(x, y) = F(x, y) - I(x)F_Y(y) - I(y)F_X(x) + I(x)I(y), \quad (6)$$

where $F(x, y)$ is the a joint cumulative distribution function (cdf) of (X, Y) , and $F_X(x)$ and $F_Y(y)$ are marginal cdfs of X and Y , respectively. Therefore, since $E(X)$ is the expectation of X and σ_{XY} is the covariance of (X, Y) , the following result can be stated:

Lemma 3 *Let (X, Y) be a continuous random vector with $\sigma_{XY} < \infty$. Hence*

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x) - F_X(-x)) dx, \quad (7)$$

$$E(XY) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (1 - F_X(x) - F_Y(y) - F_X(-x) - F_Y(-y) + \dots \\ \dots + F(x, y) + F(-x, y) + F(x, -y) + F(-x, -y)) dx dy, \quad (8)$$

$$\sigma_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x, y) - F_X(x)F_Y(y)) dx dy. \quad (9)$$

Proof. Identity (7) is obtained from identities (1) and (5). Identity (8) is given by identities (3) and (6). Identity (7) implies

$$E(X) \cdot E(Y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (1 - F_X(x) - F_Y(y) - F_X(-x) - F_Y(-y) + F_X(x)F_Y(y) + \dots \\ \dots + F_X(-x)F_Y(y) + F_X(x)F_Y(-y) + F_X(-x)F_Y(-y)) dx dy$$

and, therefore

$$E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} ((F(x, y) - F_X(x)F_Y(y)) + (F(-x, y) - F_X(-x)F_Y(y)) + \dots \\ \dots + (F(x, -y) - F_X(x)F_Y(-y)) + (F(-x, -y) - F_X(-x)F_Y(-y))) dx dy$$

and taking into account that:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (F(x, -y) - F_X(x)F_Y(-y)) dy dx = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 (F(x, y) - F_X(x)F_Y(y)) dy dx, \\ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (F(-x, y) - F_X(-x)F_Y(y)) dx dy = \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} (F(x, y) - F_X(x)F_Y(y)) dx dy, \\ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (F(-x, -y) - F_X(-x)F_Y(-y)) dx dy = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 (F(x, y) - F_X(x)F_Y(y)) dx dy,$$

then (9) is obtained. ■

Let us see, in the next section, how Lemma 3 is useful in establishing theoretical results.

3 NOTES ON RANGE, MEAN DIFFERENCE, INDEPENDENCE, AND COVARIANCE OF RANDOM VARIABLES

Note 4 In fact, result (7) can easily be generalized as follows:

$$E(X^{2r+1}) = (2r + 1) \int_0^{\infty} x^{2r} \cdot (1 - F_X(x) - F_X(-x)) dx, \quad \forall r = 0, 1, 2, \dots$$

and, if X is non-negative, then

$$E(X^{r+1}) = (r + 1) \int_0^{\infty} x^r \cdot (1 - F_X(x)) dx, \quad \forall r = 0, 1, 2, \dots$$

That is, the r -th moment about the origin of a non-negative random variable can be obtained from the cdf $F(x)$ directly instead of from the pdf $f(x)$. ▲

Note 5 Let X_1, X_2, \dots, X_n be independent and identically distributed (iid) random variables with the same distribution as X . If the transformations given by $U_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ and $V_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ are considered, then their cdfs are: $F_{U_n}(u) = F^n(u)$ and $F_{V_n}(v) = 1 - (1 - F(v))^n$.

By using (7), $E(V_n) = \int_0^{\infty} (-1 + (1 - F(x))^n + (1 - F(-x))^n) dx$, and $E(U_n) = \int_0^{\infty} (1 - F^n(x) - F^n(-x)) dx$. Hence,

$$E(U_n - V_n) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F^n(x) - (1 - F(x))^n) dx.$$

Furthermore, as a particular case, the mean difference of two iid random variables, $\Delta = E(|X_1 - X_2|)$, can be written as:

$$\Delta = E(U_2 - V_2) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F^2(x) - (1 - F(x))^2) dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(x)(1 - F(x)) dx.$$

▲

Note 6 Usually, the covariance is defined as $Cov(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$ and an interpretation of its meaning with respect to the independence or dependence between X and Y is given a posteriori. From (9), it is possible to give a new introduction to covariance as follows: Given a random vector (X, Y) , the variables X and Y are said to be independent if $F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$, for every $x, y \in \mathbb{R}$. Hence, there is dependence between X and Y if any $x, y \in \mathbb{R}$ exist such that $F(x, y) - F_X(x) F_Y(y) \neq 0$. Therefore, a first measure of dependence or covariation between two random variables can be considered as:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x, y) - F_X(x) F_Y(y)) dx dy,$$

which is named "covariance" between X and Y , and denoted by $Cov(X, Y)$. Once the moments of a random vector are defined, then it can be proved that $Cov(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$. Thus, covariance is introduced from the concept of independence. ▲

Note 7 From (9), $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x, y) - F_X(x)F_X(y)) dx dy$, where $Var(X)$ denotes the variance of X , and as $F(x, y) = P[X \leq x, X \leq y] = P[X \leq \min(x, y)]$, then the variance can be rewritten as:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F_X(\min(x, y)) (1 - F_X(\max(x, y)))) dx dy,$$

and, therefore, it is straightforward to prove, by taking the properties of the cdf into account, that:

$$\frac{1}{2}\Delta^2 = 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(x)(1 - F(x)) dx \right)^2 \leq Var(X) \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{F(x)}\sqrt{1 - F(x)} dx \right)^2$$

which provides us with a lower and an upper bound of the variance. ▲

4 GINI INDEX, COEFFICIENT OF VARIATION, AND A GRAPHICAL REPRESENTATION OF THE VARIANCE

Let X be a non-negative continuous random variable with cdf $F(x)$, pdf $f(x)$ and finite variance. From Note 4, the expectation of X can be written as $E(X) = \mu = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx$. Furthermore, the Lorenz function $L(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x t f(t) dt$ can be considered analogous to a cdf of a non-negative random variable U_X , and by considering $g(x) = \frac{1}{\mu} x f(x)$ in (1), then:

$$\int_0^{\infty} x g(x) dx = \int_0^{\infty} (1 - L(x)) dx \Rightarrow E(X^2) = \mu E(U_X) \Rightarrow Var(X) = \mu (E(U_X) - \mu).$$

However, $E(U_X) - \mu = \int_0^{\infty} (F(x) - L(x)) dx$. Therefore,

$$\int_0^{\infty} (F(x) - L(x)) dx = \frac{Var(X)}{E(X)}. \quad (10)$$

It should be pointed out that result (10) provides us with a relationship between some of the most important characteristics of a non-negative random variable: the expectation, the variance, the cumulative distribution function and the Lorenz curve. Moreover, result (10) gives a new interpretation of the variance of a non-negative random variable as the product of μ and the area enclosed by the cdf $F(x)$ and the Lorenz curve $L(x)$, that is, the variance is the product of A (= $E(X)$) and B in Figure 1.

Let us now introduce an equality measure from the area enclosed between the curve given by $y = F(x)$ and $y = L(x)$, that is, area B in Figure 1. From the previous result, $E(U_X) = \mu + \frac{Var(X)}{\mu}$; it follows that area B is equal to $E[U_X] - \mu$. In order to eliminate the units of the variable and to achieve a relative measure this value is divided by μ , thereby obtaining $\frac{B}{\mu} = E(\frac{1}{\mu} U_X - 1)$. From (10) (let us denote μ by μ_X),

$$CV^2(X) = E \left(\frac{1}{\mu_X} U_X - 1 \right), \quad (11)$$

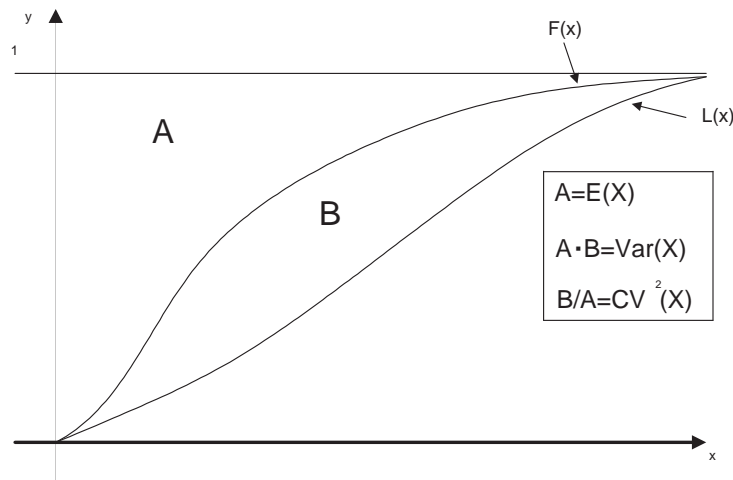


Figure 1: Graphical representation of the mean, the variance and the square of the coefficient of variation of a non-negative random variable.

where $CV(X)$ is the coefficient of the variation of X . Hence, the square of the coefficient of variation has an intuitive geometric interpretation as the ratio of two regions.

It is worth noting that the construction in Figure 1 is similar to that of the Gini index. In order to study this similarity, the transformation $U = F(X)$ is considered, and the Lorenz curve can be written as $L(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^u F^{-1}(t) dt$, $0 \leq u \leq 1$, where F^{-1} is the left inverse of F . Hence, the area enclosed between the curve given by $y = u$ and $y = L(u)$, that is, area B in Figure 2, is an equality measure. In the same way as for $L(x)$, the $L(u)$ function can be considered analogous to a cdf of a non-negative random variable $U_{F(X)}$, and from (7), $E(U_{F(X)}) = \int_0^1 (1 - L(u)) du = \int_0^1 (u - L(u)) du + \frac{1}{2} \leq 1$ (note that $U = F(X)$ is a uniform distribution and $F_U(u) = u$, $0 < u < 1$). Hence, $0 \leq E(U_{F(X)}) - \frac{1}{2} = \int_0^1 (u - L(u)) du \leq \frac{1}{2}$, and multiplying by 2 in order to normalize this expression, results in $0 \leq E(2U_{F(X)} - 1) = 2 \int_0^1 (u - L(u)) du \leq 1$. Furthermore, it is well-known that the Gini index is $IG(X) = 2 \int_0^1 (u - L(u)) du$ and that $E(U) = E(F(X)) = \mu_{F(X)} = \frac{1}{2}$, and hence a similar expression of the square of the coefficient of variation (11) is given by the Gini index:

$$IG(X) = E \left(\frac{1}{\mu_{F(X)}} U_{F(X)} - 1 \right). \quad (12)$$

Hence, the Gini index can be seen as a “normalization” of the square of the coefficient of variation, by using the transformation $U = F(X)$, from (11) and (12). Therefore, the square of the coefficient of variation of X is an equality measure in the same as is the Gini index.

Another two similar expressions, which are straightforward to obtain, for $IG(X)$ and $CV^2(X)$, are given in the following:

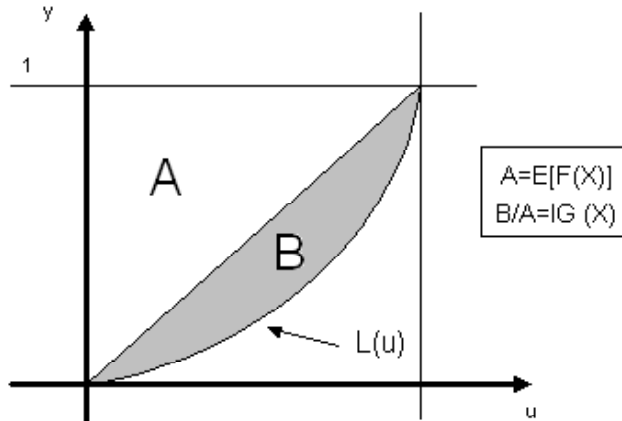


Figure 2: Graphical representation of the Gini index of a non-negative random variable.

In terms of integrals:

$$IG(X) = \frac{1}{E(U)} \int_0^1 (u - L(u)) du,$$

$$CV^2(X) = \frac{1}{E(F^{-1}(U))} \int_0^1 (u - L(u)) dF^{-1}(u), \quad (\text{from (10)}).$$

In terms of covariances:

$$IG(X) = Cov\left(\frac{X}{\mu_X}, \frac{F(X)}{\mu_{F(X)}}\right), \quad (\text{given in (Lerman and Yitzhaki 1984)}).$$

$$CV^2(X) = Cov\left(\frac{X}{\mu_X}, \frac{X}{\mu_X}\right).$$

Note 8 *It is worth bearing in mind that the square of the coefficient of variation, as an inequality measure of a distribution of income (or consumption, or wealth, or a distribution of any other kind), verifies the four properties which are generally postulated in the economic literature on inequality (for the sake of simplicity let us interpret this coefficient on countries): Anonymity (it does not matter who the high and low earners are); Scale Independence (it does not consider the size of the economy, the way it is measured, or whether it is a rich or poor country on average); Population Independence (it does not matter how large the population of the country is); and Transfer Principle (if an income less than the difference is transferred from a rich person to a poor person, then the resulting distribution is more equal) (Dalton 1920). ▲*

Example 4.1 *If $X \in U(a, b)$ (Uniform distribution), then $F(x) = u = \frac{x-a}{b-a}$, with $a \leq x \leq b$ and $dF^{-1}(u) = (b-a)du$. Hence,*

$$IG(X) = 2 \int_0^1 (u - L(u)) du = \frac{2}{b-a} \int_0^1 (u - L(u)) dF^{-1}(u) = \frac{2}{b-a} \mu CV^2(X)$$

$$= \frac{b+a}{b-a} CV^2(X) = \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{b+a}.$$

■

The major drawback (when the Gini index is used) is that there are non-negative random variables X and Y such that $IG(X) = IG(Y)$ and, therefore, it is impossible to quantify which distribution is more equitable. To avoid this situation, and by following the above results, the most natural solution is obtained by calculating the square of the coefficient of variation. Let us see an example:

Example 4.2 Let $X \in U(\frac{1}{49}, 1)$. The square of the coefficient of variation is straightforward to calculate: $CV^2(X) = \frac{1}{3} \frac{(b-a)^2}{(b+a)^2} = 0.3072$, and, from Example 4.1, the Gini index is $IG(X) = \frac{1}{3} \frac{b-a}{b+a} = \frac{8}{25}$.

Let us consider the random variable Y with values and probabilities given by $\{0, 0.5, 1\}$ and $\{0.2, 0.6, 0.2\}$, respectively. In this case, the Gini index is $IG(Y) = \frac{8}{25} = IG(X)$, nevertheless, $CV^2(Y) = 0.4000$ is greater than $CV^2(X)$. Thus, it can be concluded that the distribution of X is more equitable than the distribution of Y . ■

Another expression with regard to the integrals can be given: Let X_1 and X_2 be independent and identically distributed (iid) random variables with the same distribution as X , then:

$$\int_0^1 (u - L(u)) du = \frac{E|X_1 - X_2|}{2\mu};$$

$$\int_0^1 (u - L(u)) dF^{-1}(u) = \frac{E(X_1 - X_2)^2}{2\mu}.$$

The main advantage of the Gini index over the square of the coefficient of variation is that the Gini index is bounded, that is, $0 \leq IG(X) \leq 1$ while the square of coefficient of variation has no upper bound, that is, $0 \leq CV^2(X)$. Nevertheless, the Gini index is only defined for non-negative random variables and this condition is not required by the coefficient of variation. In both cases, by the definition of the $L(\cdot)$ function, it is necessary that $\mu \neq 0$.

The condition $X \geq 0$ leads to a bounded Gini index, but it is also possible to define the Gini index for any X random variable. This is studied in the following section.

5 THE GINI INDEX OF ANY RANDOM VARIABLE

Let X be a continuous random variable with cdf $F(x)$, pdf $f(x)$, $\mu \neq 0$ and finite variance. Clearly, the Lorenz function, $L(x) = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^x t f(t) dt$, cannot be considered as analogous to a cdf of a random variable since $L(x)$ can take negative values. Nevertheless, it is possible to consider $g(x) = \frac{1}{\mu} x f(x)$ in (1) and hence, by using (4):

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \mu \int_0^{\infty} (1 - L(x) - L(-x)) dx.$$

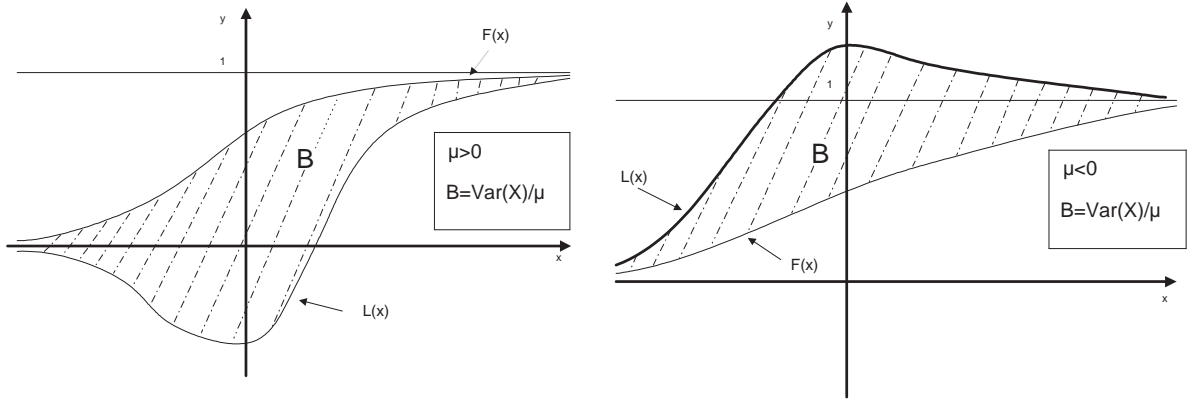


Figure 3: Graphical representation of $B = \text{Var}(X)/E(X)$ from the curves $y = F(x)$ and $y = L(x)$.

Furthermore, by using (7):

$$E^2(X) = \mu E(X) = \mu \int_0^{\infty} (1 - F(x) - F(-x)) dx,$$

and hence $\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \mu \int_0^{\infty} (F(x) - L(x) + F(-x) - L(-x)) dx$. Therefore, as $\int_0^{\infty} (F(-x) - L(-x)) dx = \int_{-\infty}^0 (F(x) - L(x)) dx$, result (10) has been generalized. Let us write it in the form of a theorem.

Theorem 9 *Let X be a continuous random variable with cdf $F(x)$, pdf $f(x)$, $\mu \neq 0$ and finite variance. If the Lorenz function is defined as $L(x) = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^x t f(t) dt$, then*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (F(x) - L(x)) dx = \frac{\text{Var}(X)}{E(X)}. \quad (13)$$

■

If $\text{support}(X) \triangleq \{x / f(x) > 0\} = (a, b)$, with $-\infty \leq a < b \leq \infty$, and $R(x) = F(x) - L(x)$ are considered for any $x \in (a, b)$ (see Figure 3), then:

1. If $\mu > 0$, then $R(x) > 0$, and the maximum is attained in $x = \mu$.
2. If $\mu < 0$, then $R(x) < 0$, and the minimum is attained in $x = \mu$.

Hence, in the same way as for the non-negative random variable X , the square of the coefficient of variation can be considered as an equality measure since:

$$0 \leq \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x) - L(x)) dx = \frac{1}{\mu} \int_0^1 (u - L(u)) dF^{-1}(u) = CV^2(X).$$

The only difference between the general random variable case with regard to the non-negative random variable case is that the graphical interpretation of this coefficient as the ratio between two areas is not possible.

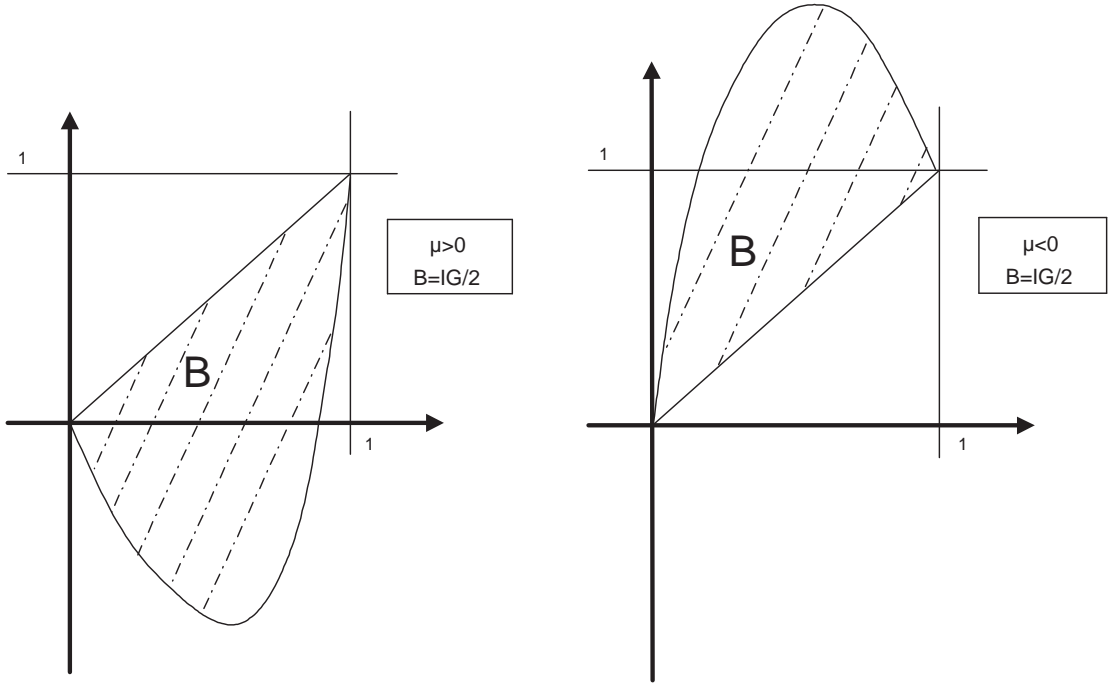


Figure 4: Graphical representation of the Gini index from the line $y = u$ and the curve $y = L(u)$.

On the other hand, the Gini index must be considered in terms of absolute values since if $\mu < 0$ then $u \leq L(u)$ (see Figure 4), that is, $IG(X) = \left| 2 \int_0^1 (u - L(u)) du \right|$. The main problem is that the integral has no upper bound, although the remaining of considerations made for a non-negative random variable still remain valid for a random variable.

Sometimes the Lorenz curve is not known, and only values at certain intervals are given. In that case, the most common technique is to approximate the curve in each interval as a straight line between consecutive points, and therefore area B can be approximated with trapezoids. Thus, if $\{(F_k, L_k), k = 0, 1, \dots, n\}$, where $F_0 = L_0 = 0$ and $F_n = L_n = 1$, are the known points set on the Lorenz curve, with the F_k indexed in increasing order ($F_{k-1} < F_k$), then (Rao 1969):

$$IG = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (F_k L_{k+1} - F_{k+1} L_k) \right|.$$

It is important to note that this expression does not depend on whether the random variable is non-negative. Let us see an example which allows us to clarify the idea of this approach.

Example 5.1 *Four players of cards start a game where each one bets \$100 and a debit balance is allowed. Let us consider the variable $X_t =$ monetary value of each player at time t . A possible change of the distribution of profit and loss in the game is shown in*

Table 1. In this table, it can be seen that, when $x_4 = -200$ and $t = 4$, the Gini index is greater than one, which is consistent because the situation after this sharing out is worse than the earlier case. The Gini index, in the same way as the square of the coefficient of variation, increases when the sharing out is less equitable. Therefore, there is no reason to demand non-negativity in random variables when using the Gini index in equality studies. ■

Table 1: Example of inequality in the game.

t	x_1	x_2	x_3	x_4	IG	CV^2
0	100	100	100	100	0.0000	0.0000
1	150	120	75	50	0.2188	0.1563
2	200	150	50	0	0.4375	0.6250
3	400	200	0	-200	1.2500	5.0000
4	800	100	-200	-300	2.2500	18.5000
5	1000	0	-200	-400	2.7500	29.0000

CONCLUSION

We have obtained several generalizations of some well-known results which establish relationships concerning the joint cdf, the marginal cdfs and other characteristics of a random vector (X, Y) . We have proved that these relationships can be useful in theoretical considerations.

An identity which relates four of the most important characteristics of a random variable (the mean, the variance, the cumulative distribution function, and the Lorenz curve) has also been given. This result provides us with a graphical representation of the mean, the variance and the square of the coefficient of variation in the same figure. Furthermore, new expressions of the Gini index have been given, and they have their counterparts in the square of the coefficient of variation.

In this paper, by following the same interpretation as the one of the coefficient of variation, the Gini index is defined as an equality measure for random variables which do not have to be non-negative.

References

- Bartels, C.P.A. (1977): Economic aspects of regional welfare. *Martinus Nijhoff Sciences Division*.
- Dalton, H. (1920): Measurement of the inequality of income. *Economic Journal* 30, 348–361.
- Davies, J. and Hoy, M. (1994): The normative significance of using third-degree stochastic dominance in comparing income distributions. *Journal of Economic Theory* 64, 520–530.
- Dorfman, R. (1979): A formula for the Gini coefficient. *Review of Economics and Statistics* (61), 146–149.
- Fishburn, P. (1980): Stochastic dominance and moments of distributions. *Mathematics of Operations Research* 5, 94–100.
- Gini, C. (1912): Variabilità e Mutabilità. *Studi Economico-Giuridici dell'Università di Cagliari*. 3, 1–158.
- Lerman, R. and Yitzhaki, S. (1984): A note on the calculation and interpretation of the Gini index. *Economics Letters* (15), 363–368.
- Muliere, P. and Scarsini, M. (1989): A note on stochastic dominance and inequality measures. *Journal of Economic Theory* 49(2), 314–323.
- Núñez, J.J. (2006): La desigualdad económica medida a través de las curvas de Lorenz. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa* 2, 67–108.
- Ramos, H. and Sordo, M.A. (2003): Dispersion measures and dispersive orderings. *Statistics and Probability Letters* 61, 123–131.
- Rao, V. (1969): Two decompositions of concentration ratio. *Journal of the Royal Statistical Society, Serie A* 132, 418–425.
- Shorrocks, A. and Foster, J.E. (1987): Transfer sensitive inequality measures. *Review of Economic Studies* 54(1), 485–497.
- Xu, K. (2004): How has the literature on Gini's index evolved in the past 80 years? *Economics working paper*, December 2004, Dalhousie University, Canada.
- Xu, K. and Osberg, L. (2002): The social welfare implications, decomposability, and geometry of the sen family of poverty indices. *Canadian Journal of Economics* 35(1), 138–152.
- Yitzhaki, S. and Schechtman, E. (2005): The properties of the extended Gini measures of variability and inequality. *Technical report, Social Science Research Network*. September 2005. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=815564>.



UNIVERSIDAD
**PABLO
OLAVIDE**
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (10). Páginas 19–42.
Diciembre de 2010. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art41.pdf>

Identificación de submercados de vivienda en España

ALTUZARRA ARTOLA, AMAIA
Departamento de Economía Aplicada V
Universidad del País Vasco

Correo electrónico: amaia.altuzarra@ehu.es

ESTEBAN GALARZA, MARISOL
Departamento de Economía Aplicada V
Universidad del País Vasco

Correo electrónico: marisol.esteban@ehu.es

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es estudiar si el comportamiento del mercado de la vivienda es homogéneo en todas las provincias españolas o si, por el contrario, en cada provincia o grupo de provincias predomina un comportamiento específico, dando lugar a la existencia de submercados de vivienda provinciales. La principal fuente de información utilizada son datos para todas las provincias españolas procedentes de la Estadística de Transacciones Inmobiliarias, proporcionados por el Ministerio de Vivienda. Aplicamos el Análisis Factorial Múltiple y el Análisis Cluster para identificar los rasgos que caracterizan el mercado inmobiliario de cada provincia o grupo de provincias. Los resultados muestran que el comportamiento de los mercados de vivienda de las provincias españolas es heterogéneo, poniendo de relieve la presencia de submercados de vivienda y la existencia de dinámicas regionales diferenciadas.

Palabras clave: mercado inmobiliario regional; Análisis Factorial Múltiple; España.

Clasificación JEL: R21; R31.

MSC2010: 62H25; 62H30.

Identifying housing submarkets in Spain

ABSTRACT

The objective of this work is to study whether the behaviour of the housing market is homogeneous in all provinces or, on the contrary, there is a specific housing behaviour particular to each province or group of provinces, leading to the existence of regional housing markets. The main data source used in this study comes from the Housing Transactions Statistics, provided by the Ministry of Housing for all the Spanish provinces. We applied Multiple Factorial Analysis and Cluster Analysis in order to identify the main features that characterise the housing market of each province or group of provinces. The results show that the behaviour in the Spanish provinces housing markets is heterogeneous, detecting the presence of housing submarkets and highlighting the existence of different regional dynamics.

Keywords: regional housing market; Multiple Factorial Analysis; Spain.

JEL classification: R21; R31.

MSC2010: 62H25; 62H30.



1. INTRODUCCIÓN

Durante más de una década el mercado inmobiliario español experimentó una fuerte expansión que se extendió hasta principios del año 2007, momento en el que empezaron a manifestarse signos de un progresivo ajuste del mercado. El año 2007, por tanto, pone fin a un largo periodo de expansión. Determinar, sin embargo, el tiempo y la magnitud del cambio en el ciclo del mercado inmobiliario español no es tarea fácil (Ball, 2007).

La intensa actividad inmobiliaria que se desarrolló en el periodo señalado se produjo en un contexto de fuerte expansión de la demanda de vivienda. Esta demanda estuvo impulsada por el crecimiento de la población, la generación de empleo, el aumento de los ingresos per cápita de los hogares y las favorables condiciones financieras. Además, la entrada en el mercado inmobiliario de inmigrantes extranjeros fue un fenómeno peculiar del mercado español. Algo similar podría decirse de la demanda de vivienda por parte de la población no residente. La expansión inmobiliaria a la que hemos asistido fue, por tanto, resultado de la interacción de factores económicos, sociales y demográficos. Estos factores, no obstante, no operaron con la misma intensidad en todas las provincias españolas.¹

El objetivo de este trabajo consiste en analizar si el comportamiento del mercado inmobiliario es homogéneo en todas las provincias españolas o si, por el contrario, en cada provincia o grupo de provincias predomina un comportamiento específico que justificaría la presencia de diferentes mercados inmobiliarios provinciales. En otras palabras, el propósito de este trabajo podría expresarse en los términos de la siguiente pregunta: ¿existe un único mercado inmobiliario nacional, o por el contrario existen mercados inmobiliarios regionales? Si de los resultados se desprendiese la existencia de una demanda de vivienda con características específicas en cada submercado, se podrían derivar importantes consecuencias de cara al diseño de las políticas públicas de vivienda. Una de las contribuciones del presente trabajo es la consideración de la hipótesis de que el mercado inmobiliario español no es necesariamente un mercado homogéneo y que, por tanto, pueden estar coexistiendo diferentes submercados con características específicas en cada provincia o grupos de provincias.

El estudio se ha realizado en dos etapas. En la primera, se han fijado las posiciones relativas de las provincias españolas en relación con el comportamiento del mercado inmobiliario y se han clasificado en grupos en función de estos resultados. En la segunda, se han analizado los cambios relativos en la dinámica inmobiliaria de las provincias ocurridos durante el periodo 2006–2007.

El resto del documento se estructura de la siguiente forma. En el apartado segundo se realiza una revisión teórica de la literatura. En el apartado tercero presentamos la metodología utilizada en el trabajo. En la cuarta parte, analizamos los resultados obtenidos. Y, finalmente, exponemos las principales conclusiones del estudio.

¹ Una versión anterior de este artículo fue presentada en el X Congreso de la Asociación Andaluza de Ciencia Regional, celebrado en Baeza (Jaén), y publicada en las Actas de la XXXIV Reunión de Estudios Regionales (2008). El presente artículo es una versión revisada y mejorada del citado trabajo.

2. MARCO TEÓRICO

El rápido crecimiento de los precios de la vivienda que se produjo en España durante más de dos décadas ha despertado un interés creciente por conocer el funcionamiento del mercado inmobiliario y los factores que determinan los precios de la vivienda. Una gran parte de los trabajos que se han ocupado de estudiar esta cuestión lo han hecho desde la perspectiva macroeconómica. Estas investigaciones se han centrado en el estudio de diferentes dimensiones del mercado inmobiliario. Algunos de estos trabajos han hecho hincapié en la demanda de vivienda (Bajari, Chan, Krueger y Miller, 2010; Barrios y Rodríguez Hernández, 2008; Tiwari, 2000), otros se han preocupado de analizar la oferta de vivienda (Glaeser y Giourko, 2003; Downs, 1991; Ihlandfeldt, 2007) y otros muchos se han centrado en el estudio del precio de la vivienda (Esteban y Altuzarra, 2008; Green y Hendershott, 1996).

Otra parte importante de las investigaciones, sin abandonar el enfoque macroeconómico, ha puesto el acento en el estudio del mercado de la vivienda desde la perspectiva urbana y regional. Esta línea de trabajo se ha ocupado fundamentalmente de estudiar la existencia de submercados inmobiliarios y de analizar sus características y funcionamiento (Holly, Pesaran y Yamagata, 2006; Alkay, 2008; Cook, 2005; Bhattacharjee y Jensen-Butler, 2005; López, 2002; Drake, 1995). El estudio de los submercados se ha abordado tanto desde la perspectiva teórica como desde la empírica. En el plano teórico, existe un cierto grado de consenso en que los mercados de vivienda están compuestos por un conjunto de submercados (Bourassa *et al.*, 2003), sin embargo, el acuerdo no es tan evidente a la hora de definir qué debe entenderse por submercado (Watkins, 2001). Para algunos autores, un mercado de vivienda existe cuando se agregan submercados que tienen funciones de demanda y de oferta iguales (Meen, 1996). Un corolario de esta definición es que los submercados no necesariamente tienen que estar en contiguos en el espacio, ya que los requisitos para poder agregar submercados están más relacionados con las características socioeconómicas que con la proximidad geográfica (Cancelo y Espasa, 2000). En esta misma línea, otros trabajos han negado la existencia de mercados de vivienda muy agregados, en especial de un mercado nacional. Consideran más adecuado referirse a un conjunto de mercados regionales interconectados entre sí, pero con rasgos estructurales heterogéneos (Meen, 1996, Drake, 1995).

En el plano de la evidencia empírica, el debate de esta línea de investigación se ha centrado en determinar qué procedimiento es el más idóneo para definir los submercados. Los procedimientos más utilizados han consistido, por un lado, en la delimitación *a priori* de los submercados de vivienda y, por otro, en la aplicación de técnicas estadísticas orientadas a identificar submercados sin imponer restricciones previamente. Respecto al primero de los métodos, algunos autores han optado por una definición *a priori* de los submercados, sobre la base de las variables que han consideran subjetivamente relevantes. Estas variables se refieren normalmente a las características socioeconómicas de las áreas geográficas, a los límites de los gobiernos regionales, entre otras. Un problema metodológico de este método es que no garantiza que los submercados resultantes tengan un

máximo grado de homogeneidad interna y de heterogeneidad externa. En relación con el procedimiento basado en el uso de técnicas estadísticas, un número relativamente escaso de investigaciones han permitido que los datos determinen la estructura de los submercados mediante la utilización de métodos factoriales y análisis cluster (ver Dale-Johnson (1982) para el caso de Glasgow, Bourasa *et al.* (1997) para Sydney y Melbourne, en Australia, y Bourassa *et al.* (2003) para Auckland, en Nueva Zelanda). Esta metodología ha sido ampliamente utilizada en otras disciplinas; sin embargo, su aplicación en la investigación sobre mercado inmobiliario ha sido mucho más limitada.

Este trabajo se inscribe en esta última línea de trabajo, proporcionando evidencia empírica sobre la existencia de submercados de vivienda de España que contribuya a llenar el relativo vacío que existe en esta área de investigación. Hasta donde nosotros conocemos, además, no existen trabajos similares para el estudio del mercado inmobiliario de España.

2.1. Condiciones del mercado inmobiliario en España

La demanda de vivienda depende de factores económicos, demográficos y sociales. La literatura económica incluye como factores económicos, la renta real disponible de los hogares, el coste de uso de la vivienda y la riqueza real neta de los hogares. Un aumento de la renta real disponible conduce a una mayor demanda de vivienda, lo que empuja al alza los precios de la vivienda. Gran parte del aumento de los precios de la vivienda en los años recientes está relacionado con la mejora de las condiciones de vida de la población española. Entre 2001 y 2006 el empleo creció en 3,6 millones de empleos. La renta bruta disponible, no obstante, continua presentando diferencias interprovinciales significativas.

La vivienda, como otra forma de capital, tiene un coste de uso que afecta negativamente a su demanda. Los componentes más importantes del coste son el tipo de interés hipotecario y el resto de condiciones financieras. El tipo de interés hipotecario cayó rápida y significativamente en España desde mediados de 1990, impulsando así la demanda de vivienda.

Entre los factores demográficos que operan en el mercado de vivienda español destacan principalmente dos. Por un lado, el intenso proceso de inmigración iniciado desde mediados de 1990, que ha supuesto entrada legal de cerca de tres millones de personas, distribuidos de forma desigual por la geografía española. Por otro lado, la demanda de vivienda no solo está influida por los cambios en la población total sino también por la estructura de edad de la población. Esta variable está estrechamente relacionada con el ratio de formación de hogares. En España la demanda de vivienda primaria es mayor para el grupo de edad de 20-34 años, mientras que la demanda por razones de descanso es superior para el grupo de edad de 35-49 años (García Montalvo y Mas, 2000). Precisamente estos dos grupos de población son los que han estado creciendo a un ritmo más rápido entre 1991 y 2005 debido al “*babyboom*” de los años 60 y 70. Mientras que la población total ha crecido un 11,8% en ese periodo, el grupo de edad de 20-34 años ha crecido un 16,5% y el grupo de

edad de 35-49 años, 43,2%.² La evolución demográfica ha estado, además, acompañada de importantes cambios sociales tales como la integración de la mujer en el mercado laboral, el aumento de divorcios, separaciones, familias monoparentales y otras formas de hogares. Las tendencias sociales y demográficas apuntadas han dado lugar a un aumento en el número de hogares (32,2% entre 1996 y 2006). Esta evolución ha sido especialmente significativa en la Costa Mediterránea, Islas Baleares y Madrid y alrededores.

Existe también un componente de carácter cultural que ha contribuido a la expansión inmobiliaria en España. El tamaño medio de las viviendas en España tiende a ser más pequeño que en otros países de la Unión Europea. Sin embargo, los hogares españoles, a diferencia de los hogares en otros países europeos, cuando experimentan aumentos en sus rentas tienden a adquirir una segunda vivienda en el campo o en la costa en lugar de adquirir una vivienda principal de mayor tamaño. Más de una quinta parte de los hogares españoles ya disponen de una segunda vivienda. Los lugares elegidos mayoritariamente para adquirir una segunda vivienda son las zonas próximas a la costa.

Finalmente, es importante destacar que en España este tipo de demanda de segunda vivienda o demanda por razones de descanso se ha realizado no solo por parte de los residentes sino también por no residentes, originarios principalmente de la Unión Europea. La presencia de no residentes también ha sido mucho mayor en las provincias costeras que en el interior.

3. METODOLOGÍA, FUENTE DE INFORMACIÓN Y SELECCIÓN DE VARIABLES

3.1. Metodología

El estudio del comportamiento del mercado inmobiliario regional en España se ha realizado mediante la técnica estadística del Análisis Factorial Múltiple (AFM). El AFM es un método factorial adaptado al tratamiento de tablas de datos en las que un mismo conjunto de individuos (provincias, en nuestro caso) se describe a través de varios grupos de variables. La estructuración de los datos en grupos de variables alcanza resultados más ricos que otras técnicas de análisis factorial porque permite: por un lado, obtener una tipología de los individuos definida a través del conjunto de variables; por otro, analizar las relaciones entre las variables que integran cada grupo y entre los diferentes grupos de variables. El AFM, en este trabajo, se ha completado con un Análisis Cluster. Este último análisis clasifica a los individuos (provincias) en diferentes grupos. Los individuos incluidos en un mismo grupo tienen características homogéneas y están determinados por un conjunto de variables. Los individuos que pertenecen a grupos distintos tienen características heterogéneas.

3.2. Fuente de información

Los datos utilizados provienen fundamentalmente de la Estadística de Transacciones Inmobiliarias (ETI) elaborada por el Ministerio de Vivienda para los años 2006 y 2007. Esta fuente de datos se ha completado con otra información extraída de las bases de datos del INE. Concretamente, se ha

² Datos obtenidos del INE.

incorporado información provincial sobre el índice de renta bruta disponible per cápita, la variación anual de la población de más de 25 años desde el año 2000 y la variación anual de precios en el período desde el año 2000.

La ETI es una *encuesta de demanda de vivienda* cuyo principal objetivo es cuantificar el número total de viviendas que han sido objeto de venta en el mercado inmobiliario en España. Se elabora a partir de una base de datos, generada de las transacciones inmobiliarias realizadas en las notarías y gestionada por el Consejo General del Notariado. La población objeto de estudio está compuesta por todas las viviendas objeto de compraventa formalizadas en escritura pública en oficina notarial. El ámbito geográfico comprende todo el territorio nacional, incluidas las ciudades autónomas de Ceuta y Melilla. El período de referencia de la estadística es mensual aunque en las dos primeras ediciones los datos son tratados trimestralmente. En nuestro trabajo, sin embargo, hemos optado por hacer un tratamiento anual, dados la cortedad de la serie y el objetivo del estudio.

La ETI recoge información sobre diferentes aspectos de la dinámica inmobiliaria. En primer lugar, incluye información sobre el número de transacciones inmobiliarias realizadas en cada una de las provincias españolas, diferenciando el origen del comprador: residente español, residente extranjero y no residente. En segundo lugar, recoge datos sobre el precio medio de las viviendas objeto de transacción. Y en tercer lugar, incluye información sobre la naturaleza de las viviendas: protegidas y libre.

3.3. Selección de variables

La selección de las variables se ha realizado teniendo en cuenta las diferentes dimensiones que, de acuerdo con la teoría, afectan al mercado inmobiliario y la disponibilidad de la información. Todas las variables incluidas son de naturaleza continua.

Del conjunto de información contenida en la ETI se ha seleccionado un conjunto de variables que han sido agrupadas en cuatro grupos para cada año de referencia. Por tanto, tenemos ocho tablas, cuatro por cada año. Los grupos de variables se refieren a: la dimensión económica, la especialización en segunda vivienda, la expansión geográfica de las grandes metrópolis y la dinámica inmobiliaria de los residentes (nacionales y extranjeros). El Cuadro 1 presenta las variables incluidas en cada grupo.

Las variables contenidas en el grupo “dinámica económica” pretenden capturar la capacidad económica de los residentes de cada provincia para participar en el mercado inmobiliario mediante la compra de una vivienda primaria o una segunda vivienda. Las variables incluidas son el “índice de renta bruta disponible per cápita” de cada provincia (DIN_ECON_1) y el porcentaje de residentes de la provincia que compran viviendas localizadas en otras provincias sobre el total de residentes que realizan transacciones en la provincia (DIN_ECON_2).

Las variables incorporadas en el grupo “especialización en segunda vivienda” reflejan la capacidad de la provincia para atraer compradores de otras provincias y del resto del mundo; es decir, se trata de detectar las provincias proveedoras, principalmente, de segunda vivienda. Se incluyen en

este grupo tres variables. En primer lugar, el “porcentaje de no residentes que hacen transacciones de viviendas localizadas en la provincia sobre el total de no residentes que hacen transacciones en el conjunto de España” (ESV_1), que pretende detectar las provincias en las que tienden a concentrarse las compras de vivienda de los no residentes. En segundo lugar, el “porcentaje de transacciones de vivienda localizadas en la provincia realizadas con no residentes sobre el total de transacciones de viviendas localizadas en la provincia realizadas con compradores de fuera de la provincia” (ESV_2), que mide la importancia relativa que tienen los no residentes en el mercado de segunda vivienda de la provincia. En tercer lugar, se ha incluido el “porcentaje de transacciones de viviendas realizadas con compradores de fuera de la provincias sobre el total de transacciones realizadas con compradores de fuera de la provincia en el conjunto de España” (ESV_3), que pretende capturar en que regiones se concentra fundamentalmente la demanda de segunda vivienda. En definitiva, este conjunto de variables pretenden detectar los lugares adonde se dirige la adquisición de segunda vivienda (tanto por parte de residentes como de no residentes), así como la importancia que las transacciones con compradores de fuera de la provincia tienen para la propia provincia.

El grupo “expansión geográfica de grandes metrópolis” incluye tres variables, que pretenden captar si se está produciendo un fenómeno de expansión de las grandes ciudades hacia localidades limítrofes. La primera variable es el “porcentaje de transacciones de vivienda localizadas en la provincia realizadas *con residentes de una misma provincia* sobre el total de transacciones de vivienda localizadas en la provincia realizadas con compradores de fuera de la provincia” (EGM_1), que pretende detectar aquellas provincias que atraen grandes masas de compradores *desde una misma provincia limítrofe*. La segunda variable es el “porcentaje de transacciones de vivienda localizadas en la provincia realizadas con compradores de fuera de la provincia sobre el total de transacciones de vivienda realizadas en la provincia” (EGM_2), que mide la importancia de los residentes de otras provincias en el mercado inmobiliario de la provincia. La correlación entre estas dos variables será máxima cuando todas las viviendas que se venden fuera de la provincia son adquiridas por residentes de una misma provincia, por lo que ambas variables refuerzan mutuamente la existencia de un fenómeno de expansión de las grandes ciudades hacia lugares limítrofes. Finalmente, se incluye en este grupo el “porcentaje de residentes de la provincia que realizan transacciones de viviendas localizadas fuera de la provincia sobre el total de residentes que hacen transacciones fuera de la provincia en España” (EGM_3), que indica el peso relativo que tiene cada provincia en el conjunto de España en la compra de viviendas localizadas fuera de la provincia.

Para aproximar la “dinámica inmobiliaria de los residentes” se han incluido las siguientes variables. Por un lado, se incluye, la “variación de población de más de 25 años desde el año 2000” (DIN_INM_2) hasta el año de referencia.³ Por otro lado, se cuenta con el “porcentaje de transacciones de viviendas localizadas en la provincia realizadas con residentes extranjeros sobre el total de

³ Se ha tomado como referencia la población con más de 25 años por ser la edad a partir de la cual, fundamentalmente, se produce la demanda de vivienda.

transacciones de vivienda de la provincia” (DIN_INM_3). Esta última variable pretende aproximar la importancia que tiene para el mercado inmobiliario de la provincia la presencia de población residente extranjera. Finalmente se ha incorporado la “variación de precios desde el año 2000” (DIN_INM_1) hasta el año de referencia. La importancia de la evolución del precio de la vivienda en la demanda de los distintos tipos de vivienda podría inducir a pensar que dicha variable es susceptible de incluirse en el segundo grupo de variables. Hemos optado, no obstante, por incorporarla en el presente grupo por entender que se relaciona más con la demanda que llega por parte de los residentes (nacionales y extranjeros) que por parte de los no residentes. En todas las provincias, sin excepción, las transacciones con residentes superan de forma muy significativa las transacciones con no residentes. Pues bien, este grupo de variables pretende detectar la importancia relativa que tiene para la provincia la demanda de la población residente, muy particularmente de la población residente extranjera.

Cuadro 1. Variables incluidas en el análisis

GRUPO	VARIABLE	ETIQUETA
Dinámica económica	<ul style="list-style-type: none"> · Índice de renta bruta per cápita (INE). · Porcentaje de residentes de la provincia que compran viviendas localizadas en otras provincias sobre el total de residentes que realizan transacciones en la provincia. 	DIN_ECO_1 DIN_ECO_2
Especialización en segunda vivienda	<ul style="list-style-type: none"> · Porcentaje de no residentes que hacen transacciones de viviendas localizadas en la provincia sobre el total de no residentes que hacen transacciones en el conjunto de España. · Porcentaje de transacciones de vivienda localizadas en la provincia realizadas con no residentes sobre el total de transacciones de viviendas localizadas en la provincia realizadas por compradores de fuera de la provincia.⁴ · Porcentaje de transacciones de viviendas realizadas con compradores de fuera de la provincia sobre el total de transacciones realizadas con compradores de fuera de la provincia en el conjunto de España. 	ESV_1 ESV_2 ESV_3
Expansión geográfica de grandes metrópolis	<ul style="list-style-type: none"> · Porcentaje de transacciones de vivienda localizadas en la provincia realizadas con residentes de una misma provincia sobre el total de transacciones de vivienda localizadas en la provincia realizadas con compradores de fuera de la provincia. · Porcentaje de transacciones de vivienda localizadas en la provincia realizadas con compradores de fuera de la provincia sobre el total de transacciones de vivienda realizadas en la provincia. · Porcentaje de residentes de la provincia que realizan transacciones de viviendas localizadas fuera de la provincia sobre el total de residentes que hacen transacciones fuera de la provincia en España. 	EGM_1 EGM_2 EGM_3
Dinámica inmobiliaria de los residentes	<ul style="list-style-type: none"> · Variación de precios en el período desde 2000 (INE). · Variación del grupo de población (>25 años) desde 2000 (INE). · Porcentaje de transacciones de viviendas localizadas en la provincia realizadas con residentes extranjeros sobre el total de transacciones de vivienda de la provincia. 	DIN_INM_1 DIN_INM_2 DIN_INM_3

Contamos por tanto, con una matriz de 52 individuos (provincias) y 22 variables, indicativas del comportamiento del mercado inmobiliario, divididas a su vez en 8 grupos, cuatro por cada año. De esta manera, podemos estudiar, por un lado, el comportamiento del mercado inmobiliario de las

⁴ En la expresión “compradores de fuera de la provincia” se incluyen residentes (españoles y extranjeros) y no residentes.

diferentes provincias, teniendo en cuenta la información conjunta de las dos oleadas de información y de todas las variables. Por otra parte, podemos analizar el comportamiento temporal durante los dos periodos desde las cuatro perspectivas o dimensiones en las que han sido agrupadas las variables. El Cuadro 2 presenta una descriptiva de las variables incluidas en el estudio en cada uno de los años de referencia.

Cuadro 2. Descripción de las variables utilizadas

	Año 2006				Año 2007			
	Media	D.S.	Máx	Mín	Media	D.S.	Máx	Mín
DIN_ECO_1	97,34	15,17	130,81	75,94	97,31	15,64	129,24	74,58
DIN_ECO_2	7,59	5,38	26,12	0,99	7,24	6,09	28,42	0,86
ESV_1	6,61	11,32	54,50	0	5,18	8,35	37,95	0,16
ESV_2	1,92	4,88	24,59	0,00	1,92	4,62	21,95	0,01
ESV_3	1,92	2,13	12,47	0,04	1,92	1,87	10,74	0,03
EGM_1	39,24	20,84	91,40	12,23	40,14	20,56	92,41	12,89
EGM_2	19,01	11,55	45,02	2,21	18,24	11,27	45,67	2,14
EGM_3	1,92	4,97	32,58	0,14	1,92	4,70	31,11	0,15
DIN_INM_1	129,41	40,06	218,10	44,50	129,41	40,06	218,10	44,50
DIN_INM_2	12,90	8,29	30,62	1,22	14,52	9,52	36,98	1,51
DIN_INM_3	12,27	7,20	33,64	2,72	12,03	6,87	33,79	2,91

4. RESULTADOS

4.1. Resultados del AFM

En esta sección se procede a la presentación e interpretación de los resultados más representativos e ilustrativos al analizar las ocho tablas mencionadas.

El Cuadro 3 presenta el histograma de los cinco primeros valores propios del análisis global de las ocho tablas yuxtapuestas. Pone de manifiesto la existencia de un primer eje global preponderante, en el sentido de que recoge un importante porcentaje de inercia, un 35,28% frente al 21,13% de variabilidad que se proyecta en el segundo factor global. Aunque la tercera componente también recoge una inercia importante, un 15,84%, nuestra atención se va a centrar en el plano principal generado por las dos primeras componentes⁵ ya que en él se observan las principales caracterizaciones de las provincias.⁶

⁵ Los dos primeros factores, como se apunta, explican el 56,41% de la inercia total. En el análisis de resultados, por tanto, es preciso tener en cuenta esta circunstancia, ya que el porcentaje de varianza no explicada, no es despreciable, ya que se situaría cerca del 44%.

⁶ Los coeficientes RV obtenidos (y disponibles por parte de las autoras, bajo petición) ponen de manifiesto los grupos que presentan una estructura interna con mayores similitudes o diferencias y, además, son directamente comparables entre ellos. En nuestro caso, a través de estos coeficientes, se comprueba que los grupos están estrechamente relacionados en el tiempo, esto es, que el grupo que expresa, por ejemplo, el “dinamismo inmobiliario” para el año 2006 está altamente correlacionado con ese mismo grupo para el año 2007. Esto indica

Cuadro 3. Histograma de los 5 primeros factores; análisis global

Numero	Valor propio	Porcentaje	Porcentaje acumulado
1	4,0291	35,28	35,28
2	2,4128	21,13	56,41
3	1,8088	15,84	72,24
4	1,0819	9,47	81,72
5	0,5224	4,60	86,32

Las variables que más contribuyen a la formación de los ejes aparecen representadas en el Gráfico 1. Por razones de simplificación y claridad, se representan en el primer plano factorial únicamente las variables para el año 2007.

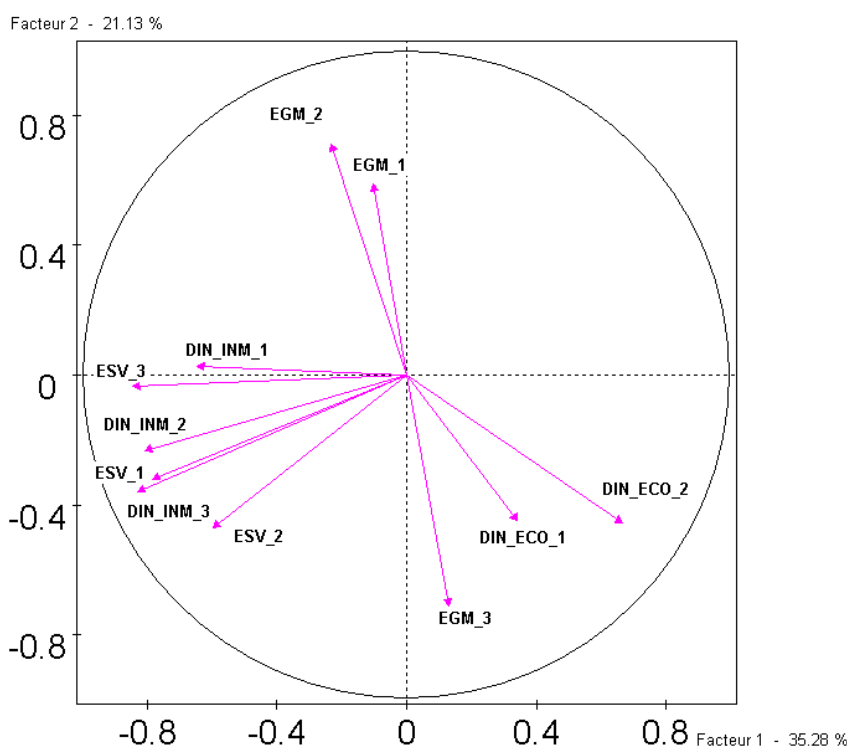


Gráfico 1. Representación gráfica de las variables en el primer plano factorial

Las variables relacionadas con la “especialización en segunda vivienda” y la “dinámica inmobiliaria de los residentes” son las que más contribuyen a la formación del primer factor. Del gráfico se deduce que la práctica totalidad de las variables de estos grupos tienen coordenadas de igual signo (semiplano de la izquierda), lo que se traduce en un efecto talla, muy habitual en el AFM. Puede

que existen cambios, pero que dichos cambios son leves. El cambio más significativo se produce en el grupo relativo a la “especialización en segunda vivienda”. Le siguen en intensidad de relación, aunque a cierta distancia, los grupos relativos a la “especialización en segunda vivienda” y “dinámica inmobiliaria”, que toman valores en torno a 0,5.

decirse, por tanto, que este primer eje pone de relieve, de izquierda a derecha, una clasificación general del comportamiento relativo de las provincias de mayor a menor actividad del mercado inmobiliario, aunque esta clasificación es parcial, dado el gran peso que algunas variables, como hemos apuntado, tienen en el segundo eje.

El segundo factor pone de manifiesto una segunda caracterización de las provincias, distinta a la reflejada en el eje anterior. Las variables que más contribuyen a su formación son las relacionadas con la “dimensión económica” y la “extensión geográfica de las metrópolis”. El Cuadro A.2 del Anexo presenta las correlaciones de las variables con el primer y segundo factor. Se puede observar que la correlación de las variables que forman los grupos “especialización en segunda vivienda” y “dinámica inmobiliaria de los residentes” tiene altas correlaciones con el primer factor, mientras que las variables que están contenidas en los grupos “dimensión económica” y la “extensión geográfica de las metrópolis” tienen mayor correlación con el segundo factor.

Con base en esta disposición de las variables, en el primer plano factorial (Gráfico 2) se han representado los *individuos medios*, esto es, la *posición media* relativa que ocupan las provincias, teniendo en cuenta todos los puntos de vista o grupos de variables considerados.

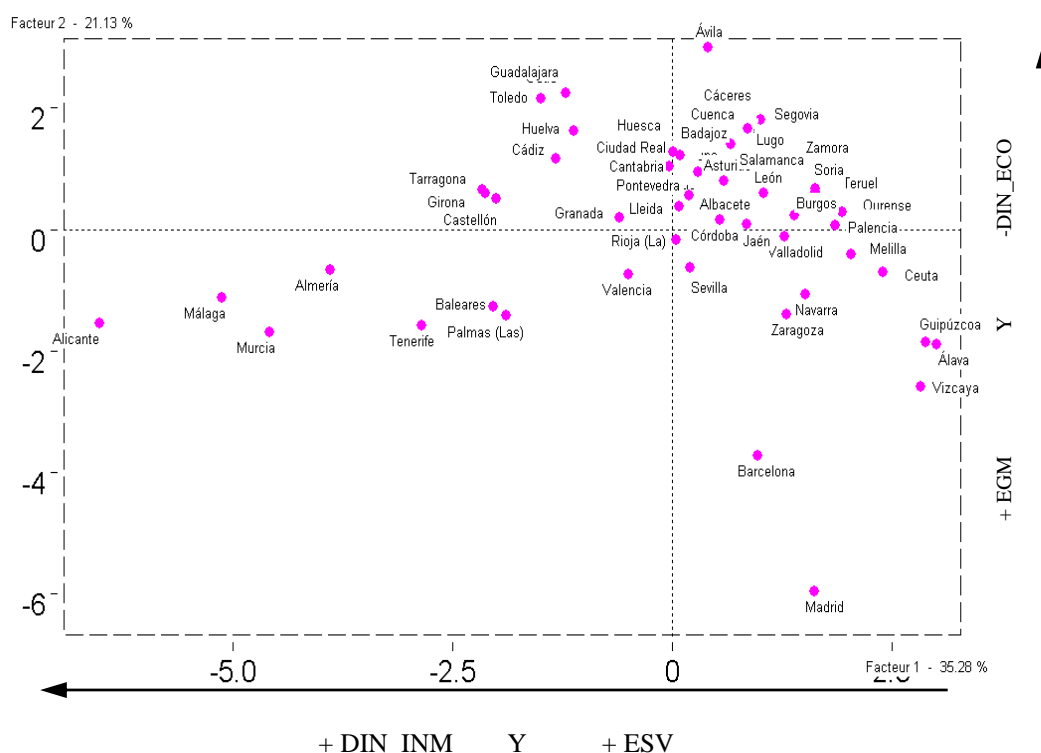


Gráfico 2. Representación gráfica de las provincias en el primer plano factorial

De acuerdo con la interpretación que hemos realizado de la proyección de las variables, el primer factor de variabilidad de la nube de los individuos refleja, con algunas excepciones que comentaremos posteriormente, el *ranking* general de provincias en cuanto al comportamiento de su

mercado inmobiliario en relación a la especialización en segunda vivienda y al dinamismo del mercado. Así, las provincias con mayor dinámica inmobiliaria de los residentes y especialización en segunda vivienda serían en orden decreciente: Alicante, Málaga, Murcia, Almería, Tenerife, Baleares, Las Palmas, Tarragona, Girona y Castellón. Las provincias que ocupan los últimos lugares serían Vizcaya, Guipúzcoa y Álava.

El segundo eje proporciona información sobre la expansión geográfica de las metrópolis y la dinámica económica. En la parte positiva del eje se sitúan provincias hacia donde se ha producido la expansión de las grandes ciudades y que tienen escasa dinámica económica. Más concretamente, en la parte positiva aparecen Ávila, Guadalajara, Toledo y Segovia, entre otras, que encabezan un nuevo *ranking* caracterizado por ser lugares hacia donde se ha producido la extensión geográfica de las grandes metrópolis. La sección negativa de dicho eje representa las provincias caracterizadas por un mayor dinamismo económico, entre las que destacan Barcelona, Madrid, Vizcaya, Álava y Guipúzcoa.

4.2. Análisis Cluster

La aplicación del análisis cluster permite agrupar a las provincias en cinco grupos o clases diferentes. El análisis cluster se ha realizado a partir de la información obtenida en el AFM anterior en los cinco primeros factores extraídos. Las provincias que pertenecen a un mismo grupo tienen características homogéneas en cuanto a su comportamiento en el mercado inmobiliario. Las provincias que pertenecen a grupos diferentes presentan rasgos distintos. Es preciso señalar que las provincias en el seno de un mismo grupo no comparten necesariamente todas las variables que caracterizan al grupo, aunque sí gran parte de ellas. El Gráfico 3 muestra una representación de los resultados del análisis cluster.

El grupo 1 contiene a cinco provincias: Vizcaya, Barcelona, Guipúzcoa, Álava y Madrid. Estas provincias se caracterizan por tener elevado porcentaje de residentes que compran vivienda en otras provincias. En este grupo de provincias, el 27,80% de los residentes han comprado viviendas localizadas en otras provincias frente al 12,03% que representa la media para el conjunto de España.⁷ También, estas provincias concentran un elevado porcentaje de compradores de viviendas localizadas en otras provincias (11,15% es la media para este grupo frente al 1,92% para el conjunto de España). Finalmente, estas regiones presentan un alto índice de renta bruta disponible per cápita, que se sitúa en torno al 124 frente al 97 para el conjunto de España. Se trata por tanto, de provincias que destacan por su dinamismo económico y porque sus residentes son demandantes de vivienda fuera de sus fronteras, mayoritariamente de segunda vivienda.

El grupo 2 reúne a once provincias: Palencia, Valladolid, Burgos, Soria, Melilla, Ourense, Ceuta, Zaragoza, Navarra, La Rioja y Teruel. Estas provincias se distinguen por tener niveles inferiores a la media del conjunto de España de las variables DIN_INM_1 y ESV_3. En las provincias

⁷ Las medias que se refieren en esta sección corresponden al año 2007. Véase el Anexo para conocer también las medias para el año 2006.

de este grupo, la variación del precio de la vivienda entre 2000 y 2007 fue del 82,68%, mientras que en el conjunto de España este porcentaje fue del 129,41%. Respecto a la segunda variable citada (ESV_3), este grupo de regiones concentra como media el 0,56% de las transacciones con residentes de fuera de la provincia frente al 1,92% que concentra como media el conjunto de España. Se trata, de provincias con escaso dinamismo inmobiliario y económico.

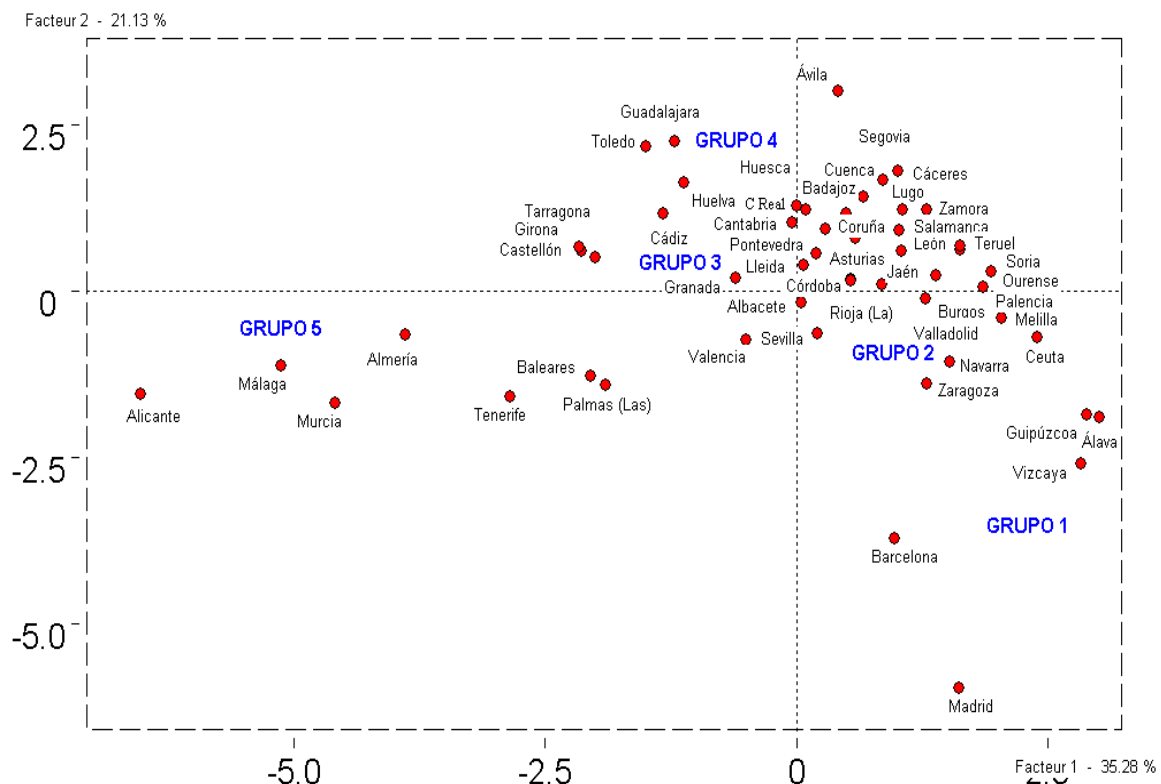


Gráfico 3. Representación gráfica del análisis cluster

El grupo 3 incluye a una veintena de provincias (Coruña, Albacete, Pontevedra, Ciudad Real, Salamanca, Badajoz, Lugo, León, Asturias, Cáceres, Granada, Cádiz, Cantabria, Córdoba, Cuenca, Huelva, Jaén, Sevilla, Valencia y Zamora). Este grupo de provincias se caracteriza por tener valores inferiores a la media del conjunto de España en las variables DIN_INM_2, DIN_INM_3 y DIN_ECO_1. La variación de la población en el periodo considerado es del 10% como media para este grupo de provincias, mientras que para el conjunto de España dicho porcentaje es del 14,52%. Respecto a la segunda de las variables (DIN_INM_3), el porcentaje de transacciones con residentes extranjeros es como media del 3,1% en este grupo de provincias frente al 7,24% para el conjunto de España. Finalmente, respecto a la variable DIN_ECO_1, el índice de renta bruta disponible es para este conjunto de provincias de 86,52 mientras que para el conjunto de España se sitúa en el 97,34. En definitiva, este grupo comparte con el grupo anterior un escaso dinamismo del mercado inmobiliario y económico.

El grupo 4 está formado por nueve provincias (Huesca, Guadalajara, Tarragona, Toledo, Lleida, Castellón, Segovia, Girona y Ávila) que destacan por valores superiores a la media del conjunto de España en las variables EGM_1 y EGM_2. Este grupo, por tanto, tiene como rasgos fundamentales el alto porcentaje de transacciones de vivienda con residentes de una misma provincia (el 73,18% de las transacciones que se hacen con residentes de fuera de la provincias proceden de una misma provincia, frente al 40,14% en el conjunto de España⁸). Además, el 35,12% de las transacciones se realizan con residentes de fuera de la provincia, mientras que para el conjunto de España el porcentaje es 18,24%. Las provincias de este grupo están situadas próximas a grandes metrópolis como Madrid y Barcelona y representan territorios hacia donde se está produciendo la expansión geográfica de estas ciudades.

Finalmente, el grupo 5 agrupa a siete provincias: Almería, Murcia, Tenerife, Málaga, Baleares, Las Palmas y Alicante. Estas provincias se caracterizan por tener elevados valores en las variables ESV_2, ESV_1, DIN_INM_3, DIN_INM_2 y ESV_3. Más concretamente, en este grupo de provincias el porcentaje de transacciones con no residentes representa un 23,98% (frente al 5,18% en el conjunto de España) de las transacciones totales realizadas con residentes fuera de la provincia. La presencia de demanda de vivienda por parte de no residentes no solo es importante para el mercado de estas provincias sino que también es relevante desde la perspectiva nacional, ya que en estas provincias se concentra como media al 11,69% de los no residentes que han realizado adquisiciones de vivienda (frente al 1,92% para el conjunto de España). Otra característica importante de este grupo es el peso relativo de la demanda de vivienda de los residentes extranjeros. El porcentaje de transacciones con residentes extranjeros sobre el total de transacciones de la provincia es del 19,78% como media en este grupo, mientras que para el conjunto de España este porcentaje se sitúa en el 7,24%. La variación de la población de más de 25 años en el periodo considerado también es un rasgo predominante en este grupo (variación de la población en dicho tramo de edad es del 28,79% en este grupo frente al 9,52% para el conjunto de provincias). Finalmente, este grupo de provincias concentra un porcentaje importante de las transacciones con residentes de fuera de la provincia que se realizan en el conjunto de España. (4,25% frente al 1,92% en el conjunto de España). Son por tanto, provincias que destacan por el dinamismo inmobiliario de los residentes, sobre todo de los extranjeros, y por su fuerte especialización en segunda vivienda. Además, han satisfecho una parte importantísima de la demanda que llega de los no residentes.⁹

Los grupos obtenidos a partir del análisis cluster revelan la presencia de provincias caracterizadas por variables específicas, lo que pone de manifiesto la presencia en el mercado de vivienda español de distintos mercados inmobiliarios provinciales. El hecho de que el mercado

⁸ Se ha comprobado que la provincia de procedencia de los compradores es una provincia limítrofe. El dato referido al conjunto de España, sin embargo, no tiene esta característica.

⁹ Conviene resaltar la naturaleza distinta de la demanda de no residentes y de la demanda de residentes extranjeros. Mientras que la primera se trata de demanda de segunda vivienda, principalmente, la demanda de residentes extranjeros es fundamentalmente una demanda de primera vivienda.

inmobiliario en España no sea un mercado homogéneo tiene importantes corolarios desde la perspectiva de la política de vivienda. Las actuaciones públicas deberían redefinir el ámbito de intervención, superando el esquema nacional y dando paso a disposiciones que tengan en cuenta las particularidades que inequívocamente presentan las diferentes provincias o grupos de provincias.

Por otro lado, la heterogeneidad encontrada en el comportamiento de los mercados inmobiliarios de las provincias españolas puede además contribuir a explicar, al menos en parte, la dinámica económica e inmobiliaria de cada provincia. Precisamente, en la siguiente sección se realiza un análisis del impacto que la crisis económica e inmobiliaria está teniendo en los grupos de provincias con mayor actividad inmobiliaria.

4.3. Análisis temporal del comportamiento del mercado inmobiliario de las provincias

Los acontecimientos económicos tales como la elevación del tipo de interés hipotecario, el endurecimiento de los créditos, el estancamiento del sector de la construcción, entre otros, afectaron y están afectando al mercado inmobiliario español. Por ello, pese a que los datos utilizados en este trabajo contemplan únicamente dos periodos y cualquier conclusión que se extraiga debe tomarse con cautela, resulta significativo analizar los cambios surgidos en el mercado inmobiliario español. El retroceso en la actividad del mercado inmobiliario ha afectado a un importante número provincias españolas aunque de forma heterogénea.

Del año 2006 al 2007 se ha producido una caída en el número total de transacciones de vivienda realizadas en España del 13,16%. El descenso también ha afectado al número de transacciones realizadas con residentes extranjeros que cayó un 18,65%. La mayor caída se ha producido, sin embargo, en el número de transacciones realizadas con no residentes, que ha experimentado un descenso del 47,3% (de 17.212 a 9.076 transacciones). También ha decrecido el número de residentes que hacen transacciones realizadas fuera de la provincia en un 10,03%.

Esta sección trata de detectar los *cambios relativos* registrados en el mercado inmobiliario regional español, principalmente en aquellas provincias que tradicionalmente venían registrando un marcado dinamismo en el mercado de vivienda. La técnica estadística del AFM utilizada en este trabajo, resulta idónea para analizar estas cuestiones.

En el apartado anterior representábamos gráficamente la *posición media relativa* que alcanzaba cada provincia teniendo en cuenta conjuntamente la información de las dos oleadas de información. Sin embargo, una de las virtudes de la técnica estadística que utilizamos es que permite proyectar en el plano factorial las provincias desde los distintos puntos de vista que hemos considerado. Así, cada provincia podría representarse en el plano factorial mediante nueve puntos, uno de ellos reflejaría la posición media relativa de la provincia y, el resto, las posiciones parciales relativas de cada provincia correspondiente a cada uno de los ocho puntos de vista. El plano factorial en el que los individuos aparecen representados por diferentes puntos es de gran riqueza interpretativa porque permite detectar la existencia de provincias con comportamientos heterogéneos, en el sentido

que la posición que ocupan en un determinado punto de vista no corresponde a la posición que presentan en otro u otros.

En los Gráficos 4 y 5¹⁰ se representa la proyección de diferentes provincias por diferentes puntos, que muestran la *posición parcial relativa* de cada una de ellas, esto es, la correspondiente a algunos de los ocho puntos de vista estudiados en este trabajo. Se ha optado por representar únicamente los puntos de vista correspondientes a la “dinámica inmobiliaria de los residentes” y a la “especialización en segunda vivienda” en cada uno de los años de referencia. Concretamente, en el Gráfico 4 se representa el dinamismo inmobiliario en el año 2006 y 2007 y en el Gráfico 5 la especialización en segunda vivienda para los mismos años de referencia. Además, en aras de una mayor claridad, se ha representado únicamente la posición relativa parcial de las provincias que, de acuerdo con el análisis realizado anteriormente, han exhibido en el pasado una mayor actividad en el mercado inmobiliario.

Las flechas del Gráfico 4 representan la trayectoria que ha seguido la provincia en el tiempo desde el punto de vista de la dinámica inmobiliaria de los residentes. Las provincias que presentan una trayectoria hacia la izquierda estarían mostrando un avance en *términos relativos* de la dinámica inmobiliaria de los residentes y lo contrario ocurre cuando la trayectoria se dirige hacia la derecha.

En todas las provincias representadas, a excepción de Murcia, se observa un desplazamiento hacia la izquierda de las trayectorias. Estos desplazamientos vienen provocados fundamentalmente por el comportamiento de la variable DIN_INM_3. Las provincias proyectadas han experimentado un descenso del número de transacciones totales (excepto Málaga, que experimenta un leve aumento). Sin embargo, tal y como se puede observar en el Cuadro A.3 del Anexo, en todos los casos el descenso porcentual en el número de transacciones totales es superior a la caída porcentual en el número de transacciones con residentes extranjeros. Esto ha provocado que las transacciones con la población extranjera hayan ganado posiciones relativas en el año 2007 y este fenómeno se refleja en el plano factorial con el desplazamiento hacia la izquierda de las trayectorias. En el caso de Murcia, se ha producido un descenso en el número total de transacciones del 11,27% y en el número total de transacciones con residentes extranjeros del 20,73%, lo que ha supuesto un retroceso del peso relativo que tienen las transacciones de vivienda realizadas con la población extranjera en la provincia y por tanto, la trayectoria se desplaza hacia la derecha.

Una conclusión que podría desprenderse de lo expuesto es que la demanda de la población extranjera llegada a través de los procesos migratorios está de alguna manera conteniendo la caída de las transacciones totales de vivienda, ya que aunque ha descendido, lo ha hecho a una escala menor que las transacciones con otro tipo de residentes y con no residentes.

¹⁰ Para facilitar la interpretación de estos gráficos, se ha realizado un “zoom” sobre el tercer cuadrante del plano factorial. Se observa que la longitud de los ejes se ha modificado respecto de la representada en los Gráficos 2 y 3. Se debe a que en estos últimos aparecían proyectados únicamente los *individuos medios*, obtenidos como resultado del estudio de los ocho grupos de variables en conjunto. Cuando las provincias son proyectadas desde los diferentes puntos de vista, se distribuyen por el plano factorial de forma más dispersa.

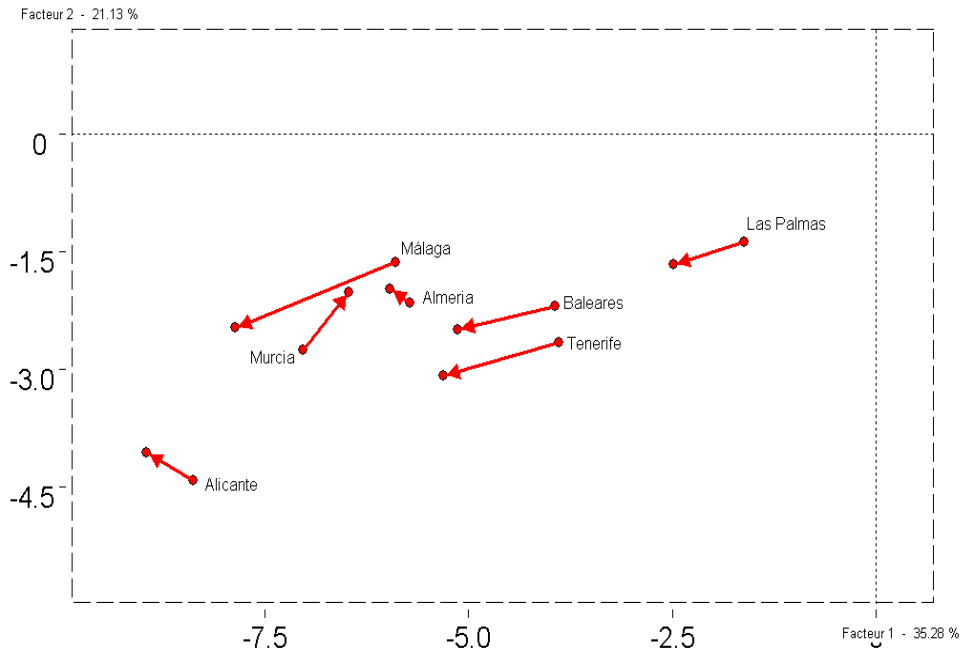


Gráfico 4. Posición parcial (*dinámica inmobiliaria de residentes*) de las provincias

Las flechas del Gráfico 5 representan la trayectoria que ha seguido la provincia en el tiempo desde el punto de vista de la especialización en segunda vivienda. Cuando las provincias presentan una trayectoria hacia la izquierda significa que se ha producido un *avance relativo* de la especialización en la provisión de segunda vivienda y lo contrario es cierto cuando la trayectoria se desplaza hacia la derecha.

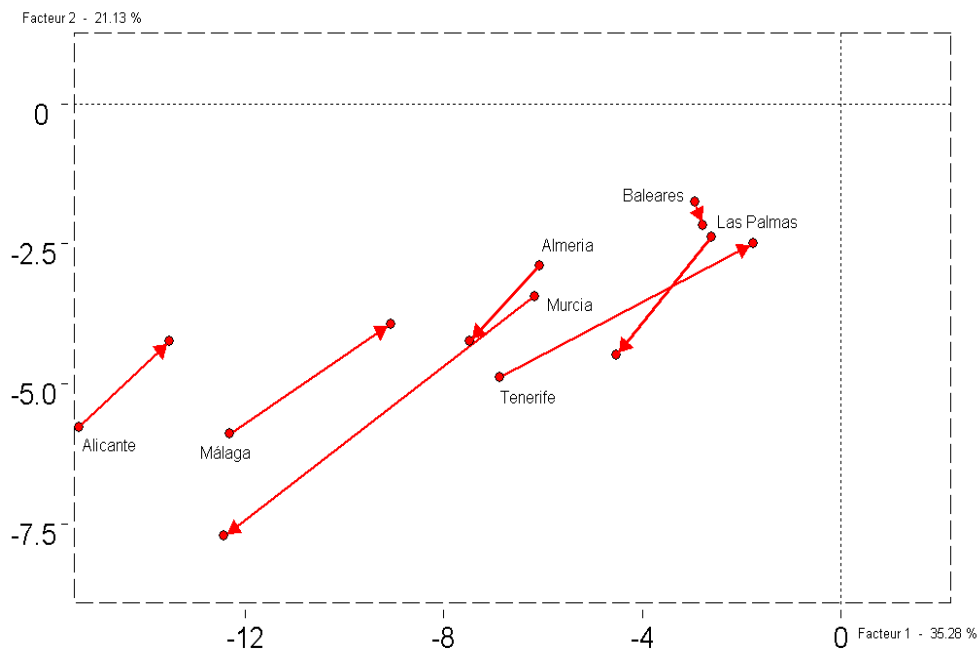


Gráfico 5. Posición parcial (*especialización en segunda vivienda*) de las provincias

Alicante, Málaga y Tenerife han experimentado un repliegue como centros de atracción para los demandantes de segunda vivienda tanto por parte de los residentes en otras provincias como, muy particularmente, por parte de no residentes. En estas tres provincias se ha producido una caída de las transacciones realizadas con compradores de otras provincias del 28,9%, 26,7% y 62,7%, respectivamente (columna IV del Cuadro A.4 del Anexo), muy superiores a la media española, que se sitúa en el 17,4%. Especialmente significativa es la caída de las transacciones con no residentes que descienden un 59,5%, 65,1% y 83,9%, respectivamente (columna V), también por encima del descenso contabilizado para el conjunto de España (47,3%). Dado que la caída de las transacciones con no residentes es superior a la observada en el conjunto de compradores de fuera de la provincia, la demanda de no residentes pierde peso relativo como demandante de segunda vivienda (columna II). Los descensos tan significativos que han tenido estas provincias, sobre todo en la demanda de no residentes, han hecho que pierdan posiciones relativas como proveedoras de segunda vivienda, sobre todo para los no residentes. Todo ello justifica el desplazamiento de la trayectoria hacia la derecha.

En el caso de Almería y Baleares, el descenso en la demanda de no residentes es mucho menor y más en la línea del observado en el conjunto de transacciones realizadas con compradores de fuera de la provincia. Por tanto, la pérdida del peso relativo de la demanda de no residentes en el conjunto de transacciones realizadas con compradores de fuera de la provincia es más moderada. El comportamiento de la demanda de no residentes en estas provincias ha provocado una ganancia de posiciones relativas en el conjunto de España, particularmente en el caso de Almería. Todo ello justifica el movimiento hacia la izquierda de la trayectoria de esta provincia, que refleja un avance en términos relativos como proveedora de segunda vivienda.

Un proceso distinto ha sucedido en Murcia. En esta provincia se ha producido un descenso de las transacciones realizadas con compradores de fuera de la provincia del 3,3% (inferior al registrado como media en España). Por otro lado, se ha observado un incremento de las transacciones realizadas con no residentes del 14%, superando en términos absolutos a Alicante en la provisión de vivienda a este tipo de demanda. Esto ha provocado un avance en las posiciones relativas en el conjunto de España.

Finalmente, Las Palmas es la única provincia representada que ha experimentado un aumento de las transacciones realizadas con compradores de fuera de la provincia (3%). También han aumentado las transacciones con no residentes (1,5%). Esto se ha traducido en un avance relativo de la provincia como proveedora de segunda vivienda, especialmente a no residentes, por ello la trayectoria que dibuja esta provincia se desplaza hacia la izquierda.

Se observa, por tanto, que la demanda de no residentes ha influido de forma notable en la redistribución de las posiciones relativas que ocupan las provincias en el conjunto de España, desplazando a algunas provincias que tradicionalmente han sido grandes proveedoras de segundas viviendas.

5. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo se ha realizado un estudio del comportamiento del mercado inmobiliario español, desde una perspectiva regional. Más concretamente, se ha analizado si el mercado inmobiliario de las provincias españolas es homogéneo o, por el contrario, en cada provincia o grupo de provincias prevalecen determinadas características, poniendo de relieve la presencia de submercados inmobiliarios. La metodología utilizada es el Análisis Factorial Múltiple y el Análisis Cluster.

Los resultados muestran que el mercado inmobiliario español no es un mercado homogéneo. El análisis cluster muestra la coexistencia de al menos cinco submercados de vivienda: (1) provincias de alto dinamismo económico y cuyos residentes son demandantes de segunda vivienda en otras provincias; (2) provincias en estancamiento inmobiliario; (3) provincias en estancamiento económico e inmobiliario con bajo nivel de renta y baja variación de la población; (4) provincias dinámicas como resultado de la expansión de las grandes metrópolis; y (5) provincias dinámicas especializadas en la provisión de segunda vivienda a residentes y no residentes.

Asimismo, el análisis temporal ha permitido detectar que en el último año de referencia se ha producido un repliegue de la actividad del mercado inmobiliario en España. Este retroceso ha afectado a un importante número de provincias españolas aunque de forma heterogénea, modificando las posiciones relativas que ocupa cada provincia en relación con las distintas dimensiones del mercado inmobiliario que se han estudiado. Las provincias más afectadas han sido aquellas que en los últimos años se habían destacado por ser proveedoras de segunda vivienda a demandantes residentes y no residentes.

La heterogeneidad en el comportamiento de los submercados inmobiliarios pone de manifiesto la existencia de dinámicas territoriales diferenciadas en España. La política de vivienda ha considerado tradicionalmente que el mercado nacional es homogéneo y las medidas que se han diseñado han seguido un patrón único para todas las regiones. No obstante, los resultados muestran que el diseño de la política de vivienda debería tener en cuenta las especificidades propias de cada región y reflejar los problemas derivados de cada tipo de demanda de vivienda que predomina (mercados con baja demanda, demanda de no residentes, demanda de residentes extranjeros, etc.), las cuestiones relacionadas con la disponibilidad de renta y el comportamiento de los precios en cada provincia. Esto es, un modelo único de política de vivienda puede no ser el más adecuado para dar respuesta a los problemas que plantean los mercados inmobiliarios de las distintas áreas geográficas. Más bien, el modelo debería contener una gama de iniciativas variada para apoyar los desafíos de cada submercado. Se hace necesario, por tanto, avanzar en el conocimiento de los mecanismos que operan en un determinado submercado para comprender mejor cómo se configuran los submercados de vivienda y para identificar la mejor manera de intervenir en dichos submercados.

El trabajo sugiere algunas líneas de investigación que estarían orientadas a confirmar la existencia de submercados inmobiliarios en España y a profundizar en el conocimiento de su funcionamiento. La falta de series temporales largas para las variables relevantes al nivel de

desagregación espacial conveniente impone con frecuencia restricciones a los avances que serían necesarios. Teniendo en cuenta estas limitaciones, una línea de trabajo que planteamos consiste en corroborar la presencia de submercados inmobiliarios en España mediante el estudio del comportamiento de los precios de la vivienda a lo largo del tiempo en las diferentes provincias. Los análisis de cointegración proporcionan la técnica adecuada para detectar las relaciones a corto y largo plazo entre los precios referidos. La existencia de relación a largo plazo entre los precios de las viviendas de *todas* las provincias españolas permitiría hablar de un único mercado inmobiliario, esto es, de un mercado compuesto por la agregación de submercados que tienen similares oferta y demanda de viviendas. Por el contrario, un comportamiento a largo plazo heterogéneo de los precios sería consistente con la existencia de submercados inmobiliarios. La identificación de relaciones a largo plazo entre los precios de vivienda en los grupos de provincias obtenidos en el presente trabajo confirmaría nuestros resultados.

Una línea de trabajo alternativa consistiría en aceptar la existencia de submercados de vivienda en España y analizar, a través del comportamiento de los precios de la vivienda a lo largo del tiempo, si los submercados de vivienda identificados guardan algún tipo de relación entre ellos. Dentro de esta línea de investigación, resultaría de especial interés contrastar dos hipótesis alternativas. Por un lado, la hipótesis contenida en la teoría del efecto ola (*riffle effect*), que sugiere que las variaciones de los precios que se producen en un submercado se difunden de forma progresiva hacia otros submercados. Por otro lado, la hipótesis desarrollada dentro de la teoría de la brecha cíclica, según la cual la ausencia de relación a largo plazo entre los precios de los submercados puede estar encubriendo una tendencia de dichos precios a divergir (converger) en las fases alcistas (recesivas) del ciclo inmobiliario. En cualquier caso, un mejor conocimiento de las características y funcionamiento de los submercados inmobiliarios puede aportar nuevas claves para el diseño de las políticas de vivienda que tengan en cuenta las especificidades de cada submercado.

BIBLIOGRAFÍA

- Alkay, E. (2008) “Housing submarkets in Istanbul”, *International Real Estate Review*, 11, 1, 113–127.
- Altuzarra, A., Esteban, M.S. (2008) “Análisis regional del mercado inmobiliario español”, *Actas de la XXXIV Reunión de Estudios Regionales*, 2008.
- Álvarez-Lois, P., Nuño Barrau, G. (2007) “Análisis de los precios de la vivienda desde una perspectiva provincial”, *Situación Inmobiliaria, Servicios de Estudios Económicos*, BBVA, Junio.
- Bajari, P., Chan, P., Krueger, D., Mille, D. (2010) “A Dynamic Model of Housing Demand: Estimation and Policy Implications”, *C.E.P.R. Discussion Papers*, 7911.
- Ball, M. (2007) *European Housing Review 2007*, Brussels: RICS.
- Barrios, J., Rodríguez Hernández, J.E. (2008) “Estimación microeconómica de la tenencia y demanda de vivienda en España según la localización”, *Estudios de Economía Aplicada*, 25, 453–484.

- Bhattacharjee, A., Jensen-Butler, C. (2005) "A Model of Regional Housing Markets in England and Wales," *CRIEFF Discussion Papers 0508*, Centre for Research into Industry, Enterprise, Finance and the Firm.
- Bourassa, S.C., Hamelink, F, Hoesli, M., MacGregor, B.D. (1997) "Defining housing submarkets", *Journal of Housing Economics*, 8, 160–183.
- Bourassa, S.C., Hoesli, M., Peng, V.S. (2003) "Do housing submarkets really matter?", *Journal of Housing Economics*, 12, 12–28.
- Cancelo, J.R., Espasa, A. (2000) "Análisis cuantitativo de los precios de la vivienda principales resultados e implicaciones sobre el funcionamiento del mercado de la vivienda en España", *Statistics and Econometrics Series (I)*, Working Paper 00-2.
- Cook, S. (2005) "Detecting long-run relationship in regional house prices in the UK", *International Review of Applied Economics*, 19, 1, 107–118.
- Dale-Johnson, D. (1982) "An alternative approach to housing market segmentation using hedonic pricing data", *Journal of Urban Economics*, 11, 311–332.
- Downs, A. (1991) "The advisory commission on regulatory barriers to affordable housing: its behaviour and accomplishments", *Housing Policy Debate*, 2, 4, 1095–1137.
- Drake, L. (1995) "Testing for convergence between UK regional house prices", *Regional Studies*, 29, 4, 357–366.
- Esteban, M., Altuzarra, A. (2008) "A model of the Spanish housing market", *Journal of Post Keynesian Economics*, 30, 3, 353–374.
- García Montalvo, J., Más, M. (2000) *La vivienda y el sector de la construcción en España*, Valencia, Fundación Bancaja.
- Glaeser, E., Gyourko, J. (2003) "The impact of zoning on housing affordability", *NBER Working Papers Series*, 8835.
- Ihlandfeldt, K.R. (2007) "The effect of land use regulation on housing and land prices", *Journal of Urban Economics*, 61, 420–435.
- Holly, S., Pesaran, M.H., Yamagata, T. (2006) "A Spatio-Temporal Model of House Prices in the US" *Cambridge Working Papers in Economics*, 0654, Faculty of Economics, University of Cambridge.
- Ihlandfeldt, K.R. (2007) "The effect of land use regulation on housing and land prices", *Journal of Urban Economics*, 61, 420–435.
- Landaluce, M.I., Aparicio, S. (2000) "La importancia de la estructuración en tablas de datos: una aplicación", *Estudios de Economía Aplicada*, 15, 103–124.
- Lopez, M.C. (2002) "Modelos econométricos del mercado de la vivienda en las regiones españolas", *Working Paper Series Economic Developmen*, 59.
- Meen, G. (1996) "Spatial aggregation, spatial dependence and predictability in the UK housing market", *Housing Studies*, 11, 345–372.
- Watkins, G.A. (2001) "The definition and identification of housing markets", *Environment and Planning A*", 33, 2235–2253.

ANEXO

Cuadro A.1. Descripción de los grupos de provincias resultantes del análisis cluster

CLASSE 1 / 5									
V.TEST	PROBA	MOYENNES		ECARTS TYPES		VARIABLES CARACTERISTIQUES			IDEN
		CLASSE	GENERALE	CLASSE	GENERAL	NUM.LIBELLE			
CLASSE 1 / 5 (POIDS = 5.00 EFFECTIF = 5) bb1b									
5.35	0.000	27.80	12.03	3.76	6.87	30.07_DIN_ECO_2			
4.66	0.000	26.69	12.27	4.85	7.20	76.06_DIN_ECO_2			
4.58	0.000	11.15	1.92	11.27	4.70	29.07_EGM_3			
4.54	0.000	11.62	1.92	12.07	4.97	75.06_EGM_3			
4.07	0.000	123.87	97.34	6.63	15.17	79.06_DIN_ECON_1			
3.83	0.000	123.07	97.31	6.21	15.64	33.07_DIN_ECO_1			
CLASSE 2 / 5									
V.TEST	PROBA	MOYENNES		ECARTS TYPES		VARIABLES CARACTERISTIQUES			IDEN
		CLASSE	GENERALE	CLASSE	GENERAL	NUM.LIBELLE			
CLASSE 2 / 5 (POIDS = 11.00 EFFECTIF = 11) bb2b									
-2.38	0.009	0.56	1.92	0.35	2.13	62.06_ESV_3			
-2.54	0.006	0.64	1.92	0.42	1.87	16.07_ESV_3			
-4.31	0.000	82.68	129.41	27.17	40.06	77.06_DIN_INM_1			
-4.31	0.000	82.68	129.41	27.17	40.06	31.07_DIN_INM_1			
CLASSE 3 / 5									
V.TEST	PROBA	MOYENNES		ECARTS TYPES		VARIABLES CARACTERISTIQUES			IDEN
		CLASSE	GENERALE	CLASSE	GENERAL	NUM.LIBELLE			
CLASSE 3 / 5 (POIDS = 20.00 EFFECTIF = 20)									
-2.69	0.004	10.00	14.52	5.09	9.52	40.07_DIN_INM_2			
-2.72	0.003	8.91	12.90	4.55	8.29	86.06_DIN_INM_2			
-3.08	0.001	3.91	7.24	2.41	6.09	25.07_DIN_INM_3			
-3.67	0.000	4.09	7.59	2.87	5.38	71.06_DIN_INM_3			
-4.03	0.000	86.52	97.34	8.05	15.17	79.06_DIN_ECO_1			
-4.12	0.000	85.89	97.31	7.94	15.64	33.07_DIN_ECO_2			
CLASSE 4 / 5									
V.TEST	PROBA	MOYENNES		ECARTS TYPES		VARIABLES CARACTERISTIQUES			IDEN
		CLASSE	GENERALE	CLASSE	GENERAL	NUM.LIBELLE			
CLASSE 4 / 5 (POIDS = 9.00 EFFECTIF = 9) bb4b									
5.25	0.000	73.18	40.14	22.58	20.56	22.07_EGM_1			
5.12	0.000	71.94	39.24	22.48	20.84	68.06_EGM_1			
4.90	0.000	35.12	18.24	7.69	11.27	15.07_EGM_2			
4.81	0.000	36.02	19.01	7.91	11.55	61.06_EGM_2			
CLASSE 5 / 5									
V.TEST	PROBA	MOYENNES		ECARTS TYPES		VARIABLES CARACTERISTIQUES			IDEN
		CLASSE	GENERALE	CLASSE	GENERAL	NUM.LIBELLE			
CLASSE 5 / 5 (POIDS = 7.00 EFFECTIF = 7) bb5b									
6.47	0.000	32.59	6.61	10.60	11.32	57.06_ESV_2			
6.34	0.000	23.98	5.18	8.45	8.35	11.07_ESV_2			
5.96	0.000	11.69	1.92	6.81	4.62	9.07_ESV_1			
5.80	0.000	19.78	7.24	4.64	6.09	25.07_DIN_INM_3			
5.79	0.000	11.96	1.92	7.61	4.88	55.06_ESV_1			
4.69	0.000	16.55	7.59	4.55	5.38	71.06_DIN_INM_3			
4.33	0.000	25.65	12.90	3.11	8.29	86.06_DIN_INM_2			
4.21	0.000	28.76	14.52	3.22	9.52	40.07_DIN_INM_2			
3.84	0.000	4.82	1.92	3.61	2.13	62.06_ESV_3			
3.50	0.000	4.25	1.92	3.17	1.87	16.07_ESV_3			

Cuadro A.2. Matriz de correlaciones de las variables con el primer y segundo factor

Etiqueta (año)	Correlación con Eje Factorial 1	Correlación con Eje Factorial 2
DIN_ECON_1 (06)	-0,45	0,39
DIN_ECON_2 (06)	0,75	0,38
DIN_ECON_1 (07)	-0,45	0,34
DIN_ECON_2 (07)	0,83	0,36
ESV_1 (06)	0,67	0,42
ESV_2 (06)	0,80	0,29
ESV_3 (06)	0,85	0,13
ESV_1 (07)	0,60	0,47
ESV_2 (07)	0,78	0,32
ESV_3 (07)	0,85	0,04
EGM_1 (06)	0,11	-0,62
EGM_2 (06)	0,31	-0,68
EGM_3 (06)	-0,14	0,70
EGM_1 (07)	0,10	-0,59
EGM_2 (07)	0,23	-0,71
EGM_3 (07)	-0,13	0,71
DIN_INM_1 (06)	0,65	-0,03
DIN_INM_2 (06)	0,81	0,27
DIN_INM_3 (03)	-0,69	0,33
DIN_INM_1 (07)	0,65	-0,03
DIN_INM_2 (07)	0,81	0,23
DIN_INM_3 (07)	-0,66	0,45

Cuadro A.3. Variaciones porcentuales en diferentes variables

	DIN_INM_3	Número de transacciones con residentes extranjeros	Número de transacciones totales
Alicante	8,81	-10,87	-18,63
Almería	10,24	-12,72	-20,81
Baleares	24,42	6,48	-15,64
Málaga	58,15	60,11	0,86
Murcia	-10,91	-20,73	-11,00
Palmas	28,27	28,75	-2,03
Tenerife	36,08	12,70	-18,36

Cuadro A.4. Variaciones porcentuales de algunas variables

	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)
Alicante	-23,14	-43,05	-13,87	-28,88	-59,48
Almería	27,90	-3,63	-15,34	-30,04	-32,57
Baleares	1,41	-18,55	-20,66	-34,47	-46,62
Málaga	-33,76	-52,34	-11,17	-26,71	-65,07
Murcia	116,26	17,97	17,16	-3,33	14,02
Palmas	92,53	-1,48	25,00	3,04	1,51
Tenerife	-69,57	-56,92	-55,15	-62,72	-83,94

Leyenda: (I): Concentración en la provincia de las transacciones con no residentes realizadas en España; (II): Peso relativo de las transacciones con no residentes en el total de transacciones realizadas en la provincia con compradores de fuera de la provincia; (III): Concentración en la provincia de las transacciones con compradores de fuera de la provincia realizadas en España; (IV): Transacciones con compradores de fuera de la provincia; (V): Transacciones con no residentes.



UNIVERSIDAD
PABLO DE
OLAVIDE
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (10). Páginas 43-72.
Diciembre de 2010. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art42.pdf>

Una aproximación a la construcción de un indicador de pobreza multidimensional. ¿Cuáles son los focos de riesgo en España?

POZA LARA, CARLOS

Departamento de Economía y Administración de Empresas

Universidad Antonio de Nebrija

Correo electrónico: cpoza@nebrija.es

FERNÁNDEZ CORNEJO, JOSÉ ANDRÉS

Departamento de Economía Aplicada III (Política Económica)

Universidad Complutense de Madrid

Correo electrónico: jafercor@ccee.ucm.es

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es construir un indicador de pobreza multidimensional que permita detectar los principales focos de riesgo de pobreza en España. El indicador, que ha sido elaborado mediante un análisis factorial de segundo orden, se compone de una parte objetiva y otra subjetiva, que incorpora diferentes dimensiones, tales como la satisfacción ante la renta, el trabajo, el ocio y la vivienda. Los resultados alcanzados se presentan de forma detallada para la muestra ampliada del PHOGUE del año 2000 y, de forma comparativa, entre 1994 y 2001.

Palabras clave: pobreza multidimensional; indicador; análisis factorial.

Clasificación JEL: H31; H75; I32; C8.

MSC2010: 62H.

An Approach to Construct a Multidimensional Poverty Indicator. Which are the Risk Sources in Spain?

ABSTRACT

The aim of this paper is to construct a multidimensional poverty indicator, to detect the main poverty risk focuses in Spain. The indicator, which has been developed through a second-order factor analysis, consists of an objective and a subjective part, which incorporate various dimensions such as income, employment, leisure and housing. The results are presented in detail to the enlarged sample of the EUHP 2000 and on a comparative basis between 1994 and 2001.

Keywords: multidimensional poverty; indicator; factor analysis.

JEL classification: H31; H75; I32; C8.

MSC2010: 62H.



1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este documento es construir un indicador de pobreza multidimensional que permita detectar los principales focos de riesgo de incurrir en pobreza en España, tratando de comparar los resultados con otras investigaciones realizadas anteriormente.

A lo largo de los años se ha ido ampliando el concepto de pobreza; el nacimiento de nuevas acepciones ha abierto paralelamente el campo de su medición. Ya Sen (1970 y 1976), Atkinson (1983 y 1987) y Atkinson y Bourguignon (2000) impulsaron y desarrollaron este ámbito. Ahora, numerosos investigadores están evolucionando hacia métodos más sofisticados para su medición, no solo basados en el nivel de renta, sino en otras dimensiones de similar importancia. Destacan las contribuciones de Whelan y Nolan al estudio multidimensional de la pobreza, así como las de Ayala, Cantó, Del Río, Gradín, Martínez, Martínez Álvarez, Pérez Mayo y Ruiz Huerta, entre otros, al impulso de la economía de la pobreza en España, con aportaciones relevantes tanto en el caso del estudio tradicional como en el de la privación multidimensional. Así, al revisar la literatura empírica, se observan algunas posibilidades metodológicas para construir indicadores de pobreza más precisos. Tradicionalmente se han utilizado métodos basados en el cálculo de umbrales como porcentaje de una única variable, normalmente la renta o el gasto¹; no obstante, se aprecia una proliferación de estudios en el que los indicadores tienden a un enfoque multidimensional. En esta línea, destacan los estudios de Nolan y Whelan (1996); Maitre, Nolan y Whelan (2006) y Whelan, Nolan y Maitre (2006), en los que se emplean el análisis factorial y otras técnicas multivariantes para construir indicadores de pobreza, así como otros en España, como el de Ayala, Jurado y Pérez Mayo (2006), en el que se apoyan en los modelos de variables latentes para generar indicadores de privación multidimensional. Este trabajo se orienta hacia el enfoque multidimensional, combinando factores objetivos y subjetivos y utilizando métodos de análisis multivariante. En última instancia, se analiza la situación española para describir la heterogeneidad entre la población española y, sobre todo, para localizar las principales bolsas de pobreza multidimensional.

Concretamente, la metodología utilizada se fundamenta en el análisis estadístico del Panel de Hogares de la Unión Europea (PHOGUE²), una base de datos muy rica para analizar la situación social, circunstancias financieras y condiciones de vida de un panel de hogares seguidos entre 1994 y 2001 (Whelan, Nolan y Maitre, 2006). Esta fuente de datos ha sido utilizada en múltiples ocasiones para realizar estudios de pobreza, tanto en España como en investigaciones internacionales, por lo que se convierte en un recurso idóneo para este tipo de trabajos (ver Ayala *et al.*, 2008 y Whelan *et al.*, 2001, por ejemplo). Para el interés de la investigación, el PHOGUE³ ofrece información sobre: la renta y

¹ En Domínguez y Martín (2006) se realiza una exhaustiva revisión de los principales indicadores de pobreza existentes.

² Para mayor detalle, ver Anexo 1.

³ No se ha utilizado la Encuesta de Condiciones de Vida (ECV), que sustituye al PHOGUE, porque no incluye algunas variables de nuestro interés que el PHOGUE sí lo hace. Nos referimos a una serie de variables subjetivas (grado de

gasto de los hogares, la percepción de la calidad de vida de sus individuos, la posesión o no de una serie de bienes y servicios, y las características sociodemográficas de los individuos, muy útiles para detectar bolsas de pobreza. En última instancia, se ha utilizado un análisis factorial (AF en adelante) de segundo orden para elaborar el indicador y el análisis descriptivo para la presentación de los resultados. Estos resultados se muestran en dos partes: en primer lugar, se hace alusión al propio proceso de elaboración del indicador, en el que aparecen las variables incluidas y las ponderaciones. Y en segundo lugar se describe la situación de la pobreza multidimensional en España: de forma general, por características socioeconómicas y por comunidades autónomas.

La estructura de este trabajo es la siguiente: en primera instancia, se definen brevemente las diferentes acepciones de pobreza; posteriormente, se resaltan los principales métodos de elaboración de indicadores sintéticos de pobreza; en último lugar, se realiza una aproximación a la construcción de un indicador de pobreza multidimensional aplicándolo al caso español. También, a modo de conclusión, se resumen los principales resultados.

2. EL CONCEPTO DE POBREZA

En general, la pobreza es una situación que surge como producto de la imposibilidad de acceso a (o carencia de) los recursos para satisfacer las necesidades físicas y psíquicas básicas humanas, lo que deteriora el nivel y calidad de vida de las personas. Sin embargo, su compleja definición y carácter abstracto, hace que tenga varias acepciones. Siguiendo a Atkinson (1983 y 1987) y Martínez Álvarez (2003), se pueden distinguir dos tipos fundamentales: la objetiva y la subjetiva.

Se entiende por *pobreza objetiva* aquella situación medida a través de hechos, esto es, las mediciones se basan en un nivel de vida mínimo que responde a criterios prefijados *a priori* por el investigador. En su análisis se utilizan indicadores como los ingresos, gastos y equipamiento de la vivienda.

Respecto a la *pobreza subjetiva* –también denominada *pobreza como insatisfacción*–, se define como pobre a quien no está satisfecho con su situación, al considerarse excluido de lo que él considera el modo normal de vida, con independencia de sus posibilidades económicas. Es decir, es una propia percepción subjetiva del individuo o del hogar, donde se ven a sí mismos como pobres.

Además de estas dos acepciones, se distinguen otras muy utilizadas en los estudios de pobreza, tales como Atkinson y Bourguignon (2000), Sen (1976)... y otros que lo han aplicado en España, como Martín-Guzmán *et al.* (2001) y Martínez y Ruiz-Huerta (2000), entre otros. Una de ellas es la *pobreza absoluta*, también denominada *pobreza como carencia*. Identifica a los pobres observando quiénes carecen de lo necesario para la subsistencia; esto es, es considerada como pobre aquella persona que no puede permitirse cubrir unas necesidades mínimas. Por lo anterior, este concepto es más idóneo

satisfacción respecto a una serie de elementos –vivienda, situación económica, ocio, etc.– que consideramos importantes en la pobreza multidimensional.

para realizar estudios en países subdesarrollados, exceptuando Estados Unidos y Reino Unido, donde existe tradición en utilizar este enfoque, aunque claro está, el estándar de vida que se considera mínimo es muy superior al que se cree razonable en países en desarrollo.

Otra de las acepciones es la *pobreza relativa*, también llamada *pobreza como exclusión* (Martín-Guzmán *et al.*, 2001), la cual define a un individuo como pobre cuando se encuentra en condiciones de inferioridad de recursos respecto a su entorno, aunque su situación no pueda ser considerada tan acuciante como la anterior; esto es, cuando por razones económicas un individuo se ve excluido del acceso de bienes y servicios de los que pueden disfrutar la mayoría de sus conciudadanos. De aquí se puede deducir que quienes son calificados como pobres lo son en un momento y país determinados, y podrían no serlo en otras circunstancias. Así, por ejemplo, no es lo mismo ser pobre en Suecia que serlo en Somalia, ni serlo en Suecia hoy que hace treinta años. Esta noción está más cerca del concepto de exclusión social y es la que habitualmente se utiliza en los países de nuestro entorno. En este caso, las cifras se obtienen mediante umbrales relativos, calculados a través de un porcentaje respecto a un nivel determinado de renta (media o la mediana de una distribución).

Hasta aquí las acepciones de pobreza más utilizadas en los estudios tradicionales; sin embargo, dado que en los últimos años se ha potenciado el interés por la economía de la pobreza, han aparecido otras que evolucionan dicho concepto. Siguiendo a Barr (1998), Ureña (1999) y López-Aranguren (2005), se pueden destacar la *pobreza estática* –que nos revela en un momento determinado el estado de la misma– y la *pobreza dinámica* –que incorpora el componente temporal–. Esto implica obtener información sobre cuánto tiempo permanecen los individuos pobres en situación de pobreza y cuáles son sus trayectorias de entrada y salida. También se diferencia entre la pobreza transitoria y la permanente, la *pobreza integral* –que se refiere tanto a la escasez de ingresos como a la dificultad de acceso a los servicios sociales que facilitan la cobertura de las necesidades vitales básicas–, la *nueva pobreza* –que abarca a los afectados por las transformaciones industriales: trabajadores en paro, subempleados, empleados precarios, trabajadores en la economía sumergida, etc. (por lo tanto, está estrechamente relacionada con la precariedad laboral)– y, por último, destaca la *pobreza multidimensional* –que alude al fenómeno de la pobreza desde un enfoque más completo, ya que incorpora otros factores además del meramente monetario; se incluye el estado de la vivienda, salud, educación, empleo, relaciones sociales, etc.

3. CONSTRUCCIÓN DE INDICADORES SINTÉTICOS DE POBREZA

El objetivo de construir un indicador de pobreza multidimensional conduce a la revisión de los principales tipos de índices de pobreza. De los múltiples existentes, Navarro y Ayala (2004) realizan una clasificación general: los indirectos y los directos.

Las *medidas indirectas* tratan de cuantificar la pobreza a través del nivel de recursos disponibles de los hogares o individuos; es decir, informan sobre el riesgo de incurrir en pobreza. Dado que la relación

entre pobreza y renta no es perfecta (Martínez y Ruiz-Huerta, 2000), los resultados arrojados por este tipo de índices muestran información sobre las posibilidades de ser pobre ante un nivel de recursos disponibles concreto, pero no suele marcar la falta de cobertura de necesidades. Este método es el tradicionalmente utilizado; se emplean con mayor frecuencia la renta monetaria disponible y el gasto en consumo, a través de umbrales de pobreza. Como principal ventaja destaca la facilidad de cálculo y entendimiento, así como la libertad que da al hogar o individuo para seleccionar sus bienes preferentes, sin ser fijadas por el investigador. Sin embargo, también ha recibido diversas críticas; la más importante es la discusión de que sea una medida adecuada del nivel de vida, ya que se han demostrado casos en los que personas con niveles de renta bajos presentan niveles de privación escasos y viceversa (Ayala, Jurado y Pérez Mayo, 2006). Además, existen otros inconvenientes como la ausencia de factores que muestren la movilidad de la renta a lo largo del tiempo, la sensibilidad de la renta al ajuste por tamaño y composición del hogar, y los problemas de subestimación en las encuestas.

Los *indicadores directos* definen la pobreza en términos de carencia de bienes, consumo o calidad de vida, además con un enfoque multidimensional. En este caso, captan la presencia o ausencia de bienes o actividades que garantizan un determinado funcionamiento del hogar. En estos casos específicos, se habla de *privación*. Ahora bien, aunque esta medida identifica la pobreza ante la ausencia de bienes, también es cierto que tiene el inconveniente de tener que delimitar qué bienes y actividades deben considerarse necesarios (puede ser el investigador quien los fija o la propia sociedad). Por otro lado, también existen dificultades en la elección de las dimensiones a partir de las cuales debe construirse un índice de privación (puede ser lo que la mayoría estima oportuno o mediante la correlación entre los indicadores y la renta). Y, en tercer lugar, pueden existir contradicciones entre lo que afirman las personas que necesitan y lo que no pueden obtener, a la vez que se aprecia la posesión de ciertos bienes que no son considerados necesarios, complicándose la forma de identificar los gustos o preferencias y añadiéndose además la dificultad de decidir si se incluyen como indicadores de privación dimensiones inmateriales.⁴

Junto a estos problemas, se une el inconveniente de que este tipo de indicadores directos –por lo menos hasta el momento– solo aportan información sobre la pobreza multidimensional en términos de extensión, obviando otras medidas tan importantes como la intensidad y la desigualdad en los pobres.

También existe la problemática inherente a los indicadores multidimensionales, relacionados con el sistema de ponderación de las dimensiones parciales. Atendiendo a la literatura, se encuentran procedimientos de agregación que varían desde la simple suma de variables seleccionadas hasta métodos más complejos relacionados con las técnicas de análisis multivariante. Siguiendo la clasificación de Navarro y Ayala (2004), se pueden observar varios sistemas de ponderación:

⁴ Como por ejemplo: seguridad y paz, cultura y arte, bienestar espiritual, etc. Por tanto, relacionados con la subjetividad.

- Suma aritmética de los bienes no poseídos: índice de privación a partir de la suma aritmética del número de bienes no presentes, en función de su correlación con la renta.
- Suma ponderada de los bienes considerados como necesarios: índice de privación asignando una mayor ponderación a aquellos bienes que son disfrutados por una amplia mayoría de la sociedad.
- Análisis de Componentes Principales: construcción mediante las ideas de interdependencia de las preferencias y grupos de referencia. Se busca la combinación lineal de los indicadores seleccionados, en función de su correlación.
- Modelo de clases latentes: resume un conjunto de indicadores en variables latentes que agrupan individuos por cumplir similares características, por lo que las ponderaciones dependen de la mayor influencia de las variables originales sobre las latentes (Pérez Mayo *et al.*, 2000).
- Análisis Factorial: construcción de indicadores combinando criterios de privación y el uso de la renta para identificar pobres (Whelan *et al.*, 2001 y Nolan y Whelan, 1996). Su finalidad es construir indicadores indirectamente observables (latentes).
- “*Fuzzy sets*”: en este caso, la pobreza y privación se interpreta como un fenómeno que se manifiesta en distintos grados y niveles difíciles de separar e identificar, más que como un atributo que se carece o se posee. La elaboración del indicador proviene de una función cuya estructura de ponderaciones asigna mayor peso a aquellos elementos (vivienda, salud, educación, etc.) que son alcanzados por la mayoría de la sociedad.

4. APROXIMACIÓN A LA CONSTRUCCIÓN DE UN INDICADOR DE POBREZA MULTIDIMENSIONAL. BÚSQUEDA DE LOS FOCOS DE RIESGO EN ESPAÑA ENTRE 1994 Y 2001

4.1. Metodología

Siguiendo los principales aspectos metodológicos que deberían contener los estudios de pobreza, según Gradín y Del Río (2001), se considera:

- 1. Aceptación de pobreza seleccionada:** multidimensional y relativa, relacionadas con los países desarrollados, como es el caso español.
- 2. Umbral de la pobreza:** se ha optado por marcar rangos que informen sobre la situación de cada individuo. Según la horquilla en la que se sitúe una persona, podrá ser considerada más o menos pobre. Estas escalas se obtienen mediante los deciles de la distribución, provenientes de las puntuaciones factoriales.
- 3. Variables objeto de estudio:** las variables incluidas tratan de complementar el concepto tradicional basado en la pobreza monetaria, ampliando, por un lado, el número de variables relativas al nivel de renta y, por otro, incorporando otras dimensiones tales como la vivienda, trabajo, ocio y situación económica desde un punto de vista subjetivo. En suma, se han incluido variables tanto objetivas como subjetivas y tanto monetarias como de calidad de vida. Trabajos como el de Ureña

(1999), Rojas (2005) y Aguado y Osorio (2006) ponen de manifiesto la importancia de conjugar indicadores objetivos con subjetivos, dado que, aunque no existe una relación perfecta entre ambos, es adecuado tener en cuenta hechos objetivos así como elementos cercanos a la felicidad y al bienestar subjetivo que, si bien no serían capaces de medir la pobreza por sí mismos, sí que son un buen complemento para un concepto multidimensional. La *justificación* de la elección de las variables subyace de una revisión de la literatura empírica sobre estudios de pobreza en España y, aunque de forma más general, de determinados trabajos internacionales.⁵ Así, se considera necesario ampliar las variables relacionadas con el nivel de renta, porque existe una gran diversidad de fuentes de ingresos (individuales, del hogar, del trabajo, de alquileres, pasadas, actuales...) y conocer más información del individuo nos permitirá ser más exactos. Se aprecia una escasa combinación simultánea de diferentes tipos de renta, por lo que pueden estar considerándose como pobres a personas que realmente no lo son, puesto que reciben o se benefician de otro tipo de ingresos no contemplados. Es por ello por lo que se han incluido varios tipos: rentas de trabajo, capital, prestaciones sociales y presupuesto del hogar donde se convive; como apuntaba Sen (2000): “es necesario establecer procedimientos que relacionen el hogar con los individuos porque de otra forma estaríamos excluyendo a todos los individuos que no perciben ingresos, pero que se benefician de convivir y compartir bienes y servicios con otros agentes que poseen rentas propias”. Por último, se añade un criterio temporal del ingreso (rentas anuales, mensuales, pasadas y actuales). La posible redundancia de información será corregida con el AF.

Por otro lado, se ha tratado de evolucionar respecto al método tradicional y seguir la línea de los trabajos más actuales, incorporando nuevas dimensiones relacionadas con el bienestar y la calidad de vida. Esta es la razón por la que se incluyen variables tales como la vivienda, el ocio y el trabajo.⁶ También se observa una carencia de estudios que emplean indicadores subjetivos, sobre todo, combinados con índices objetivos (Ureña, 1999). De ahí que se hayan incorporado ambas dimensiones. En definitiva, a partir del PHOGUE se han seleccionado las siguientes variables:⁷

- *Ingresos totales netos percibidos en el año anterior a la entrevista por el individuo* (it_ind).
- *Ingresos mensuales netos actuales percibidos por el hogar, aplicando la escala de equivalencia de la OCDE modificada* (im_h_eec).
- *Ingresos totales del hogar en el año anterior a la entrevista, aplicando la escala de equivalencia OCDE modificada* (it_h_eec).
- *¿Cuál es el grado de satisfacción en relación a su situación actual, respecto a su trabajo o actividad principal?* (Sat_trab). [de 1 a 6; 1=muy insatisfecho, 6=plenamente satisfecho]

⁵ Para mayor detalle, ver Poza Lara, C. (2009). En este documento se resaltan los principales estudios de pobreza y privación realizados en España en los últimos años. Sus métodos y sus resultados.

⁶ Téngase en cuenta que se han seleccionado estas variables y no otras que pudieran formar parte del indicador porque el PHOGUE solo ofrece variables subjetivas para vivienda, ocio, trabajo y situación económica; también incluye la salud, pero se ha preferido incorporarla como variable potencialmente explicativa de la pobreza.

⁷ Las variables “ingresos” han sido deflactadas con el IPC base 1992. Por tanto, se encuentran en términos reales.

- ¿Cuál es el grado de satisfacción en relación a su situación actual, respecto a las condiciones de la vivienda? (Sat_viv). [1=muy insatisfecho, 6=plenamente satisfecho]
- ¿Cuál es el grado de satisfacción en relación a su situación actual, respecto a su situación económica? (Sat_eco). [1=muy insatisfecho, 6=plenamente satisfecho]
- ¿Cuál es el grado de satisfacción en relación a su situación actual, respecto a la cantidad de tiempo que puede dedicar al ocio? (Sat_ocio). [1=muy insatisfecho, 6=plenamente satisfecho]

4. Unidad de análisis: el individuo.

5. Escala de equivalencia: OCDE modificada. Se ha seleccionado por su utilización habitual; es la escala empleada por Eurostat normalmente, incluida además en los indicadores de Laeken (Atkinson *et al.*, 2002), por lo que resulta idónea para realizar comparaciones.

6. Análisis de corte transversal y combinación de datos transversales: por un lado, se ha elegido el análisis transversal porque la intención es generar un indicador de pobreza multidimensional para realizar comparaciones por comunidades autónomas y factores socioeconómicos en España, y el PHOGUE solo ofrece esa posibilidad para la muestra ampliada de 2000, con 36.000 individuos. Por otro lado, se va realizar un análisis de la evolución de la pobreza, a lo largo de las diferentes olas que presenta el PHOGUE. Se pretende demostrar la estabilidad de las ponderaciones del indicador, así como identificar los cambios producidos en la pobreza (combinación de datos transversales entre 1994-2001). Será útil para observar la estructura de la pobreza.

7. Técnicas estadísticas multivariantes aplicadas: para la construcción del indicador, se ha utilizado un *análisis factorial de segundo orden por rotación no ortogonal (PROMAX)* (Hair *et al.* 1999). La necesidad de cuantificar la pobreza desde su enfoque multidimensional hace necesario aplicar técnicas acordes a esta acepción (Nolan y Whelan, 1996; Maitre, Nolan y Whelan, 2006; Whelan *et al.*, 2001). Las razones que justifican la elección del AF son:

- *Reduce la redundancia de información.* Las variables originales entre las que existe una elevada correlación las presenta en forma de factores o variables latentes indirectamente observables.
- *Reduce la arbitrariedad del investigador a la hora de ponderar los factores.* Se ha utilizado la rotación no ortogonal con la finalidad de aglutinar en factores o indicadores parciales las variables iniciales entre las que existe una mayor correlación, pero con el añadido de que dichos indicadores parciales mantengan suficiente correlación entre ellos para ejecutar un segundo análisis factorial (lo que se traduce en un AF de segundo orden), de donde proviene el indicador de pobreza final. Por tanto, la ponderación de las dimensiones no será arbitraria. A través de la varianza total explicada y de las puntuaciones factoriales, se pueden deducir porcentajes de ponderación objetivos (Delors⁸, 1971; Iglesias *et al.*, 2000).

⁸ En este documento citan al profesor Emilio Fontela, quien elaboró un indicador sobre la tensión social y los efectos que precedían el mayo de 1968 (utilizó un análisis factorial ponderando cada dimensión con el porcentaje de la varianza total explicada). Como variables se escogieron las huelgas, suicidios y otras con connotaciones negativas.

- *Permite calcular las medidas típicas de un buen indicador de pobreza: extensión, intensidad y desigualdad* (Atkinson *et al.*, 2002; Gradín y Del Río, 2001). El AF, frente a otras técnicas tales como los modelos de clases latentes, mide no solo la extensión de la pobreza, sino la intensidad y la desigualdad de la misma⁹. Además, con este método se puede identificar la situación de cada persona (a partir de las puntuaciones factoriales), por lo que se pueden establecer ordenaciones entre ellas.
- *Proporciona flexibilidad al indicador*. Este cambiará en función de lo que se modifiquen los datos. Lo que en un año puede ser muy importante para la pobreza, cinco años después puede que no lo sea tanto; las nuevas ponderaciones recogerán los cambios.

En este trabajo se utiliza una metodología parecida a la empleada por Maitre, Nolan y Whelan (2006) y Whelan, Nolan y Maitre (2006), sin embargo, existen un par de diferencias relevantes que conviene aclarar. 1) En el primer estudio de estos autores, se utiliza el análisis factorial por rotación no ortogonal para construir el indicador de pobreza, no obstante, difiere de este trabajo, primero, en que no se usan las mismas variables (ellos hablan más de privación que de pobreza) y, segundo, en que aquí se aplica un AF de segundo orden. Es decir, se coincide en que el primer AF es no ortogonal, pero en este caso se vuelve a hacer un segundo factorial para obtener ponderaciones no arbitrarias. Ellos no buscan un indicador final, sino que utilizan cuatro indicadores parciales para relacionarlo con la pobreza monetaria, principalmente. En cuanto al segundo estudio de los autores, recurren a los modelos de clases latentes, y no al AF. 2) El trabajo de los citados autores está orientado hacia Irlanda y el presente hacia España. En cualquier caso, existen similitudes relacionadas con la base de datos utilizada, el PHOGUE, y con la forma de presentar las bolsas de pobreza, a través de tablas por características socioeconómicas (edad, sexo, nivel de formación, etc.).

4.2. Indicador de pobreza: agregación y ponderación

Para la construcción del indicador se procede a la aplicación de un primer AF con las variables originales, que se aglutinan en dos factores o indicadores parciales. Posteriormente, se lleva a cabo otro AF para agregar en un indicador final los dos parciales. Este será el indicador final buscado.

El primer factorial es de carácter confirmatorio, por componentes principales y por el método de rotación no ortogonal PROMAX (con el fin de que los factores generados mantengan cierto grado de correlación), para cada uno de los años que presenta el PHOGUE. A continuación, una vez obtenidos los indicadores parciales, se realiza otro factorial, confirmatorio, por componentes principales y por el método de rotación ortogonal VARIMAX, con el objetivo de generar una única variable latente o factor final que mida la pobreza en términos multidimensionales. Por lo tanto, los indicadores parciales están formados por combinación lineal de las variables de origen y el indicador de pobreza por combinación lineal de los parciales. Seguidamente, se presenta este proceso para la muestra

⁹ Para mayor detalle, véase la nota aclaratoria del Cuadro 2 (niveles de pobreza multidimensional).

ampliada del año 2000 (36.000 individuos) y, posteriormente, para el resto de años, desde 1994 hasta 2001 (alrededor de 15.000 observaciones cada año).¹⁰

4.2.1. Indicador indirecto de pobreza multidimensional año 2000

Siguiendo los pasos para ejecutar un análisis factorial adecuado (Hair *et al.*, 1999) se llega a la siguiente conclusión (ver Anexos 2, 3, 4 y 5):

1) *Evaluación de la viabilidad de ejecutar el análisis factorial.* Al observar la matriz de correlaciones, se puede apreciar que existe redundancia de información entre las variables, ya que los p-valores son inferiores a 0,05, lo cual hace rechazar la hipótesis nula, lo que significa que la correlación no puede admitirse nula, aunque no se debe deducir que sea necesariamente grande. Esto es, hay una fuerte intercorrelación entre las variables seleccionadas. La medida de adecuación muestral, KMO, toma el valor 0,706, por lo que es viable el AF. Por último, mediante el test de esfericidad de Bartlett, se acepta la hipótesis alternativa de que la matriz de correlaciones no es la identidad. Por tanto, se procede a aplicar el análisis.

2) *Rotación y obtención de los factores.* Dado el conjunto de variables intercorreladas, se han extraído dos factores (ambos con autovalores superiores a 1, según el criterio de Kaiser), los cuales explican el 62,8% de la varianza total, donde el primer factor (F1) es el más importante de los dos (explica más variabilidad que ningún otro). Además, si se observan las matrices de componentes, especialmente la rotada (método PROMAX), se puede deducir la composición de los factores generados. Dichos factores serán los indicadores parciales de la pobreza multidimensional, donde, como era de esperar, las variables originales saturadas en cada uno de las dimensiones poseen una alta intercorrelación, lo que extrapolado al objetivo de la investigación hace que se pueda nombrar cada uno de los factores en función de las variables que agrupa. Así:

Factor 1: indicador de pobreza objetiva (IPO). Constituido por los ingresos totales netos percibidos por el individuo en el año anterior a la entrevista (*it_ind*), por los ingresos totales netos percibidos por el hogar del año anterior, aplicando la escala de equivalencia de la OCDE modificada (*it_h_eec*), y por los ingresos mensuales netos actuales del hogar, escala OCDE modificada (*im_h_eec*). Expresado como un índice:

$$IPO = 0,393 \text{ it_h_eec} + 0,374 \text{ im_h_eec} + 0,333 \text{ it_ind} + \text{resto F1} \quad [\text{ec. 1}]$$

Los ingresos totales del hogar es la variable con mayor peso sobre el estado de pobreza objetiva de una persona. Incrementos o descensos en las variables iniciales llevarán consigo aumentos o caídas de la riqueza o pobreza multidimensional, respectivamente.

¹⁰ El análisis se realiza en dos partes porque en la muestra del año 2000 se permite una desagregación geográfica mayor que en el resto de años. De hecho, solo en ese año se ofrecen datos por comunidades autónomas.

Factor 2: indicador de pobreza subjetiva (IPS).

Formado por el grado de satisfacción en el trabajo (sat_trab), por el grado de satisfacción con la situación económica (sat_eco), por el grado de satisfacción con la vivienda (sat_viv) y por el grado de satisfacción con el tiempo de ocio (sat_ocio). Presentado como un índice:

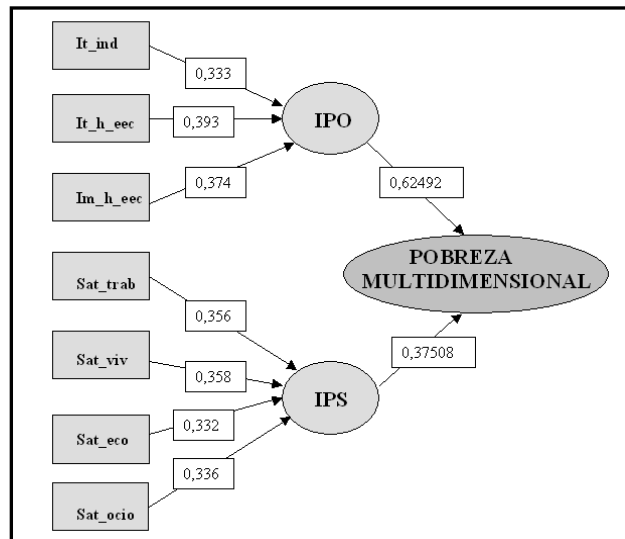
$$IPS = 0,358 sat_viv + 0,356 sat_trab + 0,336 sat_ocio + 0,332 sat_eco + resto F2 \quad [ec. 2]$$

A partir de los indicadores parciales se realiza un segundo análisis factorial –dado que entre IPO e IPS sigue existiendo correlación– con la finalidad de integrarlos en una variable latente que mida la pobreza multidimensional (ver Anexos 6 y 7).

Así, el **indicador indirecto de pobreza multidimensional (IIPP)** está formado por el indicador de pobreza objetiva (IPO) y por el indicador de pobreza subjetiva (IPS). El sistema de ponderación para integrar los indicadores parciales se basa en la varianza total explicada de cada factor, ya utilizado por diversos investigadores en otros campos de la economía (Delors, 1971 e Iglesias *et al.*, 2000). Así, observando el cuadro de la varianza total explicada (Anexo 7) se puede ver que sobre el 100% de la medición de la pobreza el 62,492% se debe al indicador de pobreza objetiva y el 37,508% a la subjetiva. Esto es:

$$IIPP = 0,624 IPO + 0,375 IPS \quad [ec. 3]$$

Diagrama 1. Indicador indirecto de pobreza multidimensional (IIPP)



Fuente: elaboración propia a partir de PHOGUE, año 2000

Nótese que el indicador IIPP debe interpretarse adecuadamente: cuanto mayor sea su valor menor será la pobreza multidimensional. Por tanto, niveles altos del indicador será sinónimo de mayor riqueza multidimensional y niveles bajos de mayor pobreza multidimensional (ver Cuadro 1). Además, es indirecto: informa del riesgo de incurrir en pobreza, no si el individuo es pobre o no. Por último, seguramente se podrían añadir otras variables; este indicador no recoge todos los componentes de la pobreza multidimensional pero sí una parte substancial de ella.

4.2.2. Indicador indirecto de pobreza multidimensional en los años 1994-2001

Una vez construido el indicador para el año 2000, se implementa el mismo proceso para los años restantes que ofrece el PHOGUE. Las razones son: observar la estabilidad y fiabilidad del indicador en las distintas olas (conocer si durante los ocho ciclos las variables latentes mantienen su estructura y ponderaciones); evaluar la flexibilidad del indicador (se debe adaptar a los cambios de la población); y, por último, conocer la situación española en los diferentes años que ofrece el PHOGUE.

Para no redundar en el proceso de elaboración del indicador año a año, se presentan los principales resultados (véase Anexo 8):

- En todos los años se mantiene la estructura del IIPP, IPO e IPS. Es decir, están compuestas por las mismas variables y casi por las mismas ponderaciones. Por tanto, es estable entre 1994 y 2001.
- Asimismo, en todos los años se adaptan ligeramente las ponderaciones de cada variable original sobre el factor al que pertenece. Por ende, es flexible entre 1994 y 2001.

4.3. Resultados: búsqueda de los focos de riesgo en España entre 1994 y 2001

Los resultados obtenidos se presentan de la siguiente manera: en primer lugar, se describe la pobreza en términos generales, por características socioeconómicas y por comunidades autónomas, referenciado al año 2000 y, en segundo lugar, se lleva a cabo una comparación de la pobreza desde 1994 hasta 2001.

4.3.1. Resultados año 2000

Con el objeto de comprender mejor los resultados presentados, se muestran los distintos rangos que el indicador adopta en función de las puntuaciones factoriales calculadas: el mínimo (-2,040), el máximo (11,930) y los valores medios (según los percentiles), que serán los umbrales necesarios para detectar las zonas de riesgo. Además, se podrá asignar el nivel de pobreza o riqueza multidimensional de una persona y conocer el *gap* para cambiar de rango.

Cuadro 1. Rangos de pobreza o riqueza multidimensional

Niveles	Tipo
-2,040 a -0,889	Pobreza multidimensional extrema
-0,890 a -0,522	Pobreza multidimensional moderada
-0,523 a -0,090	Situación normal delicada
-0,091 a 0,416	Situación normal estable
0,417 a 0,964	Riqueza multidimensional moderada
0,965 a 11,930	Riqueza multidimensional extrema

Fuente: elaboración propia a partir de PHOGUE

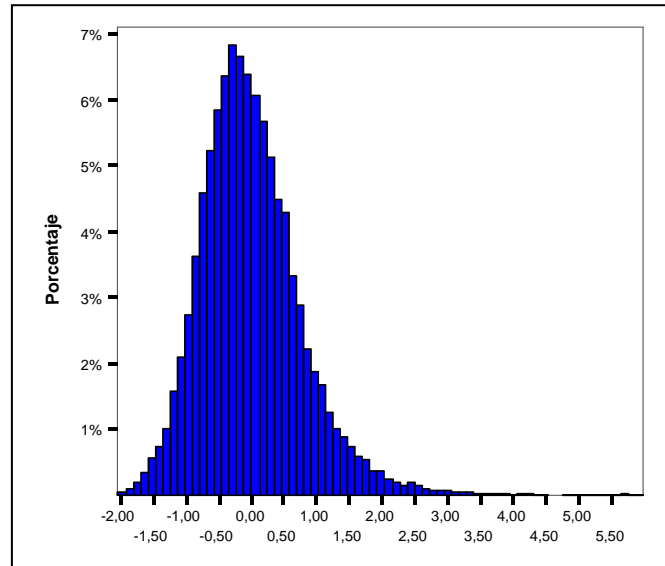
NOTA: los niveles se han obtenido mediante los percentiles 10, 25, 50, 75 y 90, así como con el mínimo y el máximo. Su cálculo proviene de las puntuaciones factoriales.

La pobreza en general:

La distribución que presenta la pobreza multidimensional en España –según IIPP– es parecida a la que presentan los indicadores indirectos que siguen un método tradicional basado en la renta, aunque no

tan drástica, puesto que este indicador incorpora otras dimensiones que suavizan la situación. La mayoría de la población se encuentra en torno a la media, aunque se observa una asimetría, donde la cola derecha representa a los individuos con un mayor nivel de riqueza multidimensional.

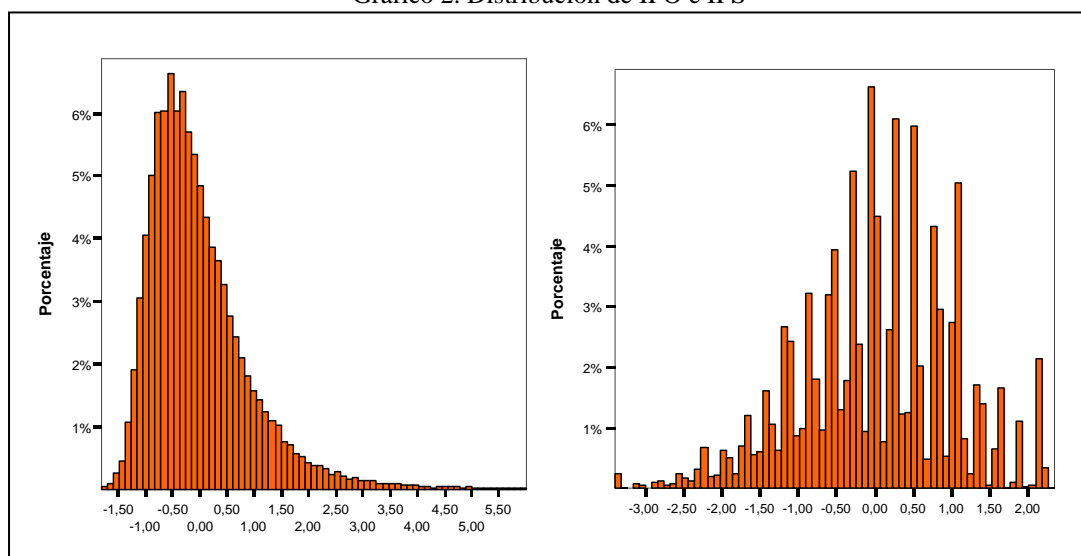
Gráfico 1. Distribución de la pobreza multidimensional en España



Fuente: elaboración propia a partir de PHOGUE
NOTA: eje X (puntuaciones factoriales) y eje Y (porcentaje de observaciones)

Esta misma distribución se puede apreciar en el Gráfico 2 de forma pormenorizada, a través de los indicadores de pobreza objetiva y subjetiva (IPO e IPS).

Gráfico 2. Distribución de IPO e IPS



Fuente: elaboración propia a partir de PHOGUE
NOTA: los coeficientes de las variables originales son los del factor al que pertenece. Ejes (ídem que antes)

En este caso, todavía se aprecia con más claridad la distribución de la renta (IPO) y la suavización que aporta la dimensión subjetiva y de calidad de vida (IPS). Resultados similares a los obtenidos por

Ureña (1999), donde destacaba que “un estudio de pobreza no debe centrarse exclusivamente en detectar a los pobres desde los ingresos o gastos sino completarse con información sobre cómo perciben su situación”. O los conseguidos por Giarrizzo (2005), donde se señala la relevancia de las percepciones como indicadores de bienestar y de las expectativas incorporadas en este tipo de índices.

Por otro lado, y solo con el propósito de realizar comparaciones con otros trabajos, en el siguiente cuadro se presentan algunas medidas calculadas a través de nuestro indicador.

Cuadro 2. Niveles de pobreza multidimensional

Umbrales	Extensión	Intensidad	Desigualdad
60% media	12,8%	0,297	0,247
50% media	10%	0,273	0,230
40% media	7,3%	0,265	0,217
25% media (A)	6,4%	0,256	0,210
25% media (B)	0,8%	0,143	0,114

Fuente: elaboración propia

NOTA: los umbrales se han calculado a partir de un porcentaje determinado de la renta y asignando un valor a las variables subjetivas. Es decir: (A) las variables relativas al grado de satisfacción toman valor 3 en la respuesta y (B) las variables relativas al grado de satisfacción toman valor 2 en la respuesta. De esta forma, el AF asigna una puntuación factorial que sirve como línea de pobreza. La extensión es el porcentaje de pobres respecto a la muestra. La intensidad es la brecha o *gap* de la media de los pobres hasta el valor del umbral correspondiente. Y la desigualdad (desviación típica) es la considerada dentro del grupo de pobres.

Aproximadamente, la pobreza en el año 2000 sería del 13%. Cifra ligeramente inferior a las obtenidas por autores (que utilizan la misma fuente de datos) tales como Pérez Mayo *et al.* (2000) –17%–, Adiego y Moneo (2002) –18%–, Navarro y Ayala (2004) –12% y 16%, dependiendo del tipo de privación multidimensional considerada– y Ayala, Jurado y Pérez Mayo (2006) –16%–. Este menor nivel se debe a la inclusión de un componente subjetivo que suele amortiguar la incidencia de la pobreza (Ureña, 1999 y Aguado y Osorio, 2006), la incorporación de variables renta no solo individuales sino también relativas al hogar, la utilización de la escala de equivalencia de la OCDE modificada, que tiene en cuenta en mayor medida las economías de escala que se producen en un hogar y, por último, el propio uso de un enfoque multidimensional, que puede suavizar la pobreza.

Por otro lado, se aprecia que, a medida que la línea es más alta, mayores son los niveles de pobreza obtenidos. Lo mismo sucede con la dispersión dentro de la población pobre.

La pobreza según factores socioeconómicos y zonas geográficas:

En las próximas líneas se describe el cuadro que resume, para el año 2000, muchos de los entresijos de la pobreza en nuestro país y que nos puede ofrecer un mayor conocimiento sobre el fenómeno de la pobreza multidimensional en España; es la *localización de las bolsas de riesgo*.

Cuadro 3. Pobreza multidimensional por factores socioeconómicos

Año 2000		IPO	IPS	IIPP	Signific.
Sexo	Hombre	0,163	0,026	0,112	0,000
	Mujer	-0,148	-0,024	-0,101	
Edad	15-17	-0,453	0,196	-0,209	0,000
	18-25	-0,209	-0,015	-0,136	
	26-40	0,196	-0,125	0,075	

	41-60	0,204	-0,026	0,118	
	61-64	-0,129	0,093	-0,045	
	65-más	-0,263	0,140	-0,111	
Estado civil	Casado	0,064	0,042	0,056	0,000
	Separado	0,070	-0,318	-0,075	
	Divorciado	0,140	-0,320	-0,032	
	Viudo	-0,195	0,001	-0,121	
	Soltero	-0,072	-0,054	-0,066	
Composición del hogar	Una persona de +65	-0,373	0,132	-0,183	0,000
	Una persona 30-64	0,428	-0,078	0,238	
	Una persona -30	0,133	-0,049	0,064	
	Un adulto con uno o + hijos -16	-0,088	-0,614	-0,286	
	Un adulto con al menos un hijo +16	-0,043	-0,189	-0,098	
	Pareja sin hijos y al menos uno +65	-0,382	0,203	-0,162	
	Pareja sin hijos con los dos -65	0,428	0,110	0,308	
	Pareja con un hijo menos de 16	0,311	-0,025	0,184	
	Pareja con dos hijos -16	0,198	-0,075	0,095	
	Pareja con tres o más hijos -16	0,007	-0,240	-0,085	
	Pareja con al menos un hijo +16	0,007	0,030	0,016	
	Otros hogares	-0,108	-0,109	-0,108	
Tipo de contrato	Indefinidos	0,736	0,138	0,511	0,000
	Temporal	0,057	-0,225	-0,048	
	Sin contrato	-0,381	-0,622	-0,471	
	Otro acuerdo laboral	0,115	-0,165	0,010	
Duración de contrato	Menos 6 meses	-0,151	-0,305	-0,209	0,000
	6m - 1a	-0,005	-0,125	-0,050	
	1a - 2a	0,110	-0,179	0,001	
	2a - 5a	0,360	-0,167	0,162	
	Más de 5 años	0,401	0,065	0,275	
	No especificado	0,103	-0,300	-0,048	
Veces en paro (últ. 5 años)	0	0,044	0,090	0,061	0,000
	1	-0,134	-0,280	-0,188	
	2	-0,109	-0,327	-0,191	
	3	-0,171	-0,382	-0,250	
	4	-0,208	-0,388	-0,275	
	5	-0,349	-0,475	-0,396	
Paro más de 12 meses	Sí	-0,294	-0,388	-0,329	0,000
	No	0,003	-0,244	-0,089	
Jornada	Completa	-0,209	0,000	-0,131	0,000
	Parcial	-0,434	-0,154	-0,329	
Actividad principal	Asalariado (15 ó + horas semana)	0,001	0,003	0,002	0,229
	Aprendiz remunerado (15 ó más horas a la semana)	0,003	0,022	0,010	
	Trabajador en formación (15 ó más horas semanales)	0,073	0,224	0,129	
	Empresario o trabajo Independ. (15 ó + horas semana)	0,018	0,009	0,014	
	Ayuda familiar (15 ó más horas semanales)	-0,019	0,109	0,029	
	Estudiante o escolar	0,047	0,000	0,030	
	Parado	0,005	0,025	0,013	
	Jubilado o retirado	-0,008	-0,013	-0,010	
	Labores del hogar, cuidado de niños u otras personas	-0,016	-0,006	-0,012	
	Serv. militar o pr. sustitutoria	-0,079	0,272	0,052	
	Otra situación econ. inactiva	-0,031	-0,023	-0,028	
	Trabajando menos de 15 horas	-0,050	0,055	-0,010	
Nivel de formación	Analfabeto o sin estudios	-0,480	-0,198	-0,374	0,000
	Estudios primarios	-0,231	-0,002	-0,145	

	Primer nivel enseñanza secundaria	-0,128	-0,054	-0,100	
	FP1	0,082	-0,033	0,039	
	FP2	0,294	0,037	0,198	
	Segundo nivel enseñanza secundaria	0,165	0,136	0,154	
	Diplomaturas	0,753	0,268	0,571	
	Licenciatura, máster, doctorados	1,340	0,200	0,913	
Idioma aparte de materno	Sí	0,446	0,151	0,335	0,000
	No	-0,099	-0,033	-0,075	
Uso de intern. últ. 7 días	Sí	0,809	0,258	0,602	0,000
	No	-0,113	-0,036	-0,084	
Estado de salud	Muy bueno	0,122	0,305	0,191	0,000
	Bueno	0,107	0,005	0,069	
	Aceptable	-0,167	-0,071	-0,131	
	Malo	-0,382	-0,352	-0,371	
	Muy malo	-0,444	-0,808	-0,580	
Número de noches hospitalizado al año	1	0,189	0,097	0,154	0,001
	2	0,073	0,015	0,051	
	3	-0,055	-0,148	-0,09	
	4	0,037	-0,105	-0,015	
	5	0,131	0,033	0,094	
	6	-0,069	0,087	-0,010	
	7	-0,104	-0,050	-0,084	
	8	-0,263	-0,093	-0,199	
Veces al médico al año	Ninguna	-0,018	-0,012	-0,015	0,000
	1 - 2 veces	0,120	0,075	0,104	
	3 - 5 veces	0,038	0,008	0,027	
	6 - 9 veces	-0,038	0,006	-0,021	
	10 ó más	-0,165	-0,104	-0,142	
Frecuencia habla vecinos	Mayoría de días	-0,096	0,034	-0,047	0,000
	1 ó 2 veces a la semana	0,173	-0,038	0,093	
	1 ó 2 veces al mes	0,270	-0,102	0,13	
	Menos de una vez al mes	0,430	-0,109	0,111	
	Nunca	0,139	-0,340	-0,040	
Frecuencia ver amigos o familiares	Mayoría de días	-0,042	0,037	-0,012	0,000
	1 ó 2 veces a la semana	0,126	-0,063	0,055	
	1 ó 2 veces al mes	0,073	-0,089	0,012	
	Menos de una vez al mes	-0,108	-0,476	-0,246	
	Nunca	-0,308	-0,977	-0,559	
País de nacimiento	España	-0,002	0,002	0,000	0,001
	UE	0,000	-0,232	-0,084	
	Extranjero	„	„	„	
Nacionalidad	España	-0,002	0,001	0,000	0,000
	UE	0,742	0,163	0,525	
	Extranjero	-0,115	-0,418	-0,229	
Régimen de tenencia vivienda	Propiedad	0,021	0,047	0,031	0,000
	Alquiler	-0,092	-0,338	-0,184	
	Cesión gratuita	-0,238	-0,252	-0,243	
Clase de vivienda y tipo de edificio	Independiente	-0,128	0,007	-0,077	0,000
	Adosada o pareada	-0,226	-0,071	-0,168	
	Con menos de 10 viviendas	-0,044	-0,018	-0,034	
	Con más de 10 viviendas	0,202	0,040	0,141	
	Colegio, oficina, taller	-0,389	-0,556	-0,451	
	Sin casa	0,509	0,477	0,497	

Fuente: elaboración propia a partir de PHOGUE. Para aclaración del lector véanse los rangos de pobreza.

NOTA: la columna relativa a la significatividad del indicador IIPP se refiere a la contrastación estadística de si existen diferencias significativas entre los grupos considerados o no. Como las variables objeto de estudio no cumplen los requisitos propios del análisis de la varianza, era necesario aplicar un análisis no paramétrico, concretamente y siguiendo a Barón y Téletz (2006), se ha realizado el contraste de Kruskal-Wallis. Este contraste analiza si los valores obtenidos en los diferentes grupos son similares y, al observar los *p-valores*, se aprecia que hay una gran evidencia estadística en contra de que los resultados obtenidos sean similares.

Sexo. Para todos los indicadores calculados, existe desigualdad de género. Si se atiende al IIPP, los hombres tienen una posición estable (por encima de la mediana) y las mujeres una situación algo más delicada (situada por debajo de la mediana). Además, se produce una mayor diferencia en el IPO que en el IPS; es decir, en términos objetivos, hay mayor desigualdad de la que existe en términos de percepción. No obstante, las mujeres declaran un grado de satisfacción global inferior al que manifiestan los hombres. Esto es consistente con los datos que se conocen del mercado laboral y la conocida *feminización* de la pobreza.

Edad. Tanto los individuos menores de 25 años como los mayores de 65 muestran valores sensiblemente peores que las personas en momentos de su vida más activos, llegando a la cota de riqueza multidimensional entre los 41 y 60 años, debido a la estabilidad laboral. Respecto a la subdivisión entre el factor objetivo y el subjetivo, el grupo de jóvenes y el de mayores presentan diferencias mucho más importantes en términos de renta, lógicamente, pero menos de la que existiría con un indicador basado solo en el nivel de renta individual. El hogar donde conviven y las menores expectativas moderan la situación. Por el contrario, estos grupos son los que declaran un grado de satisfacción global mayor. Esto es consistente con los resultados obtenidos en otros estudios, como el de Navarro y Ayala (2004) o el de Adiego y Moneo (2002). Se corrobora la *infantilización* y *ancianización* de la pobreza.

Estado civil. El grupo de casados toma valores superiores al resto de personas que se encuentran en cualquier otro estado civil, y por encima de la mediana. Por el contrario, los separados y los viudos son los que peores cifras arrojan.

Composición del hogar. Al igual que en otros trabajos (Navarro y Ayala, 2004), los hogares monoparentales con hijos menores de 16 años presentan niveles de pobreza mayores que el resto de grupos, máxime si el cabeza de familia es una mujer. Por contra, los hogares laboralmente activos, que además no tienen hijos, se sitúan en posiciones más favorecidas.

Tipo de contrato. Los ocupados con contratos indefinidos no solo gozan de una situación privilegiada con respecto al resto de grupos, sino que además los niveles están en torno a 0,500, superando la normalidad y pasando a otra escala denominada riqueza multidimensional moderada. Sin embargo, los individuos con contratos temporales, sobre todo los de corta duración, presentan niveles sustancialmente peores que el resto (ver duración del contrato). Así, la estabilidad de los contratos indefinidos favorece el bienestar del individuo y la temporalidad lo deteriora, lo que demuestra la incidencia del problema de la dualidad en el mercado laboral. Esto coincide con los razonamientos de López Aranguren (2005).

Número de veces en paro en los últimos cinco años. A medida que aumenta el paro, se incrementan también los niveles de pobreza multidimensional. De hecho, solo los individuos que no han estado nunca en paro presentan datos positivos. Respecto a los indicadores parciales, no solo el IPO muestra

la contundencia del desempleo, sino también el IPS, donde se aprecia que los niveles de insatisfacción son cada vez mayores conforme un individuo reincide en situaciones de paro. Además, los que han sufrido épocas de desempleo superiores a 12 meses muestran niveles sensiblemente peores que los que no, en términos de IIPP, IPO e IPS.

Jornada laboral. Se aprecia que los que trabajan a jornada completa presentan unos niveles de riqueza multidimensional superiores que aquellos que lo hacen a tiempo parcial; no solo porque la remuneración de los trabajadores a tiempo parcial es menor sino porque no están muy satisfechos con su jornada laboral (ver IPS).

Actividad principal. Resultados dispares. No existen diferencias estadísticamente significativas, por lo que no se pueden tomar conclusiones fiables al respecto.

Nivel de formación. Cuanto mayor es el nivel de formación del individuo, menores son los niveles de pobreza multidimensional. En el IIPP se nota una gran diferencia entre los sin estudios y los universitarios, estando los primeros cerca del tramo de pobreza multidimensional moderada y los segundos a los grupos favorecidos de la población (rozan niveles de riqueza multidimensional). Por otro lado, si se realiza una lectura por indicadores parciales, siguen existiendo brechas notables entre los grupos: en el caso del IPO las distancias entre grupos son más importantes que en el IPS. No obstante, dentro del índice subjetivo se observa que a mayor nivel de formación tanto mayor es la riqueza multidimensional, hasta el punto en que se llega al nivel de educación superior (licenciaturas, máster y doctorados), donde cae ligeramente. Este dato podría estar relacionado con la consecución de expectativas. En este sentido, no se coincide con otros trabajos que no incluyen el componente subjetivo en sus indicadores multidimensionales.

¿Habla algún idioma aparte del materno? Y ¿ha usado internet en los últimos 7 días? Se cumple la lógica de a mayor formación más riqueza. Quienes hablan otro idioma y utilizan internet asiduamente presentan mejores cifras de pobreza.

¿Cuál es su estado de salud? A medida que mejora o empeora el estado de salud de un individuo, aumenta o disminuye el grado de riqueza multidimensional. Aquellos que manifiestan tener un estado de salud “muy malo” presentan unos niveles de pobreza mayores que el resto de grupos, situándose en el rango de pobreza multidimensional moderada (dentro del 25% más pobre de la población). Esta influencia negativa del malestar no solo se identifica a través de un menor rendimiento laboral y de menor generación de renta (IPO) sino también, y de una forma más potente, en el estado de ánimo (IPS). Aquellos que han contestado a la pregunta con un “muy malo” revelan una preocupante insatisfacción. Este resultado es consistente con el de Navarro y Ayala (2004). Lógicamente, esta mala salud se manifiesta en que cuantas más veces haya ido una persona al médico o haya tenido que ser hospitalizada peores son los niveles de pobreza. Llama la atención la fuerte correlación entre salud y renta.

Frecuencia habla con vecinos y ve a familiares/amigos. Las relaciones sociales influyen en la pobreza multidimensional. Eso es lo que se deduce de los resultados obtenidos. En los casos extremos se dan valores ligeramente peores que en el resto de casos. Una persona que se relaciona sistemáticamente con los vecinos o familiares, o nunca, presenta niveles de riqueza multidimensional superiores a los que los tratan moderadamente.

País de nacimiento y nacionalidad. Se puede apreciar cómo los que tienen nacionalidad europea o han nacido en la UE presentan unas cifras notablemente mejores que los extranjeros, e incluso que los propios españoles. Además, las cifras que alcanzan los europeos les sitúan en un estadio de riqueza multidimensional moderada impulsado, sobre todo, por el IPO. Sin embargo, el indicador de pobreza subjetiva (IPS) de los extranjeros no es el más idóneo. Estos resultados coinciden plenamente con Cachón (2005).

Régimen de tenencia de la vivienda. La mejor posición tiene relación con las personas que viven en régimen de propiedad. Esa situación refleja cierta solvencia económica y produce una mayor satisfacción, más todavía cuando en nuestro país existe una cultura compradora.

Clase de vivienda y tipo de edificio. A grandes rasgos, se aprecia un empeoramiento del indicador cuando las características de la vivienda son peores. Lógicamente, los menos satisfechos son los que pernoctan y desarrollan su vida en lugares no propicios para vivir.

Si bien en lo que respecta a la extensión de la pobreza se producían ligeras diferencias con otras investigaciones, en este caso, el de los principales factores socioeconómicos que explican la pobreza, existe un elevadísimo consenso. Tanto el estudio de Navarro y Ayala (2004), sobre privación multidimensional, como el de Adiego y Moneo (2002), de pobreza monetaria, llegan a unas conclusiones similares.¹¹

Este sería el *cuadro de riesgo*: mujer, joven o mayor de 65 años, persona viuda, tener una jornada a tiempo parcial, con contrato temporal y de poca duración, hogares monoparentales con hijos menores de 16 años, reincidente en situaciones de paro, máxime si es de larga duración, ser extranjero no comunitario, tener un bajo nivel de formación, hablar solo un idioma y no utilizar internet, tener un estado de salud deficiente, relacionarse en exceso o nada con los demás, vivir de alquiler o en cesión gratuita y en una vivienda pequeña.

A continuación, con el propósito de ahondar aún más en el análisis de la pobreza, se presenta la situación por zonas geográficas. En el Cuadro 4 y en el Gráfico 3 se pueden ver los niveles de pobreza que existen en las diferentes comunidades autónomas de nuestro país.

¹¹ Téngase en cuenta que estos trabajos son de los pocos que desagregan el estudio de la pobreza con tanto detalle. El primero utiliza indicadores de privación multidimensional y el segundo de carácter monetario.

A partir del indicador parcial IPO, se puede apreciar que las comunidades con mejor factor renta son Madrid, Cataluña, Navarra y País Vasco. Por el contrario, destacan negativamente Extremadura, Andalucía, Castilla-La Mancha y Murcia. Desde la perspectiva subjetiva, aparecen Aragón, Cantabria y Cataluña como aquellas Comunidades con mayor grado de satisfacción. En últimas posiciones se encuentran Galicia, Murcia y Asturias.

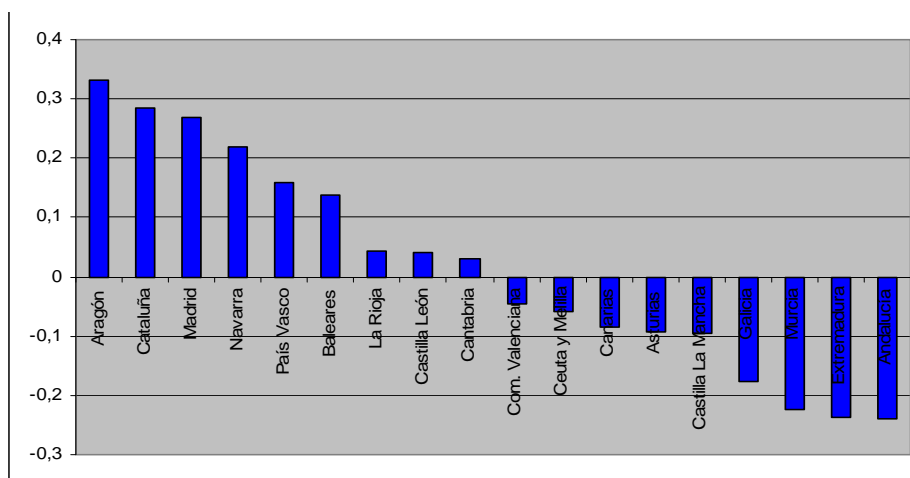
Cuadro 4. Pobreza multidimensional por CC.AA.

CC.AA.	IPO	IPS	IIPP
Galicia	-0,113	-0,279	-0,176
Asturias	-0,029	-0,197	-0,092
Cantabria	-0,099	0,246	0,030
País Vasco	0,215	0,062	0,158
Navarra	0,279	0,119	0,219
La Rioja	0,074	-0,005	0,044
Aragón	0,202	0,548	0,331
Madrid	0,478	-0,081	0,268
Castilla-León	-0,014	0,131	0,040
Castilla-La Mancha	-0,229	0,125	-0,095
Extremadura	-0,399	0,036	-0,235
Cataluña	0,352	0,173	0,285
Com. Valenciana	-0,046	-0,045	-0,046
Baleares	0,174	0,077	0,138
Andalucía	-0,279	-0,172	-0,239
Murcia	-0,203	-0,256	-0,223
Ceuta y Melilla	0,021	-0,189	-0,057
Canarias	-0,086	-0,082	-0,085

Fuente: elaboración propia a partir de PHOGUE. Para aclaración del lector véanse rangos de pobreza
 NOTA: tómnense los datos de Ceuta y Melilla con precaución, por falta de muestra representativa

Atendiendo al IIPP: Aragón, Cataluña, Madrid, Navarra y País Vasco son las zonas con menores niveles de pobreza y Andalucía, Extremadura, Murcia y Galicia las que más presentan.

Gráfico 3. IIPP por Comunidades Autónomas



Fuente: elaboración propia a partir de PHOGUE

Comparando los resultados obtenidos en nuestra investigación con los de otros autores, se observa que, según sea la metodología utilizada, la ordenación de las Comunidades Autónomas es ligeramente distinta (ver Cuadro 5).

Cuadro 5. Ordenación de CC.AA. por pobreza, privación o malestar económico

CC.AA.	IIPP	Navarro y Ayala (2004) Indicador de privación	Ayala, Jurado y Pérez Mayo (2006) FGT(0)	Jurado y Pérez Mayo (2001) Índice de bienestar
Galicia	14	13	10	12
Asturias	12	11	7	10
Cantabria	9	12	8	14
País Vasco	5	6	5	2
Navarra	4	2	4	1
La Rioja	7	3	9	6
Aragón	1	1	6	7
Madrid	3	4	2	4
Castilla-León	8	8	16	13
Castilla-La Mancha	13	7	11	9
Extremadura	16	16	17	17
Cataluña	2	5	1	3
Com. Valenciana	10	10	12	8
Baleares	6	9	3	5
Andalucía	17	15	15	16
Murcia	15	14	14	11
Canarias	11	17	13	15

Fuente: elaboración propia a partir de PHOGUE, Navarro y Ayala (2004), Ayala *et al.* (2006) y Jurado y Pérez -Mayo (2001)

NOTA: desde 1 = menos pobreza hasta 17 = más pobreza

Los indicadores que más coinciden son el IIPP y el de privación multidimensional propuesto por Navarro y Ayala (2004). La coincidencia total no se da salvo en cuatro comunidades autónomas (Aragón, Castilla-León, Extremadura y Comunidad Valenciana), pero sí se observa una ordenación parecida en términos generales: aparecen Aragón, Cataluña, Navarra, Madrid y País Vasco como las comunidades más favorecidas, que presentan niveles de pobreza multidimensional (para IIPP) o privación multidimensional (para Navarro y Ayala) más reducidos con respecto a los demás. Y, por otro lado, Andalucía, Extremadura y Murcia se posicionan entre las más perjudicadas.

Entre las zonas más desfavorecidas se produce una diferencia para el caso de Canarias, donde para Navarro y Ayala (2004) se sitúa en último lugar, sin embargo, a pesar de que los datos para nuestra investigación no son nada halagüeños, la posición no es tan extrema, en cierto modo por la inclusión del IPS, que amortigua la situación.

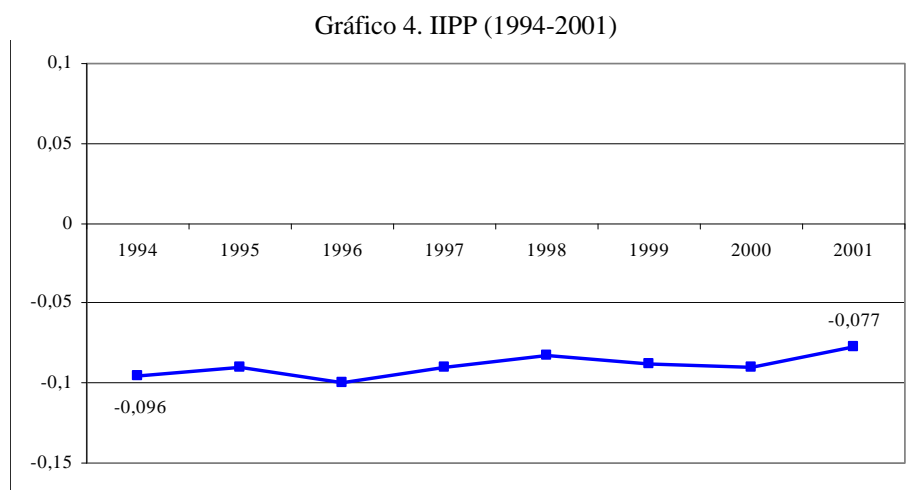
4.3.2. Resultados años 1994-2001

En este apartado se compara lo sucedido con la pobreza entre los años 1994 y 2001, con miras a observar si han cambiado los patrones que explican la pobreza o si se han pronunciado. El PHOGUE ofrece datos de panel sobre los individuos y hogares de toda la geografía española, comienza en el año

1994 y finaliza en 2001. Aunque es conocido por todos el problema de la *attrition*, la muestra mantiene un nivel aceptable en todos sus años (alrededor de las 15.000 observaciones).

La pobreza en general:

A través del Gráfico 4 se puede apreciar que la evolución del indicador de pobreza multidimensional (IIPP) entre los años 1994 y 2001 ha mejorado ligeramente, afianzándose en la horquilla de “situación normal estable”. Al trasladarse en términos de incidencia de pobreza, se ha pasado de un 16,6% en 1994 hasta un 10,5% en 2001 (Cuadro 6).



Fuente: elaboración propia a partir de PHOGUE

NOTA: el valor medio del indicador proviene de la mediana de la distribución

Cuadro 6
Niveles de pobreza multidimensional (1994-2001)

Umbral	Extensión	Intensidad	Desigualdad
50% media (1994)	16,6%	0,294	0,232
50% media (2001)	10,3%	0,272	0,225

Fuente: elaboración propia a partir de PHOGUE

NOTA: mismo método que el utilizado para el año 2000 (ver Cuadro 2)

La pobreza por factores socioeconómicos y zonas geográficas:

A través del Cuadro 7 se pueden observar las principales modificaciones:

- Se amplía el *gap* entre hombres y mujeres. Si la brecha en 1994 es de 0,144, en 2001 pasa a 0,203. En definitiva, se incrementa la desigualdad de género.
- Desciende el diferencial entre aquellos que se encuentran desempleados y los ocupados. Aunque el patrón sigue siendo el mismo. También mejora la situación para los parados de larga duración.
- Continúa el patrón de la educación: conforme aumenta el nivel de formación, mejoran los niveles de pobreza. No obstante, se observa una caída en los niveles de riqueza multidimensional de los sin estudios y de los universitarios, ya sean de ciclo corto o de ciclo largo, a favor de los individuos con FP.
- Se amplía el *gap* entre los que declaran estar sanos y los que se encuentran enfermos.

Cuadro 7. Evolución IIPP por factores socioeconómicos (1994-2001)

		1994	2001
Sexo	Hombre	0,075	0,106
	Mujer	-0,069	-0,097
Veces en paro (últ. 5 años)	0	0,118	0,053
	1	-0,246	-0,131
	2	-0,373	-0,101
	3	-0,406	-0,197
	4	-0,390	-0,189
	5	-0,345	-0,268
Paro más de 12 meses	Sí	-0,420	-0,248
	No	0,087	-0,031
Nivel de formación	Analfabeto o sin estudios	-0,268	-0,359
	Estudios primarios	-0,139	-0,164
	Primer nivel enseñanza secundaria	-0,083	-0,100
	FP1	-0,041	0,021
	FP2	0,109	0,165
	Segundo nivel de enseñanza secundaria	0,189	0,172
	Diplomaturas	0,681	0,548
	Licenciado, Master, Doctor	1,051	0,859
Estado de salud	Muy bueno	0,097	0,148
	Bueno	0,089	0,077
	Aceptable	-0,071	-0,103
	Malo	-0,262	-0,367
	Muy malo	-0,394	-0,654
Nacionalidad	España	0,000	0,000
	UE	0,395	0,215
	Extranjero	-0,180	-0,093
Régimen de tenencia vivienda	Propiedad	0,043	0,026
	Alquiler	-0,146	-0,158
	Cesión gratuita	-0,291	-0,208

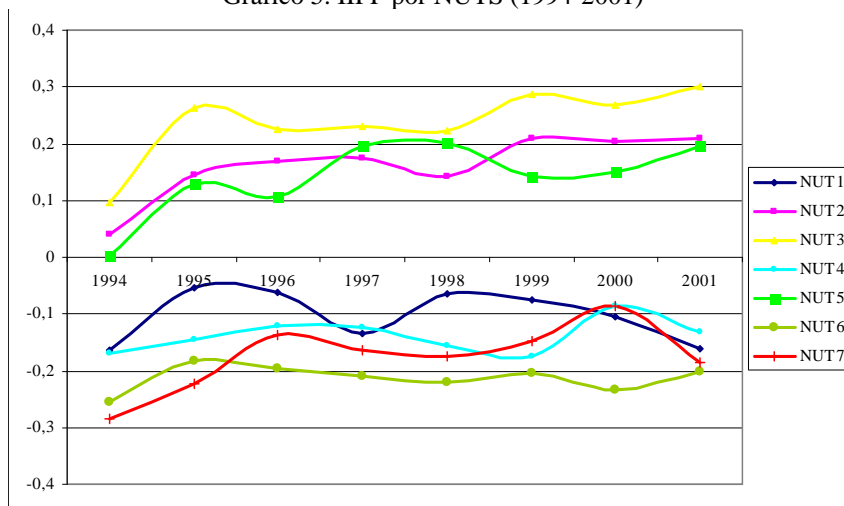
Fuente: elaboración propia a partir del PHOGUE

- Los extranjeros no comunitarios continúan en una posición desfavorable; sin embargo, sus niveles de pobreza mejoran levemente.
- Se mantiene la brecha entre los individuos con vivienda en propiedad frente a los que se encuentran en alquiler.
- El resto de factores incluidos en el año 2000 no presentan cambios destacables.

Por zonas geográficas, solo se muestran los cambios por NUTS (conjunto de Comunidades Autónomas), puesto que Eurostat no ofrece información por CC.AA. en los años comprendidos entre 1994 y 2001, salvo para el 2000, donde se amplió la muestra.

A través del Gráfico 5, se puede observar cómo todos los NUTS, en mayor o menor medida, mejoran su situación con respecto al año inicial. Los más favorecidos en estas olas han sido Madrid y el Este con un incremento de 0,200 puntos en el indicador; y el que menos ha mejorado ha sido el Noroeste, con 0,004 puntos. En las últimas posiciones se encuentran el Sur y Canarias, que intercambian puestos entre 1994 y 2001.

Gráfico 5. IIPP por NUTS (1994-2001)



Fuente: elaboración propia a partir de PHOGUE

NOTA: NUT1 (NOROESTE: Galicia, Asturias y Cantabria), NUT2 (NORESTE: País Vasco, Navarra, La Rioja y Aragón), NUT3 (MADRID: Madrid), NUT4 (CENTRO: Castilla-León, Castilla-La Mancha y Extremadura), NUT5 (ESTE: Cataluña, Comunidad Valenciana y Baleares), NUT6 (SUR: Andalucía, Murcia y Ceuta y Melilla) y NUT7 (CANARIAS: Canarias)

Estos resultados se asemejan a los publicados por Adiego y Moneo (2002), donde se compara la pobreza entre 1994 y 2001 para diferentes factores socioeconómicos. La evolución por zonas geográficas coincide en líneas generales con el estudio de Ayala *et al.* (2008), en el que utilizan el indicador de bienestar social (IBS) de Atkinson. En su caso no manejan el PHOGUE sino la ECPF, no utilizan los NUTS sino las CCAA y no emplean un índice de pobreza sino un IBS. En cualquier caso, por su coincidencia, se refuerzan las conclusiones aquí presentadas.

5. CONCLUSIONES

Al estructurar las diversas posibilidades metodológicas que ofrece el estudio de la pobreza, nos hemos decantado por el uso de la acepción multidimensional y relativa –más acorde con los países desarrollados– y por un indicador indirecto construido mediante Análisis Factorial, para su posterior aplicación al caso español. El objetivo final ha sido, por tanto, detectar bolsas de riesgo de pobreza.

Siguiendo el esquema desarrollado a lo largo del documento, se puede concretar que:

a) Respecto a la construcción del indicador de pobreza multidimensional:

- Se compone de una dimensión objetiva, compuesta por variables relacionadas con la renta individual, del hogar, actual y pasada, y de otra subjetiva, formada por las satisfacciones en el trabajo, la situación económica, la vivienda y el ocio. Es posible que no estén todas las variables que deberían estar, pero se recoge una parte substancial de la pobreza multidimensional. Se ha construido mediante un análisis factorial de segundo orden por rotación no ortogonal.
- Ventajas del indicador: ofrece las tres vertientes fundamentales de los indicadores de pobreza: extensión, intensidad y desigualdad; utiliza un sistema de ponderación no arbitrario; tiene carácter multidimensional y latente –incorporando dimensiones objetivas y subjetivas–, por lo que permite

acercarnos en gran medida al abstracto concepto de la pobreza; es consistente y flexible; y facilita la ordenación y posterior interrelación con otras variables.

- Restricciones del indicador: se debe ser preciso a la hora de interpretarlo –niveles altos del IIPP indican elevada riqueza multidimensional (más bienestar) y niveles bajos mayor pobreza multidimensional (más malestar)–; y es indirecto, por lo que no nos muestra el grado de pobreza de una persona sino el riesgo que tiene de incurrir en ella.

b) Respecto al estado de la pobreza en España:

- En general, se puede afirmar que la pobreza multidimensional en España se ha reducido levemente entre los años 1994 y 2001. Los patrones por zonas geográficas y características sociales y económicas permanecen prácticamente invariables.
- Existen ligeras diferencias en los niveles de pobreza entre nuestro indicador y el de otros autores. Los menores porcentajes que muestra nuestra medición radican en la inclusión de una dimensión subjetiva y en la combinación de variables renta relacionadas no solo con el individuo sino también con el hogar donde convive. En cualquier caso, la finalidad de este trabajo no es tanto cuantificar la pobreza sino identificar el perfil de los más desfavorecidos.
- Las comunidades autónomas con menores niveles de pobreza multidimensional son: Aragón, Cataluña, Madrid, Navarra y País Vasco. Y las que mayores presentan: Andalucía, Extremadura, Murcia y Galicia. Los NUTS más favorecidos son: Madrid, Noreste y Este. Y los más desfavorecidos: Sur y Noroeste, aunque también, en menor medida, Canarias. Existen similitudes con otros trabajos en la distribución por zonas geográficas, aunque la ordenación no coincide perfectamente.
- Las características de la población que mejor discriminan los elevados niveles de pobreza son: mujer, joven o mayor de 65 años, persona viuda, hogar monoparental con hijos menores de 16 años, con contrato temporal, de poca duración, insistente en situaciones de paro, desempleo de larga duración, trabajar a tiempo parcial, tener un nivel bajo de formación, hablar solo un idioma, no utilizar internet, tener un estado de salud deficiente, relacionarse en exceso o nada con los demás, ser extranjero no comunitario, vivir de alquiler o en cesión gratuita, así como en una vivienda pequeña. En este sentido, las conclusiones coinciden en gran medida con las mostradas en otros estudios, lo que robustece los resultados y la localización de los focos de riesgo de caer en pobreza.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adiego Estella, M. y Moneo Ocaña, C. (2002): *Pobreza y pobreza persistente en España. 1994–2001*. Madrid, Instituto Nacional de Estadística.

Aguado Quintero, L.F. y Osorio Mejía, A.M. (2006): “Percepción subjetiva de los pobres: Una alternativa a la medición de la pobreza”, *Panorama*, Colombia, año 8, Reflexión Política nº 15, pp. 26–40.

- Atkinson, A.B. (1983): *The Economics of Inequality*. Second Edition, Oxford, Clarendon Press.
- Atkinson, A.B. (1987): “On the Measurement of Poverty”, *Econometrica*, nº 4, pp. 749–764.
- Atkinson, A.B. and Bourguignon, F. (eds.) (2000): *Handbook of Income Distribution*. North–Holland, Elsevier.
- Atkinson, T., Cantillon, B., Marlier, E., and Nolan, B. (2002): *Social Indicators: The EU and Social Inclusion*. USA, Oxford University Press.
- Ayala Cañón, L. et al. (2008): “Desigualdad, pobreza y privación”, *VI Informe sobre exclusión y desarrollo social en España 2008*. Madrid. Fundación FOESSA y Cáritas.
- Ayala Cañón, L., Jurado Málaga, A. y Pérez Mayo, J. (2006): *Pobreza monetaria y privación multidimensional: ¿qué explica el análisis territorial?* Universidad de Extremadura, Instituto de Estudios Fiscales y Universidad Rey Juan Carlos. Disponible en: <http://www.ual.es/congresos/econogres/docs/Distribucion/Distribucion%204/Ayala%20Jurado.pdf>
- Barón, F.J. y Téllez Montiel, F. (2006): *Diferencias que presenta una variable numérica entre varios grupos*, Apuntes de Bioestadística, Málaga, Universidad de Málaga. Disponible en: http://campusvirtual.uma.es/est_fisio/apuntes/ficheros/cap05.pdf
- Barr, N. (1998): *The Economics of the Welfare State*. Third Edition, Oxford, Oxford University Press.
- Cachón Rodríguez, L. (2005): “Los inmigrantes en el mercado de trabajo en España (1996–2005)”, citado en: Cachón Rodríguez, L. *Inmigración y mercado de trabajo en España: integración a través del trabajo y lucha contra la discriminación*, Ekonomi Gerizan. Pobreza y solidaridad: hacia un desarrollo sostenible, nº 13, Federación de Cajas de Ahorros Vasco–Navarras.
- Cantó, O., Del Río, C. y Gradín, C. (2003): “La evolución de la pobreza estática y dinámica en España en el período 1985–1995”, *Revista de Economía Pública*, nº 167, Instituto de Estudios Fiscales.
- Delors, J. (1971): *Les Indicateurs Sociaux*. Paris, Sedeis-Futuribles.
- Domínguez, J. y Martín, A.M. (2006): “Medición de la pobreza: una revisión de los principales indicadores”, *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, vol. 2, pp. 27–66.
- Eurostat (2000): *European social Statistics. Income, Poverty and Social Exclusion*, Luxembourg.
- Giarrizzo, V. (2005): *La Pobreza Subjetiva en Argentina: Una Aproximación al Bienestar de la Población*. XI Jornadas de Epistemología de la Economía – FCE/UBA.
- Gradín, C. y Del Río, C. (2001): *Desigualdad, pobreza y polarización en la distribución de la renta en Galicia*, Instituto de Estudios Económicos de Galicia, monografía nº 11. Disponible en: <http://webs.uvigo.es/cgradin/Publicacions/Barrie1.PDF>
- Hair, J.F., Anderson, R.E., Tatham, R.L. y Black, W.C. (1999): *Análisis Multivariante*. 5ª edición, Madrid, Prentice Hall Iberia.
- Iglesias Patiño, C.L., López Vizcaíno, M.E. y Sánchez Fernández, P. (2000): “Dimensionalidad de la capacidad económica en las comarcas gallegas”, *Revista Galega de Economía*, vol. 9, nº 2, pp. 1–23.
- Jurado Málaga, A. y Pérez Mayo, J. (2001): *Aproximación a un índice de bienestar económico multidimensional para las CC.AA. españolas*. Universidad de Extremadura. Disponible en: <http://economiapublica.com/ponencias/3.11.pdf>
- López-Aranguren, E. (2005): *Problemas sociales. Desigualdad, pobreza, exclusión social*. Madrid, Manuales Universidad, Biblioteca Nueva.

- Maitre, B., Nolan, B., and Whelan, C. T. (2006): “Reconfiguring the Measurement of Deprivation and Consistent Poverty in Ireland”, *Policy Research Series*, nº 58, February.
- Martínez Álvarez, J.A. (2003): *Economía de la pobreza*. Madrid, UNED Ediciones, Colección Varia.
- Martínez, R. and Ruiz-Huerta, J. (2000): *Income, multiple deprivation and poverty: an empirical analysis using Spanish data. Measures of poverty and social exclusion*, paper nº 5, Poland, The International Association for Research in Income and Wealth.
- Martín-Guzmán, P., Bellido, N. y Jano, M.D. (2001): “La pobreza en España”, *Papeles de economía española*, nº 88, pp. 126–142.
- Martín-Guzmán, P. y Bellido, N. (1993): “Líneas de pobreza: una estimación de la pobreza subjetiva en España”, *I Simposio sobre Igualdad y Distribución de la Renta y la Riqueza*, vol. II, pp. 91–100. Madrid, Fundación Argentaria.
- Navarro, C. y Ayala Cañón, L. (2004): “La exclusión en vivienda en España: una aproximación a través de índices multidimensionales de privación”, conferencia, *XI Encuentro de Economía Pública*. Barcelona. Disponible en: http://www.ub.es/ecopubBCN/ponencias/arch_pdf/navarro_ayala.pdf
- Nolan, B. and Whelan, C.T. (1996): “Measuring Poverty Using Income and Deprivation Indicators: Alternative Approaches”, *Journal of European Social Policy*, vol. 6, nº 3, pp. 225–240.
- Pérez Mayo, J., Fajardo Caldera, M.A. y Sánchez Rivero, M. (2000): “Cálculo de un indicador de privación mediante un modelo de clases latentes”, conferencia, *XIV Reunión nacional ASEPELT*, Oviedo, 22–24 de junio de 2000.
- Poza Lara, C. (2006): “Pobreza y desigualdad en la UE: una comparativa” en Saiz Álvarez, J.M. (coord.): *¿Hacia dónde vas Europa?* Ediciones FIEC, pp.131–165, Madrid.
- Poza Lara, C. (2009): *Una panorámica de la literatura empírica sobre estudios de pobreza en España*, V Congreso Internacional sobre Pobreza, Convergencia y Desigualdad. Informe final. Marzo, 2009. Universidad de Málaga, Málaga.
- Rojas, M. (2005): *El Bienestar Subjetivo en México y su Relación con Indicadores Objetivos*. Calidad de Vida y Bienestar Subjetivo en México: Investigaciones y Enfoques Conceptuales. Cholula (México).
- Ruiz-Huerta, J. y Martínez, R. (1994): *La pobreza en España, ¿qué nos dicen las encuestas de presupuestos familiares?*, La pobreza en España hoy, Documentación Social, nº 96, Madrid, Cáritas.
- Sen, A.K. (1970): “Issues in the Measurement of Poverty”, *Scandinavian Journal of Economics*. Oxford, vol. 81, nº 2, pp. 285–307.
- Sen, A.K. (1976): “Poverty: an ordinal approach to measurement”, *Econometrica*, vol. 44, nº 2, pp. 219–231.
- Sen, A.K. (2000): *Desarrollo y libertad*. Barcelona, Planeta.
- Ureña Ureña, C. (1999): *Contraste entre medidas objetivas y subjetivas de pobreza*, Reunión del Grupo de Río, Lisboa, INE.
- Whelan, C.T., Layte, R., Maitre, B., and Nolan, B. (2001): “Income, Deprivation and Economic Strain: An analysis of the European Community Household Panel”, *European Sociological Review*. vol. 17, nº 4, pp. 357–372.
- Whelan, C.T., Nolan, B., and Maitre, B. (2006): “Trends in Economic Vulnerability in the Republic of Ireland”, *The Economic and Social Review*, vol. 37, nº 1, Spring, pp. 91–119.

ANEXOS

Anexo 1. Panel de Hogares de la Unión Europea (PHOGUE)

El Panel de Hogares de la Unión Europea (PHOGUE) pertenece al conjunto de operaciones estadísticas armonizadas para los países de la Unión, por lo que todos y cada uno de ellos siguen una misma metodología de elaboración de las encuestas, facilitándose así las comparaciones entre los distintos países.

El objetivo fundamental del PHOGUE es poner a disposición de la Comisión Europea un instrumento estadístico que le permita seguir y evaluar la cohesión social en el territorio de su ámbito, estudiar las necesidades de la población y el impacto de las políticas sociales y económicas sobre los hogares y las personas, así como diseñar nuevas políticas.

Esta fuente de datos utiliza técnicas de panel fijo; es decir, escogida una muestra al principio de su elaboración, se continúa con ella hasta el final del período en el cual se decide finalizar (nueve ciclos en este caso). De esta forma, se pueden analizar datos desde un punto de vista transversal y longitudinal. La metodología seguida es la que a continuación se describe:

- *Tipo de encuesta:* panel fijo.
- *Ámbito poblacional (unidades de análisis):* hogares privados que residen en viviendas familiares principales y el conjunto de personas miembros del hogar.
- *Tamaño muestral:* 70.000 hogares en toda la UE y unos 8.000 en España (dentro de los cuales, 36.000 individuos para el año 2000 y del orden de 15.000 para el resto de años).

Anexo 2. Matriz de correlaciones (AF_1 año 2000)

		It_ind	Sat_trab	Sat_eco	Sat_viv	Sat_ocio	It_h_eec	Im_h_eec
Sig. (Unilateral)	It_ind		0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Sat_trab	0,000		0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Sat_eco	0,000	0,000		0,000	0,000	0,000	0,000
	Sat_viv	0,000	0,000	0,000		0,000	0,000	0,000
	Sat_ocio	0,000	0,000	0,000	0,000		0,387	0,003
	It_h_eec	0,000	0,000	0,000	0,000	0,387		0,000
	Im_h_eec	0,000	0,000	0,000	0,000	0,003	0,000	

Anexo 3. KMO y prueba de Bartlett (AF_1 año 2000)

Medida de adecuación muestral de KMO		0,706
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	78155,876
	Gl	21
	Sig.	0,000

Anexo 4. Varianza total explicada (AF_1 año 2000)

		Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación(a)		
		Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
Comp.	1	2,739	39,127	39,127	2,739	39,127	39,127	2,435		
	2	1,655	23,641	62,768	1,655	23,641	62,768	2,224		
	3	0,750	10,716	73,484						
	4	0,616	8,807	82,291						
	5	0,571	8,158	90,449						
	6	0,466	6,664	97,113						
	7	0,202	2,887	100,000						

Método de extracción: Análisis de Componentes Principales. Cuando los componentes están correlacionados, las sumas de los cuadrados de las saturaciones no se pueden añadir para obtener una varianza total

Anexo 5. Matriz de coeficientes para el cálculo de puntuaciones en las componentes (AF_1 año 2000)

	Componente	
	1	2
Ingresos totales netos percibidos en el año anterior	0,333	-0,022
Grado de satisfacción actual en su trabajo o actividad principal	0,030	0,356
Grado de satisfacción actual sobre su situación económica	0,104	0,332
Grado de satisfacción actual sobre las condiciones de la vivienda	0,005	0,358
Grado de satisfacción actual sobre la cantidad de tiempo que puede dedicar al ocio	-0,121	0,336
Ingresos totales netos hogar año anterior (escala OCDE corregida)	0,393	0,001
Ingresos mensuales netos actuales del hogar (escala OCDE corregida)	0,374	0,013

Método de extracción: Análisis de Componentes Principales. Método de rotación: Normalización Promax con Kaiser. Puntuaciones de componentes

Anexo 6. KMO y prueba de Bartlett (AF 2_año 2000)

Medida de adecuación muestral de KMO		0,500
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	2308,643
	Gl	1
	Sig.	0,000

Anexo 7. Varianza total explicada (AF 2_año 2000)

		Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción		
		Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
Componente	1	1,250	62,492	62,492	1,250	62,492	62,492
	2	0,750	37,508	100,000			

Método de extracción: Análisis de Componentes Principales

Anexo 8. Resumen de ponderaciones

	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
It_ind	0,326	0,324	0,334	0,331	0,323	0,315	0,333	0,334
Im_h_eec	0,371	0,371	0,370	0,378	0,371	0,371	0,374	0,373
It_h_eec	0,386	0,385	0,390	0,395	0,384	0,382	0,393	0,392
Sat_trab	0,370	0,363	0,376	0,372	0,381	0,376	0,356	0,363
Sat_viv	0,395	0,386	0,381	0,369	0,371	0,371	0,358	0,363
Sat_eco	0,359	0,359	0,355	0,348	0,341	0,330	0,332	0,331
Sat_ocio	0,350	0,350	0,349	0,333	0,343	0,347	0,336	0,340
IPO	0,620	0,629	0,632	0,628	0,634	0,631	0,624	0,631
IPS	0,379	0,370	0,367	0,371	0,365	0,368	0,375	0,368



UNIVERSIDAD
PABLO
OLAVIDE
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (10). Páginas 73–98.
Diciembre de 2010. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art43.pdf>

Problema de calibración de mercado y estructura implícita del modelo de bonos de Black-Cox

SUKHOMLIN, NIKOLAY

Departamento de Física

Universidad Autónoma de Santo Domingo (República Dominicana)

CEREGMIA, Université des Antilles et de la Guyane (France)

Correo electrónico: nsukhomlin@gmail.com

SANTANA JIMÉNEZ, LISETTE JOSEFINA

Grupo de Investigación en Econofísica

Universidad Autónoma de Santo Domingo (República Dominicana)

Correo electrónico: lj.santana@bancentral.gov.do

RESUMEN

El principal resultado de este artículo consiste en la resolución del problema inverso del modelo de Black-Cox (1976), usando el método propuesto por Sukhomlin (2007). Se parte del enfoque retrógrado (*backward*) para obtener una expresión exacta de la volatilidad implícita en función de parámetros cuantificables con datos de mercado y de variables conocidas. Se descubre la existencia de dos valores de la volatilidad para un activo subyacente en el modelo referido, lo que indica que las asunciones tradicionales no lo definen de manera unívoca. Se encuentra la causa de que el modelo de Black-Cox contenga dos valores de la volatilidad. Además, se lleva a cabo una simulación, a fin de verificar, numéricamente, que la expresión obtenida para la volatilidad es la inversión de la fórmula que representa la probabilidad de que la firma no alcance un nivel de insolvencia antes del tiempo de madurez de la deuda. Finalmente, se resuelve el problema de calibración de mercado desde el punto de vista directo (*forward*), encontrándose una expresión que resulta de mayor utilidad para los agentes de mercado.

Palabras clave: modelo de Black-Cox; volatilidad implícita; arbitraje.

Clasificación JEL: C65; D53; E44; F37; G12; G15.

MSC2010: 35Q80; 91B26; 91G99; 58J35; 35K05.

Market Calibration Problem and the Implied Structure of the Black-Cox Bond Model

ABSTRACT

The main result of this paper consists in the resolution of the inverse problem for the Black-Cox (1976) model, using the method proposed by Sukhomlin (2007). Based on the backward approach, we obtain an exact expression of the implied volatility expressed as a function of quantifiable market parameters and known variables. We discover the existence of two values of the volatility for an underlying asset, in the referred model, which means that the model's traditional assumptions do not define it univocally. We find the cause that the Black-Cox model contains two values of the volatility. Besides, we carry out a simulation in order to verify, numerically, that our volatility expression is in fact the inversion of the formula that represents the probability that the firm has not reached the reorganization boundary before the debt expires. Finally, we solve the market calibration problem from the forward approach, finding an expression that is more useful for market agents.

Keywords: Black-Cox model; implied volatility; arbitrage.

JEL classification: C65; D53; E44; F37; G12; G15.

MSC2010: 35Q80; 91B26; 91G99; 58J35; 35K05.



1. INTRODUCCIÓN

El modelo de Black-Scholes (1973), para la valoración de opciones, constituye uno de los aportes más significativos en el campo de la teoría y práctica financiera, así como también la base de importantes investigaciones, tales como las de Merton (1974) y Black y Cox (1976), quienes aplican este análisis en sus respectivos trabajos sobre la valoración de deuda corporativa. Este artículo se enmarca en el modelo clásico de Black y Cox, fundamentado en los resultados de Merton.

Tanto el modelo de Merton como el de Black-Cox pertenecen a la familia de los denominados modelos estructurales, que determinan la probabilidad de que una empresa alcance un nivel de insolvencia (antes del tiempo de madurez de la deuda), tomando como referencia el valor de mercado de la misma. Estos modelos establecen un vínculo entre la calidad de crédito de la firma y su condición financiera.

Merton asume que la estructura de capital de una corporación se compone de deuda (bonos cero cupón con determinado tiempo de madurez) y de acciones. Si en el tiempo de expiración de la deuda, el valor total de los activos de la empresa es superior al valor de la deuda, se paga, en primer lugar, a los tenedores de bonos; los accionistas reciben la parte remanente. En el caso contrario, la corporación en cuestión cae en un nivel de insolvencia; los accionistas no reciben beneficios. Así, las acciones funcionan como una opción de compra sobre los activos de la firma, con un precio de ejercicio equivalente al valor facial de la deuda. Al tratar las acciones como opciones europeas de compra, Merton utiliza el enfoque propuesto por Black y Scholes para la valoración de dichos instrumentos.

Black y Cox utilizan un modelo de primer pasaje, extendiendo el enfoque de Merton al caso en que la empresa puede alcanzar un nivel de insolvencia en cualquier momento previo a la fecha de expiración de la deuda.

En la literatura económica existe un gran número de investigaciones basadas en la aplicación empírica de los modelos estructurales. Los resultados muestran que, de manera consistente, se sobrevaloran los precios de los bonos y se subvalúan los márgenes de rendimiento.

En Eom *et al.* (2004), se llevan a cabo pruebas para cinco modelos estructurales de valoración de bonos: Merton (1974); Geske (1977); Longstaff y Schwartz (1995); Leland y Toft (1996); Collin-Dufresne y Goldstein (2001). Los resultados de estas estimaciones reflejan inexactitudes en la predicción de los márgenes de rendimiento. En el caso del modelo de Merton, se encuentra que los márgenes que se predicen con la implementación del mismo son muy bajos.

Wong & Li (2004) consideran que la imprecisión en la implementación del modelo de Merton (1974) puede ser consecuencia de la utilización de variables *proxies* en los estudios empíricos. Estos autores muestran que al utilizar la suma del valor de mercado de las acciones con el valor en libro de la deuda corporativa, como *proxy* del valor de mercado de la firma, se genera un sesgo significativo de sobrevaloración de los activos de la misma. Ellos proponen el método de máxima verosimilitud para estimar el valor de los activos y la volatilidad, en el caso de los modelos estructurales, y muestran que, utilizando esta metodología, los precios de bonos se subvalúan o se sobrevaloran con un mínimo margen de error.

Chen *et al.* (2006) llevan a cabo una comparación entre seis modelos estructurales (entre ellos el de Merton y el de Black-Cox), a fin de analizar su capacidad para predecir la probabilidad de que la firma caiga en una situación de insolvencia. Se demuestra que tanto para la situación en la que el período de predicción es largo, como cuando es corto, el modelo de Merton es el que presenta los peores resultados. Por su parte, el modelo de Black-Cox queda en segundo y en primer lugar, respectivamente, para cada caso mencionado.

Bruche (2006) muestra cómo los datos de precios de bonos pueden ser utilizados conjuntamente con los datos de precios de acciones de la empresa para estimar modelos estructurales utilizando el método de máxima verosimilitud. Se lleva a cabo la estimación de tres modelos estructurales: Merton (1974); Leland (1994); Leland y Toft (1996). Los resultados indican que tanto el modelo de Merton como el de Leland subvalúan los márgenes de rendimiento, mientras que el de Leland y Toft los sobrevaloran.

En adición al esfuerzo por lograr una mayor precisión en la implementación de los modelos de valoración de opciones, diversos autores han desarrollado trabajos que constituyen una herramienta para mejorar la comprensión de las relaciones que subyacen en dichos modelos. En este sentido, la literatura económica muestra que la obtención de fórmulas aproximativas de la volatilidad implícita, es decir, un valor de la volatilidad que explique perfectamente el precio de la opción dadas las demás variables y parámetros del modelo, ha sido objeto de varios estudios.

Brenner & Subrahmanyam (1988) proponen una fórmula simple con el fin de aproximar la desviación estándar implícita para *opciones en el dinero (at the money options)* en el marco del modelo de Black-Scholes. Este trabajo ha sido objeto de extensiones tales como las de Corrado & Miller (1996), quienes mejoran el rango de validez de la fórmula propuesta por Brenner & Subrahmanyam y Chance (1996), quien introduce un término cuadrático de ajuste a fin de mejorar la precisión de la fórmula referida.

Isenngildina *et al.* (2007) verifican la precisión de diferentes fórmulas aproximativas de la volatilidad implícita para el modelo de Black-Scholes (entre éstas las de Corrado & Miller y la de Brenner & Subrahmayan). Los autores concluyen en que la precisión de las fórmulas evaluadas es sensible al tipo de datos de opciones utilizados (*e.g.* opciones de compra *premium*, promedio del valor de opciones de compra y venta, etc.), ya que en las fórmulas consideradas puede mejorar o empeorar la exactitud de los resultados en función de la muestra usada.

Sukhomlin (2007) es el primero en desarrollar un método que permite resolver el problema inverso del modelo de Black-Scholes y obtener una expresión exacta para la volatilidad implícita de dicho modelo. Este método puede ser generalizado y aplicado a modelos de este tipo, como es el caso del modelo de Black-Cox.

Así, el principal resultado de este artículo consiste en la resolución del problema de calibración de mercado del modelo de Black-Cox, utilizando el método propuesto por Sukhomlin. Se obtiene la volatilidad implícita expresada en función de parámetros cuantificables con datos de mercado (precio del bien subyacente, valor de la opción y el nivel de insolvencia), de variables conocidas (tasa de interés y tiempo de madurez) y de una variable que puede ser calculada fácilmente con dichos datos (la elasticidad de la griega *Delta*). Se descubre la existencia de dos valores de la volatilidad para un solo activo subyacente.

En este artículo se parte del enfoque *retrógrado* o “hacia atrás” (*backward*) para resolver el problema inverso del modelo de Black-Cox. Este resultado no solamente es interesante por el mero hecho de que responde una cuestión de más de 30 años de antigüedad, sino que también muestra que las asunciones tradicionales del modelo no lo definen de manera unívoca. Este hecho cambia totalmente la visión sobre este modelo clásico y sus resultados econométricos, y debe servir de base para explicar las dificultades de su aplicación en la predicción del comportamiento del mercado.

Pese a que en todo el artículo se emplea el enfoque *retrógrado*, comúnmente utilizado en la teoría de valoración de opciones, en una sección se resuelve el problema de calibración de mercado partiendo de la visión *directa* o “hacia el futuro” (*forward*), que resulta de mayor utilidad desde el punto de vista de los agentes del mercado.

A fin de verificar, numéricamente, que la expresión obtenida para la volatilidad implícita constituye la solución al problema inverso del modelo de Black-Cox, se llevó a cabo una simulación. Tomando en cuenta la existencia de dos valores de la volatilidad, se obtuvieron los valores para la expresión que

representa la probabilidad de que la firma no caiga en un nivel de insolvencia (antes del tiempo de madurez de la deuda), con la precisión de 10^{-9} ó de 10^{-5} , dependiendo del caso.

La estructura de este artículo es la siguiente. En la próxima sección se presenta una síntesis de los resultados principales. En la sección 3 se muestra la solución del problema inverso para el modelo de Black-Cox. En la sección 4 se discuten las semejanzas y diferencias entre las volatilidades implícitas de los modelos de Black-Cox y Black-Scholes. En la sección 5 se exponen las implicaciones de que en el modelo de Black-Cox exista más de un valor de la volatilidad, lo que muestra la necesidad de completar las asunciones tradicionales del modelo, a fin de definirlo de manera unívoca. En la sección 6 se presentan los resultados de la simulación realizada para comprobar que la fórmula principal representa realmente la inversión de la fórmula de Black-Cox. En la sección 7 se esgrimen argumentos de por qué en el modelo de Black-Cox existen dos valores de la volatilidad. En la sección 8 se expone la visión *directa* del problema de calibración de mercado, utilizada por los agentes prácticos. En la última sección se presentan las conclusiones de este trabajo.

2. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS PRINCIPALES

Aparte del trabajo de Sukhomlin (2007), en la literatura económica no existen publicaciones en las que se construya una expresión exacta de la volatilidad implícita para un bien derivado como una función de variables medibles en el mercado.

En este artículo, usando la metodología propuesta por Sukhomlin, se resuelve el problema inverso para el modelo de Black-Cox (BC), al obtener una expresión de la volatilidad implícita expresada en función de parámetros cuantificables con datos de mercado. Asimismo, se descubren otras características intrínsecas del modelo, que resultan inesperadas y paradójicas, pero que estuvieron presentes desde la creación del mismo. Es importante señalar que los resultados encontrados en torno al modelo en cuestión no constituyen una construcción complementaria, sino una parte desconocida del mismo y por consiguiente inseparable.⁷

En el modelo de BC, así como en el de Black-Scholes y otros similares, el único parámetro desconocido es la volatilidad. Se encuentra que el Teorema de la Función Inversa no se verifica, puesto que, si bien es posible calcular la probabilidad⁸ utilizando un solo valor de la volatilidad, resulta imposible obtener la

⁷ Se debe acotar que los resultados presentados en este artículo no constituyen un nuevo modelo sino, de manera más precisa, se puede señalar que representan nuevos desarrollos en torno a la teoría del modelo de BC.

⁸ En el caso del modelo de BC, nos referimos a la probabilidad de que la firma no alcance el nivel de insolvencia, denotada por la fórmula (1) (sección 3).

volatilidad (considerando que es una característica de la dispersión) utilizando un único valor de la variable aleatoria. Así, este estudio prueba que, en el marco del cálculo de Leibniz-Newton, para obtener un valor de la volatilidad implícita de BC se necesitan cuatro valores consecutivos del precio del activo subyacente y cuatro valores correspondientes del bien derivado.

También se encuentra que una de las debilidades del modelo de BC es que, contrariamente al de Black-Scholes, no está construido partiendo del principio de “no arbitraje”, por lo que, al invertir la fórmula principal del mismo, se encuentran dos valores de la volatilidad implícita para un activo y se concluye que las asunciones tradicionales no lo definen de manera unívoca.

Para obtener un solo valor de la volatilidad a partir de la fórmula de BC es necesario completar las asunciones propuestas originalmente por los autores, agregando nuevas condiciones.

Cabe señalar que, aunque en este artículo se resuelve el problema inverso para el modelo de BC utilizando el enfoque *retrógrado*, también se presenta la resolución del problema de calibración de mercado partiendo de la visión *directa*, que resulta importante desde el punto de vista de los agentes de mercado.

Como en el caso del modelo de Black-Scholes, los resultados obtenidos en este artículo están basados en el estudio de la simetría intrínseca del modelo de BC. Para evitar la “matematización” del texto sólo se expone el procedimiento de construcción de la fórmula exacta de la volatilidad implícita haciendo referencia únicamente al artículo de Sukhomlin (2007), en que se estudia dicha simetría.

Apuntamos también que este artículo se limita estrictamente al modelo de BC y, por lo tanto, no se discuten las generalizaciones posteriores como las de Longstaff & Schartz (1995) y Cathcart & El-Jahel (1998), que extendieron el modelo de BC considerando la tasa de interés como una variable estocástica, los de Fujita T. & Ishizaka M. (2002) e Ishizaka & Takaoka (2003) con la amortización de una deuda más realista, diferentes modelos de riesgo de crédito de Brigo & Tarengi (2004), Brigo & Moroni (2006) y Nardon (2005), modelo del comercio con activos con riesgo de Holger Kraft & Mogens Steffensen, (2007), entre otros.

Del mismo modo, es necesario señalar que ningún trabajo que represente un desarrollo del modelo de BC permitió a sus respectivos autores resolver exactamente el problema inverso. Si bien el enfoque presentado en este artículo se puede aplicar a diferentes modelos de este tipo, esto queda fuera del alcance de este estudio.

3. PROBLEMA INVERSO DEL MODELO DE BLACK-COX

En el modelo de Black-Cox (1976), la probabilidad de que la firma no alcance un nivel de insolvencia (barrera de *default*) antes del tiempo de madurez de la deuda, viene dada por la expresión:

$$V = N(d_+) - (x/B)^{2\beta} N(d_-), \quad (1)$$

$$d_{\pm} = \pm \tau^{-1} \ln(x/B) - \beta \tau,$$

$$\tau = \sigma \sqrt{T-t}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}, \quad x > B, \quad B = \text{const} > 0, \quad (2)$$

$N(\cdot)$ es la función de distribución normal acumulada.

Tradicionalmente, se interpreta x como el valor de mercado de la firma en el momento t ; B es el nivel de insolvencia⁹; σ es la volatilidad constante; T es el tiempo de madurez de la deuda y r es la tasa de interés (constante) libre de riesgo.

Para resolver el problema de calibración de mercado, Sukhomlin (2007) propone un método que consta de cuatro pasos: *construir una relación entre los términos de la fórmula inicial (la que representa la probabilidad de que la firma no alcance un nivel de insolvencia antes del tiempo de madurez de la deuda); introducir una característica auxiliar, de manera que se separe el factor exponencial; calcular la elasticidad de dicha característica; y, considerando esta expresión como una ecuación algebraica para la volatilidad, hallar la volatilidad implícita del modelo.*

Partiendo de (1), se obtiene la siguiente igualdad, que representa el primer paso del método:

$$N'(d_+) = N'(d_-)(x/B)^{2\beta}.$$

Como segundo paso, se introduce la función auxiliar:

$$\xi = V_{zz} - 2\beta V_z; \quad V_z := \partial V_{BC} / \partial z, \quad V_{zz} := \partial^2 V / \partial z^2, \quad z := \ln(x/B). \quad (3)$$

Así, se obtiene la expresión:

$$\xi = -\frac{2}{\tau^3} z N'(d_+) \quad (4)$$

⁹ Aunque Black y Cox asumen un nivel de insolvencia que varía con una tasa fija, para fines de simplificación de fórmulas, en este artículo se supone una tasa cero, por lo que el valor de la barrera es constante. No obstante, en las fórmulas presentadas resulta sencillo introducir esta dependencia de la barrera de *default* con respecto al tiempo.

Por definición, la elasticidad de esta característica auxiliar es:

$$E_{\xi} = \frac{\partial \ln|\xi|}{\partial z}, \quad (5)$$

por lo que, usando la función auxiliar (3), es sencillo calcular:

$$E_{\xi} = \frac{V_{zzz} - 2\beta V_{zz}}{V_{zz} - 2\beta V_z}. \quad (6)$$

Por otra parte, la expresión (4) también permite calcular la misma elasticidad (5), obteniéndose el siguiente resultado:

$$E_{\xi} = \frac{1}{z} - \frac{z}{\tau^2} + \beta. \quad (7)$$

Igualando las expresiones de la elasticidad, obtenemos la fórmula:

$$\frac{V_{zzz} - 2\beta V_{zz}}{V_{zz} - 2\beta V_z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{\tau^2} + \beta. \quad (8)$$

Como último paso, la igualdad (8) se considera como una ecuación algebraica para la volatilidad implícita del modelo de BC, ya que se puede despejar σ a partir de β y de τ cuando todas las demás variables están dadas o son medibles en el mercado.

Así, se puede escribir (8) en forma de ecuación cuadrática para el parámetro sin dimensión β (de (2) se obtiene que $\tau^2 = 2r(T-t)(1-2\beta)^{-1}$):

$$2Q\beta^2 + R\beta + P = 0, \quad (9)$$

en donde:

$$Q := 1 + \frac{z}{r(T-t)}, \quad (10)$$

$$R := -(Q+2)E_{\Delta} - 2\left(Q + \frac{1}{2} - \frac{1}{z}\right), \quad (11)$$

$$P := (E_{\Delta})_z + E_{\Delta}^2 + \left(\frac{1}{2}Q + \frac{3}{2} - \frac{1}{z}\right)E_{\Delta} + \left(\frac{1}{2}Q + \frac{1}{2} - \frac{1}{z}\right). \quad (12)$$

Los coeficientes R y P están expresados en función de la elasticidad de la griega *Delta* ($\Delta := V_x$):

$$E_{\Delta} := \frac{\Delta_z}{\Delta}. \quad (13)$$

La solución de la ecuación (9) es:

$$\beta_{1,2} = \frac{-R \mp \sqrt{R^2 - 8QP}}{4Q}. \quad (14)$$

Sustituyendo β (2) en la igualdad (14), se llega a la expresión para la volatilidad implícita del modelo de BC:

$$\left(\sigma_{BC}^2\right)_{1,2} = \frac{4Qr}{2Q + R \pm \sqrt{R^2 - 8QP}}. \quad (15)$$

La fórmula (15) revela dos hechos importantes. En primer lugar, se observa que las asunciones tradicionales del modelo de BC admiten dos valores de la volatilidad implícita para un solo activo subyacente (esto se estudia de manera más detallada en las secciones 5 y 7). En segundo lugar, es evidente que si no se completan los supuestos del modelo, los valores de la volatilidad pueden llegar a ser complejos o negativos, dependiendo del signo del denominador de la fórmula (15) y del valor de la expresión bajo la raíz. Al reemplazar los coeficientes Q , R , P de (10), (11) y (12), respectivamente, en la expresión (15), se ilustra de manera más explícita la relación existente entre la volatilidad implícita del modelo de BC y las variables de las cuales depende:

$$\left(\sigma_{BC}^2\right)_{1,2} = -4r \left[\frac{\ln(B/x)}{r(T-t)} - 1 \right] \left\{ \left[\frac{\ln(B/x)}{r(T-t)} - 3 \right] E_{\Delta} + 2 \ln(B/x) - 1 \pm \sqrt{8 \left[\frac{\ln(B/x)}{r(T-t)} - 1 \right] (E_{\Delta})_z + \left[(2 \ln(B/x) - 1) - \left(\frac{\ln(B/x)}{r(T-t)} + 1 \right) E_{\Delta} \right]^2} \right\}^{-1} \quad (15a)$$

Se constata que la volatilidad implícita del modelo de BC es una función de cuatro variables: la ratio del nivel de insolvencia sobre el valor de la firma B/x , que se interpreta como el nivel de endeudamiento de la compañía (*leverage*); la tasa de interés libre de riesgo r , el tiempo hacia la madurez $(T-t)$ y la elasticidad de la griega *Delta* E_{Δ} (13):

$$\sigma_{BC}^2 = \sigma_{BC}^2(B/x, r, (T-t), E_{\Delta}). \quad (16)$$

Es evidente que la expresión (15a) resulta complicada y, por esta razón, las discusiones posteriores que se harán en torno a la volatilidad implícita del modelo de BC estarán enfocadas en (15). Con la fórmula (15) se obtiene la solución exacta para el problema inverso del modelo de BC, ya que se logra expresar la

volatilidad en función de parámetros cuantificables con datos de mercado y de variables conocidas.¹⁰ En el marco del modelo estudiado, la expresión de la volatilidad (15) es tan válida como la expresión de partida (1), interpretada como la probabilidad de que la firma no alcance un nivel de insolvencia antes del tiempo de madurez de la deuda. En la sección 6, se verifica, numéricamente, que la fórmula (15) es la inversión exacta de (1).

4. SIMILITUDES Y DIFERENCIAS ENTRE LAS VOLATILIDADES IMPLÍCITAS DE LOS MODELOS DE BLACK-SCHOLES Y DE BLACK-COX

En la teoría de mercados financieros, el modelo de Black-Scholes (BS) sobre la valoración de opciones constituye el pivote de diversas investigaciones y, particularmente, Black y Cox emplean este enfoque para evaluar la probabilidad de que una firma pueda caer en una situación de insolvencia antes del vencimiento de la deuda. En este sentido, resulta interesante comparar la fórmula de la volatilidad para el modelo de BC (15) con la del modelo de BS, deducida por Sukhomlin (2007), que viene dada por la fórmula:

$$\sigma_{BS}^2 = \frac{\ln(K/S) - r(T-t)}{(T-t) \left(\frac{3}{2} + E_{\Gamma} \right)}. \quad (17)$$

Al observar las expresiones (15) y (17), se constata que la volatilidad del modelo de Black-Scholes es única y también depende de cuatro variables que son: la ratio K/S (donde K es el precio de ejercicio de la opción de compra; S es el precio del bien subyacente); r es la tasa de interés libre del riesgo; $(T-t)$ es el tiempo hacia la madurez de la deuda; E_{Γ} es la elasticidad de la griega *Gamma* (donde *Gamma* $\Gamma := \partial^2 V / \partial x^2$, mide la sensibilidad a los cambios en la característica *Delta*)¹¹:

$$\sigma_{BS}^2 = \sigma_{BS}^2(K/S, r, (T-t), E_{\Gamma}). \quad (18)$$

Las expresiones (16) y (18)¹² muestran las variables de las cuales depende la volatilidad implícita en los modelos de BC y BS, respectivamente. Se advierte que, tanto en el modelo de BC como en el modelo de BS, se hace referencia a la ratio entre una constante (nivel de insolvencia y precio de ejercicio,

¹⁰ Todos los datos, salvo la elasticidad de *Delta*, se obtienen directamente del mercado. Dicha elasticidad se calcula con los datos del mercado por la discretización de la fórmula (13), que no contiene la volatilidad, o utilizando las derivadas de la fórmula (1). Se puede comprobar que los resultados obtenidos por cálculos numéricos son prácticamente los mismos. Para la simulación realizada en la sección 6, se utiliza la primera metodología.

¹¹ La idea de utilizar en el modelo de BS la elasticidad de la griega *Gamma* en lugar de la elasticidad de la función auxiliar *Ks*, fue propuesta por Philippe Jacquinot y publicada en el artículo Sukhomlin, Jacquinot (2007).

¹² Sukhomlin y Jacquinot (2007) llevaron a cabo una simulación para la fórmula de la volatilidad implícita en el modelo de Black-Scholes (17), obteniendo una precisión de 10^{-9} y siendo los valores seleccionados para los parámetros de (18): $S_0=95$, $S_{(i+1)} - S_i=0.01$, $K=100$, $r=0.04$, $(T-t)=0.20$, $\sigma=0.20$.

respectivamente) y la variable aleatoria (precio del bien subyacente). En el contexto del modelo de BC, esta ratio se interpreta como el nivel de endeudamiento de la compañía (*leverage*) y en el modelo de BS se interpreta como *moneyness*¹³.

En ambas fórmulas se mantiene la presencia de una elasticidad, aunque ésta se calcula con respecto a diferentes griegas. La volatilidad implícita del modelo de BC necesita para su definición la elasticidad de la griega *Delta* (la primera derivada del valor de la opción respecto con el precio del bien subyacente), en tanto que la volatilidad implícita del modelo de BS se define por la elasticidad de la griega de orden superior *Gamma* (la segunda derivada del valor de la opción con respecto al precio del bien subyacente). De este hecho se deduce que, en el modelo de BS, la curvatura de la gráfica de V (1) es de mayor importancia para definir la volatilidad, mientras que en el modelo de BC es más relevante la tendencia del mercado, representada por la griega *Delta*. Es oportuno señalar, que las elasticidades mencionadas no habían sido utilizadas anteriormente en la teoría de estos modelos puesto que, durante más de treinta años, existía un estereotipo de que la volatilidad debía ser expresada directamente en términos del valor de la opción¹⁴. Por ejemplo, en el caso del modelo de BS se supuso que:

$$V_{BS} = V_{BS}(K/S, r, (T-t), \sigma_{BS}^2) \Rightarrow \sigma_{BS}^2 = \sigma_{BS}^2(K/S, r, (T-t), V_{BS}).$$

En la literatura económica, varios autores proponen fórmulas aproximativas de la volatilidad implícita expresadas, justamente, en función del valor de la opción (véase, por ejemplo Brenner & Subrahmanyam (1988); Chance (1996); Corrado & Miller (1996); Chambers & Nawalka (2001); Fouque et al. (2004); Kelly (2006); Isengildina-Massa et al. (2007); Minqiang (2008), entre otros)¹⁵. Esta línea de pensamiento no corresponde al hecho de que la volatilidad, como una característica de la dispersión, no puede ser vinculada a un solo valor de la variable aleatoria, sino que debe ser definida por varios valores consecutivos de la misma.

5. INSUFICIENCIA DE LAS ASUNCIONES DEL MODELO DE BLACK-COX

La existencia de dos valores de la volatilidad implícita para un solo activo subyacente es una condición intrínseca al modelo de BC. Pese a que esta propiedad resulta paradójica y contradiga el razonamiento

¹³ Existen otras definiciones de la *moneyness* como por ejemplo: $K/S-1$ y $\ln(K/S)$. Todas estas definiciones son válidas únicamente en el momento de expiración cuando $T = t$. Para utilizar esta característica en los momentos anteriores a la expiración, ($t < T$), se debe actualizar el precio de ejercicio, entonces la *moneyness* sería: $Ke^{-r(T-t)}/S$ (véase, por ejemplo, Hull and White, 1990).

¹⁴ Utilizamos V_{BS} para denotar la fórmula encontrada por Black y Scholes (1973) para calcular el valor de una opción (no debe ser confundida con V de la fórmula (1)).

¹⁵ Este enfoque convencional lleva a que el problema inverso para todas las fórmulas de este tipo se califique como *mal planteado* (véase, por ejemplo, Hein and Hofmann (2003)).

lógico, es inherente al modelo en cuestión, dados los supuestos y las condiciones complementarias (sección 7) consideradas por sus autores al momento de su creación.

En la sección 3, se señaló que los valores de (15) pueden llegar a ser complejos o negativos, dependiendo del signo del denominador de la fórmula y del valor de la expresión bajo la raíz. Así, a partir de dicha fórmula se observa que los valores complejos de la volatilidad implícita se pueden evitar si:

$$R^2 - 8QP > 0. \quad (19)$$

Usando (11) y (12), se puede escribir (19) en términos de la elasticidad de *Delta* (véase Anexo2):

$$\left(\frac{1}{E_{\Delta}}\right)_z > -\frac{1}{8Q} \left[(Q-2) + \left(\frac{2}{z} - 1\right) \frac{1}{E_{\Delta}} \right]^2. \quad (20)$$

Conforme a la fórmula (15), los dos valores encontrados (si se verifica (19)) pueden tener signos distintos o el mismo signo (positivo). En el primer caso, se encuentra que el cumplimiento de (20) es automático, a diferencia de la situación en que ambos resultados son positivos.

Caso 1. $\sigma_1^2 < 0, \sigma_2^2 > 0$:

$$2Q + R + \sqrt{R^2 - 8QP} > 0$$

$$2Q + R - \sqrt{R^2 - 8QP} < 0$$

Este sistema puede ser escrito como $0 \leq |2Q + R| < \sqrt{R^2 - 8QP}$ y, sustituyendo las expresiones (11) y (12), el mismo puede ser expresado en términos de la elasticidad de *Delta*:

$$\left(\frac{1}{E_{\Delta}}\right)_z > \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{z} + 1 \right) \frac{1}{E_{\Delta}} + 1. \quad (21)$$

Se puede verificar (véase Anexo 3) que (21) implica (20). Se concluye que el cumplimiento de (21) garantiza los signos diferentes de los dos valores de la expresión (15). En este caso, el valor negativo simplemente no se utiliza puesto que, aún si desde el punto de vista matemático las variables cuadráticas negativas están definidas (a partir de las cuales se obtienen raíces complejas), no tienen sentido desde la perspectiva económica.

Caso 2. $\sigma_1^2 > 0, \sigma_2^2 > 0$:

$$2Q + R + \sqrt{R^2 - 8QP} > 0,$$

$$2Q + R - \sqrt{R^2 - 8QP} > 0.$$

Este sistema sobre-definido puede ser expresado como una sola desigualdad, que es inversa de (21):

$$\left(\frac{1}{E_{\Delta}}\right)_z < \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{z}+1\right)\frac{1}{E_{\Delta}}+1. \quad (22)$$

Usando el mismo razonamiento empleado en el Anexo 3, se comprueba que el cumplimiento de (22) no implica (20). En conclusión, al verificarse simultáneamente (20) y (22), los signos de ambas volatilidades serán positivos. En la sección 6 se hace la simulación para este caso.

En esta situación, en que se obtienen dos valores positivos de la volatilidad, no se sabría con certeza cuál de éstos define el comportamiento del activo subyacente en cuestión. Bajo esta circunstancia, se advierte la existencia de un “*espacio escondido*” que representa riesgos ocultos y oportunidades de arbitraje, considerando que se pueden obtener beneficios derivados de la diferencia entre ambos valores de la volatilidad. De forma más explícita, un inversionista puede adquirir un instrumento financiero asumiendo un determinado valor de la volatilidad implícita y, por otra parte, dicho instrumento contiene también otra volatilidad que es inferior a la primera.

Así, se observa que esta debilidad del modelo de BC permite que se lleve a cabo la negociación de un instrumento financiero a un precio superior al que corresponde y que en realidad debería ser el mismo que se establece en función al otro valor de la volatilidad implícita, que es menor. De esta manera, se puede considerar que la existencia de más de una volatilidad está asociada a la presencia de oportunidades de arbitraje.¹⁶ En este sentido, se realizó un ejercicio sencillo que consistió en verificar si para los modelos de BC y BS se comprueban las condiciones de no arbitraje conocidas en la teoría financiera; es decir, que la función que representa el valor de la opción es monótona decreciente y convexa con respecto al precio de ejercicio y no decreciente con respecto al tiempo de madurez (véase, por ejemplo, Laurent & Leiseen, 1998). Se demostró que, para el modelo de BS, se cumplen simultáneamente las condiciones necesarias para que no exista arbitraje, mientras que para el modelo de BC no se comprueban (en el caso del modelo de BC se hizo la prueba para la fórmula (1)). Esta diferencia resulta lógica, considerando que en el modelo de BS la hipótesis de no arbitraje viene dada por la ecuación principal del modelo, mientras que Black y Cox no incorporaron esta restricción como parte de su modelo.

La presencia de riesgos ocultos en el modelo de BC debe servir de base para explicar las dificultades de su aplicación en la predicción del comportamiento del mercado y, asimismo, dicha condición muestra la necesidad de completar las asunciones establecidas durante la elaboración del modelo a fin de definirlo de manera unívoca.

¹⁶ Además del modelo de Black-Cox, Sukhomlin (2007) comprobó que en otros modelos también se obtiene más de un valor de la volatilidad, como por ejemplo en el modelo de Cané de Estrada y coautores (2005), que puede contener hasta tres valores de la volatilidad implícita.

6. VERIFICACIÓN DE LA EXPRESIÓN DE LA VOLATILIDAD POR SIMULACIÓN

A fin de comprobar numéricamente que (15) representa la inversión exacta de la expresión (1), se llevó a cabo una simulación, eligiendo los siguientes parámetros: los valores del activo subyacente x_i se eligen en el intervalo $[98.3, 105.3]$, $\Delta x_i = 0.007$, $i = [1, \dots, 1000]$, el nivel de insolvencia $B = 69$, el tiempo hacia la madurez $T-t = 0.20$, la tasa de interés $r = 0.0225$ y la volatilidad constante $\sigma_0^2 = 0.04$.

Con los valores escogidos, se calculan la expresión (1) y sus derivadas¹⁷. A partir de estos resultados y de los valores de la elasticidad de la griega *Delta* (13), se obtienen los coeficientes R y P de (11) y (12). Así, con la fórmula (15) se llega a dos valores positivos de la volatilidad¹⁸:

$$(\sigma^2)_1 = 0.002 \quad (\sigma^2)_2 = 0.04. \quad (23)$$

Es sencillo comprobar que ambas volatilidades verifican la ecuación (9). Se nota que, el valor de σ_2^2 se confunde con una precisión de 10^{-6} con la volatilidad inicialmente escogida de 0.04, lo que respalda la validez de nuestra fórmula.

La particularidad del modelo de BC radica en el hecho de que, además de la volatilidad esperada, en este caso σ_2^2 , existe otra diferente que apenas representa un 5% de la volatilidad inicial, pero al igual que la volatilidad esperada es también una solución de la ecuación (9) y constituye una parte del modelo.

La Figura 1 muestra los residuos $(\varepsilon)_{1,2} = \sigma^2 - (\sigma^2_{calculada})_{1,2}$. Los subíndices 1 y 2 corresponden, respectivamente, a las volatilidades σ_1^2 y σ_2^2 . Los valores de la serie ε_2 se distribuyen entre 2.3×10^{-6} y 2.4×10^{-6} , mientras que los valores de ε_1 son más imprecisos.

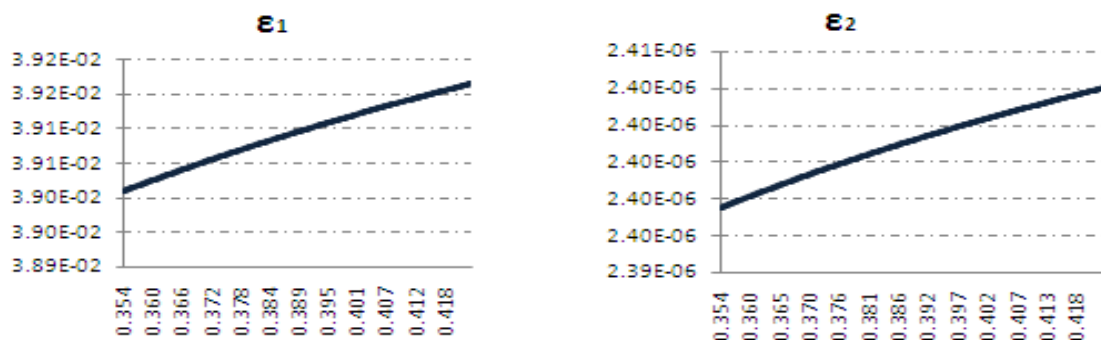


Figura 1. Comportamiento de los residuos ε_1 y de ε_2 en función de z .

¹⁷ Por la discretización de la fórmula (6).

¹⁸ En (23) se muestran los promedios para cada caso.

Para cada una de las volatilidades de (23), se calculan los valores de V conforme a la fórmula (1). El subíndice 0 corresponde al valor de V calculado con la volatilidad inicialmente elegida σ_0^2 . Se atribuyen los subíndices 1 y 2, respectivamente, según corresponda a σ_1^2 ó σ_2^2 . Las gráficas para V_0 , V_1 , V_2 se presentan en la Figura 2.

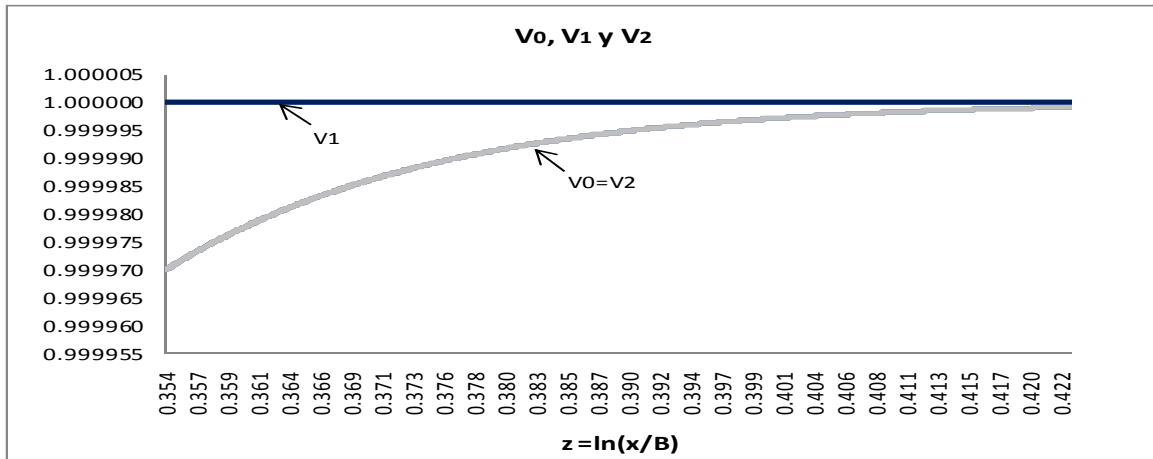


Figura 2. Comportamiento de V_0, V_1 y V_2 en función de z .

Las gráficas de V_0 y de V_2 se confunden con una precisión de 10^{-9} . Los valores de V_1 muestran una precisión de 10^{-5} con respecto a V_0 y, para todos los valores de z del intervalo escogido, permanecen constantes e iguales a uno.

Las gráficas de V_0, V_1 y V_2 en la Figura 2, se relacionan con el hecho de que la influencia del primer término de la fórmula (1), $N(d_+)$, es mayor que la del segundo término, $(x/B)^{2\beta} N(d_-)$. A medida que z crece o el tiempo se acerca a la madurez $N(d_+) \rightarrow 1$ y el segundo término tiende a cero.

Los resultados de la simulación y la precisión de los valores de V_1 y de V_2 con respecto a V_0 respaldan, numéricamente, el hecho de que la expresión de la volatilidad implícita para el modelo de BC (15) es la inversión de la fórmula que representa la probabilidad de que la firma no alcance un nivel de insolvencia antes del tiempo de madurez de la deuda (1). La brecha observada entre V_1 y V_0 puede ser explicada por el intervalo de datos, así como también por la marcada diferencia entre σ_1^2 y σ_2^2 .

7. ¿POR QUÉ EL MODELO DE BLACK-COX CONTIENE DOS VALORES DE LA VOLATILIDAD?

En la sección 4 se discutieron las semejanzas y diferencias entre las volatilidades implícitas de los modelos de BS y BC, pero aún permanece la cuestión de por qué en el segundo modelo se obtienen dos valores de la volatilidad, mientras que en BS se encuentra solamente un valor. Para responder esta pregunta, en primer lugar, se debe señalar que la fórmula (1) es la solución de la ecuación que puede ser llamada *ecuación de Black-Cox*¹⁹:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + rx \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (24)$$

Se constata que la ecuación (24) es prácticamente la misma que la ecuación clásica de BS, salvo que (24) no contiene el término que representa el incremento de la inversión libre de riesgo con tasa de interés fija. Esta diferencia es lógica, en vista de que, como se señala en la sección 5, la ecuación principal del modelo de BS representa la condición de no arbitraje, es decir, la igualdad entre los incrementos de dos inversiones en unidad de tiempo: el de una opción, que es afectada por las fluctuaciones del bien subyacente y otro que es el de la inversión sin riesgo con la tasa de interés fija.

En el caso del modelo de BC se habla del comportamiento de los activos de la firma, que funcionan como una opción (enfoque de Merton), por lo que el cero en la parte derecha de la ecuación (24) significa que no se hace referencia a inversiones sin riesgo. Es oportuno señalar que Black y Cox (1976) dedujeron su fórmula basándose únicamente en el razonamiento lógico de la Teoría de Bonos y, por esta razón, el planteamiento hecho por dichos autores y las aplicaciones posteriores del modelo, no incluyen ni la ecuación (24) ni la condición final correspondiente. Sin embargo, ambas pueden ser construidas usando la fórmula (1). La condición final sería la siguiente:

$$V(t = T, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq B \\ -(x/B)^{2\beta} & \text{si } x < B \end{cases}. \quad (25)$$

Ahora, se puede plantear el problema de búsqueda de la solución para la ecuación (24) definida sobre el cilindro $\{x, t : x > 0, t \in [0, T]\}$ y sujeta a la condición final (25). Usando el procedimiento similar al del modelo de BS, particularmente, aplicando la transformación regular: $t' = T - t$, $z = \ln(x/B) - \sigma^2 \beta t'$, $U(z, t') = V(x, t)$, la ecuación de BC (24) se convierte en la ecuación de difusión

$$\partial U / \partial t' - (\sigma^2 / 2) \partial^2 U / \partial z^2 = 0 \text{ con la condición inicial: } U(z, t' = 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \geq 0 \\ -e^{2\beta z} & \text{si } z < 0 \end{cases}; \beta \text{ está}$$

¹⁹ No se debe confundir esta ecuación con la del modelo de Black-Scholes que contiene el término rVt en la parte derecha.

definida en (2). Usando la solución fundamental (función de Green) de la ecuación de difusión y evaluando la integral correspondiente, se obtiene la solución del problema en forma (1). Se constata que, en vista de que las ecuaciones correspondientes a los modelos de BC y BS son prácticamente las mismas, la existencia de dos valores de la volatilidad en el modelo de BC no puede ser atribuida a la ecuación (24), que describe la dinámica del modelo. Este argumento también se respalda por el razonamiento siguiente: al resolver la ecuación de Black-Cox (24) con la condición final de Black-Scholes, se obtiene la solución clásica de Black-Scholes no descontada. La inversión de ésta genera un único valor de la volatilidad. De la misma manera, si se resuelve la ecuación de Black-Scholes con la condición final (25) se obtiene la solución (1) descontada, a partir de la cual se encuentran dos valores de la volatilidad.

Por otra parte, se observa que esta particularidad del modelo de BC tampoco puede ser atribuida al procedimiento utilizado para construir la solución del modelo, ya que éste es exactamente el mismo que se emplea para derivar la solución clásica de BS. Así, se puede concluir que la existencia de dos valores de la volatilidad en el modelo de BC es una consecuencia de la condición complementaria correspondiente (25), que contiene una discontinuidad.²⁰ Por lo tanto, se valora el papel de dicha condición, porque de ésta depende la presencia del riesgo oculto en el modelo estudiado.

8. VISIÓN PRÁCTICA DEL PROBLEMA DE LA CALIBRACIÓN DE MERCADO

El enfoque *retrógrado* (*hacia el pasado*) de la resolución del problema inverso para el modelo de BC (expuesto en la sección 3), es comúnmente utilizado en la teoría de valoración de opciones. No obstante, la visión práctica de los agentes de mercados es diferente. Los prácticos prefieren usar la información dada en un instante del tiempo y elaborar su decisión en base al conjunto de los datos actuales. Así, la calibración de mercado se entiende como la evaluación de un parámetro cuando los valores de las demás variables están dados en un momento del tiempo. Este enfoque *directo* (*hacia futuro o de avance*) significa que el precio del activo x y el tiempo t se consideran como los parámetros fijos, mientras que el nivel de insolvencia B y el tiempo de madurez de la deuda T son variables.

Ambos puntos de vista existen simultáneamente y se manifiestan por el hecho de que, paralelamente a la ecuación de Black-Scholes (ecuación *retrógrada* de Kolmogorov), existe la ecuación *directa* de Kolmogorov (ecuación de difusión o la de Fokker-Planck). Esta última tiene como variables B y T . Cabe mencionar que Black y Cox en su trabajo consideraron la expresión (1) como función de x y t , lo que corresponde al enfoque *retrógrado* que también fue utilizado por Black y Scholes en su artículo clásico de

²⁰ Sukhomlin demostró que esta propiedad es general, puesto que, si se introduce cualquier discontinuidad en las condiciones finales, por ejemplo en la condición final estándar del modelo de Black Scholes, en lugar de obtenerse una sola volatilidad como (17), surgen dos valores de la volatilidad para un subyacente.

1973. La expresión de la volatilidad implícita del modelo, desde la visión práctica de la calibración de mercado, se construye fácilmente por la introducción de la función auxiliar siguiente:

$$\Xi = V_{yy} + 2\beta V_y, \text{ en donde } y = \ln(B/x), \quad V_y \equiv \partial V / \partial y.$$

Usando (1), se calcula $\Xi = \frac{2}{\tau^3} y N'(d_+)$. Se observa que $\Xi = \xi$ de (4) pero las variables de las que dependen son diferentes: Ξ se considera como una función de las variables B y T , mientras que ξ es una función de las variables x y t . Según el procedimiento similar al de la sección 3, la elasticidad de esta nueva característica Ξ sería:

$$E_{\Xi} \equiv \frac{\Xi_y}{\Xi} = \frac{V_{yyy} + 2\beta V_{yy}}{V_{yy} + 2\beta V_y} = \frac{1}{y} - \frac{y}{\tau^2} - \beta.$$

Esta última igualdad se puede escribir en forma de la ecuación cuadrática (9) para el parámetro sin dimensión β , en donde Q es igual a (10), mientras que los coeficientes R (11) y P (12) deben ser expresados en función de las derivadas con respecto a B y T , siendo t y x fijos:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &:= R(B, T) \Big|_{t, x \text{ fijos}} = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{Q}{2} - \frac{1}{y} \right) + (2 + Q) \frac{V_{yy}}{V_y}, \\ \tilde{P} &:= P(B, T) \Big|_{t, x \text{ fijos}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{Q}{2} - \frac{1}{y} \right) \frac{V_{yy}}{V_y} + \frac{V_{yyy}}{V_y}. \end{aligned}$$

Así, se llega a la expresión exacta para la volatilidad implícita del modelo de BC que resuelve el problema de calibración de mercado, puesto que usa exclusivamente la información del mercado dada en un instante del tiempo:

$$\left[\sigma^2(B, T) \Big|_{t, x \text{ fijos}} \right]_{1,2} = \frac{4rQ}{2Q - \tilde{R} \pm \sqrt{\tilde{R}^2 - 8Q\tilde{P}}}. \quad (26)$$

Obviamente, las fórmulas (15) y (26) proveen los mismos valores de la volatilidad, pero éstos se calculan por diferentes procedimientos. Contrariamente a la fórmula (15), la fórmula (26) expresa la volatilidad implícita del modelo de BC en un momento del tiempo, con un valor fijo del subyacente “ x ”. Como en la sección 3, se llega a dos valores de la volatilidad correspondientes a un activo.

La fórmula (26) indica que para calcular la volatilidad en un instante dado, se necesitan cuatro valores de V para diferentes valores de la barrera B . Con este resultado se resuelve exactamente el problema de calibración de mercado del modelo clásico de BC, partiendo del enfoque *directo*.

9. CONCLUSIONES

En este artículo, haciendo uso del método propuesto por Sukhomlin (2007), se resuelve el problema inverso del modelo de bonos de Black-Cox, en el cual la firma puede caer en un nivel de insolvencia en cualquier momento previo al vencimiento de la deuda (*modelos de primer pasaje*). Este resultado es importante no solamente porque representa la solución de un problema de más de treinta años sino que, al mismo tiempo, revela que las asunciones del modelo de Black-Cox permiten la existencia de dos valores de la volatilidad para un solo activo subyacente. Este hallazgo cambia totalmente la visión sobre este modelo y debe servir de base para explicar las dificultades de su aplicación en la predicción del comportamiento del mercado, así como también de otros modelos estructurales basados en los resultados de Black y Cox.

Partiendo del enfoque *retrogrado*, se obtiene la fórmula para la volatilidad implícita expresada en función de parámetros medibles con datos de mercado y de variables conocidas. Esta expresión es una función de cuatro variables: la ratio del nivel de insolvencia sobre el valor de mercado de la firma (nivel de endeudamiento), la tasa de interés libre de riesgo, el tiempo de madurez y la elasticidad de la griega *Delta*.

La dependencia de la volatilidad con respecto a las dos primeras variables es lógica, mientras que la utilización de la elasticidad de una griega representa el aporte del método de Sukhomlin. La introducción de esta elasticidad, no solo permite obtener la solución exacta del problema inverso, sino que también rompe el estereotipo de que la volatilidad debería estar expresada directamente en función del valor de la opción.

Matemáticamente, los valores de la volatilidad implícita del modelo de Black-Cox pueden ser complejos y de cualquier signo, dependiendo de los parámetros del modelo, lo que impone limitaciones intrínsecas para los parámetros de este sistema dinámico.

El caso en que ambas volatilidades son reales y tienen el mismo signo positivo no es ordinario, ya que no se sabría cuál de éstas define, de manera más acertada, el comportamiento del activo subyacente en cuestión. En esta situación se advierte la existencia de un *espacio escondido* que representa riesgos ocultos y oportunidades de arbitraje, ya que se pueden obtener ventajas derivadas de la diferencia entre los dos valores de la volatilidad. Este hecho muestra la necesidad de completar los supuestos tradicionales del modelo de Black-Cox a fin de definirlo de manera unívoca y evitar riesgos ocultos en el mismo.

La comparación de la volatilidad implícita para el modelo de Black-Cox con la del modelo de Black-Scholes, deducida por Sukhomlin, revela las similitudes y discrepancias entre las expresiones obtenidas.

La principal diferencia entre ambas fórmulas radica en el hecho de que el modelo de Black-Scholes contiene un único valor de la volatilidad. Asimismo, se observa que la fórmula para la volatilidad del modelo de Black-Cox es más compleja que la del modelo de Black-Scholes.

La volatilidad implícita del modelo de Black-Cox depende de la elasticidad de la griega *Delta*, en tanto que la fórmula de la volatilidad en el modelo de Black-Scholes depende de la elasticidad de una medida de sensibilidad de orden superior *Gamma*. Esto significa que, en el modelo de Black-Cox, la tendencia de mercado es fundamental mientras que, en el modelo de Black-Scholes, la curvatura de la gráfica correspondiente a la probabilidad de que la firma no alcance un nivel de insolvencia (antes del tiempo de madurez de la deuda) se manifiesta como la característica más relevante.

Se infiere que la posibilidad de arbitraje está relacionada a la existencia de más de un valor de la volatilidad implícita. En este sentido, se puede verificar que las condiciones necesarias de no arbitraje, generalizadas en la teoría financiera, no se cumplen para la fórmula de Black-Cox y, por consiguiente, este modelo contiene intrínsecamente dicha posibilidad, que se revela a partir de la resolución del problema de calibración de mercado.

Los resultados de la simulación realizada exhiben una precisión de 10^{-9} para la volatilidad que se confunde con la que se escogió inicialmente para dicha simulación.

Pese a que todo el artículo está desarrollado empleando la visión *retrógrada*, en una sección se presenta la solución al problema de calibración de mercado del modelo de Black-Cox partiendo del enfoque *directo*, que resulta interesante desde el punto de vista de los agentes de mercado.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Dr. Franklin Fermín, a la Universidad Autónoma de Santo Domingo, al Prof. Fred Celimene y al laboratorio CEREGMIA de la Universidad de las Antillas-Guyana por el apoyo brindado y a la Prof. Nicole El Karoui por las discusiones útiles. Los autores también expresan su agradecimiento a la redacción de la Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa y, particularmente, al Dr. Eugenio M. Fedriani Martel.

REFERENCIAS

Black, F., Cox, J. (1976). “Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions”, *The Journal of Finance*, 31, pp. 351–367.

- Black, F., Scholes, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637–654.
- Brenner, M., Subrahmanyam, M. (1988). "A Simple Formula to Compute the Implied Standard Deviation", *Financial Analysts Journal*, 5, pp. 80–83.
- Brigo, D., Tarengi, M. (2004), "Credit Default Swap Calibration and Equity Swap Valuation under Counterparty Risk with a Tractable Structural Model", in *Proceedings of the FEA*, 2004, Conference at MIT, Cambridge, Massachusetts.
- Brigo, M., Morini, M. (2006), "Credit Default Swap Calibration with tractable structural models under uncertain credit quality", *Risk Magazine*, 2006, April issue.
- Bruche, M. (2006). "Estimating Structural Models of Corporate Bond Prices", *Centro de Estudios Monetarios y Financieros (CEMFI)*, Working Paper, Madrid, n. 0610.
- Cané de Estrada, M, Cortina, E, Ferro Fontan, C, Di Fiori, J.(2005) "Pricing of defaultable bonds with log-normal spread: development of the model and an application to Argentinean and Brazilian bonds during the Argentine crisis", *Review of Derivatives Research* 8(1): 40–60.
- Cathcart, L., El-Jahel, L. (1998), "Valuation of defaultable bonds", *Journal of Fixed Income*, 8 (1), pp. 65–78.
- Chambers, D., Nawalkha, S. (2001). "An improved approach to computing implied volatility", *The Financial Review*, 38, pp. 89–100.
- Chance, D.M. (1996). "A generalized simple formula to compute the implied volatility", *Financial Review* 31(4), pp. 859–867.
- Chen, R., Hu, S., Pan, G. (2006). "Default Prediction of various structural models", Working Paper, Fordham University, NY.
- Corrado, C., Miller, T. (1996). "A Note on a Simple, Accurate Formula to Compute Implied Standard Deviations", *Journal of Banking and Finance*, 20, pp. 595–603.
- Collin-Dufresne, P., Goldstain, R. (2001). "Do Credit Spreads Reflect Stationary Leverage Ratios?" *Journal of Finance*, 56, pp.1929–1957.
- Eom, Y., Helwege, J., Huang, J. (2004). "Structural Models of Corporate Bond Pricing: An Empirical Analysis", *The Review of Financial Studies*, 17 (2), pp. 499–544.
- Fouque, J., Papanicolaou, G., Sircar, R., Solna, K. (2004). "Maturity Cycles in Implied Volatility", *Finance & Stochastics*, 8 (4), pp. 451–477.
- Fujita T., Ishizaka M. (2002), "An application of new barrier options (Edokko options) for pricing bonds with credit risk", *Hitotsubashi Journal of Commerce Management*, 37 (1), pp. 17–23.

- Geske, R. (1977). “The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options”, *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 12, pp. 541–552.
- Hein, T., Hofmann B. (2003) “On the nature of ill-posedness of an inverse problem arising in option pricing”, *Inverse Problems*, 19, pp. 1319–1338.
- Hull, J., White, A. (1990). “Pricing interest-rate derivative securities”, *The Review of Financial Studies*, 3(4), pp. 573–592 (reprinted in *Options: Recent Developments in Theory and Practice*, v.2, 1992, pp. 160–180).
- Isengildina-Massa, O., Curtis, C., Bridges, W., Nian, M. (2007). “Accuracy of Implied Volatility Approximations Using “Nearest-to-the-Money M” Option Premiums”, Paper presented at the Southern Agricultural Economics Association Meetings Mobile, AL, February, 2007.
- Ishizaka, M., Takaoka, K. (2003). “On the pricing of defaultable bonds using the framework of barrier options”, *Asia-Pacific Financial Markets*, 10, pp. 151–162.
- Kelly, M.A. (2006). “Faster Implied Volatilities via the Implicit Function Theorem”, *The Financial Review*, 41, pp. 589–597.
- Kraft, H., Steffensen, M. (2007). “Bankruptcy, Counterparty Risk, and Contagion”. *Review of Finance*, 11(2), pp. 209–252.
- Lauren, J.P., Leissen, D. (1998). “Building a consistent pricing model from observed option prices”. Stanford University, Hoover Institution, Working Paper No. B-443.
- Leland, H. (1994). “Corporate Debt Value, Bond Covenants and Optimal Capital Structure”, *Journal of Finance*, 49, pp. 1213–1252.
- Leland, H., Toft, K. (1996). “Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy and the Term Structure of Credit Spreads”, *Journal of Finance*, 51, pp. 987–1019.
- Longstaff, F., Schwartz, E. (1995). “A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt”, *The Journal of Finance*, 50, pp. 789–820.
- Merton, R. (1974). “On the pricing of corporate debts: the risk structure of interest rates”, *Journal of Finance*, 29, pp. 449–470.
- Minqiang, L. (2008). “Approximate Inversion of the Black-Scholes Formula Using Rational Functions”, *European Journal of Operational Research*, 185 (2), pp. 743–759.
- Nardon, M. (2005). “Valuing defaultable bonds: an excursion time approach”, Finance 0511015, EconWPA.
- Sukhomlin, N. (2007). “The Black-Scholes type financial models and the arbitrage opportunities”, *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 14 (1), pp. 1–6.

Sukhomlin, N., Jacquinet, Ph. (2007). “Solution Exacte du Problème Inverse du Valorisation des Options dans le Cadre du Model de Black et Scholes”, Paper published in “*Hyper Articles en Ligne*”. Archives ouvertes. France (hal-00144781, version 1).

Wong, H., Li, K. (2004). “On Bias of Testing Merton’s Model”, Proceeding of *International Association of Science and Technology for Development (IASTED)*, Conference on Financial Engineering and Applications, 9 pp. Alberta, Canada: ACTA Press, 8th Nov., 2004.

ANEXO 1

En la sección 3, se señala que el método propuesto por Sukhomlin (2007) para resolver el problema de calibración de mercado consta de cuatro pasos. Estos pasos se desarrollan a continuación:

a) Construcción de una relación entre los términos de la fórmula inicial

Partiendo de la función de densidad de probabilidad normal, sustituyendo d_+ y desarrollando términos se obtiene:

$$N'(d_+) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln^2(x/B)}{\tau^2} + \beta^2\tau^2\right]\right\}(x/B)^\beta.$$

Este mismo procedimiento se aplica para el caso de d_- :

$$N'(d_-) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln^2(x/B)}{\tau^2} + \beta^2\tau^2\right]\right\}(x/B)^{-\beta}.$$

Se observa que la parte exponencial en ambos casos es la misma, por lo que se puede establecer que:

$$\frac{N'(d_+)}{(x/B)^\beta} = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln^2(x/B)}{\tau^2} + \beta^2\tau^2\right]\right\} = \frac{N'(d_-)}{(x/B)^{-\beta}}.$$

Así, se llega a la igualdad: $N'(d_+) = N'(d_-)(x/B)^{2\beta}$.

b) Cálculo de la característica auxiliar ξ

Para obtener ξ (3) se calculan las derivadas de primer y segundo orden con respecto a z ($z := \ln(x/B)$)

(se hace uso de la relación del primer paso):

$$\begin{aligned} V_z &= 2\tau^{-1}N'(d_+) - 2\beta(x/B)^{2\beta}; \\ V_{zz} &= 2\tau^{-2}[\beta\tau - d_+]N'(d_+) - (2\beta)^2(x/B)^{2\beta}N(d_-). \end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas en (3) se llega a la expresión de ξ (4).

c) Elasticidad de ξ

Partiendo de la expresión de ξ (4) y usando la definición (5):

$$E_{\xi} = \frac{\partial \ln|\xi|}{\partial z} = \frac{\xi_z}{\xi} = \frac{-2\tau^{-3}[1-\tau^{-1}d_+z]N'(d_+)}{-2\tau^{-3}zN'(d_+)}.$$

Eliminando términos y sustituyendo d_+ , se deduce la elasticidad de la característica auxiliar ξ (7). Por otra parte, sabiendo de (3) que $\xi = V_{zz} - 2\beta V_z$ y utilizando también la definición de elasticidad se calcula

(6): $E_{\xi} = \frac{V_{zzz} - 2\beta V_{zz}}{V_{zz} - 2\beta V_z}$. Igualando ambas expresiones de la elasticidad, se obtiene (8).

d) Considerando la igualdad (8) como una ecuación algebraica para la volatilidad, hallar la volatilidad implícita del modelo.

De β (2) y de $\tau^2 = \sigma^2(T-t)$, se tiene que $\tau^2 = 2r(T-t)(1-2\beta)^{-1}$. Sustituyendo τ^2 en (8) y desarrollando las operaciones correspondientes, se llega a la expresión (para simplificar hemos denotado $\varepsilon_1 = V_{zz}/V_z$; $\varepsilon_2 = V_{zzz}/V_z$):

$$2\left[\frac{z}{r(T-t)} + 1\right]\beta^2 + \left[\frac{2}{z} - \frac{z}{r(T-t)} - \left(3 + \frac{z}{r(T-t)}\right)\varepsilon_1\right]\beta + \left[\varepsilon_2 + \left(\frac{z}{2r(T-t)} - \frac{1}{z}\right)\varepsilon_1\right] = 0.$$

La ecuación anterior se puede expresar en función de la elasticidad de la griega *Delta* (13), sustituyendo $\varepsilon_1 = E_{\Delta} + 1$; $\varepsilon_2 = (E_{\Delta})_z + \varepsilon_1^2$ y así se obtienen los coeficientes R , Q y P de (10), (11) y (12). Esta igualdad se resuelve como una ecuación cuadrática para el parámetro β :

$$\beta_{1,2} = \frac{-R \mp \sqrt{R^2 - 8QP}}{4Q}.$$

Se sustituye β por su definición (2): $\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma_{1,2}^2} = \frac{-R \mp \sqrt{R^2 - 8QP}}{4Q}$

y se despeja la volatilidad implícita del modelo de Black-Cox (15).

ANEXO 2

Sustituyendo (11) y (12) en (19), se llega a la expresión siguiente:

$$8Q(E_{\Delta})_z < \left\{ (Q+2)^2 - 8Q \right\} E_{\Delta}^2 + \left\{ 4(Q+2) \left(Q + \frac{1}{2} - \frac{1}{z} \right) - 8Q \left(\frac{1}{2} Q + \frac{3}{2} - \frac{1}{z} \right) \right\} E_{\Delta} + \left\{ 4 \left(Q + \frac{1}{2} - \frac{1}{z} \right)^2 - 8Q \left(\frac{1}{2} Q + \frac{1}{2} - \frac{1}{z} \right) \right\}$$

Agrupando términos y dividiendo por el cuadrado de la elasticidad de *Delta*, se obtiene:

$$8Q \frac{(E_{\Delta})_z}{E_{\Delta}^2} < (Q-2)^2 + 2(Q-2) \left(\frac{2}{z}-1\right) \frac{1}{E_{\Delta}} + \left(\frac{2}{z}-1\right)^2 \frac{1}{E_{\Delta}^2}.$$

Para obtener (20), se completan cuadrados en la desigualdad anterior:

$$\left(\frac{1}{E_{\Delta}}\right)_z > -\frac{1}{8Q} \left[(Q-2) + \left(\frac{2}{z}-1\right) \frac{1}{E_{\Delta}} \right]^2.$$

Así, se expresa (20) en términos de la elasticidad de *Delta*.

ANEXO 3

Sean las partes derechas de las desigualdades (20) y (21). Considerando que ambas son menores que $(1/E_{\Delta})_z$, se puede establecer la relación siguiente:

$$\max \left\{ -\frac{1}{8Q} \left[(Q-2) + \left(\frac{2}{z}-1\right) \frac{1}{E_{\Delta}} \right]^2, \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{2}{z}+1\right) \frac{1}{E_{\Delta}} + 1 \right] \right\} < \left(\frac{1}{E_{\Delta}}\right)_z.$$

Para determinar cuál de las expresiones en la parte izquierda es mayor, se estudia el signo de la diferencia entre ambas:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{8Q} \left\{ (Q-2) + \left(\frac{2}{z}-1\right) \frac{1}{E_{\Delta}} \right\}^2 - \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{z}-1\right) \frac{1}{E_{\Delta}} + 1 \right\} = \\ & = -\left\{ \frac{Q}{8} \left(\frac{2}{Q}+1\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{Q}+1\right) \left(\frac{2}{z}-1\right) \frac{1}{E_{\Delta}} + \frac{1}{8Q} \left(\frac{2}{z}-1\right)^2 \frac{1}{E_{\Delta}^2} \right\}. \end{aligned}$$

Se completan cuadrados y se obtiene:

$$-\left\{ \sqrt{\frac{Q}{8}} \left(\frac{2}{Q}+1\right) - \sqrt{\frac{1}{8Q}} \left(\frac{2}{z}-1\right) \frac{1}{E_{\Delta}} \right\}^2.$$

Se observa que la diferencia entre las expresiones es negativa, lo que confirma que la parte derecha de (21) es mayor que la parte derecha de (20). Así, (21) implica (20) y, por lo tanto, esta última desigualdad resulta innecesaria.



UNIVERSIDAD
**PABLO DE
OLAVIDE**
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (10). Páginas 99–120.
Diciembre de 2010. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art44.pdf>

An Empirical Investigation of Parametric and Semiparametric Estimation Methods in Sample Selection Models

FERNÁNDEZ-SAINZ, ANA I.

Departamento de Econometría y Estadística

Universidad del País Vasco (Spain)

Correo electrónico: ana.fernandez@ehu.es

RODRÍGUEZ-PÓO, JUAN M.

Departamento de Economía

Universidad de Cantabria, Santander (Spain)

Correo electrónico: rodrigjm@unican.es

ABSTRACT

In this paper we analyze empirically different specifications of a sample selection model. We are interested in how the estimates vary across alternative assumptions concerning the joint conditional distribution of the sample selection equation errors, such as the specification of error distribution, the functional relationship of the index function and heteroskedasticity. To do this, we estimate a wage equation for the Spanish labor market using two different approaches: Maximum Likelihood and Two-Step Methods. For the latter, three alternative semiparametric procedures are used to compute the sample selection mechanism, and thus three alternative two-step estimators of the parameters of the wage equation are obtained. We compare these estimates with Heckman's approach.

Keywords: sample selection models; distributional assumptions; semiparametric two-step estimation methods.

JEL classification: C14; C25; J64.

MSC2010: 62P20; 91B40.

Investigación empírica de métodos de estimación paramétricos y semiparamétricos de modelos de selección muestral

RESUMEN

En este trabajo se analizan empíricamente distintas especificaciones de un modelo de selección muestral. Estamos interesados en conocer cómo las estimaciones de los parámetros varían en función de supuestos alternativos sobre la distribución condicional conjunta de los errores de la ecuación de selección, de la forma funcional de la función índice y la heteroscedasticidad. Para el análisis, estimamos una ecuación de salarios para el mercado de trabajo español usando dos enfoques distintos: máxima-verosimilitud y métodos en dos etapas. Para el caso de la estimación en etapas, consideramos tres procedimientos semiparamétricos alternativos para el cómputo del mecanismo de selección. Así, se obtienen tres estimadores en dos etapas de los parámetros de la ecuación de salarios. Comparamos las estimaciones con la obtenidas siguiendo el método de Heckman.

Palabras clave: modelos de selección muestral; hipótesis distribucionales; métodos de estimación en dos etapas semiparamétricos.

Clasificación JEL: C14; C25; J64.

MSC2010: 62P20; 91B40.



1 Introduction

In any microeconomic study of the labor market, two facts are readily apparent: many individuals do not work, and wages are not available to non-working people. This introduces a serious bias in the estimation of many behavioral equations, since only a non-randomly chosen subsample is available to estimate the parameters of interest. This is pointed out in Gronau (1974) and Heckman (1974). In their papers, a sample selection model is introduced, consisting of two equations: a wage equation, explaining the potential log-wage rate of every individual, including non-workers, and a selection equation indicating whether or not someone is employed and therefore the wage is observed. Since then, many estimation techniques have been developed in econometrics literature to account for this issue. As pointed out in Vella (1998), in empirical literature, the main extension of Heckman's seminal paper has been the use of semiparametric and nonparametric methods in the estimation of relationships of interest. In fact, these techniques have allowed empirical researchers to relax some rather strong assumptions that were introduced in the early papers of this literature: Mainly those involving the form of the distribution of the selection mechanism and those involving the statistical relationship between errors and explanatory variables.

Although these new estimation procedures for sample selection models have received a lot of attention in theoretical econometric literature (see among others Ahn and Powel, 1993; Andrews and Schafgans, 1998; Chen and Lee, 1998; Das, Newey and Vella, 2000 and Lewbel, 2007) very few applications are available. Furthermore, with the exceptions of Melenberg and Van Soest (1993), Vella (1998), Martins (2001) and Coelho, Veiga and Veszteg (2005), no comparison of the different estimation techniques is available.

In this paper we seek to empirically study different specifications of a sample selection model. More precisely, we are interested in analyzing the behavior of the different estimates under alternative assumptions regarding the sample selection equation, such as the specification of error distribution, the functional relationship between selection and explanatory variables (index function) and the statistical relationship between error and explanatory variables (heteroskedasticity). To do this, we estimate a wage equation for the Spanish labor market using two different approaches: Maximum Likelihood and Two-Step Methods. The first technique is used as a benchmark. For the second, three alternative procedures are used to compute the sample selection mechanism, in order to estimate the parameters of the wage equation. Depending on whether the selection equation is fully parametric (where both conditional distribution and index function are known), semiparametric (where only the form of the index is known) or nonparametric, three alternative two-step estimators of the parameters of the wage equation are obtained: Those proposed by Heckman (1979), Powell (1987) and Ahn and Powell (1993). The impact of omitted heteroskedasticity in the selection equation is analyzed in a fully parametric approach through standard Lagrange multiplier tests. Finally, a consistent specification test of Heckman's model is also implemented. This test is based on a general specification test developed by Horowitz and Härdle (1994).

The paper is organized as follows. In Section 2 we introduce the model and the data. In Section 3, we develop the estimation methods and we present the main results. Finally, in Section 4 we conclude.

2 Data and Model

In order to estimate a wage equation for the Spanish labor market we have available data obtained from the *Encuesta de Población Activa (EPA)*, the Spanish quarterly Labor Force Survey. This survey has taken place every quarter since 1975 and is collected by the National Bureau of Statistics (INE). It covers approximately 60,000 households and contains information about 150,000 individuals aged over 16. It provides information at different levels of disaggregation at both national and regional level. From these surveys, in the second quarter of 1990 the National Bureau of Statistics randomly selected a cross-section of 4,989 individuals (1,010 are unemployed looking for work) and provided additional information about some variables that were considered relevant for labor market participation analysis.

The variables included in this data set are defined in Table 1, where we also include some descriptive statistics.

Variable	Description	Whole Sample	Worker Sample
AGE16-19	dummy, 1 if age 16 to 19	0.1317 (0.3383)	0.1111 (0.3145)
AGE20-25	dummy, age 20 to 25	0.2653 (0.4417)	0.2565 (0.4371)
AGE26-35	dummy, age 26 to 35	0.2782 (0.4483)	0.2614 (0.4398)
AGE>45	dummy, older than 45	0.1386 (0.3457)	0.1437 (0.3511)
ELEMENTARY	dummy, elementary school	0.3550 (0.4773)	0.3399 (0.4740)
H.SCHOOL	dummy, high school	0.1158 (0.3202)	0.1062 (0.3083)
UNIVERSITY	dummy, university	0.0643 (0.2455)	0.0392 (0.1943)
U-RATE	unemployment rate	0.1718 (0.0693)	0.1714 (0.0710)
NOT HEAD OF HOUSE	dummy, 1 if person is not head of household	0.7039 (0.4567)	0.6160 (0.4867)
SEXF	dummy, 1 if female	0.6802 (0.4666)	0.6258 (0.4843)
SINGLE	dummy, 1 if single	0.6891 (0.4631)	0.7255 (0.4466)
PARTICIPATING	dummy, 1 if participating	0.6059 (0.4888)	... (...)
SIZE		1010	612

Table 1: *Comparative statistics of explanatory variables, mean and standard deviation (in brackets).*

Before specifying the wage equation, we need to stress some issues related to both the characteristics of the Spanish labor market and the data. In 1990 most contracts in the Spanish labor market were signed for forty hours per week. Almost no part time contracts were allowed at this time. In a standard wage equation model (Heckman, 1974), this would imply that offered wages are not affected by hours worked. In this sense, a most accurate specification of a wage equation for our purposes

would be the one proposed in Gronau (1973), where in fact offered wages are not assumed to depend on hours worked. A second issue that also affects the standard specification of a wage equation is the fact that in our data set we only observe the wage of the individual that has been randomly selected. No information about other incomes in the household is available. Nor do we know the number of components of the family or other related issues, for example children's ages. In our analysis we will not therefore specify different wage equations for males and females.

Taking into account the above restrictions, we propose the following sample selection model, also referred in Amemiya (1985) as the Type II Tobit model:

$$z_i^* = f_1(x_{1i}) + u_{1i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$y_i^* = f_2(x_{2i}) + u_{2i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$y_i = y_i^*, \quad \text{if } z_i^* > 0, \quad (3)$$

$$y_i = 0, \quad \text{if } z_i^* \leq 0. \quad (4)$$

Here, $f_1(x_1)$ and $f_2(x_2)$ are real functions and (u_1, u_2) are random variables whose realizations are unobserved by the researcher. The observed variables are y_i, z_i, x_{1i} and x_{2i} . x_1 and x_2 might contain common variables. z_i denotes a dummy variable indicating whether the i -th individual has a paid job ($z_i = 1$ if $z_i^* > 0$) or not ($z_i = 0$ if $z_i^* \leq 0$), and y_i is the wage someone receives if he/she is employed. It is only observed iff $z_i = 1$. Equation (2) is the so called market wage equation. The explanatory variables in this equation, x_1 , are the standard ones in this type of models (see Vella, 1998), i.e. one dummy variable for the gender differential effect, and three dummy variables referring to education level. In a first attempt at specification we also included age as a proxy of experience, but it turned out that this variable was more relevant in explaining participation, and therefore since we needed a exclusion restriction in order to identify the parameters of the market wage equation we decided to remove this variable from the wage equation.

Equation (1) reflects the difference between the market and the reservation wage. It is a reduced form participation equation. Therefore, among the explanatory variables in this equation, x_2 , we can find variables related to both market and individual characteristics: One dummy variable for the gender differential effect, four dummy variables associated with age and three dummy variables referring to education level. Education level is used as an indicator of potential earnings of individuals. We also used the unemployment rate in the area of residence since participation may depend on cyclical conditions of the economy. We decided also to include a dummy variable that indicates marital status. This last variable approximates the reservation wage.

The selection problem comes from the fact that we are interested in understanding the relationship represented in equation (2), but we observe only a subsample of observations due to the observability rule that is represented in equations (3) and (4). Finally, it is important to note that equations (1) to (4) alone do not restrict the distribution of (y, z) conditional on (x_1, x_2) . An econometric model takes on content when restrictions are imposed on $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$ and the distribution of (u_1, u_2) conditional on x_1, x_2 .

3 Estimation Methods and Results

Any first attempt to introduce an estimation method of the sample selection model must go through the analysis of identification conditions. Following Manski (1993), three different types of identifying restrictions can be imposed on the above specification.

First, we can assume that u_1 and u_2 are statistically independent conditionally on (x_1, x_2) . In this case, $f_2(\cdot)$ can be consistently estimated without taking into account the information contained in the other equation. A further restriction not necessary to identify the conditional probability model is that $f_2(\cdot)$ should fall within a specified class of linear parametric models. In this case, standard least squares techniques provide consistent estimates for the parameters of the wage equation.

A second group of identifying restrictions is to assume that the joint distribution of (u_1, u_2) conditionally on (x_1, x_2) belongs to a pre-specified family of parametric density functions. Moreover, $f_1(\cdot)$ and $f_2(\cdot)$ are assumed to be linear parametric functions. These restrictions identify the parameters of the wage equation that can be estimated through maximum likelihood methods. Under the conditions detailed above it is also possible to consistently estimate the parameters of interest by a two-step method proposed in Heckman (1979). This method estimates in a first step the parameters of the selection equation and then, in a second step, the parameters of the wage equation, incorporating a correction term, are estimated by standard weighted least squares. Note that a two-step sample selection estimator with a linear correction term can be consistent for the regression coefficients despite misspecification of distribution (see Olsen, 1981 and Newey, 1999).

Maximum likelihood estimators of the wage equation are extremely sensitive to misspecification in the joint conditional distribution of (u_1, u_2) on (x_1, x_2) . Hurd (1979) shows the consequences of omitted heteroskedasticity and Goldberger (1983) describes the effects of non-normality. Newey (1999) analyzes the impact of misspecification of distribution in two-step estimators, Fernández, Rodríguez-Póo and Villanua (2002) show the impact of ignoring heteroskedasticity and Nawata and Nagase (1996) compare the performance of the two estimators by a simulation study.

In order to weaken certain distributional assumptions, a third group of identifying restrictions has been introduced in the literature of sample selection models. The identifying restriction consists of assuming that the conditional distribution of the selection equation error, u_1 , depends on a certain function of x_1 (single index function), through an unknown relationship, $h(x_1)$.

Based on this single index restriction, several semiparametric estimation methods have been proposed. The main advantage of these estimation procedures over the ones above is that knowledge of the conditional distribution of u_1 given x_1 is not required, and therefore they are robust to misspecification in error distribution. All are based on two-stage procedures. Powell (1987) and Newey (1991) additionally assume that $h(\cdot)$ is a linear parametric function, and they propose estimating the parameters of this index function through a semiparametric estimation method (Klein and Spady, 1993 or Horowitz and Härdle, 1996). Ahn and Powell (1993) do not impose linearity restrictions on index $h(\cdot)$, but they assume some conditions that guarantee the possibility to estimate nonparametrically this index function.

Note that by estimating a wage equation model with different estimation procedures, maximum likelihood, parametric and semiparametric two-step methods, we can obtain very important information

about possible specification errors in the econometric model. Thus, if we estimate the same wage equation model alternatively with maximum likelihood and with Heckman's two-step procedure, and the estimation results are similar, we can conjecture that the conditional distribution of u_2 given x_2 is approximately normal. Furthermore, by estimating the same econometric model by parametric and semiparametric two-step methods we could guess that in fact the conditional distribution of the sample selection mechanism, u_1 given x_1 , is Gaussian if the estimation results are close. Finally, the impact of omitted heteroskedasticity in the parameter estimates of the wage equation can also be considered within the framework of conditionally Gaussian distributions.

In the estimation under these different identifying restrictions we can compare the parameter estimates, and decide, if possible, what sort of specification best fits the data structure. In what follows we will estimate the model described in equations (1) to (4) by using the different estimation techniques described above. To do this we will add the identification conditions already discussed for each of these estimation procedures.

3.1 Maximum Likelihood Estimators

As already remarked in the previous section, in order to implement the maximum likelihood estimators of the wage equation, in the setting described by equations (1), (2), (3) and (4) we add the following restrictions:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Big| X = x \sim N(0, \Sigma(x, \alpha)) \quad (5)$$

and

$$\Sigma(x, \alpha) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2(x_1; \alpha_1) & \rho\sigma_1(x_1; \alpha_1)\sigma_2(x_2; \alpha_2) \\ \rho\sigma_1(x_1; \alpha_1)\sigma_2(x_2; \alpha_2) & \sigma_2^2(x_2; \alpha_2) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Note that $x = (x_1 \ x_2)$. Furthermore, we also assume that $f_1(x_1) = x_1^T \beta_1$, $f_2(x_2) = x_2^T \beta_2$ and the functions $\sigma_1(\cdot)$ and $\sigma_2(\cdot)$ are known by the researcher and belong to some family of parametric functions. Under these conditions, β_1 is identified up to a scale factor, β_2 and ρ are identified, and the nuisance parameters α_1 , α_2 can also be identified only under some specific functional forms for heteroskedasticity. For example, if $\sigma_1^2(x_1; \alpha_1) = \kappa_1 \exp(x_1^T \alpha_1)$ and $\sigma_2^2(x_2; \alpha_2) = \kappa_2 \exp(x_2^T \alpha_2)$, $\kappa_1 > 0$ and $\kappa_2 > 0$, then the nuisance parameters, α_1 and α_2 , and the second scale factor, κ_2 , are identified. The vector of coefficients, β_1 , will be identified up to the scale, κ_1 .

The statistical model represented in equations (1)–(6) nests a great variety of specifications. For example, if we make $\rho = 0$, we are imposing statistical independence between the selection and the wage equation. This restriction, as indicated in Section 2, identifies the parameters of the wage equation regardless of the distribution of errors. We can also consider the case where errors are independent of explanatory variables. That is, $\sigma_1^2(x_1; \alpha_1) = \kappa_1$ and $\sigma_2^2(x_2; \alpha_2) = \kappa_2$.

The unrestricted likelihood function takes the following form,

$$\begin{aligned} \ln L = & \sum_{i=1}^n \left[(1 - y_i) \ln \left(1 - \Phi \left(\frac{x_{1i}^T \beta_1}{\sigma_1(x_{1i}; \alpha_1)} \right) \right) + y_i \ln \left(\Phi \left(\frac{x_{1i}^T \beta_1}{\sigma_1(x_{1i}; \alpha_1)} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \rho \left(\frac{y_i - x_{2i}^T \beta_2}{\sigma_2(x_{2i}; \alpha_2)} \right) (1 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma_1(x_{1i}; \alpha_1)} \phi \left(\frac{y_i - x_{2i}^T \beta_2}{\sigma_2(x_{2i}; \alpha_2)} \right) \right) \right], \end{aligned}$$

where $\phi(\cdot)$ and $\Phi(\cdot)$ stand respectively for the Gaussian density and distribution function. We compute maximum likelihood estimates of four nested wage equation models for Spanish labor market data. The models are the following:

Model I: $\rho = 0$, $\sigma_1^2(x_1; \alpha_1) = \kappa_1$ and $\sigma_2^2(x_2; \alpha_2) = \kappa_2$.

Model II: $\sigma_1^2(x_1; \alpha_1) = \kappa_1$ and $\sigma_2^2(x_2; \alpha_2) = \kappa_2$.

Model III: $\sigma_1^2(x_1; \alpha_1) = \kappa_1 \exp(x_1^T \alpha_1)$ and $\sigma_2^2(x_2; \alpha_2) = \kappa_2$.

Model IV: $\sigma_1^2(x_1; \alpha_1) = \kappa_1 \exp(x_1^T \alpha_1)$ and $\sigma_2^2(x_2; \alpha_2) = \kappa_2 \exp(x_2^T \alpha_2)$.

In Table 2 we show the estimates for the wage equation, and the correlation coefficient between this equation and the sample selection one. In all models, standard deviations of the maximum likelihood estimators have been computed using the variance-covariance matrix that is robust to misspecifications of the conditional distribution of the errors. It is obtained by considering the Maximum Likelihood estimator as a special case of M-estimators (see Gourieroux and Monfort, 1995; Vol. I, p. 213). Note that under Gaussian errors, this variance-covariance matrix is the inverse of the Fisher information matrix.

Variable	Model I	Model II	Model III	Model IV
Constant	6.155 (0.03)	6.261 (0.03)	6.245 (0.03)	6.227 (0.03)
Sexf	-0.076 (0.04)	-0.022 (0.04)	-0.051 (0.04)	-0.004 (0.03)
Elementary	-0.168 (0.04)	-0.112 (0.04)	-0.111 (0.04)	-0.029 (0.04)
H. School	0.079 (0.06)	0.149 (0.06)	0.112 (0.06)	0.224 (0.05)
University	0.419 (0.09)	0.565 (0.09)	0.501 (0.10)	0.707 (0.07)
ρ	... (...)	-0.624 (0.07)	-0.543 (0.09)	-0.677 (0.05)
κ_2	0.438 (0.01)	0.484 (0.02)	0.217 (0.02)	0.144 (0.01)

Table 2: Maximum likelihood estimates of the wage equation, standard deviation in brackets.

Across the different models, the estimation results do not change significantly in size or sign. In all cases the sex dummy variable is insignificant¹ and small. However, the educational dummy variables are all significant and they keep their sign unchanged in all models. In fact, the dummy elementary school variable has a significant negative impact and the dummy university variable has a significant, strong, positive effect. It is important to remark that in the last three cases, ρ is significantly different from zero. On these grounds, Model I does not appear to be a reasonable specification.

In Table 3 we show maximum likelihood estimates of the parameters of the selection equation. In doing this, our aim is to analyze the impact of a possible misspecification on the selection equation in the wage equation. For example, if Model III is the right specification, then maximum likelihood

¹Significance level: 5%.

estimators of the parameters in models I and II are inconsistent. A very interesting issue is studying how the parameter estimates of the wage equation change across different specifications of the selection equation. Note that we have chosen the absolute value of the parameter associated with the unemployment rate in the participation equation as a normalization scale instead of using more usual normalization scales such as $\sigma_1 = 1$. This is to allow for comparisons against semiparametric estimation methods.

Variable	Model I	Model II	Model III	Model IV
Constant	2.170 (2.57)	2.294 (2.59)	1.129 (0.99)	3.06 (0.53)
Sexf	-0.584 (0.76)	-0.595 (0.74)	-0.310 (0.33)	-1.066 (0.24)
Age16-19	-1.054 (1.39)	-1.292 (1.61)	-3.726 (4.75)	-3.202 (0.57)
Age20-25	-0.546 (0.77)	-0.359 (0.53)	1.088 (0.69)	0.652 (0.19)
Age26-35	-0.384 (0.56)	-0.313 (0.46)	-0.633 (0.72)	-0.411 (0.17)
Age>45	-0.886 (1.17)	-0.825 (1.03)	-0.916 (0.98)	-1.504 (0.30)
Elementary	0.065 (0.24)	0.233 (0.36)	3.531 (6.56)	0.915 (0.23)
H. School	-0.243 (0.42)	-0.127 (0.32)	6.022 (7.88)	-0.089 (0.16)
University	-1.082 (1.43)	-1.051 (1.32)	-0.131 (1.75)	-2.174 (0.41)
U-rate	1.0 (..)	1.0 (..)	1.0 (..)	1.0 (..)
Single	1.237 (1.59)	1.038 (1.27)	1.828 (2.37)	1.816 (0.34)
Not Head of House	-1.756 (2.26)	-1.932 (2.36)	-1.237 (1.38)	-3.149 (0.56)
κ_1	0.877 (0.12)	0.942 (0.12)	1.456 (0.74)	1.819 (0.087)

Table 3: *Maximum likelihood estimates of the selection mechanism.*

As expected, the estimates of the parameters in the sample selection equation present more significant changes across models, in both sign and size than those of the wage equation. This is particularly true in the dummies Age 20-25 and High School. Moreover, the dummies Single and Not head of house are only significant in the last column. These changes have also been remarked in other studies such as Gerfin (1996), Fernández and Rodríguez-Póo (1997) and Martins (2001). One possible explanation may be the presence of heteroskedasticity in the selection equation. If this is the case, the estimators in models I and II are inconsistent and their results are meaningless. To analyze this issue more precisely, we show the maximum likelihood estimates of the variance parameters both in the selection and wage equation in Table 4.

The results estimated from Models III and IV are not conclusive. In fact, the main interest of these estimates is that they allow us to construct general specification tests for nested models. More precisely, we are interested in testing Model I against Model II ($H_0 : \rho = 0$), for independence between the two equations; Model II against Model III ($H_0 : \sigma_1(x_1; \alpha_1) = \kappa_1$), for homoskedasticity

Variable	Model III	Model IV
Heter. Sample selection		
Sexf	0.687 (0.50)	0.705 (0.09)
Age16-19	-0.274 (2.51)	1.066 (0.10)
Age20-25	-0.196 (1.35)	0.675 (0.10)
Age26-35	-1.323 (0.71)	0.156 (0.10)
Age>45	-0.581 (0.74)	0.553 (0.09)
Elementary	3.996 (2.82)	1.596 (0.10)
H. School	4.710 (1.54)	1.650 (0.10)
University	2.845 (3.84)	0.559 (0.10)
U-rate	-2.740 (3.03)	0.570 (0.10)
Single	0.723 (1.03)	-0.881 (0.09)
Not Head of House	2.949 (0.80)	1.231 (0.09)
Heter. Wage		
sexf	... (...)	0.259 (0.08)
Elementary	... (...)	0.685 (0.08)
H. School	... (...)	0.529 (0.09)
University	... (...)	0.550 (0.09)

Table 4: Variance parameters in selection and wage equations.

	Model II	Model III	Model IV
Model I	31.31 (2.2e-08)	76.76 (1.7e-11)	90.29 (2.2e-12)
Model II	... (...)	45.45 (4.0e-06)	58.98 (3.8e-07)
Model III	... (...)	... (...)	13.53 (0.009)

Table 5: Likelihood ratio statistic and p-values in brackets.

in the selection equation; Model III against Model IV ($H_0 : \sigma_2(x_2; \alpha_2) = \kappa_2$), for homoskedasticity in the wage equation, and it is also interesting to test Model II against Model IV ($H_0 : \sigma_1(x_1; \alpha_1) = \kappa_1$ and $\sigma_2(x_2; \alpha_2) = \kappa_2$), for homoskedasticity in both equations. In Table 5 we present the values of the different likelihood ratio tests for the specifications.

Within the framework of conditionally Gaussian models (this assumption is maintained throughout the four models), the different likelihood ratio tests support the idea of a specification close to a Gaussian conditionally distributed model with heteroskedasticity in the participation equation and significant sample selection bias (Model III). As remarked in previous studies (see Fernández and Rodríguez-Póo, 1997), heteroskedasticity is present in the participation equation and therefore a specification based on heteroskedasticity appears to be a more reasonable structure. The coefficient estimates of the wage equation are rather sensitive to the specification of the participation equation. Mainly, these parameter estimates change significantly when the correlation between the two equations is different from zero and when we assume exponential heteroskedasticity for the participation equation.

3.2 Two Stage Estimation Procedures

This estimation procedure relies on the following expression for the wage equation that can be easily obtained from the structural model represented in equations (1) to (4),

$$E(y|z^* > 0, x_1, x_2) = x_2^T \beta_2 + m(x_1, x_2), \quad (7)$$

where

$$m(x_1, x_2) = E(u_2|x_2, f_1(x_1) + u_1 > 0). \quad (8)$$

Then the parameter vector, β_2 , of the wage equation can be estimated through the following corrected regression equation,

$$y_i = x_{2i}^T \beta_2 + \hat{m}(x_{1i}, x_{2i}) + v_i, \quad (9)$$

where

$$v_i = y_i - m(x_{1i}, x_{2i}) - \{\hat{m}(x_{1i}, x_{2i}) - m(x_{1i}, x_{2i})\},$$

and $\hat{m}(x_1, x_2)$ can be any estimator of $m(x_1, x_2)$.

In considering two-step methods, it is interesting to categorize them in different groups according to the restrictions that are imposed in order to estimate the function $m(x_1, x_2)$. In the first group we will include those that fully explode parametric assumptions. This is the case of the estimator proposed in Heckman (1979). Since the selection equation error is assumed to be conditionally Gaussian then, considering equations (1), (2), (3) and (4) and $f_1(x_1) = x_1^T \beta_1$, the following expression can be obtained

$$m(x_1, x_2) = \rho \sigma_2 \lambda \left(\frac{x_1^T \beta_1}{\sigma_1} \right), \quad (10)$$

and

$$\lambda(u) = E \left[\frac{u_1}{\sigma_1} \middle| \frac{u_1}{\sigma_1} > -z \right] = \frac{\phi(z)}{\Phi(z)}. \quad (11)$$

Here $\phi(\cdot)$ and $\Phi(\cdot)$ are the standard normal density and the distribution function. The function $m(x_1, x_2)$ can be estimated in a first stage by a probit maximum likelihood technique, and then

$$\hat{m}(x_1, x_2) = \rho \sigma_2 \lambda \left(x_1^T \hat{\beta}_1^* \right), \quad (12)$$

where $\beta_1^* = \frac{\beta_1}{\sigma_1}$.

From (9), (10) and (11) it is clear that $E(v|z^* > 0, x_1, x_2) = 0$ and the variance $\text{Var}(v|z^* > 0, x_1, x_2)$ is not constant. Therefore, O.L.S. estimators of β_2 are consistent, but unfortunately the standard

Variable	Heckman	Powell	Ahn-Powell	Newey
Constant	6.021 (0.08)	... (...)	... (...)	... (...)
Sexf	-0.444 (0.12)	-0.455 (0.18)	-0.386 (0.22)	-0.402 (0.16)
Elementary	-0.121 (0.08)	-0.083 (0.08)	0.012 (0.11)	-0.1 (0.02)
H. School	0.184 (0.12)	0.103 (0.13)	0.209 (0.15)	0.112 (0.14)
University	0.405 (0.19)	0.441 (0.22)	0.591 (0.25)	0.425 (0.21)
λ	0.156 (0.09)	... (...)	... (...)	... (...)

Table 6: *Two-step estimates of the sample selection model. Wage equation.*

Variable	Probit M.L.	Horowitz-Härdle
Constant	2.176 (2.47)	... (...)
Sexf	-0.586 (0.74)	-0.029 (0.08)
Age 16 – 19	-1.050 (1.34)	-0.403 (0.25)
Age 20 – 25	-0.544 (0.75)	-0.220 (0.22)
Age 26 – 35	-0.384 (0.55)	-0.223 (0.19)
Age > 45	-0.889 (1.12)	-0.169 (0.09)
Elementary	0.065 (0.23)	-0.104 (0.12)
H. School	-0.240 (0.40)	-0.270 (0.27)
University	-1.078 (1.36)	-0.722 (0.25)
U-rate	1 (...)	1 (...)
Single	1.236 (1.52)	0.483 (0.12)
Not Head of House	-1.762 (2.17)	0.027 (0.19)
κ_1	0.879 (0.12)	... (...)

Table 7: *Two-step estimates of the sample selection model. Selection Equation.*

errors computed in the traditional way are inconsistent (Amemiya, 1985). Several methods have been proposed for estimating these standard errors consistently (Newey, 1987). In the first column of Table 6 we represent O.L.S. estimates of the corrected wage equation. The standard deviations of the parameter estimates have been computed using the method proposed in White (1980), which provides estimators that are robust to heteroskedasticity.

If we compare the two-step estimates of the wage equation with the maximum likelihood estimates already shown in Tables 2 and 6, we can observe strong disagreements between the two groups of results. The sex variable is insignificant and small in the M.L.E. case, whereas in the two-step

method it is large and significant. A similar discrepancy occurs for the impact of the highest degree, i.e. the dummy elementary school has a significantly negative impact for all the maximum likelihood estimates but one, and is not significant for the two-step estimator. These disagreements may be due to possible misspecification errors that come from the sample selection equation. In other words, even if the wage equation is correctly specified, excluding the case when sample selection and wage equations are uncorrelated, a specification error in the selection equation can cause misleading estimation results in the wage equation.

Before implementing further developments of two-step methods that require weaker assumptions on the sample selection specification equation, we perform an empirical comparative analysis of a standard probit maximum likelihood estimator with a semiparametric estimation method of the binary equation, in order to detect possible misspecifications in this equation. Much deeper research into this problem can be found in Fernández and Rodríguez-Póo (1997). Among other possible specification errors, omitted heteroskedasticity and non-normality can cause inconsistency in probit maximum likelihood estimators. Since Manski (1975), much research has been devoted to the estimation of binary response models without assuming either homoskedasticity or knowledge of the conditional distribution of the error term. These semiparametric methods rely basically on three different groups of identifying restrictions (see Manski, 1988): quantile independence restrictions, single index restrictions and independence between errors and explanatory variables. Weighted average derivative estimators belong to the second group of identifying restrictions, and are of great interest for our purposes since, first, they allow for heteroskedasticity that depends on the index function and, second, there is no need to specify the form of the conditional distribution of the error term in order to estimate the parameters of index function. Horowitz and Härdle (1996) propose a weighted average derivative estimator that allows for discrete explanatory variables. For the sake of comparison, in Table 7 we show probit maximum likelihood estimates of the selection equation and the semiparametric estimates proposed by Horowitz and Härdle (1996). A detailed description of this last estimator is provided in the Appendix. In order to make the calculations we take $c_0 = 0.2$, $c_1 = 0.8$, a fourth order kernel with support $[-1, 1]$,

$$K(u) = \frac{105}{64} (1 - 5u^2 + 7u^4 - 3u^6) I(|u| < 1), \quad (13)$$

and the vector of parameters associated to continuous variables is computed as a weighted average of density weighted average derivative estimates with weights equal to the frequencies of the discrete variables. The bandwidth, h_n was chosen by least square cross-validation. All the above choices are justified by the assumptions introduced in the paper by Horowitz and Härdle (1996). The higher order kernel is needed to deal with the bias term in the semiparametric estimator.

Comparing the two results, we observe significant changes in both the size and the sign of the coefficient estimates. More specifically, in the semiparametric estimates most variables, as expected, become significant, and the signs of both the *elementary* and *not head of household* dummy variables change their sign. A deeper analysis could be performed, but our interest here is to note that these significant changes can be due to misspecification errors in the parametric equation. Of course, as already remarked in a simulation study in Nawata and Nagase (1996) and Fernández, Rodríguez-Póo and Villanua (2002), these errors may seriously affect the properties of the estimators of the wage equation.

A second group of sample selection estimators relies on the so called single index assumption (see

Manski, 1993). Let $h(x_1)$ be a known index, and assume that $f_1(x_1)$ and (u_1, u_2) vary with x_1 only through $h(\cdot)$. Then, (8) can be written as

$$m(x_1, x_2) = E(u_2 | x_2, f_1[h(x_1)] + u_1 > 0) = g[f_1[h(x_1)], x_2], \quad (14)$$

and hence, from (7),

$$E(y | z^* > 0, x_1, x_2) = x_2^T \beta_2 + g[f_1[h(x_1)], x_2]. \quad (15)$$

Note that if no assumption is made about the conditional distribution of the error terms, even if $h(\cdot)$ is known, the function $g(\cdot, \cdot)$ is unknown. One way to estimate consistently the parameters β_2 of the wage equation is to take advantage of the partial additive structure of (15) by noting that

$$y_i = x_{2i}^T \beta_2 + g[f_1[h(x_{1i})], x_{2i}] + \nu_i, \quad (16)$$

where

$$\nu_i = y_i - E(y_i | z^* > 0, x_{1i}, x_{2i}).$$

Then, if we take two different observations of indexes i and j such that

$$g[f_1[h(x_{1i})], x_{2i}] = g[f_1[h(x_{1j})], x_{2j}],$$

we obtain

$$y_i - y_j = \beta_2^T (x_{2i} - x_{2j}) + \nu_i - \nu_j. \quad (17)$$

Since

$$E[\nu_i - \nu_j | z^* > 0, x_1, x_2] = 0,$$

then a consistent estimator of β_2 is given by the following weighted least squares estimator:

$$\hat{\beta}_{2n} = \left[\left(\binom{n}{2} \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \hat{w}_{ijn} (x_{2i} - x_{2j}) (x_{2i} - x_{2j})^T \right]^{-1} \times \left(\binom{n}{2} \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \hat{w}_{ijn} (x_{2i} - x_{2j}) (y_i - y_j). \quad (18)$$

The sequence of weights \hat{w}_{ijn} can take several forms. If the index function is assumed to be known and parametric, i.e. $f_1[h(x_1)] = x_1^T \beta_1$, then the weight function is

$$\hat{w}_{ijn} = \frac{1}{h_n} K \left(\frac{(x_{1i} - x_{1j})^T \hat{\beta}_{1n}}{h_n} \right) \quad \text{for } i, j = 1, \dots, n, \quad (19)$$

and $\hat{\beta}_{1n}$ is any root- n consistent semiparametric estimator of β_1 (for example, the one proposed in Horowitz and Härdle (1996)). $K(\cdot)$ is a kernel function and h_n is the window width.

The estimator defined in (18), jointly with the weights in (19), has already been proposed in Powell (1987), where it is shown that under some technical assumptions $\hat{\beta}_{2n}$ is consistent and asymptotically normal. One can relax the above assumption in the index function, $h(x_1)$, by assuming that this function is unknown and needs to be estimated by the researcher. Let us define the following composite function:

$$q(x_1) = f_1[h(x_1)].$$

Then, in this case, the weights in (18) take the following expression:

$$\hat{w}_{ijn} = \frac{1}{h_n} K \left(\frac{\hat{q}(x_{1i}) - \hat{q}(x_{1j})}{h_n} \right) \quad \text{for } i, j = 1, \dots, n, \quad (20)$$

and $\hat{q}(x_{1i})$ are multivariate nonparametric kernel regression estimators:

$$\hat{q}(x_{1i}) = \frac{\frac{1}{nl_n} \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^K L\left(\frac{x_{1ki} - x_{1kj}}{l_n}\right) \mathbf{1}(z_j^* > 0)}{\frac{1}{nl_n} \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^K L\left(\frac{x_{1ki} - x_{1kj}}{l_n}\right)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (21)$$

where $\mathbf{1}(\cdot)$ stands for the indicator function.

Note that, in order to implement this procedure, we need to use two different bandwidths, h and l . This can create several problems, and empirically it represents an important drawback of this method. It is also necessary to use two different kernels, $K(\cdot)$ and $L(\cdot)$. Ahn and Powell (1993) show that the parameters of the wage equation estimated under this technique are root- n consistent, and also calculate their asymptotic distribution.

In Table 6 we show parameter estimates of the wage equation obtained by the method proposed in Powell (1987) and Ahn and Powell (1993). For the first method, the semiparametric estimates of the sample selection equation (the β_1 s) are computed following the method proposed in Horowitz and Härdle (1996), and the kernel function $K(\cdot)$ is

$$K(u) = \frac{\tau^3 k(u) - k\left(\frac{u}{\tau}\right)}{\tau(\tau^2 - 1)}, \quad (22)$$

for $\tau = \sqrt{2}$ and

$$k(v) = \frac{15}{16} (1 - v^2)^2 I(|v| < 1). \quad (23)$$

This is a so called higher order kernel, and it is necessary to eliminate a bias term in the asymptotic expression of the estimator for β_2 that would otherwise render it inconsistent. For the kernel function $L(\cdot)$ in the method proposed in Ahn and Powell (1993), we choose the Gaussian kernel, and finally, for the bandwidths the results obtained tend to be more sensitive to the choice of l than to the choice of h . On these grounds, we set the first bandwidth arbitrarily and calculate the second by least square cross-validation.

Standard deviations of the parameter estimators are computed according to the following expression:

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_{2n}) = \left[\left(\binom{n}{2} \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \hat{w}_{ijn} (x_{2i} - x_{2j}) (x_{2i} - x_{2j})^T \right]^{-1} \times \left[\left(\binom{n}{2} \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \widehat{\text{Var}}(y_i - E[y|z_i^* > 0, x_{1i}, x_{2i}]) \sum_{j=i+1}^n \hat{w}_{ijn} (x_{2i} - x_{2j}) (x_{2i} - x_{2j})^T \right] \times \left[\left(\binom{n}{2} \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \hat{w}_{ijn} (x_{2i} - x_{2j}) (x_{2i} - x_{2j})^T \right]^{-1}, \quad (24)$$

where the form of the weights depends on whether the form of the link function $h(\cdot)$ is known and parametric (Powell, 1987), or unknown (Ahn and Powell, 1993).

Finally, Newey (1991) proposes an efficient GMM-estimator that is different from the above approaches. Let $f_1[h(x_1)] = x_1^T \beta_1$, then, if we substitute this equality into (16) we get

$$y_i = x_2^T \beta_2 + g[x_1^T \beta_1, x_{2i}] + \nu_i, \quad (25)$$

where

$$\nu_i = y_i - E(y|z_i^* > 0, x_{1i}, x_{2i}) = u_i - g[x_1^T \beta_1, x_{2i}],$$

and

$$E[\nu_i | z_i^* > 0, x_{1i}, x_{2i}] = 0. \quad (26)$$

Equation (26) implies that ν_i is uncorrelated with any vector of functions $\varphi(x_1, x_2)$ in the selected sample

$$E \left\{ \mathbf{1}(z^* > 0) [\varphi(x_1, x_2) - E(\varphi(x_1, x_2) | z^* > 0, x_1, x_2)] \left[u_2 - g \left[x_1^T \beta_1, x_2 \right] \right] \right\} = 0,$$

and furthermore, if we define a more general function $\psi(u_2, \nu)$, under the single index restriction, the following moment condition also holds:

$$E \left\{ \mathbf{1}(z^* > 0) [\varphi(x_1, x_2) - E(\varphi(x_1, x_2) | z^* > 0, x_1, x_2)] [\psi(u_2, \nu) - E(\psi(u_2, \nu) | z^* > 0, x_1, x_2)] \right\} = 0.$$

Based on this set of moment conditions, Newey (1991) proposes taking the sample analog with $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 \ x_2)$ and

$$\psi_j(u_2, \nu; \gamma) = \left[\frac{u_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right]^{\kappa_j} \left[\frac{\nu - \mu_\nu}{\sigma_2} \right]^{\lambda_j} \quad j = 1, \dots, J.$$

$\gamma = (\mu_2, \mu_\nu, \sigma_2, \sigma_\nu)$ are location and scale parameters of u_2 and ν , and conditional expectations are replaced by nonparametric regression estimators. Then the parameter vector β_2 is estimated by the Generalized Method of Moments where the optimal weighting matrix is taken as suggested in Hansen (1982). For the sake of comparison, we also present the results for the efficient GMM estimator proposed by Newey in Table 6 .

As can be observed in Table 6, there are no significant differences between the alternative two-step estimators. All variables are significant across the estimators, and the only change in sign is the dummy variable *Elementary School* which is positive in the case of the estimator proposed by Ahn and Powell. For the other estimators, the sign of the coefficient related to this variable is negative. These rather stable results can be justified by the robustness of these two-step methods to several misspecification errors. If we compare them with the results obtained for the maximum likelihood estimates (see Table 2), the differences are not really significant either. The coefficient associated with the *female sex* dummy variable is significantly smaller for the M.L.E. estimates than for the two-step ones, but for the others there are not significant divergences. As concluded in other studies, if there is correlation between the two equations, a specification of the wage equation that accounts for conditionally Gaussian errors and heteroskedasticity in the sample selection equation appears as a fairly reasonable model for an empirical problem such as the one proposed in this paper. Finally, as a guideline to enable the empirical researcher to discriminate among the different two-step estimation procedures we present a specification test where the null hypothesis is the model presented in Heckman (1979), and the alternative is semiparametric.

3.3 A Nonparametric Test for Sample Selection Models

This test relies on the idea that if the model under the null hypotheses is the true one, then a nonparametric estimate will deviate from the parametric specification only due to sampling error. In our case, the null hypothesis is the parametric model proposed in Heckman (1979). Recall that under some assumptions on the conditional distribution of the selection equation the correction term in the wage equation has an expression that is proportional to the inverse of Mill's ratio. The alternative is a correction term that is the negation of the null.

The model we aim to test is

$$E(y | z^* > 0, x_1, x_2) = x_2^T \beta_2 + \rho \sigma_2 \lambda \left(\frac{x_1^T \beta_1}{\sigma_1} \right) \quad (27)$$

and

$$\lambda(u) = E \left[\frac{u_1}{\sigma_1} \middle| \frac{u_1}{\sigma_1} > -z \right] = \frac{\phi(z)}{\Phi(z)}. \quad (28)$$

Here $\phi(\cdot)$ and $\Phi(\cdot)$ are the standard normal density and the distribution function.

The alternative is the following specification:

$$E(y|z^* > 0, x_1, x_2) = x_2^T \beta_2 + g \left[x_1^T \beta_1, x_2 \right], \quad (29)$$

where $g(\cdot, \cdot)$ is an unknown smooth function. Then, based in the idea of Horowitz and Härdle (1994), we propose the following nonparametric test statistic

$$T_h = \sqrt{h} \sum_{i=1}^n \pi \left(x_{1i}^T \hat{\beta}_{1n}, x_{2i} \right) \left\{ y_i - x_{2i}^T \hat{\beta}_{2n} - \hat{\rho}_n \hat{\sigma}_2 \lambda \left(x_{1i}^T \hat{\beta}_{1n}^* \right) \right\} \\ \left\{ \hat{\rho}_n \hat{\sigma}_2 \lambda \left(x_{1i}^T \hat{\beta}_{1n}^* \right) - \hat{g}_h \left[x_{1i}^T \hat{\beta}_{1n}, x_{2i} \right] \right\} \mathbf{1}(z_i^* > 0).$$

$\pi(\cdot)$ is a weight function that down weights the extreme observations and $\hat{g}_h(\cdot)$ is a nonparametric estimator of the bias correction:

$$\hat{g}_h[u, v] = \frac{\sum_i^n K \left(\frac{u - x_{1i}^T \hat{\beta}_{1n}}{h} \right) L \left(\frac{v - x_{2i}}{h} \right) \mathbf{1}(z_i^* > 0) \left\{ y_i - x_{2i}^T \hat{\beta}_{2n} \right\}}{\sum_i^n K \left(\frac{u - x_{1i}^T \hat{\beta}_{1n}}{h} \right) L \left(\frac{v - x_{2i}}{h} \right) \mathbf{1}(z_i^* > 0)}.$$

Finally, the vectors $(\hat{\beta}_{2n}, \hat{\rho}_n \hat{\sigma}_2, \hat{\beta}_{1n})$ are the parameters estimated under the null (Heckman two-step estimates). The idea of the test is very simple. Under the null hypothesis the last term will be negligible since the nonparametric estimate will deviate from the parametric specification only due to sampling error.

The central term under the null, using standard Central Limit Theorem arguments, will be bounded in distribution and therefore the whole statistic, once conveniently normalized, will tend to a normal density. Under the alternative, the last term is unbounded and this gives the consistency of the test. For a test for a binary logit model, Horowitz and Härdle (1994) show that under the null hypothesis their statistic converges in distribution to the normal density. They also provide a consistent estimator of asymptotic variance. Unfortunately, they do not provide a guide for computing the bandwidth h . Following Proença and Ritter (1994), we have computed the T_h -statistic for different bandwidth values. Since this type of statistic shows a bias that depends linearly on the bandwidth h , it is advisable to choose small bandwidth values, otherwise we might have a non-negligible bias. In Table 8 we present the results.

The p-values are computed using a normal distribution, and the results do not recommend the use of the statistical model proposed in Heckman (1979) for small bandwidth values.

4 Conclusions

In any microeconomic study of the labor market, the estimation of models with sample selection bias is very common from both empirical and theoretical points of view. Since the two-step sample selection estimation methods proposed in Heckman (1979), many estimation techniques have been developed to weaken some strong assumptions.

Bandwidth	T-Statistic	p-value
0.1	0.695	0.2514
0.3	0.763	0.2236
0.5	0.845	0.2035
0.7	0.412	0.3409
1.0	0.564	0.2877
1.3	3.291	0.0005
1.5	4.157	0.0000
1.8	3.412	0.0030
2.0	2.121	0.0170

Table 8: *Horowitz-Härdle test.*

In this paper we estimate a sample selection model taking into account different sets of identifying restrictions. First, the errors are statistically independent conditionally on regressors; second, if the equations are linear in the regressors, then maximum likelihood or Heckman two-step methods can be used. Third, if the conditional distribution of the selection equation error depends on a function $h(\cdot)$, then semiparametric estimation two-step methods are available. The main advantage is that no knowledge of conditional distribution is necessary, and so the estimators are robust to misspecification in error distribution.

Empirical results support the idea of a specification close to a Gaussian models with heteroskedasticity in the selection equation. If two-step methods are used, estimates of the parameters of the wage equation do not vary across different specifications (parametric and semiparametric). This is important since Heckman's estimator relies on normality whereas the semiparametric estimator does not require this hypothesis.

Additionally, several specification tests have been performed which support the same conclusions that we achieve in the estimation part. However, the results obtained in the tests are not conclusive, and further research in tests for distributional assumptions in sample selection models is needed.

Appendix

In the sample selection equation model:

$$z_i^* = x_{1i}^T \beta_1 + u_{1i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (30)$$

$$\begin{aligned} z_i &= 1 & \text{if } z_i^* > 0, \\ z_i &= 0 & \text{if } z_i^* \leq 0, \end{aligned} \quad (31)$$

we distinguish between continuous and discrete variables by rewriting (30) as

$$z_i^* = x_{1di}^T \beta_{1d} + x_{1ci}^T \beta_{1c} + u_{1i}, \quad (32)$$

where $x_1^T = (x_{1d}^T \quad x_{1c}^T)$ and $\beta_1^T = (\beta_{1d}^T \quad \beta_{1c}^T)$. x_{1d} denotes a vector of discrete random variables and x_{1c} denotes a vector of continuous random variables.

If all variables in the index function are continuous, i.e. $\beta_{1d} = 0$, then root- n consistent semiparametric estimation of β_{1c} can be implemented by the so called Average Derivative Estimation method proposed in Härdle and Stoker (1989). This estimation method relies on the following ideas. Taking into account that

$$r(x_{1c}) = E(z|x_{1c}) = G\left(x_{1c}^T \beta_{1c}\right), \quad (33)$$

where by the single index restriction the function $G(\cdot)$ does not depend on x_{1c} and is not necessarily a distribution function, then, if $r(\cdot)$ is a.e. first differentiable in x_{1c} and this variable is continuously distributed with first differentiable density $f(x_{1c})$, the local effects of changing x_{1c} on z are given as the vector of derivatives $\nabla r(x_{1c}) = \partial r(x_{1c})/\partial x_{1c}$. The *average derivative* is the expectation of these effects over the population:

$$\delta = E(\nabla r(x_{1c})), \quad (34)$$

where the expectation is taken with respect to x_{1c} . If we substitute (33) into (34) and we make some straightforward computations, it is easy to show that

$$\delta = E\left[\partial G\left(x_{1c}^T \beta_{1c}\right) / \partial \left(x_{1c}^T \beta_{1c}\right)\right] \beta_{1c} = \theta \beta_{1c}. \quad (35)$$

Therefore, δ is proportional to β_{1c} and we can equivalently replace β_{1c} by δ (provided that $\theta \neq 0$) in (33) obtaining

$$r(x_{1c}) = G\left(x_{1c}^T \delta\right), \quad (36)$$

and $G(\cdot)$ is defined in such a way that $E\left[\partial G\left(x_{1c}^T \beta_{1c}\right) / \partial \left(x_{1c}^T \beta_{1c}\right)\right] = \mathbf{1}$.

Taking the sample counterpart of (34), Härdle and Stoker (1989) propose the simplest Average Derivative Estimator as

$$\hat{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla \hat{r}_h(x_{1ci}) \hat{I}(x_{1ci}), \quad (37)$$

where $\hat{I}(x_{1ci}) = 1\left[\hat{f}_h(x_{1ci}) \geq b\right]$ is an indicator that drops observations with small estimated density b , $\hat{f}_h(x_{1ci})$ is a standard Parzen-Rosenblatt nonparametric density estimator,

$$\hat{f}_h(x_{1c}) = \frac{1}{nh^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_{1c} - x_{1ci}}{h}\right), \quad (38)$$

$\hat{r}_h(x_{1c})$ is a Naradaya-Watson nonparametric regression estimator denoted as

$$\hat{r}_h(x_{1c}) = \frac{\hat{c}(x_{1c})}{\hat{f}_h(x_{1c})}, \quad (39)$$

where

$$\hat{c}(x_{1c}) = \frac{1}{nh^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_{1c} - x_{1ci}}{h}\right) z_i.$$

Finally,

$$\nabla \hat{r}(x_{1ci}) = \frac{\nabla \hat{c}(x_{1c})}{\hat{f}_h(x_{1c})} - \hat{r}_h(x_{1c}) \frac{\nabla \hat{f}_h(x_{1c})}{\hat{f}_h(x_{1c})}. \quad (40)$$

The main problem presented by this estimation technique, and other estimators derived from it (see Powell, Stock and Stoker, 1989), is the requirement that all the variables that appear in the index must have absolutely continuous density functions. This rules out many interesting cases such as qualitative variables. In order to overcome this problem, Horowitz and Härdle (1996) propose

a modified version of the A.D.E. method that accounts for discrete covariates. In order better to explain this estimator, let us now consider only one discrete random variable. Then, (33) is now

$$E(z|x_{1c}, x_{1d}) = G\left(x_{1c}^T \beta_{1c} + x_{1d} \beta_{1d}\right). \quad (41)$$

The estimator proposed by Horowitz and Härdle (1996) estimates parameter β_{1d} according to the following steps. First, let us define $S_{1d} = \{x_{1c}^{(j)} : j = 1, \dots, M\}$ as the support of the discrete random variable x_{1d} . To estimate the parameter vector associated with the continuous variables β_{1c} (up to a normalization scale θ), we use standard average derivative methods for each x_{1d} in its support S_{1d} , and then average over all these estimators. The estimator for the parameter β_{1d} , associated with the discrete random variable works by deducing the horizontal distance between $G(\eta + x_{1d}^{(j)} \beta_{1d})$ and $G(\eta + x_{1d}^{(1)} \beta_{1d})$ for $j = 1, \dots, M$, on a set of η values in which $G(\eta + x_{1d} \beta_{1d})$ is assumed to satisfy a weak monotonicity condition. That is, for their estimator to work they assume that there are finite numbers η_0, η_1, c_0 and c_1 such that $\eta_0 < \eta_1, c_0 < c_1$, and for each $x_{1d} \in S_{1d}$:

$$\begin{cases} G(\eta + x_{1d} \beta_{1d}) < c_0 & \text{if } \eta < \eta_0; \\ G(\eta + x_{1d} \beta_{1d}) > c_1 & \text{if } \eta > \eta_1. \end{cases}$$

This assumption is crucial since then, in Horowitz and Härdle (1996), Lemma 1, it is shown that

$$J[x_{1d}^{(j)}] - J[x_{1d}^{(1)}] = (c_1 - c_0) [x_{1d}^{(j)} - x_{1d}^{(1)}] \beta_{1d} \text{ for } j = 1, \dots, M, \quad (42)$$

where

$$J[x_{1d}] = \int_{\eta_0}^{\eta_1} \{c_0 I[G(\eta + x_{1d} \beta_{1d}) < c_0] + c_1 I[G(\eta + x_{1d} \beta_{1d}) > c_1] + G(\eta + x_{1d} \beta_{1d}) I[c_0 \leq G(\eta + x_{1d} \beta_{1d}) \leq c_1]\} d\eta. \quad (43)$$

Equation (42) constitutes $M - 1$ linear equations in the components of β_{1d} . These equations may be solved if a unique solution exists. To do this, define the $M - 1$ -vector

$$\Delta J = \begin{bmatrix} J[x_{1d}^{(2)}] - J[x_{1d}^{(1)}] \\ \vdots \\ J[x_{1d}^{(M)}] - J[x_{1d}^{(1)}] \end{bmatrix} \quad (44)$$

and the matrix

$$W = \begin{bmatrix} x_{1d}^{(2)} - x_{1d}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{1d}^{(M)} - x_{1d}^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Then an estimator for β_{1d} is that which solves the following system of equations:

$$\Delta J = (c_1 - c_0) W \beta_{1d}, \quad (46)$$

with solution

$$\beta_{1d} = (c_1 - c_0)^{-1} (W^T W)^{-1} W^T \Delta J. \quad (47)$$

Equation (47) is the basis for the estimation of β_{1d} . All that we have to do now is to replace population quantities by their sample analogs. More specifically, the function $G(\cdot)$ in (43) is unknown. We propose that it be replaced by the Naradaya-Watson regression estimator in (39). Under some conditions (see Horowitz and Härdle, 1996 for details), both consistency and asymptotic normality of the estimator can be shown.

Acknowledgements

This research was financially supported by the Dirección General de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación under research grant SEJ2005-08269 and the Department of Education of the Basque Government through grant IT-334-07 (UPV/EHU Econometrics Research Group). We would like to thank the two anonymous referees for their extremely helpful comments and suggestions.

References

- Ahn, H., Powell, J. (1993) Semiparametric estimations of censored selection models with a nonparametric selection mechanism. *Journal of Econometrics* 58: 3–29.
- Andrews D.W., Schafgans, M. (1998) Semiparametric estimation of the intercept of a sample selection model. *Review of Economic Studies* 65: 497–515.
- Amemiya, T. (1985) *Advanced Econometrics*. Cambridge MA: Harvard University Press.
- Chen, S., Lee, L.F. (1998) Efficient semiparametric scoring of sample selection models. *Econometric Theory* 14: 423–462.
- Coelho, D., Veiga, H., Veszteg, R. (2005) Parametric and semiparametric estimation of sample selection models: an empirical application to the female labour force in Portugal. Working paper 636.05. Unibersitat Autonomia de Barcelona.
- Das, M., Newey, W.K., Vella, F. (2000) Nonparametric estimation of sample selection models. Unpublished manuscript.
- Fernández, A., Rodríguez-Póo, J. (1997) Estimation and Specification Testing in Female Labor Participation Models: Parametric and Semiparametric Methods. *Econometric Reviews* 16: 229–248.
- Fernández, A., Rodríguez-Póo, J., Villanua, I. (2002) Finite sample behaviour of two step estimators in sample selection models. *Computational Statistics* 76: 1–16.
- Gerfin, M. (1996) Parametric and Semi-parametric Estimation of the Binary Response Model of Labor Market Participation. *Journal of Applied Econometrics* 11: 321–339.
- Goldberger, A. (1983) Abnormal Selection Bias. In S. Karlin, T. Amemiya and L. Goodman (eds.). *Studies in Econometrics, Time Series and Multivariate Statistics*. Academic Press. New York.
- Gourieroux, C., Monfort, A. (1995) *Statistics and econometric models*. Vol. I, Cambridge University Press.
- Gronau, R. (1973) The effect of children on the housewives value of time. *Journal of Political Economy* 81: 168–99.
- Gronau, R. (1974) Wage comparisons –a selectivity bias. *Journal of Political Economy* 82: 1119–1143.
- Hansen, L.P. (1982) Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica* 50: 1029–1054.
- Härdle, W., Stoker, T.M. (1989) Investigating Smooth Multiple Regression by the Method of Average Derivatives. *J.A.S.A.* 84: 986–995.
- Heckman, J. (1974) Shadow prices, market wages and labor supply. *Econometrica* 42: 679–694.

- Heckman, J. (1979) Sample selection bias as a specification error. *Econometrica* 47: 153–161.
- Horowitz, J., Härdle, W. (1994) Testing a parametric model against a semiparametric alternative. *Econometric Theory* 10: 821–848.
- Horowitz, J., Härdle, W. (1996) Direct semiparametric estimation of single index models with discrete covariates. *J.A.S.A* 91: 1632–1641.
- Hurd, M. (1979) Estimation in truncated samples where there is heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 11: 247–258.
- I.N.E. (1990) Encuesta de Población Activa y Encuesta Anexa sobre Ganancias y Subempleo.
- Klein, R.L., Spady, R.H. (1993) An Efficient Semiparametric Estimator for the Binary Response Model. *Econometrica* 61: 387–421.
- Lewbel, A. (2007) Endogenous selection or treatment model estimation. *Journal of Econometrics* 141: 777–806.
- Manski, C.F. (1975) Maximum Score Estimator of the Stochastic Utility model of Choice. *Journal of Econometrics* 3: 205–228.
- Manski, C.F. (1988) Identification of Binary Response Models. *J.A.S.A.* 8: 729–738.
- Manski, C.F. (1993) The Selection Problem in Econometrics and Statistics. In G. S. Maddala, C.R. Rao and H.D. Vinod (eds.). *Handbook of Statistics* 11. Elsevier Science Publishers.
- Martins, M.F.O. (2001) Parametric and Semiparametric Estimation of Sample Selection Models: An Empirical Application to the Female Labour Force in Portugal. *Journal of Applied Econometrics* 16: 23–39.
- Melenberg, B., van Soest, A. (1993) Semi-parametric estimation of the sample selection model. CentER Discussion Paper 9334, Tilburg University.
- Nawata, K., Nagase, N. (1996) Estimation of sample selection bias models. *Econometric Reviews* 15: 387–400.
- Newey, W.K. (1987) Specification Test for Distributional Assumptions in the Tobit Model. *Journal of Econometrics* 34: 125–145.
- Newey, W.K. (1991) Two-step series estimation of sample selection models. Working paper, MIT.
- Newey, W.K. (1999) Consistency of two step sample selection estimators despite misspecification of distributions. *Economics Letters* 63: 129–132.
- Olsen, R.J. (1981) A least squares correction for selectivity bias. *Econometrica* 48: 1815–1820.
- Powell, J.L. (1987) Semiparametric estimation of bivariate latent variable models. Working Paper 8704. University of Wisconsin-Madison.
- Powell, J.L., Stock, J.H., Stoker, T.M. (1989) Semiparametric estimation of index coefficients. *Econometrica* 57: 1403–1430.
- Proença, I., Ritter, Ch. (1994) Semiparametric Testing of the Link Function in Models for Binary Outcomes. Discussion Paper 17. Humboldt Universität zu Berlin. S.F.B.
- Vella, F. (1998) Estimating models with sample selection bias: a survey. *Journal of Human Resources*, 33(1): 127–169.
- White, H. (1980) A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. *Econometrica* 48: 817–838.

Volumen 10 (diciembre de 2010)

Editorial

Páginas 3–4

The Similarity between the Square of the Coefficient of Variation and the Gini Index of a General Random Variable

Similitud entre el cuadrado del coeficiente de variación y el índice de Gini en una variable aleatoria general

González Abril, Luis; Velasco Morente, Francisco; Gavilán Ruiz, José Manuel; Sánchez-Reyes Fernández, Luis María

Páginas 5–18

Identificación de submercados de vivienda en España

Identifying housing submarkets in Spain

Altuzarra Artola, Amaia; Esteban Galarza, Marisol

Páginas 19–42

Una aproximación a la construcción de un indicador de pobreza multidimensional. ¿Cuáles son los focos de riesgo en España?

An Approach to Construct a Multidimensional Poverty Indicator. Which are the Risk Sources in Spain?

Poza Lara, Carlos; Fernández Cornejo, José Andrés

Páginas 43–72

Problema de calibración de mercado y estructura implícita del modelo de bonos de Black-Cox

Market Calibration Problem and the Implied Structure of the Black-Cox Bond Model

Sukhomlin, Nikolay; Santana, Lisette

Páginas 73–98

An Empirical Investigation of Parametric and Semiparametric Estimation Methods in Sample Selection Models

Investigación empírica de métodos de estimación paramétricos y semiparamétricos de modelos de selección muestral

Fernández-Sainz, Ana I.; Rodríguez-Póo, Juan M.

Páginas 99–120