REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (16). Páginas 165–199.
Diciembre de 2013. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=83

Ecuaciones diferenciales y en diferencias aplicadas a los conceptos económicos y financieros

Tenorio Villalón, Ángel F.
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla (España)
Correo electrónico: aftenorio@upo.es

Martín Caraballo, Ana M.
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla (España)
Correo electrónico: ammarcar@upo.es

Paralera Morales, Concepción
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla (España)
Correo electrónico: cparmor@upo.es

Contreras Rubio, Ignacio
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla (España)
Correo electrónico: iconrub@upo.es

RESUMEN

Este trabajo versa sobre la utilidad de las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones en diferencias finitas para la resolución de distintos problemas en el ámbito de la economía y la empresa.

En Economía es frecuente estudiar la evolución de los valores de una misma variable en distintos instantes temporales. Si la variable "tiempo" se considera como algo continuo, la evolución se estudia mediante ecuaciones diferenciales. Sin embargo, si el "tiempo" es tratado de manera discreta, se utilizan entonces ecuaciones en diferencias finitas.

Concretamente, nuestro objetivo no solo es exponer la evolución que han sufrido las nociones de ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias finitas sino también dar una visión (no exhaustiva) de sus múltiples aplicaciones a cuestiones relativas a fenómenos económicos y financieros.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales; ecuaciones en diferencias finitas; Matemática Empresarial y Financiera.
Clasificación JEL: A12; A22; C02; C60.
MSC2010: 35Q91; 91G80; 91B99; 91-02.

Artículo recibido el 4 de marzo de 2013 y aceptado el 27 de noviembre de 2013.

Differential and Difference Equations Applied to Economic and Financial Concepts

ABSTRACT

This paper deals with the use of differential equations and finite difference methods for solving several problems in the field of Economics and Business Administration.

Economics usually needs to study the evolution of the values which are taken by a given variable in different moments. If the time variable works in a continuous way, its evolution is studied by differential equations. Otherwise, time is a discrete variable and finite difference methods must be used.

In addition, to expound the evolution of the notions of differential and difference equations, the goal of this paper is to show a general view (but not comprehensive) of their many applications for explaining economical and financial phenomena.

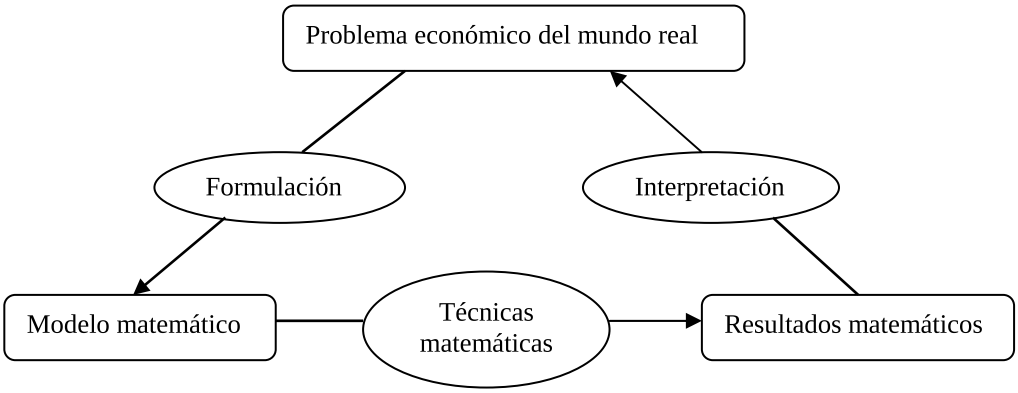
Keywords: differential equations; finite-difference equations; Mathematical Economics and Finance.
JEL classification: A12; A22; C02; C60.
MSC2010: 35Q91; 91G80; 91B99; 91-02.

1. INTRODUCCIÓN

La aplicación de las matemáticas a problemas económicos, esencialmente, consta de tres fases:

1. Traducir la información económica a lenguaje matemático para obtener de esta forma un modelo económico (este modelo puede ser una ecuación diferencial, una ecuación en diferencias, un sistema lineal o cualquier otra expresión matemática).
2. Tratamiento del modelo obtenido mediante métodos matemáticos, lo que lleva a una solución (o soluciones) en forma matemática del problema original.
3. Interpretar los resultados obtenidos en términos económicos.

Intentar dar una solución a problemas económicos utilizando modelos matemáticos es una tarea difícil y bastante compleja ya que existen numerosos factores (tanto endógenos como exógenos) que rodean a los problemas económicos. Al ser la economía una disciplina social, en la mayoría de los casos se trabaja con "seres vivos" que son muy sensibles a variables no explicativas dentro de los modelos matemáticos utilizados, por tanto, tales modelos requieren ser validados y ajustados permanentemente ya que están sometidos a un fuerte grado de incertidumbre (Box and Jenkins, 1970).



En Economía es de interés conocer cuál será el comportamiento futuro que tendrán los distintos objetos de estudio para poder así tomar decisiones o conocer los montantes de gastos, beneficios o riesgo que se tendrán a lo largo del tiempo que se esté considerando un producto concreto. Este tipo de situaciones se reduce matemáticamente a estudiar un sistema dinámico y la evolución del mismo a lo largo de su duración. Precisamente, las soluciones de dichos sistemas vienen dadas por las soluciones de las denominadas *ecuaciones diferenciales*, que relacionan la expresión de una función (que da los valores de la variable estudiada en función de los factores pertinentes, como pueden ser tiempo, mano de obra, capital, etc.) y de alguna de sus derivadas (de primer orden o incluso de orden superior).

El uso de las ecuaciones diferenciales presupone que conocemos el comportamiento del sistema dinámico para cada valor de los factores que influyen sobre él (las denominadas variables independientes) y que, en la mayoría de los casos, incluye la variable tiempo. No obstante, no siempre podemos conocer los valores que debe tomar la función con la que se modeliza la situación en cada instante de tiempo, sino que solo sabemos lo que ocurre para determinados valores de las variables independientes de nuestra función. Tal situación la encontramos por ejemplo, cuando en el ámbito de la Matemática Financiera se estudian empréstitos u operaciones de constitución de capital en los que no es necesario conocer qué ocurre en cada instante de tiempo sino solo el resultado al final de cierto período de tiempo establecido. En tales casos, el modelo matemático se puede simplificar y reducir la resolución de la ecuación diferencial pertinente al cálculo de una aproximación mediante un tratamiento discreto de todas las variables involucradas, tanto las dependientes como las independientes. Este tratamiento discreto del problema conlleva la resolución de lo que se denomina una *ecuación en diferencias finitas* (también llamado método de diferencias finitas).

Nuestro principal objetivo en el presente trabajo es mostrar cómo surgen las ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias para el estudio de los problemas relativos a sistemas dinámicos y, posteriormente, enfatizar las razones por las que la investigación en Economía y Finanzas debe encontrar interesante estos temas y su tratamiento para resolver problemas relativos a estas cuestiones. En lo que nos ocupa hablaremos de diversos conceptos en los que las ecuaciones en diferencias finitas y las ecuaciones diferenciales son utilizadas para trabajar y resolver el problema partiendo del hecho de que la variable tiempo es la variable de la que depende el problema. Con esto veremos la necesidad del uso de técnicas de análisis dinámico trabajando tanto en un marco de variables discretas como de variables continuas. Debe tenerse en cuenta que el tratamiento de los problemas económicos desde una perspectiva dinámica permite una modelización más próxima a la realidad que otras basadas en modelos estáticos y/o estáticos-comparativos.

2. ECUACIONES DIFERENCIALES: QUÉ SON Y SUS ORÍGENES

El concepto de *ecuación diferencial* se reduce a una ecuación algebraica en la que la incógnita es una función de variable(s) real(es) y en la que intervienen: la función, la(s) variable(s) independiente(s) y alguna(s) derivada(s) de la función incógnita. Ejemplos de ecuaciones diferenciales son las siguientes:

$$y' = x \cdot \cos(x) \qquad y' - 2y = 2x \qquad y'' - y' = x^2$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x - \cos(x)$$

Los tres primeros ejemplos solo presentan una variable independiente (x) y la función $y = f(x)$. A las ecuaciones que solo dependen de una variable independiente se las denomina *ecuaciones diferenciales ordinarias* (abreviadas como EDO). Si solo aparece la derivada primera (como ocurre en los dos primeros casos), la ecuación se denomina *de primer orden*. El orden de la ecuación diferencial consiste en el orden de derivación más alto que aparece en la misma. Así, el tercer ejemplo es una ecuación diferencial de segundo orden por aparecer la derivada segunda.

Los últimos dos ejemplos que aparecen, corresponden a una función que depende de más de una variable independiente. En tal caso, se denominan *ecuaciones en derivadas parciales* (abreviadas como EDP). De estos dos ejemplos, el primero es una ecuación en derivadas parciales de primer orden, mientras que el otro lo es de segundo orden por aparecer una derivada segunda.

También existen las denominadas *ecuaciones diferenciales estocásticas*, las cuales consisten en ecuaciones diferenciales en las que algunos de sus términos es un proceso browniano. La ecuación diferencial estocástica sigue habitualmente la siguiente expresión:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t = \mu(\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{t})\mathrm{d}\boldsymbol{t} + \sigma(\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{t})\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t,$$

donde $\boldsymbol{t}$ pertenece a un intervalo [0, $\boldsymbol{T}$], $\boldsymbol{B}$ es un proceso browniano, $\boldsymbol{X}$ es un proceso estocástico con condición inicial una variable aleatoria vectorial $\boldsymbol{X}_0$, independiente del movimiento browniano $\boldsymbol{B}$ y que tiene como coeficientes de tendencia y de difusión a las funciones reales $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ y $\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$, que vienen a significar el valor esperado y la desviación típica del proceso $\boldsymbol{X}$. Este tipo de ecuaciones diferenciales permiten modelizar fenómenos en los que aparecen fluctuaciones basadas en el azar (i.e. probabilidad). En este sentido, el modelo puede ser tan simple como que tanto μ como σ sean constantes (la ecuación del denominado modelo de Black-Scholes del que hablaremos en la Sección 5) o más complejas sin más que permitir que en las funciones μ y σ también intervenga como factor valores previos del proceso distintos del instante actual $\boldsymbol{t}$. También existe la noción de ecuación estocástica en derivadas parciales, consistentes en imponer términos y coeficientes que tienen una componente aleatoria, pero carecen de una expresión regular que las caracterice. Véase Oksendal (1985) y Prévôt y Röckner (2007) para más información sobre ecuaciones diferenciales estocásticas y ecuaciones estocásticas en derivadas parciales.

La noción de ecuación diferencial, como concepto matemático, consiste en una generalización del concepto de integral. Calcular la integral de una función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ respecto de la variable $\boldsymbol{x}$ consiste en determinar cuál es la función $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ tal que $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Es decir, queremos calcular la función incógnita $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ que satisface $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Por tanto, las integrales son ecuaciones diferenciales de primer orden en la que no aparece la función incógnita sino solo su derivada (tal y como pasaba en el primero de los ejemplos que mostramos al principio de esta sección).

Sin embargo, cuando resolvemos una integral, no podemos encontrar una única función primitiva $F(x)$ que satisfaga $F'(x) = f(x)$, sino que también sería solución de la ecuación el resultado de sumarle a la función $F(x)$ una función constante cualquier. Para fijar el valor de dicha constante y obtener una única solución de la integral, solemos fijar unos valores reales x_0 e y_0 e imponemos la condición adicional $F(x_0) = y_0$, que se denomina condición inicial. En el caso de las ecuaciones diferenciales, la solución tampoco es única *a priori* y son familias de soluciones lo que se obtiene. Por tanto, para fijar la unicidad de la solución también debemos añadir unas condiciones adicionales sobre la función solución. Las dos opciones más habituales son las siguientes: a) un problema de condición inicial, que consiste en fijar el valor de la función solución $F(x)$ y de todas sus derivadas en un valor x_0 del dominio de $f(x)$ hasta un grado menos que el orden de la ecuación diferencial; y b) un problema de contorno, que consiste en hacer lo mismo que antes pero en todos los puntos existentes en la frontera del dominio anteriormente indicado.

Siendo estrictos, preguntarse cuándo aparece por primera vez el concepto de ecuación diferencial en la historia corresponde a preguntarse cuándo surge la noción de integral. En ese sentido, la respuesta es bien sencilla: prácticamente desde los orígenes de las matemáticas la noción de integral (y por ende de ecuación diferencial) ha estado presente; eso sí, solamente mediante procedimientos para el cálculo de áreas y volúmenes y no como una noción y procedimiento formal rigurosamente justificado y demostrado (habría que esperar a Newton y Leibniz para esto último). La primera referencia a la resolución de volúmenes aparece en el papiro de Moscú (datado hacia el 1890 a.C.) con el cálculo del volumen de tronco piramidal. Historiadores como Kline (1972a) dudan de su aplicación como método sistemático similar al de integración y afirman que pudiera ser un cálculo obtenido por ensayo-error.

El primer método sistemático de integración, aunque sin rigor y formalismo, fue el *método exhaustivo* de Antifonte de Atenas (480-411 a.C.) usado al estudiar la cuadratura del círculo mediante circunscripción e inscripción de polígonos a una circunferencia para obtener así cotas superiores e inferiores del número π. Esta información nos ha llegado por Aristóteles y sus comentaristas tal y como puede verse en Gow (2010) o Heath (1921). Aunque Arquímedes (2005) atribuyó el método a Eudoxo de Cnidos (408-355 a.C.), el mérito de este último se limitó a formalizar y sistematizar el procedimiento de Antifonte, dándole tal nivel de rigurosidad que Euclides (1994) lo insertaría como la Proposición 1 del Libro X en sus *Elementos* (*circa* 300 a.C.), siendo uno de los métodos centrales en los cálculos de áreas incluidos en el Libro XII. Posteriormente, Arquímedes (1993, 2005) también usaría este método para calcular áreas de figuras planas, introduciendo en el s.III el *método heurístico* al considerar “las figuras planas como constituidas por el conjunto de todas las rectas en ellas trazadas paralelamente a una cierta dirección, y a las figuras sólidas como «llenas» de sus secciones planas paralelas a una determinada posición” (Gibson, 1983); aunque esto lo haría sin demostración formal y en el ámbito de la intuición. Este planteamiento resulta ser el precedente (incluso se podría tildar de primera aparición) de lo que posteriormente Cavalieri y Leibniz denominarían indivisibles e infinitésimos, respectivamente.

Paralelamente, Liu Hui (1999) explicó en el s. III d.C. una versión del método exhaustivo al calcular el área del círculo. Esto apareció en sus comentarios a la edición que realizó de la obra *Jiuzhang Suanshu* (a traducir como *Los nueve capítulos del arte matemático*) obra colectiva china gestada entre los s. X y II a.C. y concluida el s. I d.C. El hindú Bashkara II escribió el *Siddhanta Shiromani* en el 1150 mostrando unos amplios conocimientos sobre la noción de *infinitesimal* y de *integración* para estimar el área y volumen esférico (siglos antes de que Cavalieri introdujera los indivisibles).

En Europa no se volvería a tratar el método exhaustivo hasta el siglo XVII. Así, Cavalieri (1635) introdujo su teoría de los *indivisibles* para el cálculo de integrales mediante una aproximación geométrica. De este modo, las áreas y volúmenes eran calculados mediante un indefinido número de segmentos paralelos y de áreas planas paralelas, respectivamente. La teoría de los indivisibles fue combinada exitosamente con el cálculo en diferencias finitas para formalizar y dar rigor al cálculo integral. Esto se logró paulatinamente gracias a los aportes de múltiples autores como Wallis (1656), Barrow (1916) o Gregory (1667). Finalmente, Newton (1687, 1736) y Leibniz (1684, 1686) fueron los que formalizaron el cálculo integral con la formulación del Teorema Fundamental del Cálculo (demostrándolo ambos de manera independiente). Además, el desarrollo que realizaron cada uno al respecto del cálculo infinitesimal permitió la evolución al cálculo moderno y, especialmente en el caso de Leibniz, el sistema de notación y terminología del cálculo diferencial e integral (que es el usado actualmente). Precisamente, ese sistema resultó ser uno de los mejores ejemplos existentes en las ciencias por su perfecta adaptación a su objeto de estudio. Es más, Leibniz también sistematizó todo el cálculo de infinitesimales introduciendo reglas claras para manipular infinitesimales, lo que conllevó también la formalización en todos los sentidos del cálculo infinitesimal y diferencial.

Newton no solo tuvo un papel importante en las integrales, que resultan ser las ecuaciones diferenciales más sencillas; sino que también fue él quien introdujo las primeras ecuaciones diferenciales distintas de las integrales al estudiar el movimiento de los planetas y otras cuestiones físicas. Por este motivo, la argumentación y explicación de Newton para dichos conceptos se basaba en el movimiento y la dinámica de los cuerpos, viendo las variables como algo cambiante que fluía con el tiempo (y que denominó *fluente*) y calcular así sus razones de cambio con respecto al tiempo (que denominó *fluxiones*). En función de estos dos términos fluente/fluxión, su interés principal era estudiar las relaciones entre fluentes y sus fluxiones: el cálculo de las fluxiones a partir de los fluentes correspondía al cálculo diferencial, mientras que la obtención de los fluentes a partir de las fluxiones correspondía al cálculo integral y la resolución de las ecuaciones diferenciales. En lugar de hablar en esos términos, él se refería a las *ecuaciones fluxionales* que se corresponden con las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden; las cuales clasificó en 1671, año en el que finalizó su obra magna, *Method of fluxions and infinite series* (Newton, 1736), sobre esta temática, pero que no vería la luz hasta 1736 cuando se publicó directamente en inglés y no en latín como estaba el manuscrito original.

Su siguiente gran obra *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Newton, 1687), que fue publicada antes de su *Method of fluxtions*, estableció las bases matemáticas para el cálculo de razones de cambio (fluxiones) mediante una teoría geométrica usando cantidades finitas e infinitesimales. El uso de cantidades geométricas se debió a su reticencia a usar el lenguaje algebraico por el que abogaba Leibniz y al que acusaba de plagiarle su trabajo sobre fluxiones. Esto también hizo que sus trabajos quedasen en un segundo plano para los científicos continentales hasta que sus resultados fueron reformulados en términos de la formulación leibniziana.

Con respecto a Leibniz, hay que empezar indicando que hoy día se reconoce que llegó de manera paralela e independiente a las mismas conclusiones de Newton sobre el cálculo integral y diferencial. Ambos, Newton y Leibniz, son reconocidos como los padres del cálculo integral y de las ecuaciones diferenciales, sobre las que Leibniz (1684, 1686) también trabajó activamente. De hecho, fue Leibiniz quien les dio su nombre en 1676 (Gerhardt, 1849; Ince, 1956) y descubrió entre 1691 y 1693 el método de separación de variables, la reducción de ecuaciones homogéneas a separables y el procedimiento de resolución de ecuaciones lineales de primer orden (Ince, 1956).

A finales del s. XVII Leibniz alcanzó una estrecha colaboración con varios matemáticos que vieron la importancia del sistema introducido por él para el cálculo, pero que resultaban oscuras para la gran mayoría. Concretamente, los hermanos Jacob y Johann Bernoulli se dedicaron a pulir y hacer más comprensibles los trabajos de Leibniz aportando múltiples resultados y propiedades e introduciendo la terminología “integrar una ecuación diferencial”. Ellos dos fueron esenciales para la consolidación del cálculo integral y de las ecuaciones diferenciales en las matemáticas (Kline, 1972b).

En 1690 Jacob Bernoulli demostró que la resolución del cálculo de la curva isócrona era equivalente a la resolución de una ecuación diferencial no lineal de primer orden. Esta curva fue previamente estudiada por Huygens en 1687 y por Leibniz en 1689. La resolución de la ecuación diferencial se basó en el uso de la metodología que hoy en día se denomina separación de variables, siendo uno de los primeros problemas así atacado. También se usó por primera vez en dicho trabajo la palabra “integral” para referirse al resultado de la integración (Ince, 1956).

Desde 1694, Johann Bernoulli empezó a tener grandes avances en la integración (resolución) de ecuaciones diferenciales cuando empezó a emplear la metodología de Leibniz pero siguiendo la filosofía de Newton y entendiendo la integral como la operación inversa de la derivación (Kline, 1972b).

Los trabajos que se llevaron a cabo durante el s. XVII llevaron a pensar a los matemáticos de la época que la solución de cualquier ecuación diferencial proveniente de la geometría y la física eran expresables mediante funciones elementales. Por ello, se esforzaron en desarrollar múltiples técnicas de resolución (algunas de las cuales ya hemos comentado) usando recursos sencillos y aplicadas un número finito de veces a dichas funciones elementales.

Durante el siglo XVIII (denominado por múltiples autores como “el siglo del Análisis Matemático”), se consolidó el cálculo (infinitesimal y diferencial) y sus múltiples aplicaciones a las distintas ciencias naturales (siendo especialmente relevante el caso de la Mecánica). En lo que nos ocupa, este siglo vio el nacimiento de nuevas ramas de las matemáticas, incluida la teoría de ecuaciones diferenciales. En este sentido, el primer libro con las ecuaciones diferenciales como su único objeto de estudio y finalidad se remonta al año 1707 cuando Manfredi (1707) publicó su *De constructione aequationum differentialium primi gradus*, en el que seguía la notación y formalismo de Leibniz y los Bernoulli.

Precisamente, seguir la visión y metodología de los autores anteriores será la tónica en prácticamente la totalidad de los trabajos presentados en el s. XVIII, siendo sus principales referentes Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange y Laplace. La mayoría de los trabajos de este siglo sobre estos temas fueron o bien presentados en las Academias de París, Berlín y San Petersburgo entre otras ya menos importantes, o bien mediante tratados expositivos que los autores publicaban de forma independiente (Kline, 1972b).

Euler, el más prolífico de los matemáticos del siglo XVIII, tocó todas las ramas existentes en las matemáticas de su época, incluidas las ecuaciones diferenciales. En este campo, Euler (1728) introdujo dos nuevas técnicas: la primera consistente en el uso de una sustitución que reducía ciertas ecuaciones diferenciales en otra ecuación que permitía el uso de la separación de variables; y la segunda, consistente en una versión equivalente a lo que hoy se denomina el método de los coeficientes indeterminados. Dentro de esa misma obra, pero bajo la apariencia de un ejemplo, Euler también descubrió el método de resolución de ecuaciones diferenciales lineales mediante multiplicación de un factor de integración sobre el que se sustenta la actual teoría de las ecuaciones diferenciales lineales. Posteriormente, Euler (1743) dio un método para la resolución de las ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden. Además, de los resultados previamente indicados, Euler profundizó en la teoría de las ecuaciones diferenciales realizando su obra *Institutionum calculi integralis* (Euler, 1768-1770) en la que recogía todos los descubrimientos que hizo sobre el tema, incluido el método numérico que lleva su nombre para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden. Son varias las ecuaciones diferenciales que llevan su nombre por ser él uno de los que primero las trató.

Euler trabajó conjuntamente con Lagrange mediante correspondencia entre 1754 y 1756 (Rouse Ball, 1960) y dicha colaboración acabó siendo el inicio del denominado cálculo de variaciones (Lagrange, 1804). Usando dicho cálculo de variaciones, Lagrange (1804) ideó el método de los multiplicadores que lleva su nombre e inventó el método de variación de parámetros para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas, método por el que fue premiado en 1766 y 1782 por la Academia de Ciencias de París (Lagrange, 1766; 1785).

Entre las aportaciones realizadas por Laplace a las ecuaciones diferenciales parciales, ha quedado para la historia la transformada de Laplace que posteriormente sería adaptada ampliamente a múltiples problemas en ingeniería durante el s. XX. Este operador permitía convertir ecuaciones diferenciales con una condición inicial en una ecuación más sencilla a resolver con la simple manipulación algebraica. Aunque este operador fue introducido en 1737 por Euler (1744), sería Laplace (1785) quien establecería el marco con el que usar dicha transformada.

Debe tenerse en cuenta además que el primer trabajo de Laplace (1771) versó precisamente sobre las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones en diferencias. En este sentido, Laplace (1777) introdujo un método general que permitía la resolución de ecuaciones en derivadas parciales que devolvía la integral cuando esta podía ser calculada y que además permitía identificar las ecuaciones que no eran resolubles. Con esta metodología dio la solución de estas ecuaciones siendo de segundo orden.

Con el s. XIX finalizamos este recorrido histórico, pues fue entonces cuando se llegó a la fase de necesitar demostrar hechos que habían sido dados por válidos hasta ese momento sin justificación teórica (Kline, 1972b). Será ahora cuando las ecuaciones diferenciales serán objeto de una teoría matemática que busca el rigor y la generalidad. Con ellos surge el interés en demostrar la existencia y unicidad de las soluciones de dichas ecuaciones (que son el principal interés en la actualidad). De esta época, resaltamos las figuras de Abel, Cauchy, Jacobi, Picard y Poincaré. Por su parte, Cauchy (1825; 1827) fundamentó y estableció la teoría de variable compleja (Smithies, 1997) y la aplicó a las ecuaciones diferenciales. En este sentido, Cauchy (1842a; 1842b) probó la existencia de solución analítica para aquellas ecuaciones diferenciales que tenían coeficientes y condiciones iniciales analíticas. Para ello, introdujo el *método de funciones mayorantes* (que él denominó *calcul des limites*) y que aplicó eficientemente tanto a las ecuaciones diferenciales ordinarias como a otras ecuaciones en derivadas parciales (las denominadas quasi-lineales de primer orden). Además, demostró que cualquier EDP de orden mayor que 1 podía reducirse a un sistema de EDPs. La generalización de este resultado junto con la unicidad da lugar al Teorema de Cauchy-Kovalewski.

Cuando Cauchy (1842c; 1842d) intentó demostrar su teorema de existencia para sistemas de ecuaciones diferenciales, introdujo la notación vectorial que actualmente se utiliza. Gracias a esta generalización, Jacobi (1865; 1866) resolvería los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes cuando la matriz del sistema es diagonalizable. Sería Jordan (1870) quien introduciría la forma canónica que lleva su nombre para resolver aquellos sistemas lineales cuya matriz no era diagonalizable. Posteriormente, Picard (1893) estableció un método de aproximaciones sucesivas para establecer con precisión el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales de orden *n*. Finalmente, las investigaciones de Poincaré (1890) sobre la estabilidad y periodicidad de las soluciones del sistema solar le condujeron al inicio del estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales.

3. ECUACIONES EN DIFERENCIAS: QUÉ SON Y SUS ORÍGENES

Una *ecuación en diferencias* o *relación de recurrencia* se reduce a una ecuación algebraica en la que la incógnita es una sucesión de modo que aparecen varios de los términos de la sucesión en la ecuación. Ejemplos de ecuaciones en diferencias son las siguientes:

$$x_{n+1} = x_n \cdot (1 + x_n) \qquad\qquad c_0(n) \cdot x_n + c_1(n) \cdot x_{n-1} + \cdots + c_k(n) \cdot x_{n-k} = f(n)$$

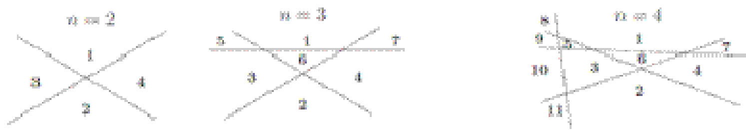
El *orden de la ecuación en diferencias* consiste en el número de veces que aparecen términos inferiores al calculado en la sucesión incógnita. De este modo, el primer ejemplo es una ecuación en diferencias de primer orden y el segundo, de orden *k*. Precisamente, este segundo ejemplo corresponde a la expresión general de una ecuación en diferencias lineal, ya que todos los términos de la sucesión solución aparecen con grado 1. El primer ejemplo no es lineal ya que el término x_n aparece con grado 2.

Al igual que nos pasaba con las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones en diferencias no tienen una única solución. Cualquier sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ que satisface la ecuación en diferencias se denomina solución particular de la misma. En cambio, si consideramos el conjunto de todas sus soluciones particulares, lo que obtenemos es la solución general de la ecuación en diferencias. Este hecho conlleva nuevamente que haya que considerar condiciones iniciales para obtener la solución particular, si existe, que satisfaga dichas condiciones. Concretamente, las condiciones iniciales consisten en fijar el valor de los primeros términos de la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$, tantos como indique el orden de la ecuación.

Las ecuaciones en diferencias responden a las mismas cuestiones que buscan resolver las ecuaciones diferenciales, pero teniendo en cuenta que las primeras deben usarse para funciones discretas y las segundas para funciones continuas. Por tanto, los fenómenos que pueden representar cada una de ellas deben ser también de tal tipo. De este modo, tal y como nos pasó en el caso de las ecuaciones diferenciales, podemos encontrarnos con ecuaciones en diferencias estocásticas que no son más que ecuaciones en diferencias lineales en las que el término independiente sigue un proceso aleatorio.

Las ecuaciones en diferencias aparecen en la antigüedad en la forma de los números poligonales. Si consideramos un polígono de lado *n*, sus correspondientes números poligonales $\boldsymbol{p_n}$ vienen dados por la ecuación $\boldsymbol{p_{n+1}} = \boldsymbol{p_n} + 2\boldsymbol{n} + 1$, que es una ecuación en diferencias de primer orden. Este tipo de ecuaciones fueron estudiadas por los pitagóricos, por Arquímedes y por Euclides antes de nuestra era.

También ambientada en la geometría clásica, tenemos otra ecuación en diferencias que proviene del número de regiones que se forman al añadir una recta a otro conjunto de rectas de modo que no sean paralelas dos a dos y no se corten tres rectas en el mismo punto. Como puede verse en el gráfico siguiente:



Para 2 rectas, se obtienen 4 regiones, para 3 el número de regiones es 7=4+3 y para 4 rectas, las regiones resultan ser 11=7+4. Por tanto, el número de regiones que se obtienen sigue la ecuación en diferencias $\boldsymbol{r_{n+1}} = \boldsymbol{r_n} + \boldsymbol{n} + 1$ que resulta ser del mismo tipo que la anterior. Las ecuaciones en diferencias de primer orden y lineales se resuelven por medio de una serie aritmética, geométrica o una combinación de ambas, ya que solo hay que ir sustituyendo, por lo que su resolución es bien conocida desde la antigüedad.

También de la Antigua Grecia, viene Herón de Alejandría y su fórmula para aproximar el valor de la raíz de un número positivo $\boldsymbol{a}$ (Heath, 1921):

$$x_{n+1} = \frac{\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)}{2}$$

Diofanto (s. III a.C.) además de trabajar también con los números poligonales, fue el causante de la aparición de las ecuaciones diofánticas en su *Arithmetica*. En esa obra se dan soluciones numéricas (enteras positivas) a ecuaciones con una o varias soluciones. Incluso resolvía algunos sistemas de ecuaciones diofánticos. Todo ello usando el análisis diofántico que se basa en la resolución de ecuaciones en diferencias. Como la mayoría de las ecuaciones resultantes eran cuadráticas, Diofanto y su obra inspiraron a Fermat a postular su Último Teorema en 1637, que afirma la inexistencia de solución para la ecuación $\boldsymbol{x^n} + \boldsymbol{y^n} = \boldsymbol{z^n}$ con $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ y *n* enteros no nulos y *n* mayor que 2. El caso *n* = 2 corresponde al Teorema de Pitágoras y sus soluciones son las ternas pitagóricas a quien tradicionalmente se le atribuye este resultado (Heath, 1921). Las ecuaciones diofánticas han sido desde siempre un entretenimiento matemático, aunque en la actualidad también se les hayan encontrado aplicaciones prácticas en las distintas ciencias. En concreto, Diofanto probó que la ecuación del tipo $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$ tiene solución si y solo si $\boldsymbol{m}.\boldsymbol{c}.\boldsymbol{d}.(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ divide a $\boldsymbol{c}$. Este criterio de existencia (que también conlleva un criterio de resolución) es el que se sigue utilizando en la actualidad para resolver estas ecuaciones diofánticas, cuya solución es:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{d}}\cdot\boldsymbol{t} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0+\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{d}}\cdot\boldsymbol{t},$$

con $\boldsymbol{x}_0$ e $\boldsymbol{y}_0$ soluciones particulares de la ecuación y $\boldsymbol{t}$ un parámetro.

Posteriormente, Brahmagupta encontró reglas para la resolución de distintos tipos de ecuaciones cuadráticas sencillas, incluidas algunas con infinitas soluciones como resulta ser $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}^2+1=\boldsymbol{y}^2$, la cual también estudio en profundidad Bhaskara II (Bhanu Murthy, 1994). Las soluciones de estas ecuaciones (se puede tomar cualquier otro valor en lugar de 1) reciben el nombre de *polinomios de Brahmagupta*.

La primera ecuación en diferencias que se trabajó con dos índices fue $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}+1,\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}-1}$, cuya solución son los coeficientes binomiales $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}}$ y que se remontan a dos obras orientales. La primera es la perdida *Huangdi Jiuzhang Suanjing Xicao* de Jia Xian (1022-1054) de la que tenemos constancia de sus contenidos gracias al *Xiangjie Jiuzhang Suanfa* de Yang Hui (1261). En este último se describía el conocimiento de Xian sobre el triángulo de Pascal. Sin embargo, habría que esperar al *Siyuan yujian* de Zhu Shijie (1303) para encontrar un dibujo del triángulo de Pascal indicando el uso ancestral de este método. La segunda obra es de origen persa y se corresponde a una obra perdida de Omar Khayyam (c. 1100) a la que se hace referencia en su *Tratado sobre Demostración en Problemas de Álgebra* y que versaba sobre cómo se calculaban las ecuaciones antes referidas (Rashed, 1994); aunque previamente fue tratado por al-Karaji (953-1029), el cual usó el triangulo de Pascal para calcular varios binomios y, en palabra de escritos posteriores de al-Samawal (Rashed, 1994), hizo una preciosa construcción del triángulo que corresponde al gráfico siguiente:

Col1	Col2	Col3	Col4	Col5	...
1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...
	1	3	6	10	...
		1	4	10	...
			1	5	...
				1	...

En cualquier caso, la matemática europea no llegó a obtener el citado triángulo hasta el s. XVI con la variante de Petrus Apianus (1527) en el frontispicio de su obra sobre aritmética comercial. Posteriormente aparecería la versión publicada por Cardano (1545), aunque se le acredita a su coetáneo y enemigo Tartaglia. Pero el nombre recibido se debe al estudio realizado por Pascal (1665) en su obra *Traité du triangle arithmétique*, recolectando todos los resultados conocidos sobre el triángulo y empleándolos en problemas relativos a la teoría de relatividad. Debido a esta obra, de Montmort (1708) y de Moivre (1730) le dieron el nombre de triángulo de Pascal.

Continuando en Europa, el ejemplo clásico de ecuación en diferencias es la sucesión de Fibonacci cuya expresión es $\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a_{n-1}} + \boldsymbol{a_{n-2}}$ con $\boldsymbol{a}_0 = 0$ y $\boldsymbol{a}_1 = 1$. Esta ecuación en diferencias la presentó Fibonacci, sobrenombre de Leonardo de Pisa (2003), cuando estudiaba la velocidad de la cría de conejos en condiciones ideales en 1202, trasladando este problema ya conocido en el mundo árabe. Curiosamente la solución de esta ecuación se expresa en términos del número áureo y su conjugado, fórmula que se conoce con el sobrenombre de Binet (1843), aunque ya había sido publicada por De Moivre (1730) con anterioridad.

Finalmente, las ecuaciones en diferencias finitas pueden usarse para obtener estimaciones de las soluciones de ecuaciones diferenciales. Ese uso genera los denominados *métodos de diferencias finitas* en los que trabajaron los autores que ya mentamos en la sección anterior y sobre algunos de estos métodos ya hicimos en su momento algunas consideraciones.

4. USO DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN FINANZAS

El uso de las ecuaciones diferenciales en el contexto de las finanzas es múltiple y variado, ya que este tipo de ecuaciones permiten modelizar cualquier situación o fenómeno que presenta variaciones en función de sus factores (por ejemplo, cambios y alteraciones a partir del tiempo). En este sentido, las ecuaciones diferenciales son especialmente útiles para la fijación de precios de las opciones europeas y de las americanas, amén de para las calibraciones. Los métodos numéricos basados en ecuaciones en derivadas parciales no suelen ser muy populares en finanzas primándose el uso de los métodos estocásticos debido a que los algoritmos usando estos últimos suelen ser más fáciles de implementar. Sin embargo, los métodos numéricos pueden llegar a tener una mejor eficiencia si son discretizables y, lo que es más importante, el obtener la solución de la ecuación diferencial provee de una mayor información.

En el caso de las opciones, se considera un dominio acotado temporal $(0, \boldsymbol{T})$ con una condición final singular en el instante $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}$. Los métodos de discretización a utilizar con las ecuaciones en derivadas parciales deben ser suficientemente rápidos y exactos para que tenga sentido su uso y mejore la respuesta dadas por los procesos estocásticos.

No se pretende indicar todas las posibilidades de las ecuaciones en derivadas parciales en el ámbito de las finanzas, aunque sí queremos dejar patente el uso que se puede dar de las ecuaciones en derivadas parciales.

En referencia a la fijación de precios de las opciones, una primera aproximación al problema consiste en considerar el modelo Black-Scholes (Black y Scholes, 1973; Merton, 1973). Este modelo se centra en trabajar una ecuación en derivadas parciales sin disponer de todas las hipótesis requeridas sobre los datos para proceder a su derivación. En el modelo estándar se considera un activo de riesgo y otro libre de riesgo cuyos precios en el instante $\boldsymbol{t}$ son $\boldsymbol{S_t}$ y $\boldsymbol{S_t^0}$ satisfaciendo dos ecuaciones diferenciales:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S_t} = \boldsymbol{S_t}\cdot(\mu\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{t} + \sigma\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{B_t}) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{S_t^0} = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{S_t^0}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{t}\,,$$

con $\boldsymbol{B_t}$ un movimiento browniano estándar, μ la media de retorno de la inversión, $\boldsymbol{r}$ la tasa de interés y σ la volatilidad. Cuando estos últimos tres valores no son constantes, sino que dependen de $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{S}$, entonces se trabaja con un proceso estocástico que viene determinado por una ecuación diferencial estocástica con una expresión similar a la anteriormente indicada. Esta aproximación se ha usado en opciones europeas, americanas y asiáticas, en opciones *basket* y de barrera, y en opciones sobre máximo y sobre promedio. En el caso de las opciones europeas, el problema de contorno que se obtiene para la función de precios $p(t,S)$ para las opciones corresponde a la siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{t}} + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{S}} + \dfrac{\sigma^2\cdot\boldsymbol{S}^2}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{S}^2} - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} = 0 \\ \text{sujeto a } \boldsymbol{p}(\boldsymbol{T},\boldsymbol{S}) = \phi(\boldsymbol{S}) \end{cases}$$

donde ϕ es la función de reembolso y T es un instante temporal dado, denominado madurez. Dependiendo del tipo de opción la EDP y la condición inicial en este problema de contorno va modificándose (Achdou *et al*., 2012).

En el caso de las opciones, una vez se tiene establecida la ecuación diferencial, se suelen utilizar los siguientes métodos de resolución: a) el método de diferencias finitas, que reduce la ecuación diferencial a una ecuación en diferencias gracias a la aproximación de las derivadas por diferencias finitas y traduce el problema continuo a uno discreto; y b) el método del elemento finito, más flexible que el anterior y que permite un mejor refinamiento. Todo ello utilizando los correspondientes criterios de estabilidad y convergencia que permitan asegurar que el método de discretización funciona correctamente. Es más, por lo general no se procede a la resolución exacta de la ecuación diferencial (estocástica o no), sino que se hace una estimación numérica de la solución de la misma y en ese sentido van los dos métodos de resolución anteriormente indicados, que obviamente no son los únicos empleados, aunque sí los más habituales por ser los más elementales.

El uso de las ecuaciones en derivadas parciales (y su resolución exacta usando técnicas algebraicas de Lie) es actualmente empleado en la resolución de problemas de *screening* multidimensional para combatir la selección adversa en la toma de decisiones de información asimétrica. En este sentido, Basov (2004) analiza la resolución de problemas de *screening* multidimensional que pueden representarse mediante problemas de contorno en los que el método hamiltoniano es aplicable. Con esta técnica, Basov consigue información sobre la estructura que pueden tener las soluciones del problema e incluso en ocasiones soluciones particulares del mismo.

El problema de *screening* multidimensional matemáticamente se formula como sigue: un monopolio que produce n bienes tiene una función de costes convexa y las preferencias de un consumidor sobre tales bienes se parametrizan con un vector m-dimensional, mientras que la tipología de los consumidores sigue una distribución con función de densidad f continuamente diferenciable sobre un conjunto Ω convexo y acotado de $\mathbb{R}^m$ y extensible por continuidad a su clausura. El monopolista quiere maximizar sus beneficios mediante la elección de una tarifa de precios adecuada para sus bienes. Hallar dicha tarifa se traduce de manera natural en resolver un sistema de EDPs no lineales. Es de importancia reflejar que no existen métodos generales para resolver tales problemas y que solo en caso de aparición de simetrías, dicho problema puede ser simplificado e incluso resuelto mediante la asociación de la ecuación en derivadas parciales con un grupo de Lie. Esta es la aproximación que usa Basov en su trabajo en el que traduce la resolución del problema de *screening* a la resolución de EDPs de primer y segundo orden con la siguiente expresión:

$$\Phi(\alpha, \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{u}, \mathrm{D}^2 \boldsymbol{u}) = 0,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}^m$ es el vector de inputs, Φ es una función continuamente diferenciable y la función $\boldsymbol{u} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es dos veces diferenciable con gradiente $\nabla \boldsymbol{u}$ y matriz hessiana $\mathrm{D}^2 \boldsymbol{u}$.

Otro problema en Finanzas en el que se aplican las EDPs fue realizado por Polidoro (2003). Concretamente, este autor estudió una EDP no lineal sobre $\mathbb{R}^3$ que permitía obtener la solución del modelo propuesto por Antonelli *et al.* (2001) para la toma de decisiones bajo riesgo en el marco de las funciones de utilidad; las cuales, aunque siguen un proceso estocástico y se resolverían mediante el planteamiento de la correspondiente ecuación diferencial estocástica, podía resolverse mediante un problema de contorno basado en una ecuación diferencial no estocástica al considerar la correspondiente condición inicial:

$$\begin{cases} \partial_{xx} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \partial_y \boldsymbol{u} - \partial_t \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \\ \text{sujeto a } \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 0) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{cases}$$

Este problema de contorno, Polidoro también lo resuelve mediante el uso de técnicas algebraicas de Lie y obteniendo condiciones para la existencia de soluciones globales.

Desde una perspectiva más matemática, Sauer (2012) realiza un trabajo en el que muestra la situación actual de la resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas como modelo para representar dinámicas de difusión y muestra sus múltiples cualidades en los fenómenos económicos que vienen dados por dichos fenómenos como pueden ser la fijación de precios financieros en productos derivados y cómo los sistemas diferenciales y su resolución proveen de unos mecanismos para simular el fenómeno de una manera más eficiente de lo que permiten los procedimientos puramente estocásticos que tradicionalmente se vienen empleando. Concretamente, un proceso de difusión en finanzas tiene una parte determínistica y otra que corresponde a un proceso de Wiener y representaría la parte de difusión y en la que entra en juego el proceso estocástico. En este sentido, estaríamos hablando de una ecuación diferencial como la que sigue:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{X})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{X})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{t}},$$

siendo $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{t}}$ la expresión del movimiento browniano. Un ejemplo de este tipo de fenómenos es el modelo de Black-Scholes que corresponde también a una expresión de este tipo donde las funciones *a* y *b* son lineales con respecto a *X* e independientes de *t* y del que ya hemos hablado al exponer las cuestiones de la fijación de precio de las opciones y cuya resolución mediante ecuaciones diferenciales estocásticas es expuesto en ese trabajo por Sauer. Igualmente, Sauer muestra cómo las ecuaciones diferenciales estocásticas pueden emplearse para trabajar modelos multifactoriales como pueden ser los derivados financieros mediante su representación por un proceso de Wiener multidimensional, pudiendo incluso incluir la correlación existente entre los distintos factores tenidos en cuenta.

Pero las EDPs estocásticas también pueden usarse en el campo de las finanzas para resolver problemas de selección de *portfolio* óptimo. En este sentido, Musiela y Zariphopoulou (2010) usaron dichas EDPs para el cálculo de soluciones explícitas de dos diferentes formulaciones del problema de inversión óptima: a) la maximización de la utilidad esperada para la riqueza terminal y b) la elección de un *portfolio* en base al criterio del rendimiento progresivo de las inversiones.

Para el primero de los dos problemas, el uso de la EDP estocástica de rendimiento de las inversiones ofrece un procedimiento alternativo que permite examinar la evolución del proceso con mayor profundidad que otros existentes (por ejemplo, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (Bellman, 1954, 1957)) ya que permite obtener tanto el rendimiento esperado máximo de las inversiones como la estrategia óptima para la inversión en la forma de retroalimientación estocástica.

Con respecto al segundo problema, la técnica que proponen Musiela y Zariphopoulou (2010) permite al inversor no tener que decidir el riesgo en un único instante temporal, sino que puede revisar dicho riesgo de manera dinámica a lo largo de todo el proceso. Esto flexibiliza el modelo clásico, en el que el inversor no puede revisar ni sus preferencias ni extender su utilidad una vez se fija el horizonte de mercado. Concretamente, la flexibilidad del modelo se recoge en la componente de volatilidad del proceso de rendimiento progresivo, representando su inseguridad sobre cambios futuros y sus preferenciales actuales de riesgo.

Para ello, los autores parten de un modelo de inversión con un activo sin riesgo y otros *k* con riesgo cuyos precios siguen un modelo de difusión. De este modo, el precio $\boldsymbol{S_t^i}$ del activo de riesgo *i* en el instante *t* viene dado por la ecuación diferencial estocástica de tipo browniano:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S_t^i} = \boldsymbol{S_t^i} \cdot \left(\mu_t^i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{t} + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ji} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{W_t^j} \right)$$

donde $\boldsymbol{S_0^i} > 0$ para todo i y $\boldsymbol{W_t} = \left(\boldsymbol{W_t^1}, \ldots, \boldsymbol{W_t^d} \right)$ es un proceso browniano estándar de dimensión *d* definido en un espacio de probabilidad con filtración $\mathfrak{F}_t = \sigma\left(\boldsymbol{W_s} : 0 \leq \boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t} \right)$ y σ_t denotando la matriz de volatilidad del proceso. Por tanto, la ecuación diferencial estocástica en su expresión vectorial:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S_t^i} = \boldsymbol{S_t^i} \cdot \left(\mu_t^i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{t} + \sigma_t^i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{W_t} \right)$$

con σ_t^i la columna *i* de la matriz σ_t. Por otro lado, el precio $\boldsymbol{B_t}$ del activo sin riesgo también sigue una EDP dada por

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B_t} = \boldsymbol{r_t} \cdot \boldsymbol{B_t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{t}$$

con $\boldsymbol{B_0} = 1$ y tasa de interés $\boldsymbol{r_t}$ en el instante *t*.

Con el modelo anterior, Musiela y Zariphopoulou (2010) retoman la formulación regresiva del problema de elección basada en el criterio tradicional de maximizar la utilidad esperada acorde a como lo introdujo Merton (1969). En esta formulación, tras la elección del horizonte de mercado [0, *T*] y de la utilidad $\boldsymbol{u_T} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ del inversor en el instante final *T*, se maximiza la utilidad esperada de riqueza final sobre las estrategias de inversión admisibles y que denotan *V*(*x*,*t*;*T*) con $x \in \mathbb{R}^+$ y $t \in [0, T]$ que debe verificar la ecuación diferencial estocástica (la descomposición de Itô) con unos coeficientes *a* y *b* satisfaciendo unas determinadas propiedades:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t};\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t};\boldsymbol{T}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t};\boldsymbol{T}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{W_t}$$

Bajo ciertas condiciones de convexidad, monotonía y diferenciabilidad, la ecuación diferencial anterior lleva al problema de contorno siguiente para cualquier estrategia π admisible de inversión

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t};\boldsymbol{T}) = \dfrac{1}{2} \dfrac{\left| \boldsymbol{V_x}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t};\boldsymbol{T}) \cdot \lambda_t + \sigma_t \cdot \sigma_t^+ \cdot \boldsymbol{a_x}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t};\boldsymbol{T}) \right|^2}{\boldsymbol{V_{xx}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t};\boldsymbol{T})} \mathrm{d}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t};\boldsymbol{T}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{W_t} \\ \text{sujeto a } \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{T};\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{u_T}(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

La volatilidad $a(x,t;T)$ está presente en la expresión ya que representa la parte de difusión estocástica de la oportunidad de inversión y que dependiendo del modelo estocástico seguido lleva a una u otra solución del problema tal y como aparece en el trabajo comentado.

Pero, además de esta modelización mediante una EDP estocástica, Musiela y Zariphopoulou (2010) introducen por primera vez una formulación del problema de elección del *portfolio* óptimo mediante el rendimiento progresivo de la inversión y que, al contrario del modelo anterior, el inversor puede ir revisando sus preferencias de riesgo durante todo el tiempo de mercado de manera dinámica. De este modo, se busca maximizar la utilidad esperada sobre las estrategias de inversión admisibles, que ahora se denota $U(x,t)$ con $x \in \mathbb{R}^+$ y $t \geq 0$ y que satisface también una serie de restricciones sobre convexidad, monotonía y diferenciabilidad, siendo la EDP estocástica obtenida similar a la de la formulación regresiva, pero permitiendo un análisis más rico del rendimiento progresivo de la inversión ya que se formula a futuro en lugar de a tiempo pasado. Posteriormente los propios Musiela y Zariphopoulou (2011) mostraron también el uso de este tipo de EDPs estocástica para la selección de *portfolio* usando un criterio de rendimiento monótono en el tiempo.

También en el ámbito de la selección de un *portfolio* óptimo, pero ahora bajo condiciones de riesgo sobre la liquidez y su impacto sobre el precio, podemos referir el trabajo de Ly Vath *et al*. (2007) en el que plantearon un modelo financiero con un activo libre de riesgo y otro de riesgo bajo tales restricciones, pudiéndose transferir fondos entre ambos activos en tiempo discreto. En el estudio llevado a cabo no solo se usan ecuaciones diferenciales de tipo Black-Scholes para modelar el proceso de precios, sino definen operadores diferenciales expresados en términos de las derivadas parciales de primer y segundo orden y que son esenciales para el planteamiento y resolución del problema.

En el caso de Platen y Schweizer (1998), usan las ecuaciones diferenciales estocásticas para trabajar numéricamente las distorsiones en el precio de las opciones debido a efectos de retroalimentación por estrategias de coberturas a la hora de buscar una nueva explicación para los efectos de la sonrisa y asimetría en la volatilidad. En este modelo el tiempo actúa como un continuo y los precios dependen de las estrategias por medio de una función de reacción. Concretamente, Platen y Schweizer (1998) utilizan un modelo para construir el precio de los activos de modo que puedan estudiarse las estrategias de cobertura para los derivados en función de la evolución de los instrumentos financieros subyacentes. Todo ello buscando la dinámica del activo implícitamente a partir de la condición de equilibrio del mercado. En una variable temporal continua t para un único activo de riesgo se tiene un precio S_t en dicho instante, denotando por L_t al logaritmo de dicho precio. Para un precio (en logaritmo) l en el instante t, se denota por $D(t,l,U_t)$ a la demanda de ese activo hasta el instante t teniendo en cuenta a todos los aceptadores de precio y donde U_t engloba a todos los demás factores distintos de l que pueden influir en la demanda (es decir, U representa un proceso estocástico que distorsiona la situación de manera exógena). A partir de la situación de equilibrio de mercado $D(t,\ L_t,U_t) = k$, se puede obtener la expresión del precio del activo L_t como la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L_t} = -\frac{1}{\boldsymbol{D_L}}\cdot\left(\boldsymbol{D_U}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{U_t} + \boldsymbol{D_t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{t} + \frac{1}{2}\cdot\left(\boldsymbol{D_{LL}}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{D_U}}{\boldsymbol{D_L}}\right)^2 - 2\boldsymbol{D_{LU}}\cdot\frac{\boldsymbol{D_U}}{\boldsymbol{D_L}} + \boldsymbol{D_{UU}}\right)\cdot\mathrm{d}\langle \boldsymbol{U}\rangle_{\boldsymbol{t}}\right)$$

Aplicando exponencial a esta ecuación, se obtiene la evolución del precio S_t. Este estudio no lo limitan al caso simple de que la función demanda sea una constante escalar, sino que también consideran el caso en el que dicha función demanda sea de la forma:

$$\boldsymbol{D(t,\ L_t,U_t)} = \boldsymbol{U_t} + \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{L_t} - \boldsymbol{L}_0) + \xi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{L_t}),$$

siendo $\boldsymbol{U_t} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{W_t} + \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{t}$ un movimiento browniano con tendencia m y volatilidad v, que representa el error aleatorio no explicable por otras causas; el sumando $\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{L_t} - \boldsymbol{L}_0)$ representa la demanda acumulativa de los especuladores y $\xi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{L_t})$ la parte de la demanda resultante de la estrategia de cobertura usada. En dicho caso, la ecuación diferencial estocástica a resolver resulta ser

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L_t} = -\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{k} + \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{L_t})}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{W_t} - \left(\frac{\boldsymbol{m} + \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{L_t})}{\boldsymbol{k} + \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{L_t})} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\boldsymbol{v}^2\cdot\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}\boldsymbol{l}^2}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{L_t})}{\left(\boldsymbol{k} + \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{L_t})\right)^3}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{t}$$

y que, obviamente, puede también expresarse en términos del precio S_t en lugar de su expresión logarítmica.

También son utilizadas las ecuaciones diferenciales a la hora de trabajar seguros sobre personas. En los seguros sobre personas, se genera un flujo de pagos entre la compañía aseguradora y el asegurado a lo largo de la vida del último. Por ello, la valoración temporal del dinero es esencial para disponer de una medición de los pagos pasados y futuros. Sobre esta temática, Steffensen (2007) realizó un interesante trabajo recopilatorio sobre esta temática. Más concretamente, plantea el estudio de la ecuación diferencial ordinaria que Thiele descubrió en 1875 para la reserva de un contrato de seguro sobre personas con pagos derterminísticos. Aunque nunca la publicó, Gram (1910) la hizo pública en un obituario sobre su persona y ésta fue generalizada posteriormente por Hoem (1969) y Norberg (1991).

El modelo de Thiele parte de una póliza de seguros contratada en tiempo 0 y finalizando en un tiempo finito fijo n y siendo $Z(t)$ el estado de la póliza en el instante t, dentro de un conjunto finito de estados de la póliza, comenzando en un estado inicial $Z(0)=0$ y representado por un proceso de Markov en tiempo continuo con algunas restricciones adicionales. En tales condiciones, la cantidad total $B(t)$ de beneficios contractuales menos recargas a pagar durante el período $[0, t]$ sigue la dinámica

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{dB}^{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t})}(\boldsymbol{t}) + \sum_{\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t}-)} \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{t}) \cdot \boldsymbol{dN}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{t}),$$

con $N^k(t)$ representando el número de transiciones en el estado k; $Z(t\text{-})$ denotando el límite a izquierda de Z en t; y las funciones B^j y b^{jk} son deterministas y suficientemente regulares que especifican los pagos debidos durante la permanencia en estado j y por la transición del estado j al estado k, respectivamente. Los propios procesos B^j siguen un proceso de difusión $\mathrm{d}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{t} + \left(\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}-)\right)$ que tienen una parte continua (ecuación diferencial) y otra discreta (ecuación en diferencias). Una vez establecidos los beneficios, el asegurador debe poder estimar las obligaciones futuras que está contratando y suele establecerse esa cantidad asegurando un gran número de contratos similares con flujos de pagos asociados a vidas independientes y se procura la diversificación del riesgo para valor esperado presente condicionado a tales beneficios. Ese valor esperado es la reserva que viene dada por la ecuación diferencial:

$$\tfrac{\partial \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}}{\partial \boldsymbol{t}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}) - \sum_{\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{j}} \mu^{\boldsymbol{jk}}(\boldsymbol{t}) \cdot \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{jk}}(\boldsymbol{t}),$$

en los instantes con $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}-) = 0$, siendo r la tasa de interés constante del *portfolio* de inversión de la aseguradora, $\mu^{\boldsymbol{jk}}(\boldsymbol{t})$ un proceso de intensidad estocástica para N^k y $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{jk}}(\boldsymbol{t})$ la suma en riesgo. En los instantes restantes del período de contrato, se considera la ecuación $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}-) + \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}-) = 0$. La condición inicial del problema resulta ser $\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{n}) = 0$.

Al aparecer la teoría de fijación de precios de opciones, se ha trabajado en este campo para los productos de aseguradoras a sugerencia de Brennan y Shcwartz e incluso se crearon ecuaciones híbridas entre las correspondientes a los modelos Black-Scholes y Thiele, siendo el primero de tales trabajos realizado por Aase y Persson (1994). Las ecuaciones diferenciales para la reserva interrelacionando los trabajos de Heom y Aase y Persson las obtuvo el propio Steffensen (2000) derivando la ecuación híbrida entre tales modelos. La diferencia de este modelo con respecto al anterior es que las funciones B^j y b^{jk} se consideran ahora no solo dependientes de la variable temporal sino también del índice de stock $X(t)$ en el instante t y, por tanto, el pago acumulado debería seguir el proceso dinámico:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t}) = \mathrm{d}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t})}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})) + \sum_{\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t}-)} \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t}-)\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{t})$$

con el mismo proceso de difusión para la función B^j pero con todos los sumandos dependiendo de mencionado índice de stock, que es una cadena de Markov continua en el tiempo y siguiendo la ecuación diferencial estocástica bajo un proceso de Wiener W:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) = \alpha\cdot\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{t} + \sigma\cdot\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{X}(0) = 0 \end{cases}$$

El valor contractual de los futuros pagos se puede representar mediante la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{\partial \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}}{\partial \boldsymbol{t}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) + \sum_{\boldsymbol{k}\neq \boldsymbol{j}} \mu^{\boldsymbol{jk}}(\boldsymbol{t})\cdot\left(\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{jk}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})\right) + \tfrac{\partial \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{x} \\ + \frac{1}{2}\cdot\tfrac{\partial^2 \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}^2}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})\cdot\sigma^2\cdot\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

en los instantes con $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}-,\boldsymbol{x}) = 0$, siendo *r* la tasa de interés constante del *portfolio* de inversión de la aseguradora. En los instantes restantes del período de contrato, se considera la ecuación $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}-,\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}-,\boldsymbol{x}) = 0$. La condición inicial del problema resulta ser $\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}) = 0$. Bajo ciertas condiciones, la ecuación diferencial anteriormente indicada puede simplificarse aún más.

Siguiendo en productos correspondientes a seguros sobre personas, las ecuaciones diferenciales también permiten realizar un estudio sobre la distribución de dividendos y excedentes. En este sentido, Norberg (1999; 2001) utilizó ecuaciones diferenciales ordinarias estocásticas basadas en cadenas de Markov para poder simular el comportamiento del excedente técnico sobre un contrato de seguro para su pago como bonificación y poder pronosticar posibles bonificaciones futuras a partir de la parte endógena del proceso. Posteriormente, Steffensen (2006) estudió el problema de valoración de dividendos mediante la resolución de sistemas de EDPs incluyendo ciertas restricciones al mercado financiero subyacente, pudiéndose llegar incluso a soluciones semi-explícitas para ciertos casos particulares. Para ejemplificar este uso de las ecuaciones diferenciales mostramos el sistema obtenido por Steffensen en su trabajo para el cálculo de la reserva de un seguro sobre personas con pago de dividendos enlazados a excedentes:

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{\partial \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}}{\partial \boldsymbol{t}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) + \sum_{\boldsymbol{k}\neq \boldsymbol{j}} \mu^{\boldsymbol{jk}}(\boldsymbol{t})\cdot\left(\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{k}}\left(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{jk}}(\boldsymbol{t}) - \delta^{\boldsymbol{jk}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})\right) - \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{jk}}(\boldsymbol{t}) + \delta^{\boldsymbol{jk}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})\right) \\ + \tfrac{\partial \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})\cdot\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}) - \delta^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})\right) + \tfrac{\partial^2 \boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}}{\partial \boldsymbol{x}^2}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})\cdot\pi^2(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})\cdot\sigma^2\cdot\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}) + \delta^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

donde las nuevas funciones que intervienen en la expresión son $\delta^{\boldsymbol{j}}$ y $\delta^{\boldsymbol{jk}}$ que son los análogos en la función *D* de corriente de pagos de dividendos para los $\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{j}}$ y $\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{jk}}$ en la función de pago acumulado, respectivamente; mientras que $\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{j}}$ y $\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{jk}}$ son los respectivos análogos en el proceso de contribución de excedente *C*. Esta ecuación diferencial corresponde a los instantes con $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}-) = 0$, pero en los instantes restantes del contrato se toma la ecuación $B^j(t) - B^j(t-) + D^j(t,x) - D^j(t-,x) + V^j\left(t, x + C^j(t) - C^j(t-) + D^j(t,x) - D^j(t-,x)\right)$ $-V^j(t-,x) = 0$. La condición inicial del problema resulta ser $\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}) = 0$.

Pero para hablar de la aplicación de las ecuaciones ordinarias no es necesario irse a conceptos ni estudios sumamente complejos como los que hemos expuesto anteriormente. Por ejemplo, como puede verse en Bellaïche (2010), un medida macroeconómica tan conocida como el producto interior bruto (PIB) consiste en la solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal $\frac{\partial x}{\partial t}(t) = g \cdot x(t)$, en la que la tasa de cambio del estado actual $x(t)$ en el instante temporal t se expresa de manera proporcional al estado en dicho instante (con g una constante de proporcionalidad). Obviamente, se ha de introducir una condición inicial indicando un valor $x(0)$ de estado para el instante inicial $t = 0$.

Del mismo modo, cuando una empresa gestionada racionalmente en una industria competitiva quiere maximizar el valor actual V de todos los flujos netos futuros de dinero en efectivo se hace necesario la resolución de las siguientes ecuaciones diferenciales (Gould, 1968):

$$e^{-R(t)} \cdot \left(P(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) - w(t) \right) = 0$$

$$e^{-R(t)} \cdot \left(P(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial K}(K, L) - (r + \delta) \cdot \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}I}(I) + \left(\frac{\mathrm{d}^2 K}{\mathrm{d}t^2}(t) + \delta \cdot \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}(t) \right) \frac{\mathrm{d}^2 C}{\mathrm{d}I^2}(I) \right) = 0,$$

donde $P(t)$ representa el precio de la producción en el instante t, $w(t)$ denota el salario medio en t, $L(t)$ es el factor mano de obra en t, $K(t)$ es el factor capital en t, $C(I)$ denota el coste asociado a invertir en capital social a la tasa I de inversión bruta y $F(K, L)$ es la función de producción en términos de capital y mano de obra.

Bajo los supuesto habituales para los conceptos indicados en el párrafo anterior, las dos ecuaciones diferenciales arriba descritas llevan a una tercera ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea de primer orden para la tasa de inversión bruta $I(t)$. Del mismo modo, Chen *et al*. (2007) estudian la estructura de capitales y su administración por medio de la resolución de un problema de contorno dado por la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial S}{\partial V}(V, L) = \frac{\partial v}{\partial V}(V, L) - \frac{\partial D}{\partial V}(V, L)$$

y la condición inicial $\left. \frac{\partial S}{\partial V}(V, L) \right|_{V=L} = 0$ de tipo *smooth pasting*, donde V es el valor de los activos de la empresa, L es el nivel de activación estándar, $D(V, L)$ representa el valor presente de todas las deudas, $v(V, L)$ denota el valor presente de la empresa y $S(V, L)$ es el valor de patrimonio de las acciones de la empresa. Esto se debe a que la solución del problema de contorno anteriormente planteado consiste en la obtención del nivel óptimo de activación estándar L^*, que permite deducir la estructura de capital óptimo de una empresa.

Finalizamos la exposición de problemas y temas en los que emplear las ecuaciones diferenciales en el ámbito de las finanzas haciendo referencia al modelo de Heston (1993) basado en describir la evolución de la volatilidad de un activo subyacente. El modelo básico parte del hecho de que el precio S_t del activo en el instante t evoluciona en el tiempo siguiendo un proceso estocástico determinado por la ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}S_t = \mu \cdot S_t \cdot \mathrm{d}t + \sqrt{\nu_t} \cdot S_t \cdot \mathrm{d}W_t^S,$$

con

$$\mathrm{d}\nu_t = \kappa\cdot(\theta - \nu_t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{t} + \xi\cdot\sqrt{\nu_t}\cdot\nu_t\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t^{\nu},$$

siendo $\boldsymbol{W}_t^S$ y $\boldsymbol{W}_t^{\nu}$ dos procesos de Wiener, ν_t la volatilidad en el instante *t*, μ la tasa de rendimiento del activo, θ la varianza del precio promedio a largo plazo, κ es la tasa a la que ν_t revierte a θ, y ξ es la volatilidad de ν_t. Este modelo fue empleado por Piché y Kanniainen (2007) para el estudio de valores derivados de precio con volatilidad estocástica. Concretamente, la ecuación diferencial de partida en el problema a considerar era:

$$\tfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{U} - \tfrac{1}{2}\cdot\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}^2\cdot\tfrac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{S}^2} - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\tfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{S}} - \rho\cdot\sigma\cdot\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\tfrac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{S}\partial \boldsymbol{v}} - \tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\boldsymbol{v}\cdot\tfrac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{v}^2} - \kappa\cdot(\theta - \boldsymbol{v})\cdot\tfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{v}},$$

siendo la condición final dada por $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{v},\boldsymbol{T}) = \max\{\boldsymbol{S} - \boldsymbol{E}, 0\}$ y las condiciones de borde por $\boldsymbol{U}(0,\boldsymbol{v},\boldsymbol{t}) = 0$ y $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{v},\boldsymbol{t}) \approx \boldsymbol{S} - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}^{-r\cdot(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{t})}$ para *S* suficientemente grande. En la fórmula anterior, *U*(*S*, *v*, *t*) denota el valor de la opción con precio *S* del activo, *v* es la volatilidad cuadrada, σ la volatilidad de la volatilidad, ρ la correlación entre el proceso de volatilidad y el precio corriente, *r* la tasa de interés, θ la volatilidad a largo plazo, κ la tasa de reversión a la media de la volatilidad y $\lambda\cdot\boldsymbol{v}$ el precio de mercado del riesgo de volatilidad absorbido en κ y σ.

5. ALGUNAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS EN FINANZAS

Las ecuaciones en diferencias finitas se pueden aplicar en diferentes ámbitos económicos y financieros. Son múltiples los ejemplos de modelos microeconómicos y macroeconómicos que se plantean a partir de esta formulación (en general, cualquier modelo dinámico en el que los períodos temporales quieran representarse de manera discreta). Igualmente, pueden encontrarse aplicaciones de ecuaciones en diferencias en el ámbito de la Matemática Financiera para el estudio de determinados productos financieros; piénsese que la estructura de estas ecuaciones encaja perfectamente con la valoración temporal que se realiza de los productos financieros en función de un tanto o tasa de descuento. Un estudio detallado de tales aplicaciones puede verse, entre otros, en García (2008).

Con las ecuaciones en diferencias finitas, se dispone de una forma alternativa que permite abordar los problemas característicos de la Matemática Financiera afrontando situaciones más complejas que aquellas a las que se les pueden aplicar las técnicas clásicas usando factores de capitalización y descuento. De este modo, la resolución de ecuaciones en diferencias puede considerarse una herramienta complementaria (y alternativa, en algunos casos) a los factores de descuento clásicos.

El cálculo de la solución (general y particular) de las ecuaciones en diferencias finitas y su posterior interpretación pueden ser de gran utilidad en un contexto financiero, ya que la variable tiempo es determinante en todas las valoraciones financieras y ésta puede modelizarse fácilmente como una variable en diferencias. Lo determinante en la valoración financiera será el número de períodos transcurridos desde el momento de valoración, que puede cuantificarse como una variable con valores positivos y enteros e incluirse en la ecuación como la variable en diferencias. La función sobre dicha variable dependerá del caso particular que se estudie.

La resolución de ecuaciones lineales en diferencias finitas resulta ser fundamental para esta aproximación porque gran parte de los ejemplos financieros básicos pueden ajustarse a la resolución de una ecuación de este tipo, en particular de grado uno o dos. A la hora de enfocar la obtención de productos y valoraciones financieras mediante el planteamiento y resolución de ecuaciones en diferencias finitas, ha de hacerse un tratamiento e interpretación diferente de los datos de partida, pero que llevan a la misma resolución cuando se aplican las técnicas clásicas de la Matemática Financiera. Entre los temas que pueden trabajarse bajo esta perspectiva de las ecuaciones en diferencias finitas están los siguientes: la valoración de rentas financieras, el valor de depósitos bancarios y el saldo de préstamos según diferentes sistemas de amortización, en particular los sistemas de amortización francés y uniforme (García, 2008).

En la valoración de rentas financieras, si se considera un conjunto de aportaciones constantes *a* en una cuenta remunerada al tanto de interés *i*, se llega a la siguiente ecuación en diferencias lineal para el cálculo del valor final:

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{t}+1} = (1+\boldsymbol{i})\cdot\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{a},$$

con valor inicial $\boldsymbol{S}_0 = 0$ y donde $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{t}}$ representa el valor de la renta en el instante *t*.

Por otro lado, si el conjunto de aportaciones es variable siguiendo una progresión geométrica de razón *q* y comenzando con una aportación inicial *a*, entonces la ecuación en diferencias que se tiene para una tasa de interés *i* sería $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{t}+1} = (1+\boldsymbol{i})\cdot\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{t}}$, donde el valor inicial nuevamente es $\boldsymbol{S}_0 = 0$ y con $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{t}}$ representando el valor de la renta en el instante *t*.

También aparecen las ecuaciones en diferencias en las valoraciones de depósitos. Por ejemplo, si consideramos una cuenta de ahorros en la que se hacen aportaciones constantes de cuantía *a* con saldos que se remuneran con tasa de interés *i*, la expresión que explica este fenómeno correspondería a la siguiente ecuación en diferencias:

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{t}+1} = (1+\boldsymbol{i})\cdot\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{a},$$

donde el valor inicial corresponderá al capital $\boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{C}$ con el que se abre la cuenta de ahorros y con $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{t}}$ representando el valor del depósito en el instante *t*. Si en lugar de hacer un ingreso en la cuenta tras un período temporal fijado, lo que se lleva a cabo es un reintegro de valor *a*, entonces la ecuación en diferencias resulta ser:

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{t}+1} = (1+\boldsymbol{i})\cdot\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{t}} - \boldsymbol{a},$$

con el mismo valor inicial que antes y el mismo significado para la variable $\boldsymbol{S_t}$. Obviamente, pueden considerarse situaciones intermedias a la descritas (ingresos de determinada cuantía y reintegros de otra, reintegros de un porcentaje del saldo de cada año…).

También se resuelve mediante ecuaciones en diferencias el saldo de préstamos siguiendo distintos sistemas de amortización. En este modelo, también usaremos la notación $\boldsymbol{S_t}$, pero para representar el saldo del préstamo en el periodo *t*. De este modo, si se concede un préstamo por una cuantía *C* a amortizar en *n* años con una tasa de interés *i*, siguiendo el sistema uniforme o de cuotas de amortización constante de cuantía *m*, la ecuación en diferencias lineal que se ha de resolver es:

$$\boldsymbol{S_{t+1}} = \boldsymbol{S_t} - \boldsymbol{m},$$

tomando como valor inicial la cuantía del préstamo $\boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{C}$ y en el que la tasa de interés *i* no aparece explícitamente en la ecuación sino que se ha usado previamente para determinar el valor de la cuota *m*.

En caso de considerar el sistema francés de amortización, se tienen en cuenta anualidades constantes de cuantía *a*, pero la tasa de interés interviene explícitamente en la ecuación en diferencias lineal $\boldsymbol{S_{t+1}} = (1+\boldsymbol{i})\cdot\boldsymbol{S_t} - \boldsymbol{a}$, para ir actualizando los intereses anualmente y manteniendo como antes el mismo valor inicial $\boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{C}$.

Las ecuaciones en diferencias finitas (de primer y segundo orden) aparecen a la hora de trabajar problemas de optimización dinámica partiendo del supuesto de que el tiempo es una variable discreta y el horizonte es finito. Así, un primer ejemplo puede tenerse en el modelo lineal-cuadrático de "beneficio permanente" (Obstfeld y Rogoff, 1996: pp. 82–84), olvidando temporalmente el consumo e inversión del gobierno se presupone que el producto doméstico bruto *Y* sigue un proceso estocástico exógeno en función del tiempo, expresado por la siguiente ecuación en diferencias lineal de primer orden:

$$\boldsymbol{Y_{t+1}} - \overline{\boldsymbol{Y}} = \rho\cdot(\boldsymbol{Y_t} - \overline{\boldsymbol{Y}}) + \varepsilon_{t+1},$$

donde ε_t es una perturbación serialmente incorrelada (i.e. $\boldsymbol{E_t}(\varepsilon_{t+1}) = 0$) y $\rho \in [0,1]$. La solución general del producto Y_t para la expresión anterior conlleva que los efectos de choque decaigan geométricamente respecto al tiempo cuando $\rho < 1$.

Si, por el contrario, en este tipo de problemas se desea considerar el producto doméstico bruto como una variable aleatoria no estacionaria, bastaría considerar que el proceso seguido corresponde a la siguiente ecuación en diferencias lineal de segundo orden:

$$\boldsymbol{Y_{t+1}} - \boldsymbol{Y_t} = \rho\cdot(\boldsymbol{Y_t} - \boldsymbol{Y_{t-1}}) + \varepsilon_{t+1}.$$

Esta modificación de la expresión significa que el producto permanente fluctúa más que el producto actual, a excepción de $\rho = 0$ que correspondería a que ambos productos sufren la misma fluctuación.

Otra ecuación en diferencias lineal que aparece en problemas económico-financieros corresponde al estudio del cociente deuda/producción en estado estacionario. Concretamente, para estudiar la dinámica de los activos exteriores, se dispone de la siguiente ecuación en diferencias lineal de primer orden para el cociente entre los activos exteriores netos y la producción $\frac{\boldsymbol{B}_s}{\boldsymbol{Y}_s}$, cuya expresión es del tipo:

$$\frac{\boldsymbol{B}_{s+1}}{\boldsymbol{Y}_{s+1}} = \boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{B}_s}{\boldsymbol{Y}_s} + \boldsymbol{b},$$

en función de dos parámetros con una determinada significación económica (Obstfeld y Rogoff, 1996: pp. 116–117).

Continuando con las cuestiones de estado estacionario y dentro del denominado modelo de solape generacional (Weil, 1989) para la búsqueda de equilibrios generales, la tasa común $\boldsymbol{k}_t^W$ entre capital y mano de obra en el modelo de equilibrio comparando la economía del país (Interior) con el resto del mundo (Exterior) se puede expresar mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$\boldsymbol{k}_{t+1}^W = \frac{\beta\cdot(1-\alpha)}{(1+\boldsymbol{n})\cdot(1+\beta)}\cdot(\boldsymbol{k}_t^W)^{\alpha},$$

en la que interviene la tasa neta de crecimiento *n* de ambas economías y tanto α como β son parámetros del modelo. Todo esto bajo la hipótesis de que las tecnologías productivas de ambos países siguen el mismo modelo de Cobb-Douglas y las mismas preferencias (Obstfeld y Rogoff, 1996: pp. 168–169).

Varios modelos de crecimiento económico a largo plazo se fundamentan en hipótesis de que los motores del crecimiento económico son la productividad *E* y la mano de obra *L*, que vienen dadas por ecuaciones en diferencias finitas lineales, a partir de los cuales se obtiene la acumulación de capital como una ecuación diferencial un poco más complicada que las anteriores. De este modo, siguiendo el modelo de Solow con tasas de ahorro fijo (Solow, 1956), se parte del hecho de que el cambio tecnológico exógeno viene dado por el nivel de productividad *E* neutra de Harrod (expresado por $\boldsymbol{E}_{t+1} = (1+\boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{E}_t$), mientras que la mano de obra *L* sigue el comportamiento de la población ($\boldsymbol{L}_{t+1} = (1+\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{L}_t$). Como resultado la acumulación de capital *K* puede expresarse por la ecuación en diferencias:

$$\boldsymbol{K}_{t+1} - \boldsymbol{K}_t = \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}_t, \boldsymbol{E}_t\cdot\boldsymbol{L}_t) - \delta\cdot\boldsymbol{K}_t,$$

donde δ es la tasa de depreciación, *n* es la tasa de crecimiento poblacional, *g* es la tasa de crecimiento de la producción, *s* es una fracción fija de los beneficios actuales y *F* es la función de producción. La ecuación en diferencias anterior puede normalizarse por la eficiencia de la oferta de trabajo *E·L*, obteniéndose una ecuación en diferencias que explica el comportamiento del cociente $\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{E}} = \dfrac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{L}}$ entre el capital y la eficiencia y mano de obra:

$$\boldsymbol{k}_{t+1}^{E} - \boldsymbol{k}_{t}^{E} = \frac{1}{1+\boldsymbol{z}}\cdot\left(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}_{t}^{E},1)\right) - (\boldsymbol{z}+\delta)\cdot\boldsymbol{k}_{t}^{E},$$

siendo $1+\boldsymbol{z} = (1+\boldsymbol{n})\cdot(1+\boldsymbol{g})$. Se pueden considerar modelos más complicados de crecimiento económico a largo plazo que conllevan el manejo y resolución de ecuaciones en diferencias de mayor complejidad. Por mentar algún ejemplo, se puede considerar el caso del modelo Ramsey-Cass-Koopmans de crecimiento económico (Ramsey, 1928; Cass, 1965; Koopmans, 1965), en las que el mundo se supone poblado por generaciones que viven infinitamente con tamaño *L*, siguiendo *L* la ecuación en diferencias anteriormente indicada en base a la tasa exógena 1+*n* y el avance tecnológico *E* aumentando la mano de obra sigue también la ecuación en diferencias mostrada en el modelo de Solow. Para resolver el problema, se presupone que cada generación tiene su propia función de producción de rendimientos a escala constante. Tomando como una simplificación que la depreciación es $\delta = 0$, la restricción presupuestaria del período de la generación representativa viene dada por:

$$\boldsymbol{K}_{t+1} = \boldsymbol{K}_{t} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}_{t}, \boldsymbol{E}_{t}\cdot\boldsymbol{L}_{t}) - \boldsymbol{C}_{t},$$

donde $\boldsymbol{C}_t$ denota el consumo en el período *t*. Si se consideran los datos en términos *per capita*, entonces la ecuación en diferencias quedaría como sigue, sin más que dividir por L_t:

$$\boldsymbol{k}_{t+1} - \boldsymbol{k}_{t} = \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}_{t}, \boldsymbol{E}_{t}) - \boldsymbol{c}_{t}}{1+\boldsymbol{n}} - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}_{t}}{1+\boldsymbol{n}},$$

donde $\boldsymbol{k}_t = \dfrac{\boldsymbol{K}_t}{\boldsymbol{L}_t}$ y $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}) = \dfrac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{L})}{\boldsymbol{L}}$. También, en el ámbito de los modelos de convergencia de solape generacional y en presencia de imperfecciones del mércado de crédito, el stock de capital *per capita* puede ser descrito mediante la siguiente ecuación en diferencias bajo ciertas hipótesis de equilibrio:

$$\boldsymbol{k}_{t+1} = (1-\alpha)\cdot\left(\frac{\beta\cdot(1+\eta)}{1+\beta} - \frac{(1+\boldsymbol{r})\cdot\eta}{(1+\beta)\cdot\alpha\cdot\boldsymbol{k}_{t+1}^{\alpha-1}}\right)\cdot\boldsymbol{k}_{t}^{\alpha},$$

donde *r* denota la tasa de interés mundial al que se enfrenta la economía (Obstfeld y Rogoff, 1996: p. 471).

En el análisis monetario y de precios, Cagan (1956) definió y estudió las hiperinflaciones como períodos en los precios de los bienes se incrementan con una tasa promedio mensual de al menos un 50%. El modelo que Cagan utilizó en su análisis es, en general, una ecuación en diferencias estocástica, pero que si se considera desde un punto de vista no estocástico en equilibrio, ésta correspondería a la ecuación en diferencias:

$$\boldsymbol{m_t} - \boldsymbol{p_t} = -\eta \cdot (\boldsymbol{p}_{t+1} - \boldsymbol{p_t}),$$

donde m y p son los logaritmos neperianos de la provisión de dinero M de un país y su nivel de precios P, mientras que η representa la semielasticidad de la demanda para balances reales con respecto a la inflación esperada. La resolución del modelo estocástico solo se diferencia del no estocástico en la sustitución de las provisiones monetarias previstas perfectamente por sus valores esperados, siempre y cuando la dotación de dinero futura es incierta.

Otro uso de las ecuaciones en diferencias finitas se puede observar en el estudio de las políticas fiscales y monetarias de una economía abierta. Concretamente, el paradigma seguido en tales políticas es esencialmente keynesiano desde principios de la década de 1960 en base al marco teórico establecido por Mundell (1963, 1964) y Fleming (1962). Entre sus muchas variantes, podemos considerar la extensión de la perfecta previsión debida a Dornbusch (1976) para el modelo de Mundell y Fleming, la cual comparte algunas similaridades con el análisis monetario de Cagan. Concretamente, si un país afronta una tasa de interés (para cambio de divisas) exógena i^*, supuesta constante en el tiempo, entonces se tiene la siguiente ecuación en diferencias para determinar la paridad de interés de descubierto:

$$\mathbf{i}_{t+1} = \mathbf{i}^* + \mathbf{e}_{t+1} - \mathbf{e}_t,$$

donde $\mathbf{i}_{t+1}=\log(1+i_{t+1})$ es el logaritmo de la tasa de interés nominal interior bruta entre los períodos t y $t+1$, $\mathbf{i}=\log(1+i^*)$ y $\mathbf{e}$ es el logaritmo de la tasa de cambio, definido como el precio interior de la divisa extranjera. Bajo las hipótesis dadas por Mundell, Fleming y Dornbusch, se puede obtener una segunda ecuación en diferencias para el (logaritmo del) nivel de precios $\mathbf{p}$ de la divisa interior, (el logaritmo de) la tasa de cambio $\mathbf{e}$, el (logaritmo del) nivel de precios extranjero $\mathbf{p}^*$ medido en la divisa extranjera y la tasa real $\mathbf{q}$ en equilibrio en términos de la demanda agregada $\mathbf{y}_\mathbf{t}^\mathbf{d}$ de la producción nacional y de la tasa natural $\bar{y}$ de la producción:

$$\mathbf{p}_{t+1} - \mathbf{p}_t = \psi \cdot (\mathbf{y}_\mathbf{t}^\mathbf{d} - \bar{y}) + (\mathbf{e}_{t+1} - \mathbf{e}_t + \mathbf{p}^*_{t+1} - \mathbf{p}^*_t - \mathbf{q}_{t+1} + \mathbf{q}_t),$$

pudiéndose interpretar el valor de $\mathbf{e}_t + \mathbf{p}^*_t - \mathbf{q}_t$ como el nivel de precios que prevalecería en el mercado de producción. El primer término de la ecuación anterior viene a representar la inflación de los precios causada por un exceso en la demanda y el segundo el ajuste en el nivel de precios que se hace necesario para mantener la inflación esperada o el crecimiento de producción.

Otro ejemplo del uso de las ecuaciones en diferencias en el campo de la economía correspondería al modelo monetario de equilibrio general para dos países en previsión perfecta, introducido por Obstfeld y Rogoff (1995). En dicho modelo, las restricciones presupuestarias

$\boldsymbol{B}^{j}$ de un productor monopolista individual *j* (que produce un único bien distinguible y reside tanto en el país en cuestión como en el extranjero) visto desde el territorio nacional sería:

$$\boldsymbol{P_t}\cdot\boldsymbol{B}_{t+1}^{j}+\boldsymbol{M}_{t}^{j}=\boldsymbol{P_t}\cdot(1+\boldsymbol{r_t})\cdot\boldsymbol{B}_{t}^{j}+\boldsymbol{M}_{t-1}^{j}+\boldsymbol{p_t}(\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{y_t}(\boldsymbol{j})-\boldsymbol{P_t}\cdot\boldsymbol{C}_{t}^{j}-\boldsymbol{P_t}\cdot\tau_{t}\,,$$

donde $\boldsymbol{r_t}$ denota la tasa de interés real para bonos entre los instantes *t* y *t*+1, $\boldsymbol{y_t}(\boldsymbol{j})$ y $\boldsymbol{p_t}(\boldsymbol{j})$ representan la producción del bien *j* y su precio en la moneda nacional, $\boldsymbol{M}_{t-1}^{j}$ corresponde al balance monetario nominal del productor *j* al comenzar el período *t*, $\boldsymbol{P_t}$ indica el nivel del precio del dinero nacional y τ_t denota los impuestos globales a pagar en el bien de consumo $\boldsymbol{C}_{t}^{j}$ del que forma parte, viniendo dada esta última por una función CES de dos bienes en términos del consumo del productor *j* nacional en el período *t*. Según Woodford (1996), se puede presuponer que en este modelo el gobierno satisface un equilibrio presupuestario y que todos los impuestos por acuñamiento de moneda son reembolsados al sector público por medio de transferencia con la siguiente ecuación en diferencias:

$$0=\tau_t+\frac{\boldsymbol{M_t}-\boldsymbol{M}_{t-1}}{\boldsymbol{P_t}}\,.$$

Pero, además de en las premisas para la resolución del problema, para buscar la utilidad óptima en el productor nacional *j* se hace necesaria también la resolución de la ecuación en diferencias $\boldsymbol{C}_{t+1}=\beta\cdot(1+\boldsymbol{r}_{t+1})\cdot\boldsymbol{C_t}$ o la versión en linealización logarítmica de las ecuaciones de consumo de Euler: $\boldsymbol{c}_{t+1}=\boldsymbol{c_t}+\dfrac{\delta}{1+\delta}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{t+1}}{\delta}$.

Por último, entre los productos que no podrían resolverse con las técnicas tradicionales y requieren del planteamiento y resolución de ecuaciones en diferencias se encuentran, entre otros, la valoración de carteras en la que los flujos de entrada y salida no responden a un esquema regular (progresión aritmética o geométrica), o los planes de ahorro con ingresos y/o reintegros que siguen una ley compleja. Este tipo de productos muestra cómo la resolución de ecuaciones en diferencias finitas puede ser una herramienta potente en el contexto financiero a usar de manera complementaria a las herramientas clásicas.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha hecho referencia a la importancia de la aplicación tanto de las ecuaciones diferenciales como de las ecuaciones en diferencias para la resolución de problemas económicos.

Por otro lado, el uso de las ecuaciones diferenciales facilita la modelización e interpretación de numerosos problemas económicos, como aquéllos relacionados con la oferta y la demanda, en problemas de índole financieros; también nos ayudan a determinar las condiciones de estabilidad dinámica en modelos microeconómicos de equilibrios de mercado o nos permiten trazar la trayectoria de tiempo de crecimiento en diversas condiciones macroeconómicas, etc. Con ánimo de mostrar cómo los modelos basados en ecuaciones diferenciales son empleados hoy día en la investigación económica, el lector puede consultar Duffy (2006) y Hernández *et al*. (2009), donde se apuntan algunas de las tendencias actuales.

También podemos encontrar ejemplos de procesos en tiempo discreto, tales como las sucesiones que surgen en matemáticas financieras. Aunque estos procesos evolucionan con el tiempo, hay que tratarlos desde un punto de vista discreto; por ello, se utilizan ecuaciones en diferencias, porque las variables implicadas cambian solo en ciertos momentos concretos de tiempo. Por ejemplo, si consideramos el valor de una inversión que se compone mensualmente, ésta solo cambia al final de cada mes, por lo que la sucesión de valores de tal inversión es un proceso discreto (no puede ser continuo ya que el valor no cambia de un instante de tiempo a otro).

Por último, con los ejemplos dados en los distintos apartados de este trabajo (que por supuesto, no son todos los existentes) se ha querido poner de manifiesto que las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones en diferencias nos ayudan a resolver problemas importantes dentro de la economía y la administración de empresas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

K.K. Aase, S.A. Persson (1994): Pricing of unit-linked life insurance policies. *Scandinavian Actuarial Journal* **1994**, pp. 26–52.

Y. Achdou, O. Bokanowski, T. Lelievre (2012): Partial Differential Equations in Finance. En F. Fabozzi (ed.): *The Encyclopedia of Financial Models Vol. 2*. Wiley: Hoboken.

F. Antonelli, E. Barucci, M. Mancino (2001): Asset pricing with a forward–backward stochastic differential utility. *Economic Letters* **72**, pp. 151–157.

P. Apianus (1527): *Ein newe und wolgegründete underweisung aller Kauffmanns Rechnung in dreyen Büchern, mit schönen Regeln und fragstücken begriffen*, Ingolstadt.

Arquímedes / Eutocio (2005): *Tratados I / Comentarios*, Editorial Gredos: Madrid, pp. 99–234. Traducción al castellano del tratado "Sobre la esfera y el cilindro" (escrito hacia 225 a.C.).

Arquímedes (1993): *El método relativo a los teoremas mecánicos*, Universidad Autónoma de Barcelona: Barcelona. Traducción al castellano del original escrito en s. III a.C.

I. Barrow (1916): *Geometrical Lectures,* Open Court Publishing: Londres. Traducción al inglés de la obra original publicada en 1670.

S. Basov (2004): Lie groups of partial differential equations and their application to the multidimensional screening problems. En *Econometric Society 2004 Australasian Meetings*, 44.

J. Bellaïche (2010): On the path-dependence of economic growth. *Journal of Mathematical Economics* **46**, pp. 163–178.

R.E. Bellman (1954): Dynamic Programming and a new formalism in the calculus of variations. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **40**, pp. 231–235.

R.E. Bellman (1957): *Dynamic Programming*. Princeton University Press: Princeton.

T.S. Bhanu Murthy (1994): *A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics*, Wiley Eastern: Nueva Deli.

J. Binet (1843): Mémoire sur l'integration des equations linéaires aux differences finies d'un ordre quelconque, à coefficients variables. *Comptes Rendus Acad. Sci.* **XVII**, pp. 559–567.

F. Black, M. Scholes (1973): The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* **81**, pp. 637–654.

G. Box, G. Jenkins (1970): Time Series Analysis, Forecasting and Control. *Holden Day*. San Francisco.

P. Cagan (1956): *The monetary dynamics of hyperinflation*. En M. Friedman (ed.): Studies in the quantity theory of money, Universiy of Chicago Press: Chicago, pp. 25–43.

G. Cardano (1545): *Artis magnae, sive de regulis algebraicis*, Nuremberg.

D. Cass (1965): Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. *Review of Economic Studies* **32**, pp. 233–240.

A.L. Cauchy (1825): *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires*, De Bure Frères: París.

A.L. Cauchy (1827): Mémoire sur les intégrales définies. *Mém. Acad. Sci. Inst. France* **1**, pp. 599–799. Presentada originalmente en 1814.

A.L. Cauchy (1842a): Mémoire sur un théorème fondamental, dans le calcul intégral. *Comptes Rendus Acad. Sci.* **XIV**, pp. 1020–1026.

A.L. Cauchy (1842b): Mémoire sur l'emploi du calcul des limites dans l'intégration des équations aux dérivées partielles. *Comptes Rendus Acad. Sci.* **XV**, pp. 44–59.

A.L. Cauchy (1842c): Mémoire sur l'application du calcul des limites à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles. *Comptes Rendus Acad. Sci.* **XV**, pp. 85–101.

A.L. Cauchy (1842d): Mémoire sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, et sur leur réduction à des systèmes d'équations linéaires du premier order. *Comptes Rendus Acad. Sci.* **XV**, pp. 131–138.

B. Cavalieri (1635): *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Ex-typo-graphia de Duciis: Bolonia.

Y.T. Chen, C.F. Lee, Y.C. Sheu (2007): An ODE approach for the expected discounted penalty at ruin in a jump-diffusion model. *Finance and Stochastics* **11**, pp. 323–355.

A. de Moivre (1730): *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, Tonson and J. Watts: Londres.

P.R. de Montmort (1708): *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Quillau: París.

L. de Pisa (2003): *Liber Abaci*, Springer: Nueva York. Traducción al inglés del original de 1202.

R. Dornbusch (1976): Expectations and exchange rate dynamics. *Journal of Political Economy* **84**, pp. 1161–1176.

D.J. Duffy (2006): *Finite Difference Methods in Financial Engineering: A Partial Differential Equation Approach.* John Wiley & Sons: Chichester.

Euclides (1994): *Elementos. Libros V-XIII*, Editorial Gredos: Madrid. Traducción al español del original datado hacia 300 a.C.

L. Euler (1728): Nova methodus innumerabiles aequationes differentials secundi gradus reducendi ad aequationes differentials primi gradus. *Comm. Acad. Scient. Imp. Petrop.* **3**, pp. 134–137. [Fecha real de publicación 1732].

L. Euler (1743): De integratione aequationum differentialium altiorum graduum. *Misc. Berolin.* **7**, pp. 193–242.

L. Euler (1744): De constructione aequationum. *Comm. Acad. Scient. Petrop.* **9**, pp. 85–97.

L. Euler (1757): Principes généraux du mouvement des fluides. *Mém. Acad.Sci. Berlin* **11**, pp. 274–315.

L. Euler (1768-1770): *Institutionum calculi integralis. Vol. I-III,* Imp. Acad. Imper. Scient.: San Petersburgo.

J.M. Fleming (1962): Domestic financial policies under fixed and under floating exchange rates. *International Monetary Fund Staff Papers* **9**, pp. 369–379.

J. García (2008): *Matemáticas Financieras con ecuaciones de diferencia finita (5ª Ed.).* D.C: Pearson Educación de Colombia, Bogotá.

C.I. Gerhardt (1849): *Leibnizens Mathematische Schriften" Vol. I,* Verlag: Berlín, carta XLII (a Oldenburg).

I. Gibson (1983): *Protagonistas de la civilización: Arquímedes,* Editorial Debate: Madrid.

J.P. Gould (1968): Adjustment costs in the theory of investment of the firm. *Review of Economic Studies* **35**, pp. 47–55.

J. Gow (2010): *A Short History of Greek Mathematics*, Cambridge University Press: New York. Reimpresión del original de 1884.

J.P. Gram (1910): Professor Thiele som aktuar. *Dansk Forsikrings Arbog* **1910**, pp. 26–37.

J. Gregory (1667): *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura*, Holden: Londres.

T.L. Heath (1921): *A History of Greek Mathematics. Vol I,* Oxford University Press: Oxford.

I. Hernández, C. Mateos, J. Núñez, A.F. Tenorio (2009): Lie Theory: Applications to problems in Mathematical Finance and Economics. *Applied Mathematics and Computation* **208**, pp. 446–452.

S.L. Heston (1993): A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies* **6**, pp. 327–343.

J.M. Hoem (1969): Markov chain models in life insurance. *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik* **9**, pp. 91–107.

L. Hui (1999): *The Nine Chapters on the Mathematical Art*. Oxford University Press: Oxford. Traducción al inglés del texto original publicado en el s. III d.C.

C.G.J. Jacobi (1865): De investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujuscunque. *Journal Borchardt Journal für die reine und angewandte Mathematik* **64**, pp. 297–320.

C.G.J. Jacobi (1866): *De aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocando*. En A. Clesch (ed.): Vorlesungen über Dynamik von C.G.J. Jacobi nebstes fünf hinterlassenen Abhandlungen desselben", Druck und Verlag von Georg Reimer: Berlin, pp. 550–578.

C. Jordan (1870): *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthiers-Villars: París.

E.L. Ince (1956): *Ordinary Differential Equations,* Dover: New York.

M. Kline (1972a): *Mathematical thought from ancient to modern times Vol. I,* Oxford University Press: New York.

M. Kline (1972b): *Mathematical thought from ancient to modern times Vol. II,* Oxford University Press: New York.

T. Koopmans (1965): *On the concept of optimal economic growth. Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia* **28**, pp. 225–300.

J.L Lagrange (1766): Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter causées par leur attraction mutuelle. *Pièces de prix de l'Acad. de Sc. de Paris.* **T. 9. Mem.**, pp. 6–29.

J.L. Lagrange (1785): *Recherches sur la theorie des perturbations que les comètes peuvent eprouver par l'action des planètes,* Moutard: París.

J.L. Lagrange (1804): Leçons sur le calcul des fonctions. *J. École Polytech.* **5**, pp. 1–90.

P.S. Laplace (1771): Recherches sur le calcul intégral aux différences infiniment petites, et aux différences finies. *Mél. Phil. Math. Soc. Roy. Turin, années* **1766-1769** (*Miscellanea Taurensia* **IV**), pp. 273–345.

P.S. Laplace (1777): Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles. *Histoire Acad. Royale Sci. París année* **1773**, pp. 341–402.

P.S. Laplace (1785): Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de trés grands nombres. *Mém. Acad. Royale Sci. Paris*, année **1782**.

G.W. Leibinz (1684): Nova methodus pro maximis et minimis, itemquetangentibus, quae nec fractas nec irationales quantitates moratur, et singulare proillis calculi genus. *Acta Eruditorum Lipsiae* **MDCLXXXIV**, pp. 467–473.

G.W. Leibniz (1686): De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum. *Acta Eruditorum Lipsiae* **MDCLXXXVI**, pp. 292–300.

V. Ly Vath, M. Mnif, H. Pham (2007): A model of portfolio selection under liquidity risk and price impact. *Finance and Stochastics* **11**, pp. 51–90.

G. Manfredi (1707): *De constructione aequationum differentialium primi gradus*, C. Pifarii: Bolonia.

R. Merton (1969): Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case. *Review of Economics and Statistics* **51**, pp. 247–257.

R.C. Merton (1973): Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* **4**, pp. 141–183.

R.A. Mundell (1963): Capital mobility and stabilization policy under fixed and flexible exchange rates. *Canadian Journal of Economics and Political Science* **29**, pp. 475–485.

R.A. Mundell (1964): A reply: Capital mobility and size. *Canadian Journal of Economics and Political Science* **30**, pp. 421–431.

M. Musiela, T. Zariphopoulou (2010): Stochastic Partial Differential Equations and Portfolio Choice. En C. Chiarella, A. Novikov (eds.): *Contemporary Quantitative Finance*. Springer-Verlag: Berlín, pp. 195–216.

M. Musiela, T. Zariphopoulou (2011): Initial investment choice and optimal future allocations under time-monotone performance criteria. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **14**, pp. 61–81.

I. Newton (1687): *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Pepys: Londres.

I. Newton (1736): *Method of fluxions and infinite series*, Woodfall: Londres.

R. Norberg (1991): Reserves in life and pension insurance. *Scandinavian Actuarial Journal* **2013**, pp. 3–24.

R. Norberg (1999): A theory of bonus in life insurance. *Finance and Stochastics* **3**, pp. 373–390.

R. Norberg (2001): On bonus and bonus prognoses in life insurance. *Scandinavian Actuarial Journal* **2001**, pp. 126–147.

M. Obstfeld, K. Rogoff (1995): Exchange rate dynamics redux. *Journal of Political Economy* **103**, pp. 624–660.

M. Obstfeld, K. Rogoff (1996): *Foundations of International Macroeconomics*, MIT Press: Massachusetts.

B. Oksendal (1985): *Stochastic Differential Equations*, Springer: Berlin.

B. Pascal (1665): *Traité du triangle*, Desprez: París.

E. Picard (1893): *Traité d'Analyse. Tome II*, Gauthiers-Villars: París.

R. Piché, J. Kanniainen (2007): Solving financial differential equations using differentiation matrices. En: S.I. Ao, L. Gelman, D.W.L. Hukins, A. Hunter, A.M. Korsunsky (eds.): *Proceedings of the World Congress on Engineering 2007 Vol. II*. Newswood Limited: Londres, pp. 1016–1022.

E. Platen, M. Schweizer (1998): On feedback effects from hedging derivatives. *Mathematical Finance* **8**, pp. 67–84.

H.J. Poincaré (1890): Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica* **13**, pp. 1–270.

S. Polidoro (2003): A nonlinear PDE in Mathematical Finance. En F. Brezzi, A. Buffa, S. Corsaro, A. Murli (eds.): *Numerical Mathematics and Advanced Applications*. Springer: Milán.

C. Prévôt, M. Röckner (2007): *A concise course on Stochastic Partial Differential Equations*. Springer: Berlin.

F.P. Ramsey (1928): A mathematical theory of savings. *Economic Journal* **38**, 543–559.

R. Rashed (1994): *The development of Arabic mathematics: between arithmetic and algebra*, Kluwer Academic: Londres.

W.W. Rouse Ball (1960): *A short account of the History of Mathematics*, Dover Publications: New York.

T. Sauer (2012): Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations in Finance. En J.C. Duan, W.K. Härdle, J.E. Gentle (ed.): *Handbook of Computational Finance*. Springer: Berlín, pp. 529–550.

F. Smithies (1997): *Cauchy and the Creation of Complex Function Theory*, Cambridge University Press: Cambridge.

R.M. Solow (1956): A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics* **70**, pp. 65–94.

M. Steffensen (2000): A no arbitrage approach to Thiele's differential equation. *Insurance: Mathematics and Economics* **27**, pp. 201–214.

M. Steffensen (2006): Surplus-linked life insurance. *Scandinavian Actuarial Journal* **2006**, pp. 1–22.

M. Steffensen (2007): Differential Equations in Finance and Life Insurance. En B.S. Jensen, T. Palokangas (eds.): *Stochastic Economic Dynamics*. CBS press: Gylling.

J. Wallis (1656): *Arithmetica Infinitorum*, Thomas Robinson: Oxford.

P. Weil (1989): Overlapping families of infinitely lived agents. *Journal of Public Economics* **38**, pp. 183–198.

M. Woodford (1996): Control of the public debt: A requirement for price stability? *NBER Working Paper* Series 5684, 35 pp.