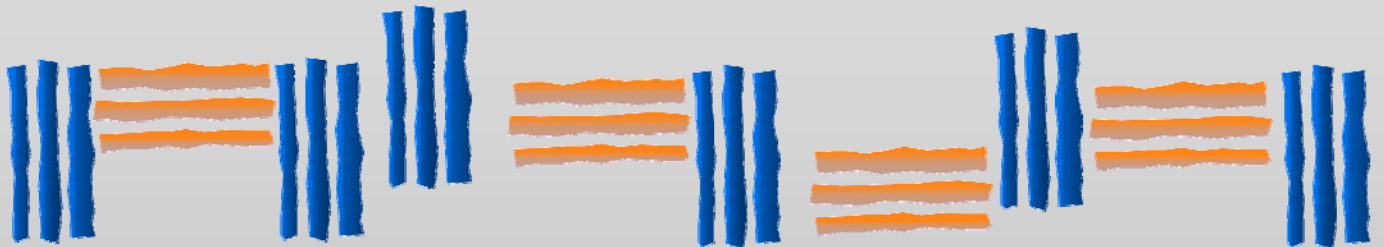


REVISTA DE
MÉTODOS CUANTITATIVOS
PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA



UNIVERSIDAD
**PABLO^D
OLAVIDE**
SEVILLA

Número 12
Diciembre de 2011
ISSN: 1886-516X
D.L: SE-2927-06

**REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA**

**Journal of Quantitative Methods for
Economics and Business Administration**

Número 12. Diciembre de 2011.
ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/>

Editores:

Dr. Eugenio M. Fedriani Martel
Universidad Pablo de Olavide
Ctra. de Utrera, km 1 - 41013
Sevilla (Spain).
Correo-e: efedmar@upo.es

Dr. Alfredo García Hernández-Díaz
Universidad Pablo de Olavide
Ctra. de Utrera, km 1 - 41013
Sevilla (Spain).
Correo-e: agarher@upo.es

Comité Editorial:

Dr. S. Ejaz Ahmed, University of Windsor, Ontario (Canadá)
Dr. Adam P. Balcerzak, Nicolaus Copernicus University, Toruń (Polonia)
Dr. Carlos A. Coello Coello, CINVESTAV-IPN, México D.F. (México)
Dr. Ignacio Contreras Rubio, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dra. Manuela Coromaldi, University of Social Sciences UNISU, Roma (Italia)
Dr. Miguel Ángel Hinojosa Ramos, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. Matías Irigoyen Testa, Universidad Nacional del Sur, Buenos Aires (Argentina)
Dr. M. Kazim Khan, Kent State University, Ohio (EE.UU.)
Dr. Manuel Laguna, University of Colorado at Boulder, Colorado (EE.UU.)
Dra. María Amparo León Sánchez, Universidad de Pinar del Río (Cuba)
Dr. Jesús López-Rodríguez, Universidad de A Coruña, (España)
Dr. Cecilio Mar Molinero, University of Kent, Canterbury (Reino Unido)
Dra. Ana M. Martín Caraballo, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dra. M^a Carmen Melgar Hiraldo, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. Gábor Nagy, University of Kent, Canterbury (Reino Unido)
Dr. José Antonio Ordaz Sanz, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. Andrés Rodríguez-Pose, London School of Economics, Londres (Reino Unido)
Dr. José Manuel Rueda Cantuche, IPTS-DG J.R. Centre-European Commission
Dra. Mariagrazia Squicciarini, OECD, París (Francia)
Dra. Mariangela Zoli, Università degli Studi di Roma 'Tor Vergata', Roma (Italia)

Editorial

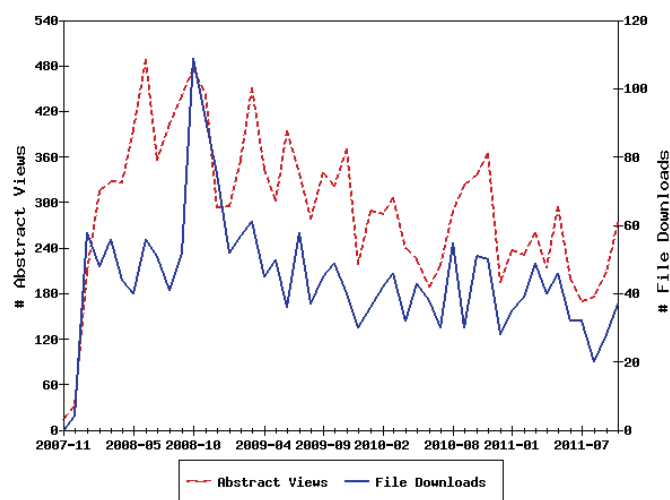
Como en los últimos números, aprovechamos el segundo volumen del año para explicar las modificaciones que van produciéndose en la Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa (*Journal of Quantitative Methods for Economics and Business Administration*). Aparte de los cambios estructurales y las progresivas incorporaciones en el equipo editorial, quizá lo más reseñable sea las mejoras en nuestra página web. Desde aquí queremos pedir disculpas a los usuarios que se hayan visto afectados en algún momento por dichos cambios, que creemos que nos ayudarán a proporcionar un servicio más completo y efectivo a la comunidad científica a la que dedicamos nuestros esfuerzos.

Otra novedad es que, a partir de ahora, queremos que los autores de artículos aceptados dispongan inmediatamente de la versión que se publicará y de su referencia completa, de modo que puedan utilizarlo o distribuirlo incluso antes de la publicación del volumen correspondiente. Nuestra Revista sigue sin fijarse un límite en el número de artículos publicados por volumen, por lo que seguiremos publicando todos los artículos que hayan sido aceptados en la fecha de publicación del volumen. Lo que cambiará con respecto a la situación anterior es que los artículos serán accesibles desde el momento en que sean aceptados y no desde la publicación del volumen correspondiente.

En cuanto a los criterios de calidad de la Revista, siguen mostrando una evolución bastante positiva. Así, por ejemplo, en el momento de publicar estas líneas, el 1 de diciembre de 2011, la Revista ha recibido más de 21 600 visitantes, lo que supone un incremento importante con respecto a las cifras del pasado año. También seguimos recibiendo una cantidad creciente de propuestas de artículos para su evaluación. Aunque esto suponga casi forzosamente un mayor número de rechazos, nuestros evaluadores siguen esforzándose en proporcionar críticas constructivas a los autores de los manuscritos que necesitan más mejoras. Para facilitar esta tarea, y como una señal lógica de la consolidación de la Revista en el panorama en que se encuadra, tenemos previsto restringir la temática de los artículos, para que se ajusten mejor a las líneas de investigación de las que consideramos especialistas a los miembros del comité científico. Aunque esta medida pueda resultar impopular, creemos que es necesaria para garantizar la calidad de los trabajos publicados en el futuro.

Aprovechamos esta ocasión para celebrar la recepción de un número creciente de citas por parte de los artículos que publicamos y desde trabajos en revistas prestigiosas. Estamos seguros de que ellas nos proporcionarán reconocimiento y estabilidad. Por eso, animamos a nuestros autores y, en general, a nuestros lectores a estudiar con atención los artículos que publicamos y a utilizar (y, por supuesto, citar) dichos trabajos.

En el momento de publicar esta editorial, seguimos a la espera de aparecer en en los listados de JCR-ISI. El resto de bases de datos en las que nos planteábamos estar siguen difundiendo nuestros artículos y, aunque con unos indicadores relativamente inestables, garantizan la repercusión científica de nuestro trabajo. A modo de ejemplo, incluimos a continuación las estadísticas de los accesos a nuestros artículos a través de RePEc (www.repec.org).



Fuente: RePEc (consulta el 1 de diciembre de 2011).

Para todos aquellos que deseen acreditar su colaboración con la Revista, recordamos que la lista de revisores (concretamente los que nos han autorizado a publicar sus nombres) está disponible en todo momento a través de nuestra página web, concretamente en la dirección:

<http://www.upo.es/RevMetCuant/equipo.php>

Finalmente, sobre nuestro Comité Editorial actual, queríamos recordar que está formado por 20 doctores, especialistas internacionales en los ámbitos de los que se ocupa la Revista. De ellos, 5 representan a la Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla, y el resto proceden de universidades y centros de investigación internacionales. A ellos, así como a nuestros evaluadores y autores, debemos la existencia de nuestra Revista. Esperamos que sigan apoyando y confiando en nosotros.

LOS EDITORES.





Branch-and-Price and Heuristic Column Generation for the Generalized Truck-and-Trailer Routing Problem

DREXL, MICHAEL

Gutenberg School of Management and Economics, Johannes Gutenberg University Mainz

Fraunhofer Centre for Applied Research on Supply Chain Services SCS, Nuremberg

Correo electrónico: drex1@uni-mainz.de

ABSTRACT

The generalized truck-and-trailer routing problem (GTTRP) constitutes a unified model for vehicle routing problems with trailers and a fixed lorry-trailer assignment. The GTTRP is a generalization of the truck-and-trailer routing problem (TTRP), which itself is an extension of the well-known vehicle routing problem (VRP). In the GTTRP, the vehicle fleet consists of single lorries and lorry-trailer combinations. Some customers may be visited only by a single lorry or by a lorry without its trailer, some may also be visited by a lorry-trailer combination. In addition to the customer locations, there is another relevant type of location, called transshipment location, where trailers can be parked and where a load transfer from a lorry to its trailer can be performed.

In this paper, two mixed-integer programming (MIP) formulations for the GTTRP are presented. Moreover, an exact solution procedure for the problem, a branch-and-price algorithm, and heuristic variants of this algorithm are described. Computational experiments with the algorithms are presented and discussed. The experiments are performed on randomly generated instances structured to resemble real-world situations and on TTRP benchmark instances from the literature. The results of the experiments show that instances of realistic structure and size can be solved in short time and with high solution quality by a heuristic algorithm based on column generation.

Keywords: vehicle routing; transshipment; fleet planning; elementary shortest path problem with resource constraints.

JEL classification: C610.

MSC2010: 90B06; 90C11; 90C90.

Branch-and-Price y generación heurística de columnas para el problema generalizado de rutas de trenes de carretera

RESUMEN

El problema generalizado de rutas de trenes de carretera (*generalized truck-and-trailer routing problem*, GTTRP) constituye un modelo unificado para problemas de rutas de vehículos con remolques y asignación fija camión-remolque. El GTTRP es una generalización del *truck-and-trailer routing problem* (TTRP), que es una extensión del conocido problema de rutas de vehículos (*vehicle routing problem*, VRP). En el GTTRP, la flota de vehículos consiste en camiones sin remolque (camiones solos) y trenes de carretera. Algunos clientes pueden ser visitados exclusivamente por un camión solo o un camión sin su remolque, otros pueden ser visitados también por un tren de carretera. Además de las ubicaciones de los clientes hay otro tipo de localización llamada ubicación de trasbordo. Allí los remolques pueden ser aparcados, y es posible efectuar un trasbordo de carga desde un camión a su remolque.

En este trabajo se presentan dos modelos de programación lineal entero mixto (MIP). Además, se describen un algoritmo exacto branch-and-price y variantes heurísticas de este algoritmo. Se presentan y analizan estudios computacionales con los algoritmos. Se usan problemas generados aleatoriamente, diseñados para semejar situaciones reales, y problemas TTRP de la literatura. Los resultados muestran que, utilizando un algoritmo heurístico basado en generación de columnas, se pueden resolver problemas de estructura y tamaño real en poco tiempo y con solución de alta calidad.

Palabras clave: rutas de vehículos; trasbordo; planificación de flotas; problema del camino más corto con limitaciones de recursos.

Clasificación JEL: C610.

MSC2010: 90B06; 90C11; 90C90.



1 Introduction

The generalized truck-and-trailer routing problem (GTTRP) is a generalization of the truck-and-trailer routing problem (TTRP) (a term introduced by [8]), which itself is an extension of the well-known vehicle routing problem (VRP) ([10], [43], [19]). The GTTRP constitutes a unified model for vehicle routing problems with trailers and a fixed lorry-trailer assignment.

The GTTRP can be described as follows. There is a set of *customers* with a known, *deterministic supply of a single good*, and a set of *transshipment locations* used for *parking* and/or *load transfer*. Visiting a transshipment location only incurs the distance-dependent cost for the resulting detour. We assume that both the parking and load transfer poses no additional cost. All customers and all transshipment locations may have a *time window* associated with them. Each customer must be visited exactly once. The customers' supplies must be collected and transported to a central *depot*. To this end, a *fleet of heterogeneous vehicles with limited loading capacity* is available.

There are four main criteria in which the vehicles differ: First of all, the fleet is comprised of *single lorries* and of *lorry-trailer combinations (LTCs)* (see Figure 1).

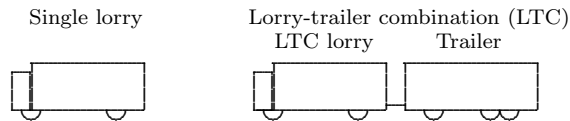


Figure 1: GTTRP fleet

There is a fixed assignment of an LTC lorry to its trailer (and *vice versa*), i.e., each trailer may be pulled by only one lorry, and only this lorry may perform a load transfer into this trailer. Second, the vehicles may have different *loading capacities*: Evidently, single lorries have fewer loading capacity than lorry-trailer combinations. In addition, also vehicles of the same type (that is, single lorries or LTCs) may have different capacities. For example, a single lorry may have two axles, limiting the loading capacity (payload) to approximately 10 tons, another may have three axles, leading to a loading capacity of about 15 tons (see also Section 5.2). For LTCs, two capacities are relevant, the lorry capacity and the trailer capacity. Third, because of different sizes and total weights, the vehicles may have different fixed and distance-dependent *costs*. Fourth, the vehicles may be subject to *accessibility constraints*, i.e., they may not be allowed to visit some customers. Such constraints are mostly due to limited manoeuvring space on customer premises or to bad road conditions, especially in winter. The driving speeds are assumed to be identical for all lorries, whether or not they pull a trailer, and whether or not they carry load. An LTC lorry need not use its trailer at all and may simply leave it at the depot. Also, it can decouple and re-couple its trailer at any transshipment location. All vehicles are initially located at the depot, and all vehicles must return to the depot at the end of their tour. That is, a trailer cannot be left behind at a transshipment location by its lorry, it must

also be pulled back to the depot. Each vehicle may perform at most one tour. If, in a solution, a vehicle is not used, the vehicle’s fixed cost is not added to the objective function value of the solution. This is for two reasons. On the one hand, for a tactical planning problem, where the fleet size and mix are to be determined, not using a vehicle in a solution means that the vehicle need not be acquired or rented, so that the fixed cost is actually not incurred. On the other hand, for an operative planning problem, not using a vehicle in a solution means that the vehicle is available for other purposes. Moreover, in both a tactical and an operative setting, using fixed vehicle costs is a way to reduce the overall number of vehicles used, an objective often pursued in vehicle routing problems.

Customers which can only be visited by a lorry without a trailer are called *lorry customers*. The other customers, which can be visited by a single lorry, an LTC lorry, or an LTC, are called *trailer customers*. Split collection is not allowed, so there are no customers with a supply exceeding the capacity of the largest single or LTC lorry (or LTC, in the case of trailer customers).

The single lorries are used as in a ‘usual’ VRP. The LTCs are used as follows. To visit lorry customers, the trailer is parked at a transshipment location and the LTC lorry does some collecting. It then returns to its trailer and either transfers its load to the trailer and continues collecting, or it re-couples the trailer, parks it elsewhere, decouples and does some more collecting before transferring load. When a trailer customer is visited by an LTC, the supply of the customer can directly be loaded completely or partly into the trailer. In essence, the trailers are used as mobile depots and extend the capacity of their lorries. A load transfer between two lorries or between two trailers is not allowed. This means that single lorries never visit transshipment locations.

Figure 2 depicts a possible route plan with one single lorry and one LTC. The single lorry route is evident. The LTC lorry starts at the depot with its trailer, visits a trailer customer, goes on to a transshipment location, decouples the trailer, visits two customers, returns to the transshipment location, re-couples the trailer, pulls it to a second transshipment location, decouples it again (and perhaps performs a load transfer), visits two more customers, returns to the second transshipment location, re-couples the trailer and goes back to the depot. Two transshipment locations in the centre of the figure are not used.

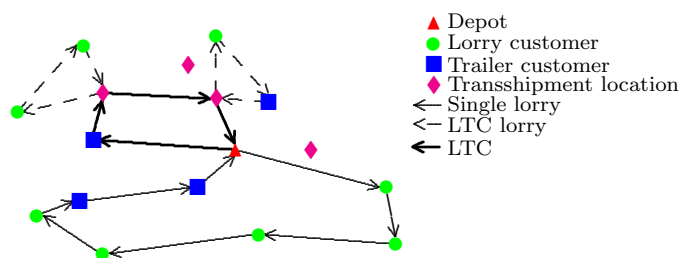


Figure 2: Example GTTRP route plan

The task is to devise tours minimizing the sum of fixed and distance-dependent, that is, variable, cost over all vehicles (some of which may not be needed), such that the complete supply of all customers is collected and delivered to the depot while respecting vehicle capacities, accessibility constraints, and location time windows.

To see when and why it is sensible to use LTCs, imagine that the supply of the customers visited by the LTC lorry exceeds the capacity of the largest single lorry. Then, without LTCs, two single lorry tours are necessary to serve these customers, so that overall, three lorries (and, consequently, three drivers) are required instead of two as in the above figure. This will increase overall fixed costs. Moreover, in general, the overall distance travelled will increase as well, thus increasing variable costs.

The GTTRP is of considerable practical relevance. Actual and potential applications are fuel oil delivery to private households, food distribution to supermarkets ([42]), raw milk collection at farmyards ([6], [44], [18], [39]), intermodal container transportation ([22]), and the so-called park-and-loop problem encountered in postal delivery ([2], [4]). Moreover, many location-routing problems (LRPs, see [28], pp. 169 ff., [11], pp. 339 ff., [33], [34]) can be modelled as GTTRPs.

The problem just described is denoted *generalized* TTRP, because it generalizes the TTRPs considered in the literature (see next section) in the following ways:

- Variable costs for the trailers and fixed costs for the vehicles are considered.
- Time windows are considered.
- Trailer customer locations as well as pure transshipment locations can be used for parking trailers and performing load transfers.

No other paper cited below considers these three aspects simultaneously. In particular, the presence of pure transshipment locations adds an additional degree of freedom, because visiting a pure transshipment location is optional. Hence, a selection has to be made as to which transshipment locations to use. In most variants of the VRP or the VRP with time windows (VRPTW) documented in the literature, with the notable exception of location-routing problems, such a selection component is not present.

The remainder of the paper is structured as follows. In the next section, the existing literature is reviewed. In Section 3, a mixed-integer programming (MIP) model for the GTTRP, based on binary arc flow and continuous resource variables, is developed. In Section 4, branch-and-price algorithms based on a path flow reformulation of this model are presented. Computational results with implementations of these algorithms are presented and analyzed in Section 5. The paper ends with a brief summary and a research outlook in Section 6.

2 Literature Review

The practical relevance of the problem is not adequately reflected by the existing literature. The following is a brief review of the few contributions there are. [6], [44], and [18] consider only one transshipment location per trailer. [6] develops a heuristic sequential solution approach for this type of problem (clustering of customers, determination of one transshipment location per trailer, routing). [44] proceeds similarly. [18] presents several construction heuristics and intra- and inter-tour exchange improvement procedures. Also, the paper mentions an unpublished working paper containing an MIP formulation.

[42], [41], [8], and [39] (see also [40]) allow that trailers be parked several times at different locations. However, they equate the potential trailer parking locations with the trailer customers. This means that a trailer can be parked at any trailer customer location but nowhere else, and that only one trailer can be parked at such a customer location, because the corresponding lorry is then assumed to service the customer. [42] consider time windows and heterogeneous lorries, but identical trailers. [42] and [41] also consider accessibility constraints for the lorries. [8] and [39] limit the number of available vehicles and the length or duration of a tour. The term ‘Truck-and-Trailer Routing Problem’ (TTRP) was coined by [8] and is also used by [39], [40], [20], [21], [31], [32]. [39] extends the approaches of [41] and [8] and considers a multi-period and a multi-depot version of the problem. [32] consider the case of an unlimited number of vehicles. Contrary to all other papers, [20] and [21] consider the situation where the transshipment locations are separate locations and do not coincide with the trailer customer locations. All authors solve their respective problems by sophisticated heuristic procedures, mostly tabu search and simulated annealing. [41] and [39] also give mathematical programming formulations of the problems they consider (0-1 IP models), but they do not solve their models with an exact method.

The present paper is based on the technical report [14]. In the next subsection, a network representation for the GTTRP is presented. Interestingly, a similar network was used in [29] for the solution of a location-routing problem.

3 A Mixed-Integer Programming Model for the GTTRP

3.1 Network Representation

The subsequent formulation is based on a ‘time-space-operation’ network $D = (V, A)$. Each vertex in V corresponds to a location in space, an absolute and/or relative period of time, and a type of operation. $L := \{Depot\} \cup L_C \cup L_T$ is the set of relevant real-world locations. $L_C := L_{C_L} \cup L_{C_{LT}}$ is the set of customer locations, which is partitioned into L_{C_L} , the set of lorry customers, and $L_{C_{LT}}$, the set of trailer customers. L_T is the set of *pure* transshipment locations. For each $i \in V$, $loc_i \in L$ denotes the location corresponding to i , $[a_i, b_i] \subseteq [0, T]$, is

the arrival time window of i , where T is the length of the planning horizon, and s_i is the supply of vertex i (which is zero for depot and transshipment vertices). V is comprised as follows. There is one start depot vertex o and one end depot vertex d , both with a time window of $[0, T]$. For each customer, there is one customer vertex. Let $V_C := V_{C_L} \cup V_{C_{LT}}$ be the set of customer vertices, where V_{C_L} is the set of lorry customers, and where $V_{C_{LT}}$ is the set of trailer customers. Following [8] and [39], it is assumed that the locations corresponding to trailer customers can also be used for parking and transshipment operations. Hence, for each trailer customer location and for each (pure) transshipment location l , there are $n_{TS} \geq 3$ vertices v_l^{dec} , $v_l^{trans,1}, \dots, v_l^{trans,n_{TS}-2}, v_l^{coup}$. Let V_{dec} be the set of decoupling vertices, let V_{trans} be the set of transfer vertices, and let V_{coup} be the set of coupling vertices. Let $V_I := V_{dec} \cup V_{trans} \cup V_{coup}$ be the set of transshipment vertices. The idea behind this separation of transshipment locations and processes is the following: At a vertex in V_{dec} , an LTC lorry may decouple its trailer, and it may also perform a load transfer. Decoupling vertices can be reached only with a trailer and left without a trailer. At a vertex in V_{trans} , an LTC lorry may perform a load transfer to its trailer. Transfer vertices can be reached and left only without a trailer. At a vertex in V_{coup} , it may re-couple its trailer, and it may again perform a load transfer. Coupling vertices can be reached only without a trailer and left only with a trailer. It is assumed that each vertex is visited by each vehicle at most once. If an LTC wants to use transshipment location l , the LTC must first visit v_l^{dec} . The trailer then moves in time to the vertices $v_l^{trans,1}, \dots, v_l^{trans,n_{TS}-2}, v_l^{coup}$, while the LTC lorry visits customers and finally re-couples the trailer at v_l^{coup} . The LTC lorry need not visit any of the transfer vertices of l . The LTC lorry must not visit any other vertex in V_I before having re-coupled its trailer at v_l^{coup} . The formulation below takes this into account.

$F := F_L \cup F_{LT}$ denotes the set of vehicles. F_L is the set of single lorries, which do not have a trailer. F_{LT} is the set of lorry-trailer combinations. For all $k \in F$, q_k^{total} is the total capacity of a vehicle, i.e., it is the capacity of single lorry k , or, respectively, the capacity of LTC lorry k and its trailer. For all $k \in F_{LT}$, q_k^{lorry} is the capacity of LTC lorry k , and $q_k^{trailer}$ is the capacity of LTC lorry k 's trailer. All vehicles are initially at the start depot vertex o and end their tour at the end depot vertex d . Single lorries are allowed, in principle, to visit lorry and trailer customer vertices, and LTC lorries may, in principle, visit all vertices of D . Trailers can only reach the transshipment vertices and the trailer customers. However, as mentioned above, there may be additional accessibility constraints for certain vehicles at certain customers (e.g., trailer customers with too much supply for a single lorry).

It is assumed that each LTC uses each transshipment location at most once. Thus, for each trailer, there are at most n_{TS} transshipment operations at each transshipment location. As for the ‘correct’ choice of n_{TS} , note that in the worst case, a *feasible* solution to the model may exist only when, for each trailer, there are as many intermediate and coupling vertices as there are lorry customers, because it may be necessary to perform a load transfer after each visit to a lorry customer. Consequently, an *optimal* solution to the model may only be an optimal solution to an underlying problem instance when there are as many opportunities for a load transfer at

the right transshipment location as there are lorry customers. Depending on the instance data, better values for n_{TS} can be computed. However, as will become clear in the next section, in the branch-and-price algorithm, the numerical value of n_{TS} need not be fixed in advance; rather, this value is determined during the solution of the pricing problems.

The arc set consists of the following arcs:

- (o, d)
- (o, v_c) and (v_c, d) for all customer vertices $v_c \in V_C$
- (o, v_l^{dec}) for all transshipment locations $l \in L_{CLT} \cup L_T$
- (v_l^{coup}, d) for all transshipment locations $l \in L_{CLT} \cup L_T$
- $(v_c, v_{c'})$ for all customer vertices $v_c, v_{c'} \in V_C$ with $c \neq c'$
- (v_l^{dec}, v_c) for all transshipment locations $l \in L_{CLT} \cup L_T$ and all customer vertices $v_c \in V_C$
- $(v_l^{trans,i}, v_c)$ for all transshipment locations $l \in L_{CLT} \cup L_T$, all $i \in \{1, \dots, n_{TS} - 2\}$ and all customer vertices $v_c \in V_C$
- (v_l^{coup}, j) for all transshipment locations $l \in L_{CLT} \cup L_T$ and all vertices $j \in (V_{dec} \setminus \{v_l^{dec}\}) \cup V_{CLT}$
- (i, j) for all trailer customer vertices $i \in V_{CLT}$ and all transshipment vertices $j \in V_I$
- (i, j) for all lorry customer vertices $i \in V_{CL}$ and all transfer and coupling vertices $j \in V_{trans} \cup V_{coup}$

For each arc $(i, j) \in A$, τ_{ij}^{tr} is the traversal time. τ_{ij}^{tr} includes the service time at vertex i . For all $k \in F$, let V^k (A^k) be the set of vertices (arcs) that can be reached (traversed) by vehicle k . For all subsets of V (A) defined hereafter, let the superscript k denote the intersection of the respective subset with V^k (A^k). In particular, $A_{LTC}^k := A^k \setminus (\{(i, j) \in A : i \in V_{CL} \cup V_{dec}\} \cup \{(i', j') \in A : j' \in V_{CL} \cup V_{coup}\})$ is the set of arcs LTC lorry k can traverse with its trailer attached. $c_{ij}^{lorry,k}$ denotes the cost of traversing arc (i, j) with lorry $k \in F$ (for LTC lorries, without its trailer attached), and $c_{ij}^{trailer,k}$ denotes the *additional* cost of pulling LTC lorry k 's trailer over arc (i, j) . On arcs emanating from the start depot o , except for the arc (o, d) , the fixed vehicle cost is included in $c_{oj}^{lorry,k}$, respectively, $c_{oj}^{trailer,k}$.

Similar to [8] and [39], a fixed time for load transfer is assumed, independent of the actual amount of load transferred. This is a sensible assumption when the setup cost is the determining factor for the duration of a transshipment operation.

Figure 3 visualizes the subnetworks for the different vehicle types. To keep the figure clear and concise, there is only one arc for each arc type present in the subnetwork of the respective vehicle type. For example, in the LTC subnetwork, one arc from the left trailer customer to the right one is depicted to indicate that LTCs can freely move from any trailer customer to any other trailer customer (unless capacity, time window, or accessibility constraints prohibit this). The absence of an arc from the right trailer customer to the left one in the figure does not mean that there is no such arc in the network.

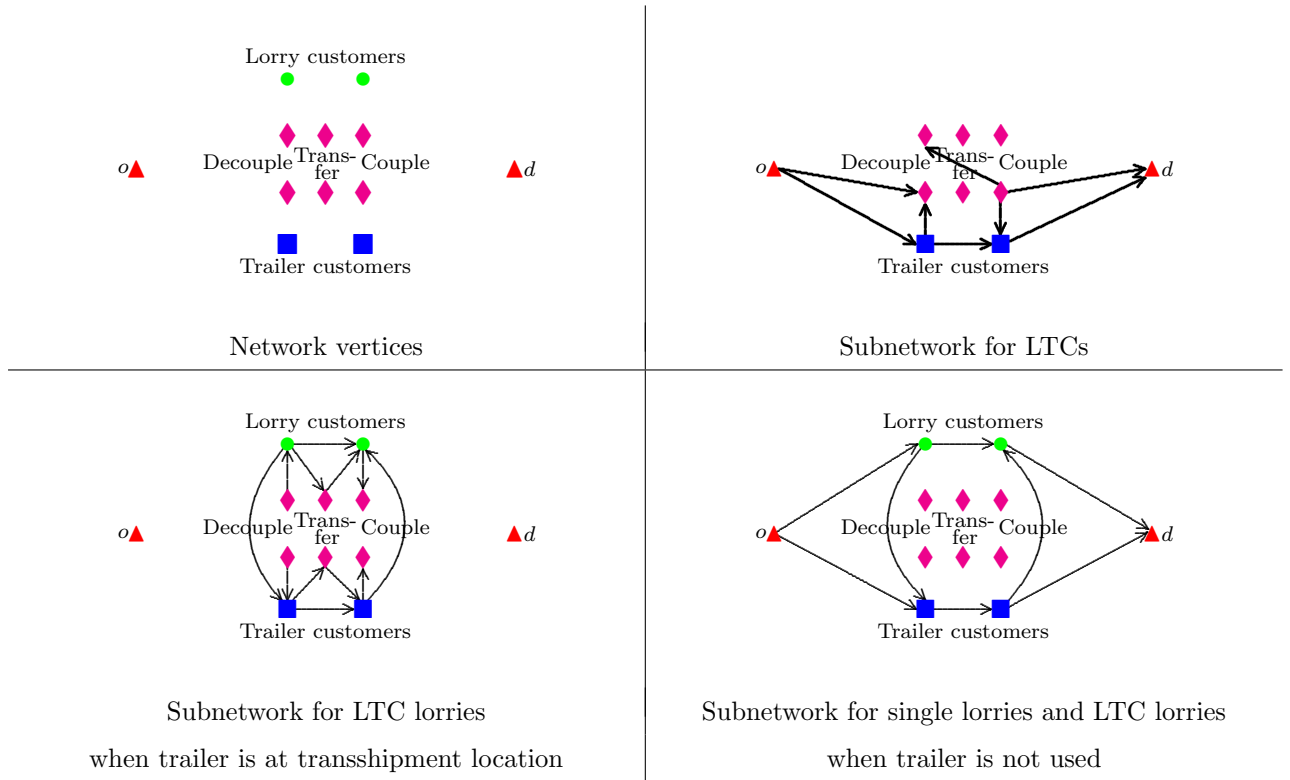


Figure 3: Network structure

3.2 Formulation

The subsequent formulation uses the following variables:

- $x_{ij}^k \in \{0, 1\} \forall k \in F, (i, j) \in A^k$.

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, \text{lorry } k \text{ traverses arc } (i, j) \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$$
- $y_{ij}^k \in \{0, 1\} \forall k \in F_{LT}, (i, j) \in A_{LT}^k$.

$$y_{ij}^k = \begin{cases} 1, \text{LTC lorry } k \text{ traverses arc } (i, j) \text{ with its trailer attached} \\ 0, \text{LTC lorry } k \text{ does not traverse arc } (i, j) \text{ with its trailer attached} \end{cases}$$
- $l_i^{coll,k} \in \mathbb{R}_+ \forall k \in F, i \in V^k$.

The total amount of customer supplies that lorry k has collected when reaching vertex i , before k starts its service at i .

- $l_i^{trans,k} \in \mathbb{R}_+ \forall k \in F_{LT}, i \in V^k$.

The total amount of customer supplies that LTC lorry k has transferred to its trailer when reaching vertex i , or, equivalently, the load of LTC lorry k 's trailer when k reaches vertex i (with or without its trailer attached), before k starts its service at i .

- $t_i^k \in \mathbb{R}_+ \forall k \in F, i \in V^k$.

The point in time when lorry k starts its service at vertex i .

The resulting model is:

(GTTRP):

$$\min \sum_{k \in F} \sum_{(i,j) \in A^k} c_{ij}^{lorry,k} x_{ij}^k + \sum_{k \in F_{LT}} \sum_{(i,j) \in A_{LT}^k} c_{ij}^{trailer,k} y_{ij}^k \text{ subject to} \quad (1)$$

$$\sum_{k \in F} \sum_{(h,i) \in A^k} x_{hi}^k = 1 \quad \forall i \in V_C \quad (2)$$

$$\sum_{(h,i) \in A^k} x_{hi}^k \leq 1 \quad \forall k \in F_{LT}, i \in V_{dec} \quad (3a)$$

$$\sum_{(v_l^{coup}, j) \in A_{LT}^k} x_{v_l^{coup} j}^k - \sum_{(h, v_l^{dec}) \in A_{LT}^k} x_{h v_l^{dec}}^k = 0 \quad \forall k \in F_{LT}, l \in L_{CLT} \cup LT \quad (3b)$$

$$\sum_{(h,i) \in A^k} x_{hi}^k - \sum_{(v_l^{coup}, j) \in A_{LT}^k} x_{v_l^{coup} j}^k \leq 0 \quad \forall k \in F_{LT}, l \in L_{CLT} \cup LT, i \in V_{trans}, loc_i = l \quad (3c)$$

$$\sum_{(i,d) \in A^k} x_{id}^k = 1 \quad \forall k \in F \quad (3d)$$

$$\sum_{(i,d) \in A_{LT}^k} y_{id}^k = 1 \quad \forall k \in F_{LT} \quad (3e)$$

$$\sum_{(h,i) \in A^k} x_{hi}^k - \sum_{(i,j) \in A^k} x_{ij}^k = 0 \quad \forall k \in F, i \in V^k \setminus \{o, d\} \quad (3f)$$

$$\sum_{(h,i) \in A_{LT}^k} y_{hi}^k - \sum_{(i,j) \in A_{LT}^k} y_{ij}^k = 0 \quad \forall k \in F_{LT}, i \in V_{CLT}^k \quad (3g)$$

$$y_{ij}^k \leq x_{ij}^k \quad \forall k \in F_{LT}, (i,j) \in A_{LT}^k \setminus \{(o,d)\}, i \notin V_{coup}, j \notin V_{dec} \quad (4a)$$

$$x_{hi}^k = y_{hi}^k \quad \forall k \in F_{LT}, i \in V_{dec}, (h,i) \in A_{LT}^k \quad (4b)$$

$$x_{ij}^k = y_{ij}^k \quad \forall k \in F_{LT}, i \in V_{coup}, (i,j) \in A_{LT}^k \quad (4c)$$

$$l_i^{trans,k} \leq l_i^{coll,k} \quad \forall k \in F_{LT}, i \in V^k \quad (5a)$$

$$l_i^{coll,k} - l_i^{trans,k} \leq q_k^{lorry} \quad \forall k \in F_{LT}, i \in V^k \quad (5b)$$

$$x_{ij}^k = 1 \Rightarrow l_i^{coll,k} + s_i \leq l_j^{coll,k} \quad \forall k \in F, (i,j) \in A^k \quad (5c)$$

$$x_{ij}^k = 1 \Rightarrow l_i^{trans,k} \leq l_j^{trans,k} \quad \forall k \in F_{LT}, (i,j) \in A^k \quad (5d)$$

$$x_{ij}^k = 1 \Rightarrow l_i^{trans,k} \geq l_j^{trans,k} \quad \forall k \in F_{LT}, i \in V_{CL}, (i,j) \in A^k \quad (5e)$$

$$x_{ij}^k = 1 \wedge y_{ij}^k = 0 \Rightarrow l_j^{trans,k} \leq l_i^{trans,k} \quad \forall k \in F_{LT}, i \in V_{CLT}, (i,j) \in A^k \quad (5f)$$

$$y_{ij}^k = 1 \Rightarrow l_j^{trans,k} \leq l_i^{trans,k} + s_i \quad \forall k \in F_{LT}, i \in V_{CLT}, (i,j) \in A_{LT}^k \quad (5g)$$

$$x_{ij}^k = 1 \Rightarrow t_i^k + \tau_{ij}^{tr} \leq t_j^k \quad \forall k \in F, (i,j) \in A^k \quad (6a)$$

$$t_{v_l^{dec}}^k \leq t_{v_l^{trans,1}}^k \quad \forall k \in F_{LT}, l \in L_{CLT} \cup LT \quad (6b)$$

$$t_{v_l^{trans,i}}^k \leq t_{v_l^{trans,i+1}}^k \quad \forall k \in F_{LT}, i \in \{1, \dots, n_{TS} - 3\}, l \in L_{CLT} \cup LT \quad (6c)$$

$$t_{v_l^{trans, n_{TS}-2}}^k \leq t_{v_l^{coup}}^k \quad \forall k \in F_{LT}, l \in L_{CLT} \cup LT \quad (6d)$$

$$t_{v_i}^k \leq T \quad \sum_{(h,v_i^{dec}) \in A_{LT}^k} x_{hv_i^{dec}}^k \quad \forall k \in F_{LT}, l \in L_{C_{LT}} \cup L_T \quad (6e)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in F, (i, j) \in A^k \quad (7a)$$

$$y_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in F_{LT}, (i, j) \in A_{LT}^k \quad (7b)$$

$$0 \leq l_i^{coll,k} \leq q_k^{total} \quad \forall k \in F, i \in V^k \quad (7c)$$

$$0 \leq l_i^{trans,k} \leq q_k^{trailer} \quad \forall k \in F_{LT}, i \in V^k \quad (7d)$$

$$a_i \leq t_i^k \leq b_i \quad \forall k \in F, i \in V^k \quad (7e)$$

The objective function (1) minimizes total fixed and variable costs over all lorries and all trailers.

Seen from a column generation perspective, constraints (2) are *linking* constraints affecting more than one vehicle within each single constraint, (3) and (4) are *non-linking* or *independent* flow constraints, (5) and (6) are non-linking constraints specifying the update of the load and time resource variables respectively, and (7) determine the ranges of the variables.

With regard to contents, the constraints have the following meaning: (2) are the customer covering constraints stating that each customer must be visited exactly once. (3a)–(3c) make sure that each transshipment location is used at most once by each $k \in F_{LT}$, and that only intermediate and coupling vertices of those transshipment locations are used whose decoupling vertex is visited. (3d) and (3e) require that each vehicle reach the end depot (possibly via the arc (o, d)). (3f) and (3g) are flow conservation constraints: They ensure that if a vehicle enters a vertex (except for the start and the end depot vertex), the vehicle also leaves this vertex. (4a)–(4c) are the constraints linking the routing of the trailer to that of its lorry. Note that it is possible that an LTC lorry does not use its trailer, in which case the latter moves directly from o to d . (5a) require that the load of the trailer be at most equal to the total amount of supply collected. (5b) require that the amount of supply collected be not greater than the lorry capacity and the amount of supply already transferred to the trailer. Without constraints (5a), $l_i^{trans,k}$ could always be set equal to the trailer capacity. Because of constraints (5b), $l_i^{coll,k}$ would then be bounded from above only by the overall vehicle capacity, and not by the lorry capacity and the amount of supply already transferred. This would illicitly enlarge the lorry capacity. A lorry could then park its trailer before doing any collecting and collect as much supply as the overall vehicle capacity permits, without having to transfer any load. (5c) are the load update constraints. The total amount of load collected increases (at least) by the supply of each vertex visited. Similarly, constraints (5d)–(5g) are for the update of the transshipment variables, respectively, the trailer load variables. (5d) state that the trailer load is non-decreasing. (5e) state that the trailer load is non-increasing at lorry customer vertices. (5f) state that at trailer customer vertices, the trailer load of an LTC k can only increase if the vertex is visited by the lorry *and* its trailer. (5g) state that at a trailer customer vertex, the trailer load does not increase by more than the customer's supply. Constraints (6a) are the constraints for the update of the timing variables: The overall time en route for a vehicle after

traversing an arc increases (at least) by the travel time along the arc. (6b)–(6e) are needed to make sure that the vertices of a transshipment location are visited in the correct order, i.e., that decoupling vertices of a transshipment location are visited *before* their corresponding coupling vertex. Without these constraints, it would be possible to visit decoupling vertex $v_{l_1}^{dec}$, go to coupling vertex $v_{l_2}^{coup}$, then to decoupling vertex $v_{l_2}^{dec}$ and then to $v_{l_1}^{coup}$. Note that if an LTC lorry does not visit a transshipment intermediate vertex for some l , the time variable for this vertex can be fixed appropriately; it is not required to have a visiting time of zero for non-visited vertices.

To improve readability, constraints (5c)–(6a) are written as logical implications. However, these can easily be linearized using a Big- M technique without introducing additional variables (see [46]). Hence, the convex hull of all points fulfilling (2)–(7) is a bounded polyhedron.

The only existing formulations for the TTRP, by [41] and [39], are conceptually different from the above formulation. [39] uses binary three-index arc flow variables similar to the above y_{ij}^k variables, and five-index variables indicating whether a certain lorry traverses a certain arc on the n th subtour starting at a certain trailer customer or at the depot, where n is the number of customers (in the worst case, as many single lorry (sub-)tours starting at a trailer customer or at the depot are necessary as there are customers). [41] uses similar variables, but requires that at most one subtour originate at each trailer customer, and hence the second variable type has only four indices in his model. Neither author uses resource variables; rather, both formulations are pure 0-1 IPs.

In the GTTRP, several lorry-trailer combinations may use the same transshipment location. Hence, the GTTRP formulation (1)–(7), using the arc set defined in Section 3.1, is a relaxation of the TTRP models from the literature. To make sure that only the lorry which visits a certain trailer customer vertex h uses the corresponding location l for parking and load transfer, the arc set can be restricted by removing all arcs entering the corresponding decoupling vertex i , except for the arc (h, i) .

4 Branch-and-Price Algorithms for the GTTRP

For capacitated vehicle routing problems (with time windows), many authors have devised formulations and solution approaches based on the integer programming version of Dantzig-Wolfe decomposition, i.e., branch-and-price. Standard references focused on the methodology include [3], [45], and [30]. [12] present a unified model for the solution of time-constrained vehicle routing and scheduling problems by branch-and-price. In this section, a reformulation of (1)–(7) for use in a branch-and-price algorithm is developed. The subsequent exposition follows [12].

The usual decomposition approach for VRPs can also be applied to the GTTRP. The linking constraints, i.e., the customer covering constraints (2), go in the master program, the non-linking constraints (3)–(7) define the sub- or pricing problems.

4.1 The Master Program

The model presented in Section 3 uses arc flow variables for each relevant combination of lorry or trailer k and arc (i, j) . Branch-and-price approaches for vehicle routing problems use path flow variables in the master program: There is one variable for each feasible o - d -path of each vehicle. As for VRPs without trailers, also for the GTTRP, each feasible tour of a single lorry is an elementary path from the start depot vertex to the end depot vertex through the respective subnetwork. This is also true for the LTC lorries. However, the movements of a trailer in the network D of Section 3 do not constitute a path: There are no trailer flow variables leaving decoupling vertices or entering coupling vertices. This, though, is only to avoid unnecessary variables and constraints. In the real world, the itinerary of a single lorry or a trailer resulting from a solution to the above formulation is an elementary path, too, whereas the itinerary of an LTC lorry using its trailer is not elementary; it will contain cycles starting and ending at the transshipment locations where the trailer is parked.

It follows from the flow decomposition theorem (see, for example, [1], p. 80 f.) that the extreme points of the convex hull of all points fulfilling the pricing problem constraints (3)–(7) correspond to lorry paths from o to d in D , some of which may be non-elementary, because D is not acyclic. For LTCs, constraints (3d)–(4c) additionally imply that the extreme points represent a path-like structure consisting of an o - d -path for the lorry and one or more paths for its trailer. The union of these trailer paths is a subset of the lorry path.

These extreme points are described by flow and resource vectors

$$(x_p^k, y_p^k, l_p^{coll,k}, l_p^{trans,k}, t_p^k) = (x_{ijp}^k, y_{ijp}^k, l_{ip}^{coll,k}, l_{ip}^{trans,k}, t_{ip}^k) \quad \forall k \in F, p \in P^k, (i, j) \in A^k, \quad (8a)$$

where P^k is the set of extreme points for single lorry or LTC k , and where, for simplicity of notation, in the following

$$y_p^k = y_{ijp}^k := 0 \quad \forall k \in F_L,$$

and

$$l_p^{trans,k} = l_{ip}^{trans,k} := 0 \quad \forall k \in F_L.$$

Any solution satisfying (3)–(7) can be expressed as a convex combination of these extreme points:

$$x_{ij}^k = \sum_{p \in P^k} x_{ijp}^k \lambda_p^k \quad \forall k \in F, (i, j) \in A^k \quad (8b)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in F, (i, j) \in A^k \quad (8c)$$

$$y_{ij}^k = \sum_{p \in P^k} y_{ijp}^k \lambda_p^k \quad \forall k \in F_{LT}, (i, j) \in A_{LT}^k \quad (8d)$$

$$y_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in F_{LT}, (i, j) \in A_{LT}^k \quad (8e)$$

$$l_i^{coll,k} = \sum_{p \in P^k} l_{ip}^{coll,k} \lambda_p^k \quad \forall k \in F, i \in V^k \quad (8f)$$

$$l_i^{trans,k} = \sum_{p \in P^k} l_{ip}^{trans,k} \lambda_p^k \quad \forall k \in F_{LT}, i \in V^k \quad (8g)$$

$$t_i^k = \sum_{p \in P^k} t_{ip}^k \lambda_p^k \quad \forall k \in F, i \in V^k \quad (8h)$$

$$\sum_{p \in P^k} \lambda_p^k \leq 1 \quad \forall k \in F \quad (8i)$$

$$\lambda_p^k \geq 0 \quad \forall k \in F, p \in P^k \quad (8j)$$

The integer master program (IMP) is then:

$$\sum_{k \in F} \sum_{p \in P^k} \left(\sum_{(i,j) \in A^k} c_{ij}^{lorry,k} x_{ijp}^k \right) \lambda_p^k + \sum_{k \in F_{LT}} \sum_{p \in P^k} \left(\sum_{(i,j) \in A_{LT}^k} c_{ij}^{trailer,k} y_{ijp}^k \right) \lambda_p^k \rightarrow \min \quad (9a)$$

subject to

$$\sum_{k \in F_L} \sum_{p \in P^k} \left(\sum_{i \in V_C^l} \sum_{(h,i) \in A^k} x_{hip}^k \right) \lambda_p^k = 1 \quad \forall l \in L_C \quad (9b)$$

$$\sum_{p \in P^k} \lambda_p^k \leq 1 \quad \forall k \in F \quad (9c)$$

$$\lambda_p^k \geq 0 \quad \forall k \in F, p \in P^k \quad (9d)$$

$$\lambda_p^k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in F, p \in P^k \quad (9e)$$

In general, it is not true that binary restrictions on the original x_{ij}^k arc flow variables can be replaced by binary restrictions on the λ_p^k path flow variables. However, this statement holds for the above GTTRP reformulation, since the definition of the original master problem solution space, i.e., the constraint set (2), involves only the x_{ij}^k variables. Hence, binary requirements on the path variables are equivalent to binary requirements on the x_{ij}^k variables, see [12], p. 75. Moreover, if the x_{ij}^k variables are binary, the y_{ij}^k variables will be binary, too. This is because for any path of an LTC lorry k represented by the values of the x_{ij}^k variables, the values of the pertinent y_{ij}^k variables are unequivocally determined: If the path visits transshipment vertices, all partial paths ending at a decoupling vertex or starting at a coupling vertex have all y_{ij}^k variables equal to one, and all partial paths between a decoupling and its corresponding coupling vertex have all y_{ij}^k variables equal to zero. Paths visiting only customers and at least one lorry customer trivially have all y_{ij}^k variables equal to zero, and paths visiting only trailer customers have all y_{ij}^k variables equal to one, unless the total demand of the customers on the path does not exceed the lorry capacity, in which case the corresponding trailer will not be used.

4.2 The Pricing Problems

As it is the case for all vehicle routing problems, also the pricing problems for the GTTRP are (elementary) shortest path problems with resource constraints ((E)SPPRCs) (see [24]). When the fleet is heterogeneous, in each pricing step, a pricing problem must be solved for each vehicle. Because of the dual prices coming from the master problem, the pricing problem networks usually have negative cost cycles. This makes the problem \mathcal{NP} -hard in the strong sense (ibid., p. 38). There is a considerable amount of literature on the solution of (E)SPPRCs. It is beyond the scope of this paper to give a detailed review, but some important contributions are [16], [37], [38], [36], [5], [7], [25].

The standard solution technique for (E)SPPRCs is a labelling algorithm based on dynamic programming. In principle, such an algorithm works similar to a labelling algorithm for shortest path problems without resource constraints, e.g., the Dijkstra algorithm (see [1], pp. 93 ff.). The *basic concepts* used in such an algorithm are the following (see [24]). A *resource* is an arbitrarily scaled one-dimensional quantity that can be determined or computed at the vertices of a directed walk in a network. Examples are cost, time, load, or the information ‘Is LTC lorry k currently pulling its trailer?’. The value of a resource at a vertex is stored in a *resource variable*. An arbitrarily scaled resource is *constrained* if there is at least one vertex in the network where the associated resource variable must not take all possible values. A cardinally scaled resource is constrained if there is at least one vertex in the network with a finite upper or lower bound on the value of the resource. The *resource window* of a nominally scaled resource r at a vertex is the set of allowed values of r at this vertex. The resource window of a cardinally scaled resource r at a vertex i is the interval $[lb_i^r, ub_i^r] \subseteq]-\infty, +\infty[$. A *resource extension function (REF)* is defined on each arc in a network for each resource considered. An REF for a resource r maps the set of all possible vectors of resource values at the tail of an arc to the set of possible values of r at the head of the arc. More precisely, let $R := (\sigma^1, \dots, \sigma^{|R|})^T$ be a vector of (values of) resource variables. Then, an REF for a resource r is a function $f^r : A \times \mathbb{R}^{|R|} \mapsto \mathbb{R}$. For simplicity, let $f_{ij}^r(R) := f^r((i, j), R)$. An REF for a cardinally scaled resource r indicates (lower bounds on) the consumptions of r along the arcs. When seeking a path from an origin vertex o to a destination vertex d , partial paths from o to a vertex $i \neq d$ are *extended* along all arcs (i, j) emanating from i to create new, extended paths. For each o - i -path, there is a corresponding *label l resident at i* that stores the values of all resource variables at i for its path, along with the information on how it was created: the arc (h, i) over which i was reached and (a reference to) the label of the o - h -path whose extension along (h, i) yielded the o - i -path (this makes it easy to reconstruct the path corresponding to a label). Initially, there is exactly one label corresponding to the path (o) . W.l.o.g., the values of the resource variables of the initial label are all set to the lower bounds of their respective resource windows at o . A *label l is feasible* iff the value of each resource variable in l is within the resource window of its respective resource. If a label is not feasible, it is discarded. An *extension* of a path/label along an arc (i, j) is *feasible* iff the resulting label at j is feasible. An h - j -path is *feasible* iff, for each arc (i, i') in the path, a

feasible label at i exists which can be extended along (i, i') to a feasible label at i' . To keep the number of labels as small as possible, it is very important to perform a *dominance procedure* to eliminate feasible but unnecessary labels. A label l_1 *dominates* a label l_2 iff both reside at the same vertex, the value of the resource variable of each nominally scaled resource in l_1 is equal to the corresponding value in l_2 , the value of the resource variable of each cardinally scaled resource in l_1 is ‘better’ (less or greater, depending on the resource) than or equal to the corresponding value in l_2 , and the value of the resource variable of at least one cardinally scaled resource in l_1 is strictly ‘better’ than the corresponding value in l_2 . Dominated labels are discarded as well.

The resources used in the labelling algorithm for vehicle k are:

- an unconstrained, cardinally scaled resource for cost
- one cardinally scaled resource for each of the three resource variables used in (1)–(7), i.e., for collected load, transferred load, and time
- one cardinally scaled *visitation counter* resource for each customer
- one nominally scaled auxiliary resource for each trailer

In the following, these resources are described in detail. The auxiliary resource is presented first, because it is needed to describe the REFs for cost and load.

The auxiliary resource is primarily needed for the correct modelling of the routing logic at transshipment locations. It must be considered that, on its itinerary, an LTC lorry must visit the decoupling, transfer, and coupling vertices of each transshipment location in the correct order (or not at all), and that, after an LTC lorry has visited the decoupling vertex of transshipment location l , it must not visit any decoupling, transfer or coupling vertex of any other transshipment location before having visited the coupling vertex of l . To this end, one nominally scaled resource r^{tp} is used to model the trailer logic. r^{tp} (‘trailer position’) records the current position of the trailer by means of a resource variable σ_i^{tp} , which indicates the position of the trailer when the LTC lorry reaches vertex i . σ_i^{tp} is either zero, meaning that the LTC lorry is currently pulling its trailer, or equal to the vertex number of the decoupling vertex where the trailer was parked. The corresponding REF is $f^{r^{tp}}$ with

$$f_{ij}^{r^{tp}}(\sigma_i^{tp}) = \begin{cases} \sigma_i^{tp}, j \in V_C \cup V_{trans} \cup \{d\} \\ j, j \in V_{dec} \\ 0, j \in V_{coup} \end{cases} \quad \forall (i, j) \in A, \quad (10)$$

and the resource windows at a vertex j are as shown in Table 1.

Resource window	for
$\{0\}$	$j \in \{o, d\} \cup V_{dec}$
$\{1, \dots, V \}$	$j \in V_{CL}$
$\{0, \dots, V \}$	$j \in V_{CLT}$
$\{i\}$	$j \in V_{trans} \cup V_{coup}, i \in V_{dec}, loc_j = loc_i$

Table 1: Resource windows for r^{tp} at vertex j

Additionally, r^{tp} serves the following purposes:

- It is used to model the load transfer logic at trailer customer and transshipment locations (see below).
- It is used for the update of the visitation counter resources (see below).
- It does not only determine the feasibility of an extension of a path along an arc, it is also relevant for (exact) dominance considerations, as a label can only dominate another label if their respective current trailer positions are equal (see below).
- It is used to consider the trailer costs in the pricing problems for LTCs, i.e., to express the y_{ij}^k variables: If LTC lorry k reaches vertex j via arc (i, j) with its trailer attached, the $c_{ij}^{trailer, k}$ costs are incurred. This is registered in the pricing problems by checking whether $\sigma_j^{tp} = 0$.

For each of the resource variables used in formulation (1)–(7), there is one constrained resource. For the total amount of customer supplies that lorry k has collected when reaching vertex i , the resource r^{coll} with resource variable σ_i^{coll} and REF $f^{r^{coll}}$ with

$$f_{ij}^{r^{coll}}(\sigma_i^{coll}) = \sigma_i^{coll} + s_i \quad \forall (i, j) \in A \quad (11)$$

is used. $f_{ij}^{r^{coll}}$ models constraints (5c) and sets σ_j^{coll} to the lowest nonnegative value fulfilling these constraints. The resource window at a vertex j is $[0, q_k^{total}]$.

For the total amount of customer supplies that LTC lorry k has transferred when reaching vertex i , the resource r^{trans} with resource variable σ_i^{trans} and REF $f^{r^{trans}}$ with

$$f_{ij}^{r^{trans}}(\sigma_i^{trans}, \sigma_i^{coll}, \sigma_i^{tp}) = \begin{cases} \sigma_i^{trans}, & j \in V_{CL} \vee (j \in V_{CLT} \wedge \sigma_i^{tp} \neq i) \\ \sigma_i^{trans} + \min\{s_i, q_k^{trailer} - \sigma_i^{trans}\}, & j \in V_{CLT} \wedge \sigma_i^{tp} = i \\ \sigma_i^{trans} + \min\{\sigma_i^{coll} - \sigma_i^{trans}, q_k^{trailer} - \sigma_i^{trans}\}, & j \in V_I \end{cases} \quad \forall (i, j) \in A \quad (12)$$

is used. $f_{ij}^{r^{trans}}$ models constraints (5a), (5b), and (5d)–(5g) and sets σ_j^{trans} to the highest possible value that fulfils these constraints. The resource window at a vertex j is $[0, q_k^{trailer}]$.

This means that an LTC lorry always transfers as much load as possible to its trailer (its complete load or an amount of load equal to the residual capacity of its trailer, whichever is less). This is a sensible stipulation, as it was assumed above that the time needed for a load transfer is fixed, independent of the actual amount of load transferred. If this assumption is abandoned, there is a trade-off between transferring few load and saving time on the one hand, and transferring much load and gaining lorry capacity on the other hand. In the former case, it is possible to visit more customers before the end of their time windows, but the lorry capacity may be insufficient to do so. In the latter case, it is possible to visit more customers before having to perform the next load transfer, but perhaps it is no longer possible to arrive at some customers before the end of their time windows. Correctly treating such a trade-off is non-trivial. It is beyond the scope of this paper to elaborate further on this issue. The reader is referred to [23].

For the point in time when lorry k begins its service at vertex i , the resource r^{time} with resource variable σ_i^{time} and REF f^{time} with

$$f_{ij}^{time}(\sigma_i^{time}) = \sigma_i^{time} + \tau_{ij}^{tr} \quad \forall (i, j) \in A \quad (13)$$

is used. f_{ij}^{time} models constraints (6a) and sets σ_j^{time} to the lowest nonnegative value fulfilling these constraints. The resource window at a vertex j is $[a_j, b_j]$.

The branch-and-price algorithm in the present paper solves the elementary SPPRC in each pricing step. For the ‘usual’ VRP or VRPTW, to solve the ESPPRC by dynamic programming, it is necessary to have a binary visitation counter resource for each customer (vertex). This is also the case for the GTTRP. In the course of the algorithm, for a label l residing at a vertex v , this resource is set to zero for a customer c if it is not or no longer possible to extend l such that c is visited after v on any extension of l . This will mostly be the case because c has already been visited, but possibly also because of time window, capacity and accessibility constraints. To be precise, for each $v_c \in V_C$, there is one binary resource r^{visit, v_c} with resource variable $\sigma_i^{v_c}$ at each vertex $i \in V$ and REF f^{visit, v_c} with

$$f_{ij}^{visit, v_c}(\sigma_i^{v_c}, \sigma_j^{coll}, \sigma_j^{trans}, \sigma_j^{time}, \sigma_j^{tp}) = \begin{cases} 0, & v_c = i \vee \text{not enough capacity} \vee \text{not enough time} \\ \sigma_i^{v_c}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall (i, j) \in A \quad (14)$$

where $\sigma_j^{v_c} = 0$ means that customer v_c cannot be visited any more, and where ‘not enough capacity’ means

$$\begin{aligned} & \sigma_j^{coll} + s_j > q_k^{total} \\ & \vee (v_c \neq j \wedge \sigma_j^{coll} + s_j + s_{v_c} > q_k^{total}) \\ & \vee (\sigma_j^{tp} \neq j \wedge \sigma_j^{coll} - \sigma_j^{trans} + s_j > q_k^{lorry}) \\ & \vee (v_c \neq j \wedge \sigma_j^{tp} \neq j \wedge \sigma_j^{coll} - \sigma_j^{trans} + s_j + s_{v_c} > q_k^{lorry}) \end{aligned}$$

and ‘not enough time’ means

$$\sigma_j^{time} + \tau_{jv_c}^{tr} > b_{v_c}, \text{ where } \tau_{hh}^{tr} := 0 \forall h \in V.$$

The resource window for vertex j at vertex j is $[1, 1]$, and the resource window for a vertex $j' \neq j$ at vertex j is $[0, 1]$.

When the pricing problems are solved by dynamic programming, it is not necessary to introduce more than one intermediate vertex in the LTC subnetworks. It is sufficient to have only one, and to allow multiple visits to this vertex. Visitation counters are maintained only for the customers, not for the transshipment vertices. Cycle elimination can be performed with visitation counters only for the customers, as every possible cycle in the subnetworks (as well as in the network corresponding to the compact formulation) contains a customer. It is then also possible to use a transshipment location more than once, which may be relevant depending on the time windows. This is an additional degree of freedom compared to the compact formulation. Indeed, when the pricing problems are solved by dynamic programming, it would be possible to use only one vertex per transshipment location. Although this would reduce the subnetwork size for the LTC subproblems, the number of possible labels, which determines the difficulty of an (E)SPPRC, would remain the same.

Finally, there is one unconstrained resource r^{cost} measuring the cost. The corresponding resource variable is σ_i^{cost} , and the REF is $f^{r^{cost}}$ with

$$f_{ij}^{r^{cost}}(\sigma_i^{cost}) = \sigma_i^{cost} + \tilde{c}_{ij}^k \quad \forall (i, j) \in A, \quad (15)$$

where \tilde{c}_{ij}^k is the reduced cost of traversal of arc (i, j) for vehicle k . Introducing dual variables

$$(\alpha^T, \gamma^T) := (\alpha^1, \dots, \alpha^{|L_C|}, \gamma^1, \dots, \gamma^{|F|}) \quad (16)$$

for constraints (9b) and (9c), the objective function of the pricing problem for vehicle k can be written as

$$\sum_{(i,j) \in A^k} c_{ij}^{lorry,k} x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in A_{LT}^k} c_{ij}^{trailer,k} y_{ij}^k - \sum_{l \in L_C} \sum_{i \in V_C^l} \sum_{(h,i) \in A^k} \alpha^l x_{hi}^k - \gamma^k, \quad (17)$$

and the reduced costs of the arcs in the pricing problem for a lorry-trailer combination k can be stated as in Table 2. The reduced cost of the arcs in the pricing problem for a single lorry k are as shown in Table 3.

\tilde{c}_{ij}^k	for
$c_{ij}^{lorry,k} - \alpha^l$	$(i, j) \notin A_{LT}^k, j \in V_C^k, loc_j = l$
$c_{ij}^{lorry,k} + c_{ij}^{trailer,k} \max(1 - \sigma_j^{tp}, 0) - \alpha^l$	$(i, j) \in A_{LT}^k, j \in V_{C_{LT}}^k, loc_j = l$

(continued on next page)

(continued from previous page)

\tilde{c}_{ij}^k	for
$c_{ij}^{lorry,k} + c_{ij}^{trailer,k}$	$j \in V_{dec}$
$c_{ij}^{lorry,k}$	$j \in V_{trans} \cup V_{coup}$
$c_{id}^{lorry,k} + c_{id}^{trailer,k} - \gamma^k$	$j = d$

Table 2: Reduced cost of arcs in the GTTRP pricing problem for a lorry-trailer combination k

\tilde{c}_{ij}^k	for
$c_{ij}^{lorry,k} - \alpha^l$	$(i, j) \in A^k, j \in V_C^k, loc_j = l$
$c_{id}^{lorry,k} - \gamma^k$	$j = d$

Table 3: Reduced cost of arcs in the GTTRP pricing problem for a single lorry k

With the above resource specifications, a feasible label l_1 dominates a feasible label l_2 if and only if

- both reside at the same vertex i ,
- $\sigma_i^{tp}(l_1) = \sigma_i^{tp}(l_2)$,
- $\sigma_i^{cost}(l_1) \leq \sigma_i^{cost}(l_2)$,
- $\sigma_i^{coll}(l_1) \leq \sigma_i^{coll}(l_2)$,
- $\sigma_i^{trans}(l_1) \leq \sigma_i^{trans}(l_2)$,
- $\sigma_i^{time}(l_1) \leq \sigma_i^{time}(l_2)$,
- $\sigma_i^{vc}(l_1) \geq \sigma_i^{vc}(l_2) \forall v_c \in V_C$,
- and at least one of the above inequalities is strict,

where $\sigma_i^r(l)$ denotes the value of the resource variable σ_i^r for a label l resident at vertex i .

The value of the cost resource of a label l resident at the end depot vertex d indicates the reduced cost of the path represented by the label. The reduced cost of a path p is

$$\tilde{c}_p^k(\alpha, \gamma) = \sum_{(i,j) \in A^k} c_{ij}^{lorry,k} x_{ijp}^k + \sum_{(i,j) \in A_{LT}^k} c_{ij}^{trailer,k} y_{ijp}^k - \sum_{l \in L_C} \left(\sum_{i \in V_C^l} \sum_{(h,i) \in A} x_{hip}^k \right) \alpha^l - \gamma^k. \quad (18)$$

If a path p is feasible and if (18) is negative, a new column corresponding to p can be added to the restricted master problem. The path itself is recursively reconstructed from the l , because each label stores its direct predecessor arc and predecessor label. As explained in Section 4.1, the trailer (sub)path(s) of a path of an LTC lorry is/are also unequivocal and can easily be

reconstructed, so, the objective function coefficient of a new column in the restricted master problem can be determined efficiently, too.

The network D for the compact formulation (1)–(7) contains an arc (o, d) that can be traversed by a trailer without being pulled by its lorry to model the fact that an LTC lorry may also be used without its trailer. This must be taken into account by solving a pricing problem ESPPRC for each LTC, for each single lorry, and for each LTC lorry for which there is no single lorry with identical properties. However, if several vehicles are identical, the resulting symmetry in the problem can be exploited. This can be done as described in [12], p. 84 ff.

5 Computational Experiments

5.1 Algorithms

Extensive studies of possible set-ups for branch-and-price algorithms were performed. In particular, many computational experiments were performed to determine useful strategies for the solution of the pricing problems. The aim was to find successful procedures for the exact as well as the heuristic solution of the pricing problems, and, hence, the overall problem.

For standard VRP(TW)s, it has proved useful for computational purposes to perform heuristic pricing, i.e., to solve the ESPPRC heuristically as long as negative reduced cost paths are found, and to solve the ESPPRC exactly only when heuristic procedures fail to find any more negative reduced cost paths (see, for example, [37]). In view of this, the following exact approach turned out to be acceptable. The pricing problems are solved in three stages:

- (i) Initially, the ESPPRC is solved heuristically considering the visitation counters only in the REFs (to ensure that only elementary paths are returned), but completely disregarding the visitation counters in the dominance procedure. In this way, fewer labels are created, because the dominance procedure becomes much stronger (indeed, it becomes too strong, and not all undominated negative reduced cost paths will be found: It is possible that a path is now dominated by another path although both cover different customers). This first stage is performed for each vehicle class on a reduced subnetwork where only the m_s shortest arcs in the forward star of each vertex are considered ($m_s = 3$ for instances with less than 15 customers, and $m_s = 5$ otherwise).
- (ii) If no negative reduced cost path is found, the ESPPRC is solved heuristically (i.e., ignoring the visitation counters in the dominance step as before) for each vehicle class on the entire network.
- (iii) Only if this also does not yield a negative reduced cost path, the ESPPRC is solved exactly (i.e., with the visitation counter resources of all customers considered in the dominance step) for each vehicle class on the entire network.

By performing each stage for each vehicle class, emphasis is put on quickly returning many negative reduced cost columns. To exactly solve the pricing problems, also bounded bidirectional dynamic programming as described in [38] was used. This yielded moderately better results than the unidirectional approach for the larger instances of the test bed described below. Incremental state space augmentation as described in [38] and [5] was also tried, but did not lead to good results. For more details on experiments with exact algorithms see [13].

The following branching strategy was used:

- (i) branch on the number of tours
- (ii) branch on an aggregated arc flow variable (i.e., aggregated over all vehicles or vehicle classes) for an arc whose head and/or tail is a customer vertex
- (iii) branch on an arc flow variable for a vehicle or vehicle class for an arc whose head and/or tail is a customer vertex

It is sufficient to consider the x_{ij}^k variables for the branching decisions. As described in Section 4.1, once these are all binary, the path variables will be binary as well. It is already sufficient that all x_{ij}^k variables where i or j are customer vertices are integral. This is because each customer is visited exactly once. This also holds if there are identical pricing problems, again because of the constraint that each customer is visited exactly once.

For the solution of the GTTRP with a heuristic approach based on branch-and-price or column generation, also many different settings were investigated. These settings were combinations of heuristic solutions to the pricing problems. Many different heuristic solution strategies for ESPPRCs are described, for example, in [37], p. 207 f. Most of the heuristic strategies tried yielded small computation times, but a quite bad solution quality. The following three strategies (henceforth referred to as H-1, H-2 and H-3) turned out to offer the best trade-off between these two conflicting objectives:

- (i) Solve the subproblems by completely disregarding the visitation counter resources for all customers in the dominance procedure, as in the first two stages of the three-stage exact approach.
- (ii) Solve the subproblems by disregarding the visitation counter resources for all customers and also ignoring the trailer locations of the labels, i.e., ignoring the requirement that a label l_1 can only dominate a label l_2 if $\sigma_i^{tp}(l_1) = \sigma_i^{tp}(l_2)$.
- (iii) Use the same dominance as in (ii), but solve the problem only at the root vertex of the branch-and-bound tree, i.e., perform heuristic column generation. After no more columns are found at the root vertex, solve a set covering problem with the generated columns. If, in the solution of the set covering problem, a customer is visited more than once, keep the customer only in the tour where the saving in tour length obtained by removing the customer from the tour is minimal over all tours where the customer is visited, and remove the customer from all other tours.

All three heuristic approaches also first solved the subproblems on thin graphs, as in the exact approach.

5.2 Test Instances

The application context that motivated this research is, as in several other papers described in the literature review, raw milk collection at farmyards (in this case in southern Bavaria, Germany). The aim was to be able to solve realistic instances. Therefore, the test instances were devised so as to resemble real-world situations with respect to number of customers and transshipment locations, customer supplies, and vehicle costs and capacities.

In practice, the following types of vehicle are used:

- Single lorries:
 - single lorry with two axles and a capacity of 10 tons
 - single lorry with three axles and a capacity of 15 tons
- Lorry-trailer combinations:
 - two-axle lorry with three-axle trailer, with a capacity of 10 and 15 tons, respectively ('2/3-combination')
 - three-axle lorry with two-axle trailer, with a capacity of 15 and 10 tons, respectively ('3/2-combination')

The cost data used are shown in Table 4. These data approximately reflect absolute values of the different cost types for each vehicle type as well as ratios of cost of one vehicle type to another. Two- and three-axle single lorries have the same cost data as two- and three-axle lorries of a lorry-trailer combination.

Cost type → Vehicle type ↓	Fixed	Distance-dependent
Two-axle lorry	18,000	65
Three-axle trailer	2,500	6
Three-axle lorry	20,000	70
Two-axle trailer	2,000	4

Table 4: Cost data for computational experiments

The transfer of milk from one tank is fast, comfortable and clean and requires no specific location for their operation, it is performed by the driver himself without imposing any additional cost. Therefore, load transfer performance only involves time costs.

The customer and transshipment locations were randomly selected on a 100×100 km grid with the depot located in the centre. The resulting Euclidean distances between each pair of

vertices were multiplied by a distance factor of 1.3. The customer supplies were chosen randomly from $[1,000; 10,000]$. As load transfer time, 2 minutes per 1,000 units of supply were assumed throughout.

The length of the planning horizon was assumed to be 12 hours or 1,320 minutes, respectively. All customers and pure transshipment locations have one time window: $[0; 1,320]$. This is supposed to model the fact that in the targeted application context, most customers and transshipment locations do not have time windows at all, or at least very long ones (hence, completely ignoring time windows would not be justified). For a code capable of solving problems with time windows, such instances represent the worst case and thus constitute a stress test. It is clear that with tighter time windows, larger instances can be solved.

For each $n \in \{6, \dots, 10, 20, 25\}$, 30 so-called ‘ x_y_z ’-instances were created with the vehicle, cost and distance data specified above. x stands for the number of lorry customers, y stands for the number of trailer customers, and z stands for the number of pure transshipment locations, and $x = y = z = n$. This means that an x_y_z -instance has $1 + x + y + 3 \cdot (y + z) + 1$ vertices: One for the start depot, x for the lorry customers, y for the trailer customers, three for each transshipment location (of which there are $y + z$) to represent decoupling, transfer, and coupling, and one for the end depot. The following table shows the sizes of the instances and the resulting subnetworks. The column ‘No. arcs in VRP’ indicates the number of arcs in a ‘standard’ VRP with as many vertices as the LTC subnetwork in the same column. Considering the number of arcs, a 10_10_10-instance of the GTTRP hence corresponds to a VRP instance with 53 customers.

Instance Type	6_6_6	10_10_10	20_20_20	25_25_25
No. vertices in single lorry subnetworks	14	22	42	52
No. arcs in single lorry subnetworks	157	421	1,641	2,551
No. vertices in LTC subnetworks	50	82	162	202
No. arcs in LTC subnetworks	1,033	2,841	11,281	17,601
No. arcs in VRP	2,353	6,481	25,761	40,201
Arc ratio VRP/GTTRP	2.28	2.28	2.28	2.28

Table 5: Test instance sizes

5.3 Computational Results

The algorithms of Section 5.1 were implemented in C++ with the Visual C++ compiler using the Boost Graph library (BGL, boost.org), the ABACUS branch-and-cut-and-price-framework (www.informatik.uni-koeln.de/abacus) with CPLEX (www.ilog.com/products/cplex) as LP solver and the `r_c_shortest_paths` code from the BGL for the solution of the pricing problems. The tests were performed on a 2.16 GHz processor with 2 GB of main memory under

Windows XP Professional 32 SP 3. The results obtained are shown in the subsequent Tables 6–10. (The 20_20_20 and 25_25_25 instances could be solved only with the H-3 approach.)

The most important observations to be made in Tables 6–10 are:

- Solution quality:
 - In general, the solution quality of all heuristic algorithms is very good.
 - The H-1 approach was able to solve to optimality more than 95 % of the instances for which an optimal solution is known. The instance defining the worst relative solution quality (of 113.7 %) for the H-1 approach is a unique outlier. There were only two instances where the H-1 approach computed a solution that was more than 0.25 % worse than the best solution found with the exact algorithm.
 - The H-2 and H-3 approaches did not find many optimal solutions, but average deviations of 0.3 % and 1.3 % respectively from the solutions found with the exact algorithm are still highly satisfactory.
 - For a considerable percentage of instances, the heuristic approaches found better solutions than the exact one. This apparently paradox result is due to the fact that for such instances, the exact algorithm was not able to explore the branch-and-bound tree deep and wide enough within the available computation time.
 - It is also noteworthy that the average and maximal lengths (in number of arcs) of the tours in the solutions decreased steadily from the exact to the ‘most heuristic’ algorithm. This implies that the heuristic algorithms were not able to find the rather long tours needed to solve some instances to optimality.
- Computation times:
 - The computation time limits for each algorithm are indicated in the tables. The maximum times reported sometimes exceed these values, because the elapsed time was checked at the end of each pricing step, not within the (E)SPPRC solution algorithm and not with a second thread.
 - The computation times vary widely for all three branch-and-price approaches. For example, the shortest CPU time for the exact algorithm for a 6_6_6-instance was two seconds, the longest was 2,630 seconds (which is more than 1,000 times longer). For H-3, the column generation heuristic, the variation is much smaller.
 - The pricing step is by far the most time consuming part in the algorithms.
 - The number of subproblems to be solved varies widely for the branch-and-price algorithms. The number of (E)SPPRCs to be solved at each subproblem is much less variable. Consequently, the number of subproblems to be solved is the main determinant for the computation time of the branch-and-price algorithms for an instance.

Instance Type	6-6.6	7-7.7	8-8.8	9-9.9	10-10.10
No. instances solved to optimality	30	28	25	12	14
No. instances solved at root	12	12	8	5	7
COW time [s] (Max.: 11,100 s)	2 / 268 / 2,630	5 / 1,689 / 11,500	13 / 5,083 / 11,200	36 / 9,216 / 18,700	868 / 10,341 / 19,900
Pricing time [% COW time]	89 / 98 / 100	94 / 98 / 100	95 / 99 / 100	97 / 100 / 100	98 / 100 / 100
No. subproblems	1 / 97 / 1,535	1 / 136 / 1,565	1 / 825 / 9,021	1 / 202 / 3,943	1 / 293 / 3,503
No. (E)SPPRCs per subproblem	21 / 70 / 232	17 / 64 / 148	4 / 55 / 196	1 / 46 / 180	1 / 60 / 208
No. labels per (E)SPPRC	3,055 / 9,272 / 23,641	5,730 / 17,215 / 97,205	7,003 / 28,558 / 85,050	14,124 / 72,370 / 147,280	42,289 / 97,557 / 246,438
No. generated variables	237 / 1,893 / 17,505	265 / 2,438 / 21,847	306 / 5,285 / 53,453	426 / 1,500 / 13,893	624 / 1,077 / 2,326
Highest level in tree	1 / 8 / 35	1 / 9 / 33	1 / 22 / 161	1 / 17 / 143	1 / 9 / 43
No. tours	2 / 3.1 / 4	3 / 3.8 / 4	3 / 4.1 / 5	3 / 4.2 / 5	4 / 5.1 / 8
No. LTC tours	2 / 2.5 / 3	2 / 3.1 / 4	3 / 3.7 / 5	3 / 3.9 / 5	3 / 4.3 / 6
Longest tour [No. arcs]	6 / 9.0 / 12	7 / 9.0 / 11	7 / 9.8 / 13	8 / 10.7 / 14	8 / 10.3 / 18

Table 6: Computational results for exact algorithm (min. / avg. / max.)

Instance Type	6-6.6	7-7.7	8-8.8	9-9.9	10-10.10
No. instances solved to optimality	29	26	24	12	13
No. instances solved at root	13	12	8	5	6
COW time [s] (Max.: 3,900 s)	1 / 30 / 389	3 / 251 / 2,930	5 / 1,236 / 3,910	13 / 1,750 / 3,900	33 / 2,408 / 13,700
Pricing time [% COW time]	80 / 91 / 98	89 / 93 / 100	81 / 94 / 100	86 / 97 / 100	88 / 97 / 100
No. subproblems	1 / 95 / 2,015	1 / 123 / 1,463	1 / 1,980 / 11,855	1 / 929 / 6,637	1 / 931 / 4,233
No. (E)SPPRCs per subproblem	20 / 61 / 164	21 / 59 / 144	8 / 49 / 148	6 / 46 / 156	2 / 47 / 188
No. labels per (E)SPPRC	1,718 / 4,717 / 10,198	3,792 / 8,317 / 48,782	4,111 / 10,161 / 45,394	7,518 / 15,972 / 36,605	11,237 / 32,925 / 190,515
No. generated variables	235 / 1,693 / 24,983	265 / 2,754 / 36,791	306 / 16,921 / 75,016	426 / 13,689 / 54,831	625 / 8,582 / 34,054
Highest level in tree	1 / 7 / 34	1 / 8 / 33	1 / 20 / 87	1 / 38 / 233	1 / 23 / 203
No. tours	2 / 3.1 / 4	3 / 3.8 / 4	3 / 4.0 / 5	3 / 4.2 / 5	4 / 4.8 / 6
No. LTC tours	2 / 2.5 / 3	2 / 3.1 / 4	3 / 3.7 / 5	3 / 3.9 / 5	3 / 4.5 / 6
Longest tour [No. arcs]	6 / 8.9 / 12	7 / 8.9 / 11	7 / 9.9 / 13	8 / 10.4 / 14	8 / 10.1 / 14

Table 7: Computational results for H-1 algorithm (min. / avg. / max.)

Instance Type	6-6.6	7-7.7	8-8.8	9-9.9	10-10.10
No. instances solved to optimality	0	1	0	2	0
No. instances solved at root	13	11	7	4	4
COW time [s] (Max.: 3,900 s)	0 / 1 / 8	0 / 3 / 31	1 / 7 / 36	1 / 158 / 3,900	2 / 404 / 3,900
Pricing time [% COW time]	30 / 47 / 81	39 / 54 / 94	44 / 60 / 87	4 / 61 / 88	6 / 62 / 98
No. subproblems	1 / 10 / 81	1 / 13 / 79	1 / 35 / 165	1 / 145 / 1,773	1 / 304 / 2,861
No. (E)SPPRCs per subproblem	15 / 57 / 116	15 / 58 / 120	14 / 48 / 152	13 / 44 / 160	12 / 47 / 148
No. labels per (E)SPPRC	640 / 1,107 / 2,854	969 / 1,793 / 8,953	1,361 / 2,218 / 5,968	1,867 / 3,375 / 7,304	2,135 / 7,102 / 51,936
No. generated variables	154 / 395 / 1,825	233 / 476 / 2,577	268 / 813 / 3,525	371 / 2,405 / 17,520	413 / 5,076 / 47,280
Highest level in tree	1 / 4 / 17	1 / 5 / 29	1 / 7 / 18	1 / 17 / 119	1 / 16 / 105
No. tours	1 / 3.0 / 4	2 / 3.7 / 4	3 / 3.9 / 5	3 / 4.0 / 5	4 / 4.7 / 6
No. LTC tours	1 / 2.6 / 4	1 / 3.0 / 4	2 / 3.6 / 5	2 / 3.7 / 5	3 / 4.5 / 6
Longest tour [No. arcs]	4 / 8.6 / 11	7 / 8.4 / 10	7 / 8.9 / 12	8 / 9.3 / 11	8 / 9.3 / 11

Table 8: Computational results for H-2 algorithm (min. / avg. / max.)

Instance Type	6-6.6	7-7.7	8-8.8	9-9.9	10-10.10	20-20.20	25-25.25
No. instances solved to optimality	0	0	0	0	0	?	?
No. instances solved at root	30	30	30	30	30	30	30
COW time [s] (Max.: 3,900 s)	0 / 0 / 1	0 / 1 / 1	0 / 1 / 1	1 / 1 / 3	1 / 2 / 3	16 / 27 / 43	35 / 63 / 107
Pricing time [% COW time]	33 / 53 / 75	39 / 59 / 77	51 / 65 / 76	57 / 70 / 76	60 / 69 / 75	70 / 76 / 83	64 / 79 / 85
No. subproblems	1 / 1 / 1	1 / 1 / 1	1 / 1 / 1	1 / 1 / 1	1 / 1 / 1	1 / 1 / 1	1 / 1 / 1
No. (E)SPPRCs per subproblem	68 / 90 / 116	76 / 99 / 124	68 / 108 / 156	84 / 121 / 160	88 / 122 / 184	148 / 182 / 232	164 / 193 / 236
No. labels per (E)SPPRC	714 / 1,055 / 1,908	969 / 1,418 / 2,153	1,173 / 2,113 / 3,615	2,106 / 3,208 / 5,251	2,658 / 3,944 / 6,538	19,549 / 28,090 / 36,953	32,867 / 47,204 / 77,468
No. generated variables	154 / 259 / 438	212 / 291 / 486	226 / 365 / 536	320 / 491 / 805	363 / 560 / 921	1,297 / 1,638 / 2,065	1,558 / 2,128 / 3,428
Highest level in tree	1 / 1 / 1	1 / 1 / 1	1 / 1 / 1	1 / 1 / 1	1 / 1 / 1	1 / 1 / 1	1 / 1 / 1
No. tours	2 / 3.1 / 4	3 / 3.9 / 4	3 / 4.1 / 5	3 / 4.3 / 5	4 / 4.9 / 6	8 / 9.3 / 11	11 / 11.8 / 13
No. LTC tours	2 / 2.7 / 4	2 / 3.2 / 4	3 / 3.8 / 5	3 / 3.9 / 5	3 / 4.5 / 6	7 / 8.9 / 10	10 / 11.4 / 13
Longest tour [No. arcs]	6 / 8.8 / 11	6 / 8.3 / 10	7 / 8.9 / 11	8 / 9.4 / 11	8 / 9.3 / 11	9 / 10.3 / 12	9 / 10.0 / 12

Table 9: Computational results for H-3 algorithm (min. / avg. / max.)

	Exact	H-1	Ratio H-1 / Exact	H-2	Ratio H-2 / Exact	H-3	Ratio H-3 / Exact
No. instances solved to optimality	109	104	95.4 %	3	2.8 %	0	0.0 %
No. instances solved at root	44	44	100.0 %	39	88.6 %	n.a.	n.a.
Best relative solution quality			76.3 %		76.5 %		76.6 %
Avg. relative solution quality			99.0 %		100.3 %		101.3 %
Worst relative solution quality			113.7 %		107.5 %		108.3 %
No. times best solution was found	124	140	112.9 %	8	6.5 %	4	3.2 %
COW time [s]	2 / 5,253 / 19,900	1 / 1,135 / 13,700	20.6 %	0 / 115 / 3,900	2.0 %	0 / 1 / 3	0.0 %
Pricing time [% CPU time]	89 / 99 / 100	80 / 94 / 100	94.9 %	4 / 57 / 98	57.6 %	33 / 63 / 77	63.6 %
No. subproblems	1 / 307 / 9,021	1 / 811 / 11,855	264.1 %	1 / 101 / 2,861	32.9 %	1 / 1 / 1	n.a.
No. (E)SPPRCs per subproblem	1 / 59 / 232	2 / 52 / 188	88.1 %	12 / 51 / 160	86.4 %	68 / 108 / 184	183.1 %
No. labels per SPPRC	3,055 / 44,391 / 246,438	1,718 / 14,419 / 190,515	32.5 %	640 / 3,119 / 51,936	7.0 %	714 / 2,348 / 6,538	5.3 %
No. generated variables	237 / 2,438 / 53,453	235 / 8,728 / 75,016	358.4 %	154 / 1,833 / 47,280	75.2 %	154 / 393 / 921	16.1 %
Highest level in tree	1 / 13 / 161	1 / 19 / 233	149.0 %	1 / 10 / 119	74.4 %	1 / 1 / 1	n.a.
No. tours	2 / 4.0 / 8	2 / 4.0 / 6	100.0 %	1 / 3.9 / 6	97.5 %	4 / 4.1 / 6	102.5 %
No. LTC tours	2 / 3.5 / 6	2 / 3.5 / 6	100.0 %	1 / 3.5 / 6	100.0 %	2 / 3.6 / 6	102.9 %
Longest tour [No. arcs]	6 / 9.7 / 18	6 / 9.6 / 14	99.0 %	4 / 8.9 / 12	91.8 %	6 / 8.9 / 11	91.8 %

Table 10: Comparison of computational results over different approaches, instance classes 6_6-10_10, Exact avg. \cong 100 %

Instance number	No. lorry customers	No. trailer customers	Best solution			H-3 solution			Ratio		
			Time [s]	No. single lorries	No. LTCs	Cost	Time [s]	No. single lorries	No. LTCs	Cost	Time
1	12	38	203	1	4	569.97	134	4	3	102.31 %	69 %
2	25	25	200	1	4	632.03	149	5	3	103.91 %	75 %
3	37	13	160	2	3	619.74	118	4	3	100.28 %	74 %
6	56	19	378	4	5	985.01	184	9	3	105.84 %	58 %

Table 11: Computational results for Chao TTRP instances

Overall, the computational results show that the H-3 heuristic approach offers the best trade-off between solution quality and computation time. Evidently, the visitation counters and, even more interestingly, the current trailer location act as fetters in the dominance procedures and slow down the solution progress without significantly improving solution quality.

The computational results obtained are satisfactory insofar as with the H-3 approach, instances with realistic network and cost structure and with realistic size (50 customers and 50 pure transshipment locations) could be solved in short time and with very high solution quality.

The test instances created for this paper use a vehicle cost function containing variable and fixed components. It is noteworthy that tests showed that when the fixed cost component was disregarded, the instances were considerably easier to solve with all four solution approaches: Not only did the overall computation times decrease, but also the difference in computation time between the instance that took longest and the one that took shortest to solve became smaller.

5.4 Computational Experiments with Existing TTRP Benchmark Instances

[8] introduced a set of 21 benchmark instances for the TTRP version he considered (no pure transshipment locations, homogeneous fixed fleet, no time windows, Euclidean distances). The instances range from 38 lorry and 12 trailer customers to 50 lorry and 149 trailer customers. Encouraged by the results obtained with the H-3 approach as well as by the paper by [9], who present a heuristic column generation approach to the heterogeneous fleet VRP and obtain very convincing results on benchmark instances for this problem, it was tried to solve the Chao benchmark instances with the H-3 approach (due to the size of the Chao instances, a solution with the other approaches was not possible).

The H-3 approach allows an unlimited number of vehicles, and it cannot easily be modified so as to use a fixed number. In addition, as explained in Section 3.2, the GTTRP allows that a trailer customer location be used as a transshipment location by more than one lorry-trailer-combination. Hence, the H-3 approach solves a relaxation of the problem studied by Chao.

Unfortunately, the results obtained were rather disappointing. Although all 21 instances could be solved within a few minutes, only the four smallest instances could be solved with the unmodified H-3 approach. To solve the larger instances, it was necessary to limit the number of labels to be created within one run of the SPPRC algorithm and to operate on thin graphs containing only the m_s shortest arcs in each forward star. The results for the four smallest instances were as given in Table 11. The best known solutions are all from [32]. These authors obtained their results on a 1.5 GHz processor. In the above table, the original times were divided by two, yielding a generous lower bound for the computation times had these experiments been performed on the same hardware as the ones described in this paper. In all four solutions, no transshipment location was used by more than one vehicle.

The solution quality for the other Chao instances was very low and decreased with increasing instance size; however, the scaled computation times were always shorter than the ones reported in [32].

The reason for these results is that the average ratio of customer supply to vehicle capacity is much smaller in the Chao instances. This makes the solution of the subproblems much harder, as many more paths are possible, and therefore many more labels have to be created. The approach of solving (E)SPPRCs with a labelling algorithm reaches its limits here.

As mentioned in the literature review, very recently [32] have studied the TTRP version introduced by Chao allowing an unlimited number of vehicles. They used a simulated annealing heuristic and were able to improve the best known solutions for 18 of the 21 Chao benchmark instances. They also created 36 new test instances, all of which had at least 75 customers and at least 18 trailer customers. Due to the unsatisfactory performance of the H-3 approach for the Chao instances, these instances were not tackled.

Considering that for the vehicle routing problem with time windows, ‘50 clients’ means 50 vertices and 2,550 arcs (and a homogeneous fleet), the following quote from [17], p. 492, puts the above computational results in perspective: ‘It should be noted that . . . column generation has been the dominant approach for the Vehicle Routing Problem with Time Windows (VRPTW). Current branch-and-price algorithms can consistently solve tightly constrained instances (those with narrow time windows) with up to 100 clients. However, they often fail on less constrained instances with only 50 clients.’ See also the results obtained by [38] for the capacitated vehicle routing problem (CVRP).

6 Summary and Research Outlook

This paper has studied the generalized truck-and-trailer routing problem (GTTRP) and has presented an arc-flow-based and a path-flow-based formulation for this problem. Moreover, the paper has described an exact solution procedure for the problem, a branch-and-price algorithm, and heuristic versions of this algorithm. A major advantage of the proposed solution approach over a possible branch-and-cut algorithm based on the arc flow formulation is that fleet planning (deciding on the number of vehicles to use of each possible type) and vehicle routing can be performed simultaneously without additional modelling or computational effort.

Extensive computational experiments have been performed. The experiments used randomly generated instances structured to resemble real-world situations and TTRP benchmark instances from the literature. The results showed that with a heuristic column generation approach, real-world GTTRP instances can be solved in short time with high solution quality. However, the results for the TTRP benchmark instances were not so successful due to the low ratio of customer

supplies to vehicle capacity in these instances, which makes the use of labelling algorithms for the solution of the pricing problems highly difficult.

The implementations can still be improved significantly. As the computational experiments showed, the number of subproblems to be solved is the main factor influencing the computation times. Therefore, the most important refinements (which may make the solution of the larger Chao instances and the new instances by [32] possible) are:

- The inclusion of stabilization in the column generation process ([30], pp. 1017 ff.).
- The development of better lower bounding procedures, i.e., the addition of cutting planes. It would be particularly interesting to investigate (the possibility of) generalizing the two-path cuts used for the VRPTW ([27]) to a heterogeneous fleet with trailers.
- The solution of the pricing problems by branch-and-cut ([26]).
- The solution of the pricing problems by (meta)heuristics, and the embedding of the branch-and-price framework into a metaheuristic framework. Recently, [35] have obtained very good results for the VRPTW with a large neighbourhood search algorithm that uses heuristic branch-and-price (heuristic solution of the pricing problem by tabu search, depth-first branching without backtracking) as the reconstruction procedure. This appears to be a very promising approach also for the GTTRP.

The first two points would reduce the number of subproblems to be solved, the last two points would (hopefully) reduce the average time needed for solving one subproblem.

A very interesting and challenging further area of research is the *vehicle routing problem with trailers and transshipments (VRPTT)* ([13]). The GTTRP as described above is a special case of the VRPTT. In the VRPTT, the assumption of a fixed lorry-trailer assignment is abandoned. A trailer may be pulled by any compatible lorry on a part or on the whole of its itinerary, and any lorry may perform a load transfer to any trailer. Moreover, there may also be so-called *support vehicles* (lorries as well as trailers), which are not technically equipped to visit customers. The vehicles equipped to visit customers may use these support vehicles as mobile depots for load transfers (note that all location-routing problems described in [34] are special cases of the VRPTT as shown in [13]). The difficulty with the VRPTT is that, by abandoning the fixed lorry-trailer assignment, the so-called interdependence problem arises, that is, the tours of different vehicles become interdependent: In the simplest case, if a lorry l_1 wants to transfer load into a trailer at a certain transshipment location, the trailer must be at this location before the transfer can start. If a different lorry l_2 pulls this trailer to the location, l_1 's tour depends on l_2 's tour, and l_1 may have to wait. Moreover, the amount of load that l_1 can transfer is affected by the amount of load other lorries have transferred into the trailer before. Such interdependencies do not usually occur in VRPs studied in the literature and require special solution approaches. It is beyond the scope of this paper to elaborate further on this issue. Suffice it to say that vehicle routing problems with interdependent tours such as the VRPTT are an emerging topic in VRP research and to refer the reader to the recent survey [15].

As can be seen, a lot of interesting research remains to be done, for the GTTRP itself and for its potential extensions and generalizations.

References

- [1] R. Ahuja, T. Magnanti, and J. Orlin, “Network Flows”, *Prentice-Hall*, Upper Saddle River, 1993.
- [2] A. Assad and B. Golden, “Arc Routing Methods and Applications”, in: M. Ball, T. Magnanti, C. Monma, and G. Nemhauser (eds.), *Network Routing, Handbooks in Operations Research and Management Science*, vol. 8, *Elsevier*, Amsterdam, 1995, pp. 375–483.
- [3] C. Barnhart, E. Johnson, G. Nemhauser, M. Savelsbergh, and P. Vance, “Branch-and-Price: Column Generation for Solving Huge Integer Programs”, *Operations Research*, vol. 46, 1998, pp. 316–329.
- [4] L. Bodin and L. Levy, “Scheduling of Local Delivery Carrier Routes for the United States Postal Service”, in: M. Dror (ed.), *Arc Routing: Theory, Solutions, and Applications*, *Kluwer*, Boston, 2000, pp. 419–442.
- [5] N. Boland, J. Dethridge, and I. Dumitrescu, “Accelerated Label Setting Algorithms for the Elementary Resource Constrained Shortest Path Problem”, *Operations Research Letters*, vol. 34, 2006, pp. 58–68.
- [6] J. Brunswicker, “Optimale Standort- und Tourenplanung für die Rohmilcherfassung eines Molkereibetriebes”, *Lit*, Münster, 1986.
- [7] A. Chabrier, “Vehicle Routing Problem with Elementary Shortest Path Based Column Generation”, *Computers & Operations Research*, vol. 33, 2006, pp. 2972–2990.
- [8] I. Chao, “A Tabu Search Method for the Truck and Trailer Routing Problem”, *Computers & Operations Research*, vol. 29, 2002, pp. 33–51.
- [9] E. Choi and D. Tcha, “A Column Generation Approach to the Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem”, *Computers & Operations Research*, vol. 34, 2007, pp. 2080–2095.
- [10] G. Dantzig and J. Ramser, “The Truck Dispatching Problem”, *Management Science*, vol. 6, 1959, pp. 80–91.
- [11] M. Daskin, “Network and Discrete Location”, *Wiley*, New York, 1995.
- [12] G. Desaulniers, J. Desrosiers, I. Ioachim, M. Solomon, F. Soumis, and D. Villeneuve, “A Unified Framework for Deterministic Time Constrained Vehicle Routing and Crew Scheduling Problems”, in: T. Crainic and G. Laporte (eds.), *Fleet Management and Logistics*, *Kluwer*, Boston, 1998, pp. 57–93.
- [13] M. Drexl, “On Some Generalized Routing Problems”, *Ph. D. Thesis*, Faculty of Business and Economics, RWTH Aachen University, 2007.
- [14] M. Drexl, “Branch-and-Price and Heuristic Column Generation for the Generalized Truck-and-Trailer Routing Problem”, *Gutenberg School of Management and Economics, Johannes Gutenberg University Mainz*, No. 1102, 2011.

- [15] M. Drexler, “Synchronization in Vehicle Routing—A Survey of VRPs with Multiple Synchronization Constraints”, *Gutenberg School of Management and Economics, Johannes Gutenberg University Mainz*, No. 1103, 2011.
- [16] D. Feillet, P. Dejax, M. Gendreau, and C. Gueguen, “An Exact Algorithm for the Elementary Shortest Path Problem with Resource Constraints: Application to Some Vehicle Routing Problems”, *Networks*, vol. 44, 2004, pp. 216–229.
- [17] R. Fukasawa, H. Longo, J. Lysgaard, M. Poggi de Aragão, M. Reis, E. Uchoa, and R. Werneck, “Robust Branch-and-Cut-and-Price for the Capacitated Vehicle Routing Problem”, *Mathematical Programming, Series A*, vol. 106, 2006, pp. 491–511.
- [18] J. Gerdessen, “Vehicle Routing Problem with Trailers”, *European Journal of Operational Research*, vol. 93, 1996, pp. 135–147.
- [19] B. Golden, S. Raghavan, and E. Wasil (eds.), “The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges”, *Operations Research/Computer Science Interfaces Series*, vol. 43, *Springer*, New York, 2008.
- [20] A. Hoff, “Heuristics for Rich Vehicle Routing Problems”, *Ph. D. Thesis*, Molde University College, 2006.
- [21] A. Hoff and A. Løkketangen, “A Tabu Search Approach for Milk Collection in Western Norway Using Trucks and Trailers”, *Molde University College*, 2006.
- [22] A. Imai, E. Nishimura, and J. Current, “A Lagrangian Relaxation-Based Heuristic for the Vehicle Routing with Full Container Load”, *European Journal of Operational Research*, vol. 176, 2007, pp. 87–105.
- [23] I. Ioachim, S. Gélinas, F. Soumis, and J. Desrosiers, “A Dynamic Programming Algorithm for the Shortest Path Problem with Time Windows and Linear Node Costs”, *Networks*, vol. 31, 1998, pp. 193–204.
- [24] S. Irnich and G. Desaulniers, “Shortest Path Problems with Resource Constraints”, in: G. Desaulniers, J. Desrosiers, and M. Solomon (eds.), *Column Generation*, *Springer*, New York, 2005, pp. 33–65.
- [25] S. Irnich and D. Villeneuve, “The Shortest Path Problem with Resource Constraints and k -Cycle Elimination for $k \geq 3$ ”, *INFORMS Journal on Computing*, vol. 18, 2006, pp. 391–406.
- [26] M. Jepsen, B. Petersen, and S. Spoorendonk, “A Branch-and-Cut Algorithm for the Elementary Shortest Path Problem with a Capacity Constraint”, *Department of Computer Science, University of Copenhagen*, No. 08/01, 2008.
- [27] N. Kohl, J. Desrosiers, O. Madsen, M. Solomon, and F. Soumis, “2-Path Cuts for the Vehicle Routing Problem with Time Windows”, *Transportation Science*, vol. 33, 1999, pp. 101–116.
- [28] G. Laporte, “Location-Routing Problems”, in: A. Assad and B. Golden (eds.), *Vehicle Routing: Methods and Studies*, *Elsevier*, Amsterdam, 1988, pp. 163–197.
- [29] G. Laporte, Y. Nobert, and S. Taillefer, “Solving a Family of Multi-Depot Vehicle Routing and Location-Routing Problems”, *Transportation Science*, vol. 22, 1988, pp. 161–172.

- [30] M. Lübbecke and J. Desrosiers, “Selected Topics in Column Generation”, *Operations Research*, vol. 53, 2005, pp. 1007–1023.
- [31] S. Lin, V. Yu, and S. Chou, “Solving the Truck and Trailer Routing Problem Based on a Simulated Annealing Heuristic”, *Computers & Operations Research*, vol. 36, 2009, pp. 1683–1692.
- [32] S. Lin, V. Yu, and S. Chou, “A Note on the Truck and Trailer Routing Problem”, *Expert Systems with Applications*, vol. 37, 2010, pp. 899–903.
- [33] G. Nagy and S. Salhi, “Nested Heuristic Methods for the Location-Routing Problem”, *Journal of the Operational Research Society*, vol. 47, 1996, pp. 1166–1174.
- [34] G. Nagy and S. Salhi, “Location-Routing: Issues, Models and Methods”, *European Journal of Operational Research*, vol. 177, 2007, pp. 649–672.
- [35] E. Prescott-Gagnon, G. Desaulniers, and L. Rousseau, “A Branch-and-Price-Based Large Neighborhood Search Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Time Windows”, *Networks*, vol. 54, 2009, pp. 190–204.
- [36] G. Righini and M. Salani, “Symmetry Helps: Bounded Bi-Directional Dynamic Programming for the Elementary Shortest Path Problem with Resource Constraints”, *Discrete Optimization*, vol. 3, 2006, pp. 255–273.
- [37] S. Røpke, “Heuristic and Exact Algorithms for Vehicle Routing Problems”, *Ph. D. Thesis*, Department of Computer Science, University of Copenhagen, 2005.
- [38] M. Salani, “Branch-and-Price Algorithms for Vehicle Routing Problems”, *Ph. D. Thesis*, Faculty of Mathematical, Physical and Natural Sciences, University of Milan, 2005.
- [39] S. Scheuerer, “Neue Tabusuche-Heuristiken für die logistische Tourenplanung bei restringierendem Anhängereinsatz, mehreren Depots und Planungsperioden”, *Ph. D. Thesis*, Faculty of Business, Economics and Management Information Systems, University of Regensburg, 2004.
- [40] S. Scheuerer, “A Tabu Search Heuristic for the Truck and Trailer Routing Problem”, *Computers & Operations Research*, vol. 33, 2006, pp. 894–909.
- [41] F. Semet, “A Two-Phase Algorithm for the Partial Accessibility Constrained Vehicle Routing Problem”, *Annals of Operations Research*, vol. 61, 1995, pp. 45–65.
- [42] F. Semet and E. Taillard, “Solving Real-Life Vehicle Routing Problems Efficiently Using Tabu Search”, *Annals of Operations Research*, vol. 41, 1993, pp. 469–488.
- [43] P. Toth and D. Vigo (eds.), “The Vehicle Routing Problem”, *SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications*, Philadelphia, 2002.
- [44] R. Vahrenkamp, “Transportation Logistic in Rural Setting—The Case of Milk Collection”, *Department of Business and Economics, University of Kassel*, No. 5/1989, 1989.
- [45] F. Vanderbeck, “On Dantzig-Wolfe-Decomposition in Integer Programming and Ways to Perform Branching in a Branch-and-Price Algorithm”, *Operations Research*, vol. 48, 2000, pp. 111–128.
- [46] H. Williams, “Model Building in Mathematical Programming”, *Wiley*, Chichester, 1999.



UNIVERSIDAD
PABLO DE
OLAVIDE
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (12). Páginas 39-64.
Diciembre de 2011. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=52>

Análisis comparativo de sectores clave desde una perspectiva regional a través de matrices de contabilidad social: enfoques alternativos

CARDENETE, MANUEL ALEJANDRO

Institute for Prospective Technological Studies (IPTS)

European Commission-Joint Research Centre, Sevilla

Correo electrónico: Manuel-Alejandro.CARDENETE@ec.europa.eu

RESUMEN

El objetivo que se plantea en este trabajo es el de identificar los sectores clave y estratégicos para el desarrollo de economías a nivel regional y su comparación con el paradigma nacional. Para ello, se aplican diversas metodologías complementarias de análisis de sectores clave para las diferentes matrices de contabilidad social, en lugar de las tradicionales tablas input-output. Presentadas estas metodologías, se aplicarán a los casos de: Andalucía y Extremadura, regiones “objetivo 1” en el presente Marco Comunitario de Apoyo; Madrid y Cataluña, regiones con los mayores PIB regionales y fuera de esta clasificación; y, finalmente, España, de forma que sirva de paradigma o base de referencia para realizar dicho análisis comparativo.

Palabras clave: matrices de contabilidad social; modelos de equilibrio general aplicado; tablas input-output; sectores clave.

Clasificación JEL: C67; D57; R15.

MSC2010: 93D25.

Comparative Keysector Analysis from Regional Perspective Using Social Accounting Matrices: Alternative Approaches

ABSTRACT

The goal of this work is to identify key and strategic sectors for the development of economies at regional level. Therefore we develop a methodology analysis of key sectors using social accounting matrix instead of the traditional input-output tables. Presented this methodology, we apply it to the cases of: Andalusia and Extremadura, Objective Regions 1 in European Union for the European Structural Funds; also Madrid and Catalonia, to be the regions with more regional GDP in Spain; and finally to Spain, so that it serves as paradigm or base to carry out a comparative analysis.

Keywords: social accounting matrices; applied general equilibrium models; input-output tables; keysectors.

JEL classification: C67; D57; R15.

MSC2010: 93D25.



1. INTRODUCCIÓN

La detección de los sectores clave en cualquier economía, ya sea a nivel nacional como regional, es una cuestión fundamental a la que se han de enfrentar los *policymakers* a la hora de tomar decisiones de impulso de políticas favorecedoras del crecimiento económico. Su identificación, por lo tanto, se convierte en un objetivo fundamental, tanto para favorecer el crecimiento de las variables macroeconómicas como el PIB (producto interior bruto) o del VAB (valor añadido bruto), o como en el aumento del número de empleos. La evolución que las distintas ramas de actividad puedan ir teniendo a lo largo del tiempo, esto es, sectores productivos que dejan de dinamizar la economía o por el contrario, sectores que se dinamizan e impulsan al resto de la economía, deben ser tenidos en cuenta y estar perfectamente identificados. Como sabemos, una matriz de contabilidad social, cuya base es una tabla input-output, está generalmente aceptada que posee una validez aproximada de cinco años, dado que los cambios estructurales, que son los que aquí intentaremos captar, no se producen en tan corto periodo de tiempo.

Gracias a los modelos multisectoriales, bien sean tablas input-output o matrices de contabilidad social (o incluso modelización más compleja como los modelos de equilibrio general aplicado), podemos dar respuestas concretas a los *policymakers* de los efectos de apostar por una política económica u otra. Si se destina un millón de euros a un sector productivo y no a otro, podremos identificar los efectos multiplicadores que se generan –o se pierden– y el número de empleos que se crean –o se destruyen–. Preguntas de este tipo son realizadas a cualquiera de los niveles –local, regional, nacional y/o multinacional– por parte de los diferentes gobiernos e instituciones supranacionales y respondidas en muchos casos por modelos de estas características. La sencillez en la interpretación de los resultados y la robustez de las bases de datos que lo sustentan juegan a favor.

El trabajo se dividirá en una primera parte teórica –epígrafe 2– donde se presentarán las diferentes técnicas de análisis de sectores clave aplicadas a las diferentes SAM (acrónimo del término inglés *Social Accounting Matrix* o Matriz de Contabilidad Social). En el epígrafe 3 encontraremos la sección empírica en donde analizaremos las diferentes ramas de actividad de cada una de las economías regionales seleccionadas y la española, identificando los sectores productivos dinamizadores de las diferentes economías y que nos permitirán comparar sus estructuras productivas. El trabajo se completa con un resumen –epígrafe 4– de las conclusiones más importantes.

2. APLICACIÓN DE METODOLOGÍAS INPUT-OUTPUT SOBRE MATRICES DE CONTABILIDAD SOCIAL¹

Para el objetivo marcado, vamos a utilizar metodologías tradicionales del análisis input-output, pero aplicadas a matrices de contabilidad social y que son bases de datos donde se recogen transacciones económicas en términos de flujos de rentas y que permiten extraer información sobre los diferentes agentes económicos, tales como productores, consumidores, administración pública y sector exterior; así como sobre el comportamiento de los factores productivos. Por lo tanto, la novedad de este trabajo es tanto la aplicación de metodologías input-output a matrices de contabilidad social, como su utilización para capturar de formas alternativas sectores clave.

Mientras que las tablas input-output (TIO), trabajan desde una óptica más parcial derivada de la propia base de datos utilizada, las SAM permiten ahondar en el engranaje de interrelaciones complementando a las TIO al captar otro tipo de comportamiento al margen de los intersectoriales. Esta limitación señalada de la metodología input-output ha sido suficientemente argumentada en la literatura², por lo que consideramos innecesario extendernos en este aspecto. En cuanto a las matrices de contabilidad social, cabe resaltar que parten de la propia TIO complementada con información procedente de la encuesta de presupuestos familiares o de la contabilidad nacional (o regional), por lo que permiten desglosar en mayor profundidad los resultados obtenidos. En cualquier caso, a pesar de la ventaja manifiesta de la SAM de cerrar el flujo circular de la renta y, por lo tanto, lograr explicar la interrelación entre los inputs primarios y la demanda final, ambas bases de datos poseen las limitaciones de cualquier base de datos elaborada a partir de información primaria –en algunos casos de información secundaria–, intentando capturar la fotografía fija de una economía, en su globalidad, con los problemas de contemporizar diferentes fuentes de datos, dada la gran demanda de los mismos necesaria para su elaboración.

De una forma más explícita podríamos decir que, basándonos en la tecnología de Leontief, trabajamos con una matriz más sofisticada que logra cerrar el flujo circular de la renta, como decíamos anteriormente. Además contamos con la ventaja adicional de que se cumplen las identidades tanto macroeconómicas como microeconómicas básicas, siguiendo las especificaciones del equilibrio general walrasiano. En definitiva, las matrices de contabilidad social son bases de datos habitualmente utilizadas en los modelos de equilibrio general aplicado, que muestran la naturaleza de las interrelaciones económicas, satisfaciendo las condiciones de optimalidad en el comportamiento de los agentes, la factibilidad tecnológica y las restricciones en términos de recursos productivos.

¹ Véase para más información Lima, Cardenete, Vallés y Hewings (2005).

² Ver, al respecto, Roland-Holst (1990).

Haciendo un breve recorrido por las secciones que siguen a continuación, en primer lugar se presenta un apartado donde se desarrollará la metodología de detección de sectores clave, a partir de los modelos de Rasmussen (1956). Seguidamente replicaremos el análisis mediante la metodología de extracción de sectores a partir de Dietzenbacher *et al.* (1993). Finalmente y para completar los dos métodos anteriores, obtendremos la matriz de multiplicadores contables (MPM) siguiendo a Sonis *et al.* (1997) y elaboraremos el denominado *structural path analysis landscape* o “paisaje tridimensional”³, con lo que proponemos plantear un análisis estructural de las diferentes economías analizadas.

Con respecto a esta última aproximación, lo usual es que si disponemos de tablas input-output para más de un año, es posible realizar un análisis integral de la estructura productiva de una economía y obtener además una perspectiva de sus cambios a lo largo del tiempo. En este trabajo, como novedad tendremos que la aplicación se realizará no sobre una TIO sino sobre una SAM y además sustuiremos el análisis temporal del *landscape*, con el análisis comparativo entre las diferentes regiones, tomando como base la SAM de España. Esto nos permitirá obtener una nueva matriz derivada de las SAM, y elaborar una jerarquización de los sectores clave de las diferentes economías estudiadas de forma comparada.

Encontramos trabajos similares en los que se combinan diferentes técnicas de detección de sectores clave. Entre otros, Iráizoz (2006), aplicado a tablas input-output de la Comunidad Navarra o Cardenete *et al.* (2008) y Cardenete *et al.* (2010), aplicados a matrices de contabilidad social de Andalucía. Señalar que hay semejanzas en las conclusiones obtenidas en los diferentes trabajos, tanto en cuanto dependiendo del grado de agregación de la base de datos, la detección de sectores clave por diversos métodos muestra resultados ligeramente diferentes.

2.1. Metodología para la determinación de sectores clave a la Rasmussen

La primera de las aproximaciones seguirá la propuesta de Rasmussen (1956) a partir de la definición de *backward* y *forward linkages*, o efectos arrastre y difusión, respectivamente, calculados a partir de la inversa de Leontief. Sea $B = (I-A)^{-1} = b_{ij}$, la inversa de Leontief y sean $B_{.j}$ y $B_{i.}$ los multiplicadores columnas y filas de esta inversa de Leontief:

$$B_{.j} = \sum_{i=1}^n b_{ij} \quad j = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$B_{i.} = \sum_{j=1}^n b_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

³ Para más detalles, ver los trabajos de Hewings, G.J.D. *et al.* (1997) o Sonis, M. *et al.* (1997), para las economías de Chicago e Indonesia, respectivamente.

Sea también V , o intensidad global, la matriz que se corresponde con la suma de todos los elementos de la matriz inversa asociada:

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \quad (3)$$

El efecto difusión del sector j (BL_j) y el efecto absorción del sector i (FL_i) se definirán como sigue:

- Poder de dispersión de vínculos hacia atrás, efectos arrasatre ó *backward linkages*, BL_j :

$$BL_j = \frac{B_{.j}}{\frac{1}{n}V} \quad j = 1 \dots n \quad (4)$$

- Poder de dispersión de vínculos hacia delante, efectos difusión ó *forward linkages*, FL_i :

$$FL_i = \frac{B_{i.}}{\frac{1}{n}V} \quad i = 1 \dots n \quad (5)$$

Es conveniente aclarar que el resultado de ambas fórmulas –(4) y (5)– no es más que la normalización de los elementos integrantes de los multiplicadores columnas y filas de la inversa de Leontief – $B_{.j}$ y $B_{i.}$ –. En cualquier caso, la interpretación de estos coeficientes sería la siguiente:

- Si el vínculo hacia atrás es superior a uno ($BL_j > 1$ o superior al 100% si hablamos en términos porcentuales), un cambio en una unidad en la demanda final del sector j generará un aumento por encima de la media en la actividad global de la economía.
- Si es superior a uno el vínculo hacia delante ($FL_i > 1$), un cambio en una unidad en todos los sectores de la demanda final, generará un incremento por encima de la media en el sector i .

Por lo tanto, un sector clave será aquel en el que tanto los *forward* como los *backward linkages* sean superiores a la unidad. En el caso de ser ambos menores que la unidad, será un sector independiente, aislado o “anticlave”. Si es solo uno de los dos efectos (*forward* o *backward*) los que son mayores que la unidad, se definirán como base o impulsor, respectivamente.

Tabla 1. Clasificación de los sectores en función de los BL y FL.

	BL<1	BL>1
FL<1	Sector independiente	Sector impulsor
FL>1	Sector base	SECTOR CLAVE

Fuente: elaboración propia.

2.2. Metodología para la determinación de sectores clave a partir del método de extracción hipotética

El segundo de los procedimientos usados en la detección de sectores clave descansa en la idea de analizar la importancia de un sector mediante el análisis de las consecuencias que se seguirían de eliminar un sector dentro del sistema input-output –o de una SAM en nuestra propuesta de análisis–. Las diferencias de output, con y sin el sector, medirán la importancia de dicho sector. Cronológicamente hablando, la primera propuesta de detección de sectores clave a través de métodos de extracción fue la de Paelinck *et al.* (1965), mejorada y refinada en trabajos como los de Strassert (1968), Schultz (1977), Cella (1984), Clements (1990) y Heimler (1991). En este trabajo partimos de la propuesta de Dietzenbacher *et al.* (1993), como versión revisada de anteriores métodos de extracción y que se considera la más paradigmática de todas ellas.⁴

La importancia del sector se calculará también en términos de *backward linkages* o efecto arrastre y *forward linkage* o efecto difusión, calculándose a partir de la diferencia de output entre el sistema económico completo y sin el sector extraído. Para no hacer demasiado extenso y redundante este apartado, explicaremos brevemente solo el primero de los efectos⁵, *BL*, tal y como se presenta en la siguiente ecuación:

$$x - \bar{x} = \begin{pmatrix} x^i - \bar{x}^i \\ x^r - \bar{x}^r \end{pmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} L_n^{ii} & L_n^{ir} \\ L_n^{ri} & L_n^{rr} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (I - A_n^{ii})^{-1} & 0 \\ 0 & (I - A_n^{rr})^{-1} \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} f^i \\ f^r \end{pmatrix} \quad (6)$$

donde x será el output total con el sistema económico completo, \bar{x} con el sector extraído, L la matriz inversa de Leontief, A la matriz de coeficientes técnicos, f el vector de demanda final, y los superíndices i y r , representarán los del sector extraído y el resto del sistema, respectivamente. El orden n de las matrices coincidirá con el de los sectores productivos o ramas de actividad, en el caso que trabajemos con una TIO, o será un número superior, cuando consideremos más cuentas como endógenas, al trabajar con la SAM. Tradicionalmente se incorporan como endógenas las cuentas del trabajo, capital y consumo, dejando como exógenas, el ahorro/inversión, gobierno y sector exterior. La razón es, por un lado, cerrar el flujo circular de la renta con la endogenización y, por otro lado, dejar como exógenas las cuentas “manipulables” como potenciales shocks exógenos derivados de políticas económicas.

Siguiendo la interpretación de esta expresión realizada por Dietzenbacher *et al.* (1993), los efectos totales de la parte izquierda de la ecuación, recogen los efectos arrastre del sector i sobre el resto de la economía y del resto de la economía sobre el sector i . En nuestra aplicación empírica computamos el vector $x - \bar{x}$, extrayendo en cada caso un sector o rama de actividad, por lo tanto, se realizará n veces. Cualquier elemento (i,j) de esta matriz representará el caso en

⁴ Una revisión de los *métodos de extracción* lo podemos encontrar en Lahr y Miller (2001).

⁵ Para ver con detalle la forma de obtención del *FL*, véase Dietzenbacher *et al.* (1993).

el que el sector j ha sido extraído. La diagonal de esta matriz (j,j) medirá el efecto arrastre del resto de sectores sobre el sector j , esto es lo que denominamos *efecto backward feedback intrasectorial*. Por lo tanto, los elementos no pertenecientes a la diagonal principal de la matriz representarán los *backward linkages*, propiamente dichos. Si sumamos los elementos de cada columna de la matriz de extracción, obtendremos los efectos totales (o *total linkages*).

2.3. Metodología para determinar sectores clave a partir de la matriz MPM de las SAM

Para finalizar y completar el examen de determinación de sectores clave, realizaremos el análisis estructural de una economía y conoceremos qué tipos de vínculos o enlaces funcionan en su interior, observando los cambios en los niveles de flujos intermedios entre sectores. Siguiendo a Sonis *et al.* (1997), utilizamos un instrumental que permite estudiar las interrelaciones de una economía mediante el cálculo de una *matriz del producto multiplicador* (MPM), obtenida a partir de la matriz de multiplicadores contables de la SAM.

Reordenando las relaciones intersectoriales según su importancia, podemos analizar cómo afecta sobre la actividad económica un cambio en la demanda final de un sector (“efecto arrastre”, vínculos hacia atrás o *backward linkage*) y paralelamente, cómo influye un cambio en el resto de sectores sobre otro en cuestión (“efecto difusión”, vínculos hacia delante o *forward linkage*). Dichos efectos nos proporcionarán una orientación clara sobre cuáles son los sectores clave en la actividad de una economía y serán además, los idóneos para diseñar sobre ellos actuaciones desde la política económica, estando avalados por un elevado efecto multiplicador e impulsor de actividad que tales intervenciones generarán.

Del análisis explicitado anteriormente, podríamos inferir un conjunto de implicaciones de tipo macroeconómico, pero dicho ejercicio podría quedar incompleto si no tratamos de responder a preguntas como cuál sería el efecto de un cambio en el multiplicador de un sector sobre los sectores que son sus proveedores. Con ello queremos saber si el porcentaje en que contribuye cada proveedor a la producción final de otro permanecería invariable, o no, en el caso de que se produjera un cambio en este otro sector.

Para poder analizar las interdependencias sectoriales en una economía, debemos calcular la matriz del producto multiplicador, MPM, a partir de la matriz de propensiones medias de las cuentas de las SAM identificadas por un subíndice, t , para cada una de las bases de datos objeto de análisis. Tales matrices de propensiones medias se calculan dividiendo cada uno de los vectores columna de la SAM utilizada, entre la suma de dicha columna, de forma que obtenemos una matriz expresada en tantos por uno. Para estas tres matrices, n es el número de variables endógenas (formadas por los sectores productivos, los factores de producción y los consumidores). A continuación calculamos la matriz inversa asociada $B_t = (I - A_t)^{-1}$, siendo I una matriz identidad de orden $n \times n$. Los subíndices i, j hacen referencia, respectivamente, a

las filas y columnas de las matrices correspondientes. Siguiendo la metodología de *path analysis*, comenzamos obteniendo unos vectores de multiplicadores $(B_{.j}, B_i)$, en los que cada elemento se corresponde con la suma de una columna y fila, respectivamente, siendo los b_{ij} , los elementos de la matriz inversa asociada B_i .

A continuación definimos la Matriz del Producto Multiplicador como el producto de los multiplicadores fila y columna, corregidos por la intensidad global o suma de todos los elementos de la matriz inversa asociada (V):

$$MPM = \frac{1}{V} \| B_i B_{.j} \| \quad i, j = 1 \dots n \quad (7)$$

Esta nueva matriz nos va a permitir identificar sectores cuyos enlaces estructurales generan un impacto superior a la media en el resto de la economía, bien en el caso de que ellos mismos experimenten un cambio o en respuesta a modificaciones detectadas en el resto del sistema. Rasmussen (1956) y Hirschman (1958) denominan a estos sectores sectores clave, como ya hemos explicado. Además de obtener cuantitativamente la importancia de los sectores, la MPM no permitirá representar estas bases de datos gráficamente, jerarquizando los sectores económicos por su importancia, como se pueden ver en las Figuras A.1 a 1a A.5 (en el Anexo), tomando como referencia o numerario el de la economía española. De esta forma, podremos ver las similitudes o semejanzas de cada región con respecto al contexto nacional.

3. APLICACIÓN EMPÍRICA

3.1. Las bases de datos

Como venimos comentando, una de las aportaciones del presente trabajo es que utilizamos como base de datos la SAM con un determinado grado de endogeneización de sectores institucionales, de forma que cerramos adecuadamente el flujo circular de la renta. Para ello, cuando menos, deberían estar endogeneizados para el cálculo de la matriz de multiplicadores contables –que no ya matriz de coeficientes técnicos– la renta de los factores productivos (trabajo y capital) y los hogares. De esta forma, al analizar los *BL*, el cambio en la demanda final de un sector, no solamente recogerá cómo cambian el resto de los sectores para “abastecer” ese cambio en la demanda final, sino que al incrementarse la actividad productiva, también se incrementará la remuneración de los factores y el gasto de los consumidores, que al cerrarse el flujo circular de la renta, influirán nuevamente sobre los sectores productivos en “segunda vuelta”. Por lo tanto, los *BL* se ajustarán más a la realidad que mediante el cálculo solamente de los efectos de cambios en la demanda final de un sector sobre el resto de los sectores productivos.

Como en la aplicación anterior, se va a considerar que quedan exógenas las cuentas relativas al sector público y las variables que quedan fuera de control por el sistema económico nacional, es decir, el sector exterior. La inversión se supone endógena en el modelo, así como el trabajo y el capital, es decir los factores productivos. Esta hipótesis es la más utilizada en este tipo de modelos, como por ejemplo los formulados por Polo *et al.* (1991), para la economía española.

Una de las mayores dificultades que tiene la elaboración de una SAM es la gran cantidad de datos que son necesarios y que normalmente proceden de distintas fuentes, lo que suele crear inconsistencia o descuadres en la SAM. Por ello, una de las tareas más complicadas en la construcción de la SAM es, por un lado, obtener toda la información necesaria y, por otro, hacer compatibles las diferentes fuentes de información para dar consistencia a la SAM, lo que lleva en ocasiones a tener que elegir entre diferentes fuentes que aportan información dispar sobre el mismo dato. Además, se ha tenido que realizar un trabajo de homogeneización entre las diferentes SAM (véase la Tabla 1)⁶. Finalmente cabe señalar que el análisis se ha implementado con el software *PYTHON 2.2*, desarrollado por la Universidad de Illinois (Urbana-Champaign, EEUU) dentro del *Regional Economics Applications Laboratory*. Dicho software es de libre disposición.⁷

Tabla 2. Estructura común de las Matrices de Contabilidad Social.

1	Agricultura, ganadería, pesca y silvicultura
2	Producción y dist. de agua, electricidad, gas
3	Extractivas
4	Industria manufacturera
5	Construcción
6	Comercio
7	Transporte y comunicaciones
8	Hostelería
9	Servicios destinados a la venta
10	Servicios no destinados a la venta
11	Trabajo
12	Capital
13	Consumo
14	FBK
15	Cotizaciones sociales empleadores
16	Impuestos indirectos netos
17	Tarifas
18	IVA
19	Cotizaciones sociales empleados
20	IRPF
21	Sector público
22	Sector exterior

Fuente: elaboración propia.

Nota: sectores endógenos, del 1 al 13; sectores exógenos, del 14 al 22.

⁶ Las SAMs corresponden a trabajos anteriores: España 1998 (Morilla, Cardenete y Llanes, 2005); Andalucía 2000 (Cardenete, Fuentes y Polo, 2010); Extremadura (De Miguel, Cardente y Pérez, 2005), Cataluña 1994 (Llop y Manresa, 1999) y Madrid 2000 (Cámara, 2007).

⁷ El software puede ser descargado directamente en <http://www.real.illinois.edu/pyio/>

3.2. Análisis de los resultados⁸

3.2.1. Sectores clave a la Rasmussen

Para comenzar el análisis de los resultados a partir de la metodología de Rasmussen, recordemos el significado de sector clave utilizando para ello, como ejemplo, el caso de la cuenta de “Comercio (6)” en la SAM de Andalucía de 2000. Observamos que un cambio en la demanda final del mencionado sector, genera un aumento en la actividad de la economía de un 12,5% por encima de la media –que se corresponde con un *BL* de 1,125–, es decir, una reacción del resto de los sectores por encima de la reacción media esperada. Dicho dato se interpreta en el sentido de que si el sector servicios aumenta en la economía española, genera un efecto de difusión en el resto de sectores algo por encima del propio shock experimentado por dicho sector. Este es el llamado efecto arrastre o *backward linkage*. En cuanto al efecto difusión o *forward linkage*, un cambio de una unidad en la demanda final de todos los sectores, produce un aumento de la actividad de la cuenta de “Comercio (6)” de algo más de un 2,5%, de nuevo por encima de la media –y que se corresponde con un *FL* de 1,025–. Por lo tanto, el Comercio reacciona de una manera importante en momentos de bonanza económica ya que es arrastrado por dicha situación bastante más de lo que correspondería en términos medios.

Al ser los dos comportamientos descritos anteriormente superiores al 100%, el “Comercio (6)” quedaría clasificado como clave para la economía andaluza del año 2000. Además de él, se comportan como sectores clave “Trabajo (11)” y “Capital (12)”. Para Extremadura se repiten el “Trabajo (11)”, “Capital (12)” y “Comercio (6)” y se posiciona entre los sectores relevantes en términos de generación de actividad económica el “Servicios destinados a la venta (6)”. En el caso de Madrid se repiten “Trabajo (11)”, “Capital (12)”, sustituyéndose el “Comercio (6)” de las regiones zona objetivo 1, por el “Consumo (13)” junto con los “Servicios destinados a la venta (9)”. Para Cataluña, sus sectores clave son los mismos que para Madrid uniéndose el “Comercio (6)”. El paradigma económico que representa España, repite comportamiento exactamente igual que la economía madrileña, esto es, los sectores “Consumo (13)”, “Capital (12)”, “Trabajo (11)” y “Servicios destinados a la venta (9)”.

En un primer vistazo, observamos comportamientos homogéneos entre las dos primeras economías –Andalucía y Extremadura– y las otras tres –Madrid, Cataluña y España–, donde en el caso de la Comunidad de Madrid, el comportamiento es exactamente igual que el español. También podemos ver en esta primera aproximación cómo los “Servicios destinados a la venta (9)”, en mayor medida (4 de las 5 bases de datos) y el “Comercio (6)”, en menor medida, (3 de las 5 bases de datos) confirman la terciarización de la economía española.

⁸ Para poder analizar todos los resultados posibles, se remitirían por correo electrónico, a quien las solicitara, las 25 tablas que componen todo el trabajo. No se han incluido para evitar una extensión excesiva del artículo.

Dejando de lado los sectores clave, nos centramos ahora en aquellos sectores que, aunque no se comportan como clave porque el valor de sus *forward linkages* es reducido, sí que poseen una gran capacidad de acelerar la actividad económica cuando experimentan un cambio en su propia demanda final, es decir, registran un alto efecto arrastre o *backward linkage*. En nuestro caso, hemos tomado como *BL* representativo, aquel que supere el 0,8. La razón de esta inclusión en el análisis viene dada por el elevado grado de agregación de las SAMs usadas –obligado por la homogeneización de las diferentes bases de datos utilizadas en el ejercicio– y que da lugar a la detección de pocos sectores clave. Al flexibilizar la norma, aparecen nuevos sectores interesantes, que aunque no son clave desde un punto de vista estricto, merecen la pena de ser analizados, en principio. Pues bien, a pesar de este relajo en el supuesto, de nuevo encontramos patrones de comportamientos semejantes.

Las economías andaluza y extremeña coinciden exactamente en sus sectores con efectos arrastre importantes, salvo en “Servicios destinados a la venta (9)” que sí lo es para Andalucía – para Extremadura, directamente es clave– y el sector de “Servicios no destinados a la venta (10)”. Estos son: “Hostelería (8)”, “Transporte y comunicaciones (7)”, “Construcción (5)”, “Energía (2)” y “Agricultura, ganadería y silvicultura (1)”. De nuevo, Madrid y Cataluña se muestran semejantes en sus sectores con elevado efecto arrastre, no coincidiendo solo en el sector “Comercio (6)” que para Madrid sí lo es y para Cataluña es sector clave. Los sectores comunes son “Servicios no destinados a la venta (10)”, “Hostelería (8)”, “Transporte y comunicaciones (7)”, “Construcción (5)”, “Energía (2)”. En el caso de la base de datos nacional, su semejanza es mayor con las economías extremeñas, madrileñas y catalanas, con solo algún sector no coincidente. En cualquier caso, la semejanza entre todas las economías es bastante elevada.

Asimismo, si replicamos esta flexibilización en la norma y analizamos los *forward linkages* y, por lo tanto, aquellos sectores que aunque no se comportan como claves, sí son muy elásticos a aumentos en la demanda final del resto de ramas de actividad – $FL > 0,8$ –, observamos que existe un sector común para toda la economía y es la “Industria manufacturera (4)”. En el caso de las economías andaluzas y extremeñas hay que añadir el “Consumo (13)” y, particularmente en el caso andaluz, también el sector de “Extractivas (3)”.

Finalmente, si por otro lado analizáramos los sectores “anticlave”, esto es, los que poseen menores *backward* y *forward linkages*, encontramos total coincidencia entre todas las economías con el sector de menor efecto arrastre y se trata de las “Extractivas (3)”. En cuanto a los efectos difusión poco importantes, sí existe más disparidad. Para Andalucía son “Servicios no destinados a la venta (10)” y “Energía (2)” los de menor *forward linkage*; para Extremadura, “Extractivas (3)”, “Energía (2)” y “Construcción (5)”; para Madrid “Extractivas (3)” y “Agricultura, ganadería y silvicultura (1)”; para Cataluña “Construcción (5)” y “Servicios no destinados a la venta (10)”; y, finalmente, para España “Construcción (5)”, “Extractivas (3)”,

“Energía (2)” y “Agricultura, ganadería y silvicultura (1)”. Parece, en cualquier caso, que los sectores “Construcción (5)” y “Extractivas (3)” son los sectores con menor capacidad de difundir a la economía un impacto ante cambios en los input primarios. En la Tabla 3 resumimos estos resultados con más detalle.

Tabla 3. Sectores clave de las economías a partir de Rasmussen

	Andalucía	Extremadura	Madrid	Cataluña	España
Sectores Clave	12	12	13	13	13
	11	11	12	12	12
	6	6	11	11	11
		9	9	9	9
				6	
Forward Linkages (>0,800)	13	13	4	4	4
	4	4			
	3				
Backward Linkages (>0,800)	9	10	10	10	10
	8	8	8	8	8
	7	7	7	7	7
	5	5	6	5	6
	2	2	5	2	1
	1	1	2		
Forward Linkages (<0,400)	10	5	3	10	5
	2	3	1	5	3
		2			2
					1
Backward Linkages (<0,400)	3	3	3	3	3
			1		

Fuente: elaboración propia.

3.2.2. Sectores clave mediante el método de extracción

En la segunda aproximación a la detección de los sectores clave, recurrimos al método de extracción. De las diferentes formas de computarlo, recurriremos a la propuesta por Dietzenbacher *et al.* (1993). La importancia de un sector estará representada en términos de *backward* y *forward linkages* dentro de un sistema económico donde se extrae o no hipotéticamente un sector productivo. Concretamente, el cálculo del primero se realiza en términos de la inversa de Leontief –en nuestro caso incluyendo las cuentas de Trabajo, Capital y Consumo– y para el segundo en términos de la *ghoshiana* –esto es, con el modelo alternativo “rotado” al de Leontief, donde los coeficientes se determinan en horizontal, en lugar de en vertical–. La razón de optar por este modelo de oferta de Leontief o modelo de Ghosh, es que

permite obtener *forward linkages*, que como ya hemos dicho, captan cambios de una unidad en la demanda final de todos los sectores.

Analizando los cinco sistemas económicos objeto de análisis, observamos en la Tabla 3 los cinco *backward* y *forward linkages* más importantes. Si comenzamos con los *backward linkages*, donde captaremos la importancia del cambio en la demanda de un sector j sobre toda la economía, la interpretación de los resultados sería la siguiente: tomemos la primera de ellas, aplicada a Andalucía. La primera columna nos daría el impacto sobre el output total cuando eliminamos hipotéticamente el sector 1 del sistema. En este caso, sería de 776.198 miles de euros. Dietzenbacher *et al.* (1993) llama a este impacto *feedback effect*. Por ejemplo, 66.592 miles de euros en esa misma columna, nos daría el efecto sobre el sector 2 cuando extraemos el sector 1, y así sucesivamente.

Podemos encontrar pautas comunes de comportamiento entre dichas economías. Así, en las cinco economías se repite el mayor efecto *feedback* entre los sectores (Consumo, Trabajo) –es decir, un mayor impacto sobre el Consumo si extrajéramos el sector Trabajo–. En la misma línea se repite en cuatro de las cinco economías los mayores efectos *feedback* entre los sectores (Consumo, Consumo) –Andalucía, Madrid, Cataluña y España–, (Consumo, Capital) –Andalucía, Extremadura, Madrid, y España– y (Consumo, Trabajo) –Andalucía, Extremadura, Madrid, Cataluña, España–. Por otro lado, encontramos pautas comunes y únicas entre los sectores con mayor *backward linkages* entre las economías andaluza y extremeña como son “Industria manufacturera (4)” con “Consumo (13)”, así como “Capital (12)” con respecto a “Capital (12)” para las comunidades madrileñas y catalana. Finalmente, también se produce una coincidencia entre los primeros efectos *feedback* entre Madrid y España en los sectores “Trabajo (11)” con respecto a “Trabajo (11)”. Estas coincidencias particulares nos vuelven a transmitir la idea ya obtenida en la primera aproximación de la coincidencia en estructura productiva entre Andalucía y Extremadura por un lado, Cataluña y Madrid por otra y finalmente, la mayor afinidad existente en Madrid y España.

Con respecto a los *forward linkages* la interpretación, como ya venimos explicando, sería el impacto sobre el sector j de un cambio en la demanda final de todos los sectores. En este caso y siguiendo el método de extracción, si tomamos de nuevo la economía andaluza, en la primer columna veremos que si eliminamos el sector “Agricultura (1)”, la caída en el output de dicho sector sería de 1.069.180 miles de euros. Del mismo modo, la caída del output del sector “Producción y distribución de Agua, Electricidad y Gas (2)” al extraer el sector 1, sería de 18.302 miles de euros.

De nuevo, presentamos en la Tabla 4 las cinco interacciones de mayor impacto con el método de extracción. Volvemos a observar pautas comunes de comportamiento. Así, las cuentas (Consumo, Consumo), poseen el mayor efecto *forward linkage* para las cinco economías. Le sigue la relación (Capital, Consumo) para cuatro de las cinco economías

–Extremadura, Madrid, Cataluña y España– junto con (Trabajo, Trabajo). De forma independiente y única, se manifiesta para Andalucía la relación (Consumo, Industria manufacturera), para Extremadura (Capital, Industria manufacturera), para Madrid (Trabajo, Trabajo) y para Cataluña (Capital, Capital).

A modo de resumen, hemos de decir que el método de extracción replica características ya analizadas en la aproximación realizada anteriormente por la metodología de Rasmussen y quizás son más significativos los resultados no coincidentes que los coincidentes. Este se ve claramente en los efectos *forward linkages* anteriormente comentados, donde este comportamiento específico de cada economía pues, nos define de forma muy sintética la base estructural de cada una de las mismas.

Tabla 4. Sectores clave a partir del método de extracción a la Dietzenbacher *et al.* (1993)

	Andalucía	Extremadura	Madrid	Cataluña	España
Backward Linkages	(13,13)	(13,12)	(13,13)	(13,13)	(13,13)
	(13,12)	(13,11)	(13,12)	(13,11)	(13,12)
	(13,11)	(11,11)	(13,11)	(13,9)	(13,11)
	(12,13)	(4,13)	(12,12)	(12,12)	(11,11)
	(4,13)	(4,4)	(11,11)	(9,9)	(4,4)
Forward Linkages	(13,13)	(13,13)	(13,13)	(13,13)	(13,13)
	(13,4)	(12,13)	(12,13)	(12,13)	(13,2)
	(11,13)	(12,12)	(11,13)	(12,12)	(12,13)
	(11,11)	(12,4)	(11,11)	(11,13)	(11,11)
	(4,4)	(11,13)	(9,9)	(11,11)	(4,4)

Fuente: elaboración propia.

3.2.3. Sectores clave mediante la MPM y los paisajes tridimensionales

Finalmente y para completar esta aproximación a la detección de sectores clave, vamos a utilizar la metodología denominada *structural path analysis*, que nos permite representar gráficamente un “paisaje tridimensional” que recoge la estructura de enlaces entre los sectores productivos, a partir de la metodología de Sonis *et al.* (1997). Dichos vínculos proporcionan información para analizar el efecto de un cambio en la demanda final de un sector sobre toda la economía andaluza o la influencia de la expansión de un sector sobre el resto de sectores. Toda la información mencionada se recoge en los llamados *backward linkages* y *forward linkages*. Hemos realizado un análisis comparativo entre las diferentes regiones tomando como base la estructura de la economía española (Figuras A.1 a A.5 del Anexo). Para ello, se ha tomado la estructura jerarquizada de los multiplicadores de la economía española, fijándose para el resto de las economías regionales, introduciendo posteriormente sus valores respectivos. Así, de una forma visual y simple, podemos observar las diferencias –o no– entre la economía nacional y

cada una de las regiones, simplemente comprobando que la figura tridimensional está ordenada de mayor o menor –lo que implicaría que la jerarquía de los multiplicadores de la economía en cuestión coincide con la nacional– o todo lo contrario –presentado la figura un desorden visual por tener valores de sus multiplicadores que no respetan la jerarquía de la matriz de referencia (la de la economía española, en nuestro caso)–. Recorriendo brevemente los resultados del análisis y comenzando con la economía andaluza, visualizamos cómo la cuenta “Consumo (13)”, en cualquiera de sus interacciones con cualquiera de los demás sectores, muestra el mayor nivel de impacto económico; de forma más relevante en su interacción con la cuenta de “Servicios destinados a la venta (9)” y “Agricultura, ganadería, pesca y silvicultura (1)”. Por el lado opuesto, la cuenta “Servicios no destinados a la venta (10)”, muestra la menor fuerza en términos económicos, máxime con su interacción con las cuentas “Industria manufacturera (4)” y “Extractivas (3)”. Los resultados obtenidos para el caso andaluz muestran que los consumidores generan importantes efectos multiplicadores sobre la actividad económica, así como la importancia de los servicios y la agricultura. En cuanto a los servicios, de manera generalizada, muestran un alto efecto difusor durante todo el período considerado, resultado esperado dado el peso del sector terciario en la economía andaluza. Debemos destacar el buen comportamiento tanto de los servicios de mercado como de los de no mercado o servicios públicos para generar efectos multiplicadores sobre la economía andaluza. Con respecto a la economía extremeña, observamos que el sector “Consumo (13)” se muestra como el de mayor importancia en términos de sector clave. Su interacción con los sectores “Transporte y comunicaciones (7)” y “Servicios no destinados a la venta (10)” alcanzan su máximo exponente. En el lado opuesto se encuentra el sector “Construcción (5)”, como el menor dinamizador de la economía extremeña, máxime en su relación con las cuentas “Industria manufacturera (4)” y “Extractivas (3)”. La economía madrileña encuentra como sectores más dinamizadores a las cuentas “Consumo (13)” y “Capital (12)”, alcanzando su máximo nivel en las interacciones entre “Consumo (13)” con “Trabajo (11)” y “Consumo (13)” con “Servicios no destinados a la venta (10)”. En el lado opuesto están las cuentas de “Agricultura, ganadería, pesca y silvicultura (1)” y “Extractivas (3)”, alcanzando menor nivel de impacto económico la relación entre “Agricultura, ganadería, pesca y silvicultura (1)” y el propio sector o con el sector “Extractivas (3)”. En el caso de la economía catalana, se repiten patrones similares a los de la economía madrileña, siendo los sectores “Consumo (13)” y “Capital (12)” los más dinamizadores. La mayor interacción la alcanzan las cuentas “Consumo (13)” con “Servicios destinados a la venta (9)” y con “Producción y distribución del agua, electricidad y gas (2)”. Por el lado menos dinamizador tenemos las cuentas de “Construcción (5)” y “Servicios no destinados a la venta (10)”. La menor tensión económica se encuentra entre las cuentas “Servicios no destinados a la venta (10)” e “Industria manufacturera (4)” y “Extractivas (3)”.

Para finalizar esta primera parte del análisis a través de matrices MPM y paisajes tridimensionales, vemos que para la economía española, de nuevo se repite como sector que mayor empuje económico genera el “Consumo (13)”, seguido del “Capital (12)”. La máxima dinamicidad se consigue entre los sectores “Consumo (13)” y “Construcción (5)” y “Comercio (6)”. En el lado de menor pulso económico tenemos los sectores de la “Construcción (5)” y “Producción y distribución del agua, energía eléctrica y gas (2)”, siendo la menor interacción la de esta última cuenta con los sectores “Consumo (13)” y “Extractivas (3)”. Observamos, por lo tanto, cómo el “Consumo (13)” se muestra para toda la economía española, analizada tanto a nivel regional y particular, como en bloque, como la cuenta más dinamizadora. Este hecho no se podría observar si hubiésemos utilizado solo un análisis tradicional input-ouput, al no endogenizar dicha cuenta. Unido a esta, los sectores de “Servicios destinados a la venta (9)”, junto con la “Industria manufacturera (4)”, se muestran como sectores muy activos en nuestra economía, de forma generalizada. Se dan excepciones como la “Agricultura, ganadería, pesca y silvicultura (1)” para el caso de la economía andaluza. En el lado opuesto observamos cómo las cuentas “Construcción (5)”, “Producción y distribución del agua, electricidad y gas (2)” y “Servicios no destinados a la venta (10)”, se muestran de forma genérica como menos impulsores económicos.

Para finalizar, comentamos los resultados del análisis propuesto, en el que usando la estructura MPM de la economía española y fijándola como referente, hemos querido ver los *landscapes* o paisajes tridimensionales del resto de las economías analizadas –las regionales–. Tradicionalmente este tipo de análisis se reserva para comparaciones intertemporales, fijando un año base como estructura económica de referencia. En nuestro caso, hemos adaptado esta metodología a un análisis *cross section* o análisis transversal, a nivel regional. De forma muy intuitiva podemos observar cómo la economía extremeña es la que se muestra más homogénea con respecto a la estructura base de la economía española. De forma similar, la economía madrileña, aún mostrando algunas diferencias sustanciales, sobre todo emanadas del comportamiento diferencial de sectores como “Producción y distribución de agua, electricidad y gas (2)”, “Trabajo (11)”, “Capital (12)” e “Industria manufacturera (4)”, tanto por exceso como por defecto con respecto a la base, muestra también un comportamiento cercano al paradigma nacional. En el extremo opuesto, la economía catalana muestra una estructura interna bastante diferencial de la española, así como también la economía andaluza, perdiéndose bastante homogeneidad. La economía catalana muestra pautas diferentes en sectores como “Consumo (13)”, “Transporte y comunicaciones (7)” y “Agricultura, ganadería, pesca y silvicultura (1)”, mientras que la andaluza posee diferencias en “Transporte y comunicaciones (7)”, “Agricultura, ganadería, pesca y silvicultura (1)”, “Hostelería (8)” e “Industria manufacturera (4)”, principalmente.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha planteado la determinación de los “sectores clave” de una economía como instrumental para analizar problemas de planificación regional mediante modelos de equilibrio general lineales obtenidos a partir de las SAM. Información de este tipo puede dar luz al responsable de la política económica para promover los sectores más generadores de actividad económica, junto con la asociación espacial de determinadas actividades al objeto de conseguir un desarrollo regional integrado y una mayor efectividad de los esfuerzos de la política regional.

Además de su contenido estadístico, al tratarse de matrices cuadradas que permiten cerrar el flujo circular de la renta, las SAM constituyen un instrumento de modelización para la evaluación de las intervenciones que, desde la política económica, se realizan en las economías nacionales o regionales. El nivel de desagregación de la matriz con la que estemos trabajando dependerá del aspecto al que se dirija nuestra investigación (distribución del ingreso de las familias, modificaciones en el sistema fiscal o en las transferencias del sector público, ahorro, sector exterior, etc.).

La aproximación a la determinación de sectores clave la hemos realizado a través de tres metodologías diferentes: criterio de sector clave a partir de Rasmussen (1956), en primer lugar; seguidamente mediante la metodología de extracción hipotética de Dietzenbacher *et al.* (1993); y finalmente mediante la matriz de multiplicadores MPM – Sonis *et al.* (1997)– para realizar un *path analysis* o paisaje tridimensional y observar intuitivamente las diferentes estructuras económicas, lo que nos ha permitido extraer conclusiones no solo de ámbito parcial en base a los resultados obtenidos para cada economía, sino también desde una perspectiva estructural tomando como base la economía española.

Se ha dispuesto de cinco bases de datos correspondientes a cuatro SAM regionales –Andalucía, Extremadura, Cataluña y Madrid y una nacional– y que pueden verse sus estructuras en el presente trabajo. El año base ha sido el 2000, salvo para las economías catalanas y española, cuyo SAM más recientes son la de 1994 y 1998, respectivamente. Se han establecido como endógenas aquellas cuentas que forman parte del conjunto de interrelaciones económicas (factores de producción, sectores productivos y sector privado) y son determinadas fuera del sistema económico; mientras que las cuentas exógenas son instrumentos al servicio de la política económica (como el sector público, sector exterior y cuenta de capital)⁹. En la primera aproximación –detección de sectores claves a lo Rasmussen–, observamos comportamientos homogéneos entre las dos primeras economías –Andalucía y Extremadura– y las otras tres economías –Madrid, Cataluña y España–, donde en el caso de la Comunidad de Madrid, el comportamiento es exactamente igual que el español. También podemos ver en esta

⁹ Revisando la literatura al respecto, se han propuesto clasificaciones diferentes a la utilizada en este trabajo, siendo la nuestra la más habitual. Otras propuestas son las de Polo, Roland-Holst y Sancho (1991), que endogeneizan la cuenta de capital, o la de Llop (2001), con una endogeneización del sector exterior.

primera aproximación, cómo los “Servicios destinados a la venta (9)”, en mayor medida (4 de las 5 bases de datos), y el “Comercio (6)”, en menor medida (3 de las 5 bases de datos), confirman la terciarización de la economía española.

A partir de la metodología de extracción hipotética, podemos encontrar de nuevo pautas comunes de comportamiento entre dichas economías. Así, en las cinco economías se repite el mayor efecto *feedback* entre los sectores (Consumo, Trabajo). En la misma línea se repite en cuatro de las cinco economía los mayores efectos *feedback* entre los sectores (Consumo, Consumo) –Andalucía, Madrid, Cataluña y España–, (Consumo, Capital) –Andalucía, Extremadura, Madrid, y España– y (Consumo, Trabajo) –Andalucía, Extremadura, Madrid, Cataluña, España–. Centrándonos, por ejemplo solo en los *backward linkages*, encontramos pautas comunes y únicas entre los sectores con mayor *BL* entre las economía andaluza y extremeña, como son “Industria manufacturera (4)” con “Consumo (13)”, así como “Capital (12)” con respecto a “Capital (12)” para las comunidades madrileñas y catalana. Finalmente, también se produce una coincidencia entre los primeros efectos *feedback* entre Madrid y España en los sectores “Trabajo (11)” con respecto a “Trabajo (11)”. Estas coincidencias particulares nos vuelven a transmitir la idea, ya obtenida en la primera aproximación, de la coincidencia en estructura productiva entre Andalucía y Extremadura, por un lado, Cataluña y Madrid, por otra, y, finalmente, la mayor afinidad existente entre Madrid y España.

A partir de la aproximación mediante la matriz de multiplicadores *MPM*, centrándonos en la comparación de cada economía regional con respecto a España, se observa como la economía extremeña es la que se muestra más homogénea con respecto a la estructura base de la economía española. Sigue la madrileña, aún mostrando diferencias, sobre todo emanadas del comportamiento diferencial de sectores como “Producción y distribución de agua, electricidad y gas (2)”, “Trabajo (11)”, “Capital (12)” e “Industria manufacturera (4)”, tanto por exceso como por defecto con respecto a la base. La economía catalana muestra una estructura interna bastante diferencial a la española, así como la andaluza, perdiéndose bastante homogeneidad. La economía catalana muestra pautas diferentes en sectores como “Consumo (13)”, “Transporte y comunicaciones (7)” y “Agricultura, ganadería, pesca y silvicultura (1)”, mientras que la andaluza posee diferencias en “Transporte y comunicaciones (7)”, “Agricultura, ganadería, pesca y silvicultura (1)”, “Hostelería (8)” e “Industria manufacturera (4)”, principalmente.

Con estas tres aproximaciones, podemos constatar la intuición apriorística de la coincidencia en la estructura productiva entre Andalucía y Extremadura –regiones Objetivos número 1, según la clasificación dada por la Unión Europea en la fecha del estudio–, por un lado, Cataluña y Madrid, por otro lado, y, finalmente, la mayor afinidad existente en Madrid y España. Se remarca en la última aproximación –la realizada mediante la matriz de multiplicadores *MPM*– el carácter diferencial de la estructura económica catalana. Quizás todo esto explica los diferentes ritmos de crecimiento y tasas de paro entre una economía y otra.

Por lo tanto, se han mostrado técnicas tradicionales de la metodología input-output utilizando una base de datos como es la SAM, más completa y que ayuda a comprender mejor la interrelaciones entre agentes, productos, consumidores, gobierno y resto del mundo. Podemos también extraer del trabajo cómo los métodos más tradicionales (v.gr. Rasmussen), con todas las limitaciones que posee por su simplicidad, dan lugar a resultados muy similares a otras técnicas más sofisticadas (v.gr. extracción hipotética). De esta forma, se puede concluir que ningún método es mejor que otro, sino que son complementarios a la hora de entender el engranaje de una economía. Finalmente, debemos señalar que la idea de combinar enclaves de concentración industrial con una estrategia de desarrollo aprovechando la caracterización endógena de cada región y su propia dinamicidad interna¹⁰, hace conveniente estudiar aquellos sectores capaces de generar crecimiento y de distribuir el valor añadido en una economía tanto nacional como regional.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece la financiación recibida de la EOI, Escuela de Organización Industrial, así como la financiación recibida de los proyectos MICINN-ECO2009-11857, SGR2009-5781 y SEJ479. Las opiniones, puntos de vista y posturas expresadas por el autor son de carácter personal y no necesariamente reflejan los de la Comisión Europea.

REFERENCIAS

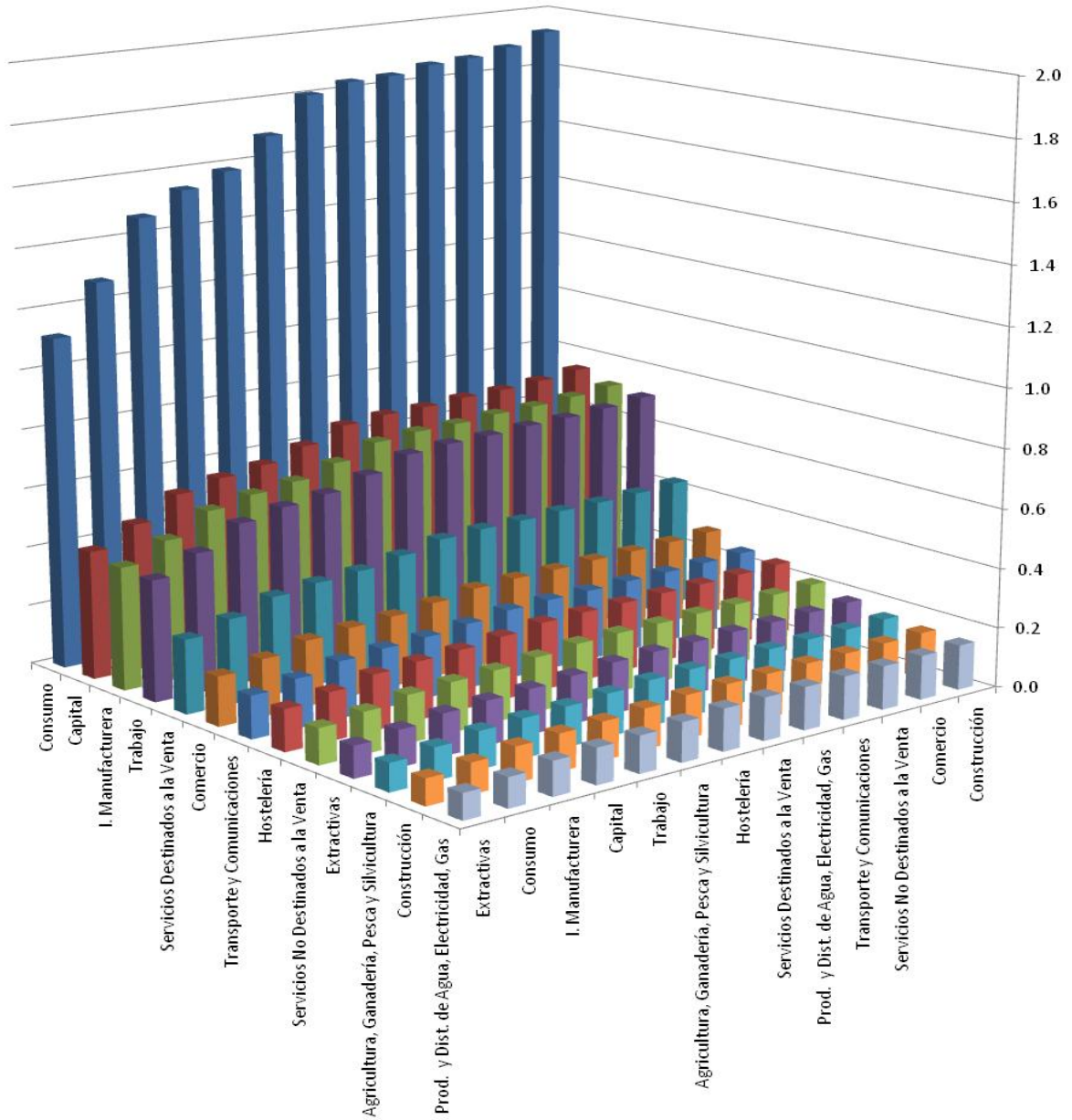
- CÁMARA, A. (2007) *Un análisis de la economía madrileña a partir de la matriz de contabilidad social para el año 2000*, Tesis Doctoral, Universidad Rey Juan Carlos.
- CARDENETE, M.A., FUENTES, P., POLO, C. (2010) “Análisis de sectores clave a partir de la matriz de contabilidad social de Andalucía para el año 2000”, *Revista de Estudios Regionales*, 88, pp. 15–44.
- CARDENETE, M. A., LLANES, G., LIMA, C., MORILLA, C. (2008) “Detection of key sectors by using a social accounting matrices: an alternative approach”, *Journal of Applied Input-Output Analysis*, 13-14, pp. 83–91.
- CELLA, G. (1984) “The input-output measurement of interindustry linkages”, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 46, pp. 73–84.
- CLEMENTS, B.J. (1990) “On the decomposition and normalization of interindustry linkages”, *Economics Letters*, 33, pp. 337–340.
- CURBELO, J. L. (1986) “Una introducción a las matrices de contabilidad social y a su uso en la planificación del desarrollo regional”, *Estudios Territoriales*, nº7, pp.147–155.
- DE MIGUEL, F. J., CARDENETE, M.A., PÉREZ (2005) *Un análisis de la economía extremeña a partir de un modelo de equilibrio general aplicado*, D.T. Instituto de Estudios Fiscales.
- DEFOURNY, J., THORBECKE, E. (1994) “Structural path analysis and multiplier decomposition within a social accounting matrix framework”, *The Economic Journal*, 94, pp. 111–136.

¹⁰ Ver, al respecto, Curbelo, J.M. (1988).

- DIETZENBACHER, E, VAN DER LINDEN, J.A., STEENGE, A. (1993) “The regional extraction method: EC input-output comparisons”, *Economic Systems Research*, 5, pp. 185–206.
- HAIDER, A., THORBECKE, E. (1989) “Macroeconomic effects of technology choice: multiplier and structural path analysis within a SAM framework”, *Journal of Policy Modeling*, 11, 1, pp. 131–156.
- HEIMLER, A. (1991) “Linkages and vertical integration in the Chinese economy”, *Review of Economics and Statistics*, 73, pp. 261–267.
- HEWINGS, G.J.D., SONIS, M. (1997) “The hollowing-out process in the Chicago economy, 1975-2011”, *Geographical Analysis*, 30, pp. 217–233.
- HIRSCHMAN, A. (1958) *The strategy of economic development*, Yale Univ. Press, New Haven.
- IRÁIZOZ, B. (2006) “¿Es determinante el método en la identificación de los sectores clave de una economía? Una aplicación al caso de las tablas input-output de Navarra”, *Estadística Española*, 48(163), pp. 551–585.
- LAHR, M.L. (ed.) (2001) *Regional science perspectives in economic analysis*, Elsevier Science.
- LAHR, M.L., MILLER, R.E. (2001) “A taxonomy of extractions”, in: M.L. Lahr and R.E. Miller (Eds.) *Regional science perspectives in economic analysis: a festschrift in memory of B.H. Stevens*, pp. 407–411, Elsevier Science, Amsterdam.
- LIMA, C., CARDENETE, M.A., VALLÉS, J. (2005) “A structural analysis of a regional economy using a social accounting matrices: 1990-1999”, *Investigaciones Regionales*, nº5, pp.113–138.
- LLOP, M. (2001) *Un análisis de equilibrio general de la economía catalana*, Tesis Doctoral, Universidad Rovira i Virgili.
- LLOP, M., MANRESA, A. (1999) “Análisis de la economía de Cataluña (1994) a través de una matriz de contabilidad social”, *Estadística Española*, vol. 41, 144, pp. 241–268.
- POLO, C., ROLAND-HOLST, D., SANCHO, F. (1991) “Descomposición de multiplicadores en un modelo multisectorial: una aplicación al caso español”, *Investigaciones Económicas*, vol. XV, nº1, pp.53–69.
- RASMUSSEN, P. (1956) *Studies in Inter-Sectorial Relations*, Einar Harks, Copenhagen.
- ROBERTS, B.M. (1995) “Structural change in Poland, 1980-1990: evidence for social accounting multipliers and linkage analysis”, *Economic Systems Research*, 7, pp. 291–308.
- RODRÍGUEZ MORILLA, C., CARDENETE, M.A., LLANES, G. (2005) “Estimación anual de matrices de contabilidad social: aplicación a la economía española para los años 1995 y 1998”, *Estadística Española*, nº 47, 159, pp. 353–416.
- ROLAND-HOLST, D.W. (1990) “Interindustry analysis with social accounting methods”, *Economic Systems Research*, vol. 2, (2), pp. 125–145.
- SCHULTZ, S. (1977) “Approaches to identifying key sectors empirically by means of input-output analysis”, *Journal of Development Studies*, vol. 14, pp. 77–96.
- SONIS, M., HEWINGS, G.J.D., SULISTYOWATI, S. (1997) “Block structural path analysis: applications to structural changes in the Indonesian Economy”, *Economic Systems Research*, 9, pp. 265–278.
- STRASSERT, G. (1968) “Zur bestimmung strategischer sektoren mit hilfe von input-output modellen”, *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 182, pp. 211–215.

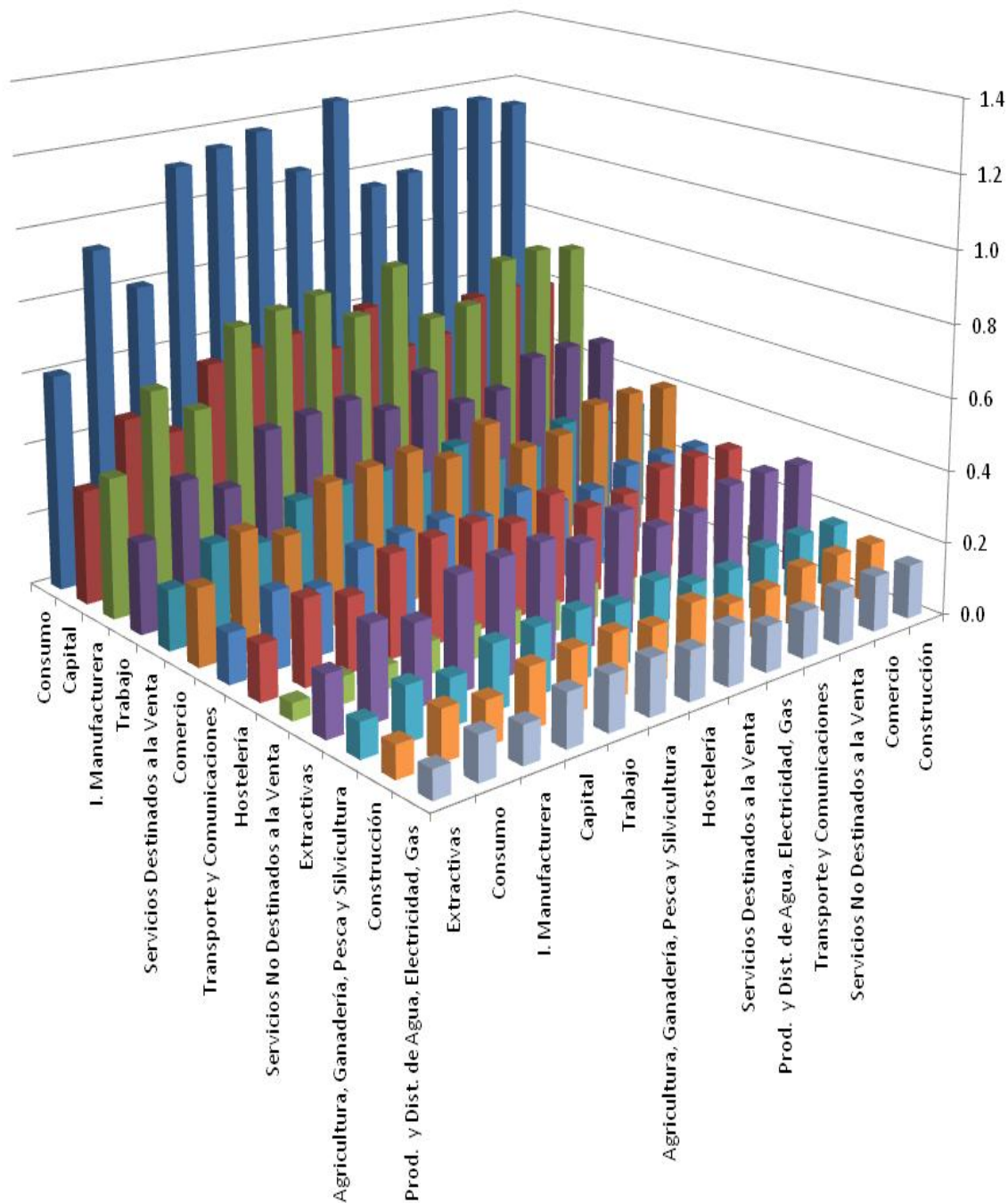
ANEXO

Figura A.1. Lanscape de los sectores productivos de España 1998. Valores de los multiplicadores de la matriz MPM.



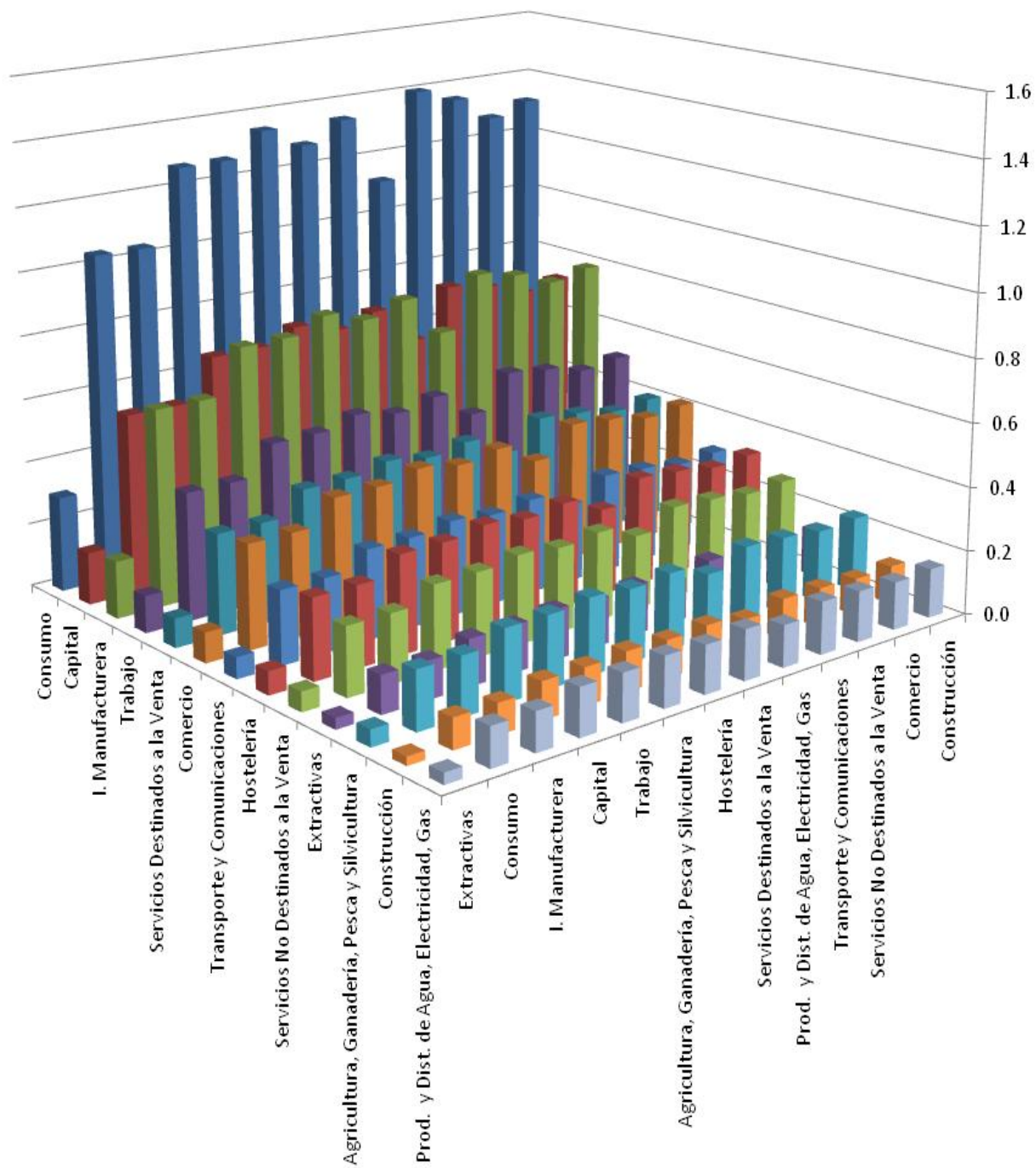
Fuente: elaboración propia.

Figura A.2. Comparación del landscape de Andalucía con respecto a España. Valores de los multiplicadores de la matriz MPM.



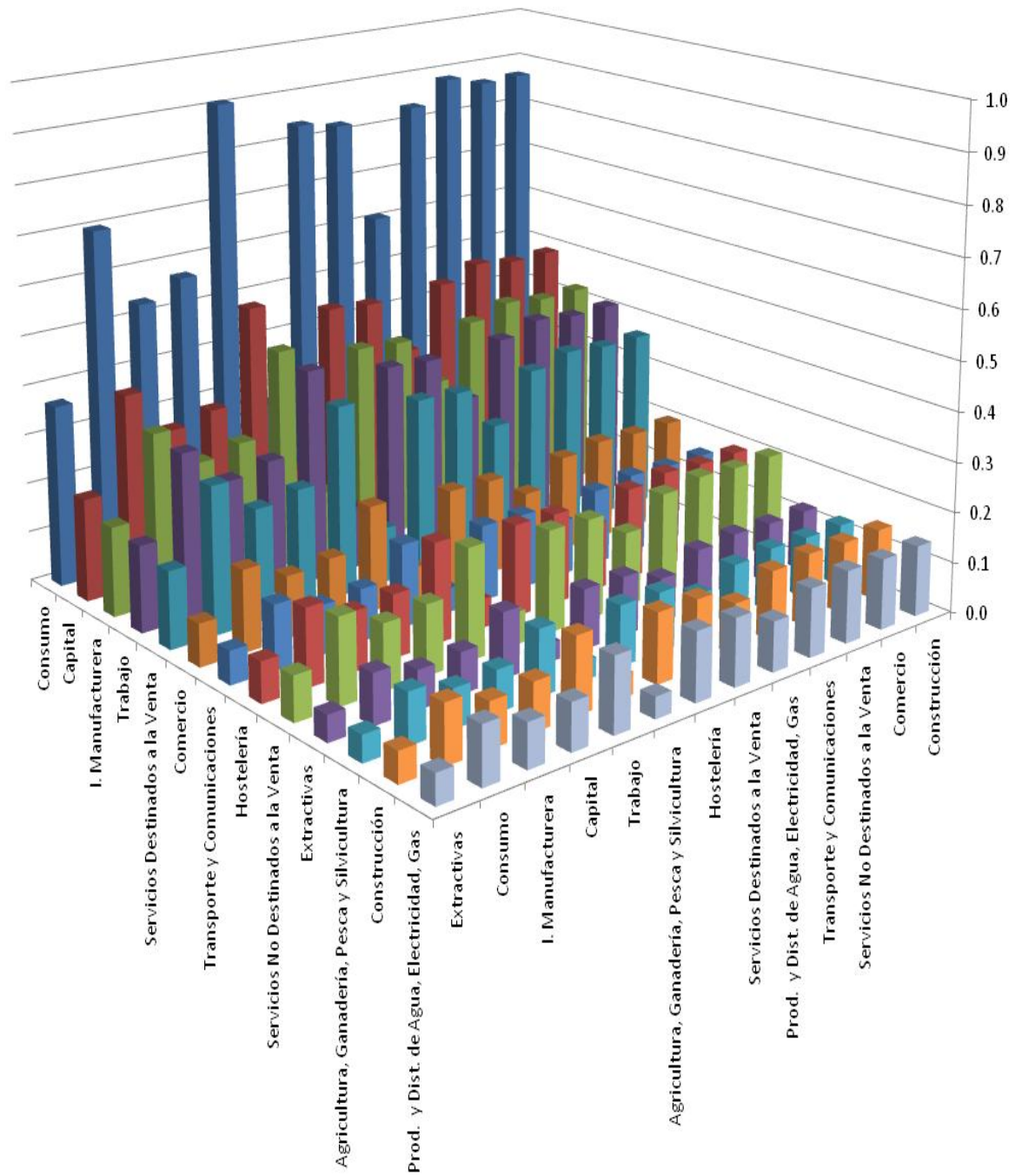
Fuente: elaboración propia.

Figura A.3. Comparación del landscape de Extremadura con respecto a España. Valores de los multiplicadores de la matriz MPM.



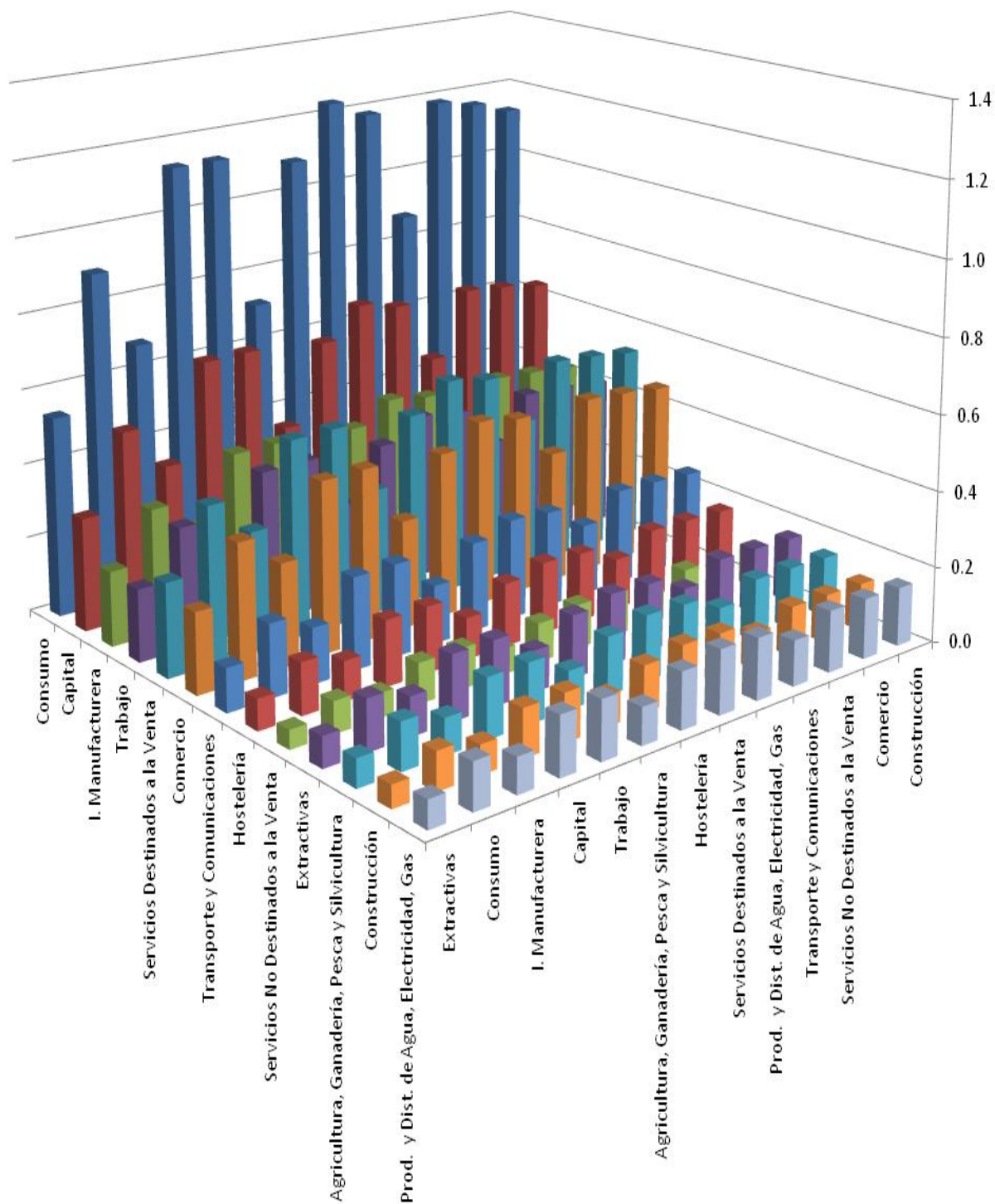
Fuente: elaboración propia.

Figura A.4. Comparación del landscape de Madrid con respecto a España. Valores de los multiplicadores de la matriz MPM.



Fuente: elaboración propia.

Figura A.5. Comparación del landscape de Cataluña con respecto a España. Valores de los multiplicadores de la matriz MPM.



Fuente: elaboración propia.



UNIVERSIDAD
PABLO DE OLAVIDE
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (12). Páginas 65–80.
Diciembre de 2011. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=53>

Regla de reparto proporcional con referencias múltiples: aplicación al caso de agregación y actualización de probabilidades

HINOJOSA RAMOS, MIGUEL ÁNGEL

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide, Sevilla
Correo electrónico: mahinram@upo.es

LÓPEZ SÁNCHEZ, ANA DOLORES

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide, Sevilla
Correo electrónico: adlopsan@upo.es

RESUMEN

En este trabajo se extiende la regla proporcional de los problemas clásicos de reparto al caso de problemas con referencias múltiples y se presenta una caracterización de la regla proporcional ponderada. Como caso particular, se analiza el problema de agregación y actualización de probabilidades.

Palabras clave: problemas de división con referencias múltiples; regla proporcional ponderada; agregación y actualización de probabilidades.

Clasificación JEL: D39.

MSC2010: 91C99.

A Proportional Rule for the Division Problems with Multiple References: An Application to the Problems of Probability Aggregation and Probability Updating

ABSTRACT

In this paper we extend the proportional rule to division problems with multiple references and we present a result of characterization of the weighted proportional rule. As a particular case, we analyze the problems of probability aggregation and probability updating.

Keywords: division problems with multiple references; weighted proportional rule; probability aggregation; probability updating.

JEL classification: D39.

MSC2010: 91C99.



1. INTRODUCCIÓN

Un problema clásico de reparto consiste en cómo dividir un *estado*¹ (cantidad de un bien homogéneo e infinitamente divisible) entre un conjunto de agentes, teniendo en cuenta una “referencia” para cada uno de ellos. Un ejemplo es el problema de bancarrota, donde la referencia de cada agente (los agentes son los acreedores de la empresa) es la reclamación (derecho consolidado) que éste hace sobre el valor de liquidación de la empresa en bancarrota. Otro ejemplo es el problema de reparto de excedentes, que aparece, por ejemplo, cuando hay que dividir los beneficios de un negocio entre los inversores de acuerdo a las cantidades que respectivamente invirtieron (referencias). Los modelos clásicos han sido extensamente estudiados en la literatura, como se puede ver, por ejemplo, en Thomson (2003).

Nuestra investigación no se restringe a problemas de bancarrota o problemas de reparto de excedentes, sino que propone un modelo general en el que caben los dos tipos de problemas, en el sentido de que la suma total de las referencias de los agentes puede estar por encima o por debajo de la cantidad total a distribuir. Además, se extiende este modelo al caso de múltiples referencias, ya que este modelo extendido permite representar y analizar situaciones de la vida cotidiana de una manera más realista. Una situación real que puede representarse mediante este modelo es el problema de bancarrota con múltiples referencias, es decir, el valor de liquidación de una firma que ha quebrado (el estado) tiene que dividirse entre sus acreedores (los agentes) y las reclamaciones de cada acreedor son clasificadas por distintos tipos de activos (las referencias).

Las múltiples referencias pueden también representar las distintas evaluaciones que hacen diferentes expertos de las necesidades o derechos que tienen unos agentes. Por ejemplo, situaciones en las que hay que repartir fondos para investigación entre distintos grupos y las necesidades de éstos son evaluadas por varios expertos.

El modelo también es apropiado para representar problemas en los que hay incertidumbre sobre las referencias. Por ejemplo, si varios acreedores tienen derecho a recibir de una empresa, en una fecha futura, ciertas cantidades de activos financieros y la empresa deudora quiebra antes de cumplir con esta obligación, entonces para dividir el valor de liquidación de la empresa entre los acreedores se podrían tener en cuenta distintos esce-

¹Aunque la traducción de *estate* es dotación o propiedad, en la literatura sobre problemas de reparto en castellano es común el uso de la palabra “estado”.

narios económicos futuros. La incertidumbre sobre las reclamaciones de los acreedores se podría incluir en el modelo considerando los valores de los activos en diferentes escenarios. Estos valores serían las referencias a tener en cuenta en el reparto.

El modelo de reparto con referencias múltiples ha sido estudiado en Ju *et al.* (2007), donde se proporciona una caracterización axiomática de las reglas que son no manipulables por transferencia entre las referencias de los agentes. También, las contribuciones de Pulido *et al.* (2002, 2008) pueden considerarse casos particulares del modelo que aquí se propone, con solo dos vectores de referencias y donde uno de ellos domina al otro. En un sentido diferente al que aquí se propone, en Branzei *et al.* (2004), puede verse un modelo parecido con incertidumbre sobre las referencias (pertenecen a un intervalo).

En este trabajo se analizan los problemas de reparto usando la regla proporcional y se destacan dos casos particulares que surgen cuando se cambian “agentes” por “estados de la naturaleza” y “asignaciones” por “probabilidades”. El primer caso es un problema clásico de reparto conocido con el nombre de actualización de probabilidades y el segundo caso es un problema de reparto con múltiples referencias conocido con el nombre de agregación de probabilidades. Actualizar probabilidades (*updating*), (ver, por ejemplo, Gilboa and Schmeidler, 1993), significa que inicialmente hay una distribución de probabilidad sobre un conjunto de estados de la naturaleza, pero la situación cambia cuando aparece información de que ocurre un suceso (un subconjunto propio del conjunto de estados de la naturaleza). Las componentes del vector inicial correspondientes a este suceso tienen que actualizarse para convertirse en un vector de probabilidades. En esta situación lo que propone la regla de Bayes (Majumdar, 2004) es utilizar las probabilidades proporcionales a las referencias que constituyen las componentes del vector inicial correspondientes al suceso que ha ocurrido. En el problema de agregación de probabilidades (Rubinstein and Fishburn, 1986), se trata de obtener un único vector de probabilidades a partir de un conjunto de ellos. Por ejemplo, varios expertos en bolsa tienen sus propias predicciones o probabilidades sobre si un activo financiero subirá, mantendrá o bajará su cotización en un plazo futuro determinado, la regla agrega estas predicciones en una sola. Un bien conocido sistema de agregación consiste en hacer una media ponderada de las distribuciones de probabilidad, lo que se conoce en la literatura como *linear opinion pools* (McConway, 1981).

En este trabajo, además, se estudian ambos problemas conjuntamente, es decir, el problema de agregación de probabilidades y el problema de actualización de probabilidades

dentro del modelo de división con múltiples referencias. Asimismo, se proponen reglas de división proporcionales para estos problemas.

El trabajo se estructura como sigue. En la Sección 2 se expone la regla proporcional en problemas clásicos de división, detallando sus propiedades más importantes. Como caso particular, se destaca el problema de actualización de probabilidades. En la Sección 3 se estudia la regla proporcional ponderada en problemas de reparto con múltiples referencias, haciendo referencia a sus propiedades más interesantes y se presenta un resultado de caracterización. Como casos particulares se estudian el problema de agregación de probabilidades y el problema de actualización y agregación de probabilidades conjuntamente. Las conclusiones y las líneas futuras de investigación se exponen en la Sección 4.

2. REGLA PROPORCIONAL

Consideremos una situación en la que una cantidad, $E \in \mathbb{R}_{++}$,² de un bien homogéneo e infinitamente divisible (el estado), tiene que dividirse entre n agentes (se denota por $N = \{1, 2, \dots, n\}$ al conjunto finito de agentes) teniendo en cuenta una referencia para cada uno de ellos, es decir, un vector $c \in \mathbb{R}_+^n$. Un problema clásico de división es un par $(c, E) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_{++}$.

Un ejemplo de problema clásico de división es el problema de bancarrota, donde el estado, E , representa el valor de liquidación de la empresa en quiebra que ha de repartirse entre los acreedores y c es el vector de reclamaciones (derechos consolidados) que los acreedores tienen sobre el estado. Otro ejemplo es el problema de reparto de excedentes donde el estado, E , representa el beneficio a repartir y c es el valor de las inversiones iniciales que se usan como referencias para el reparto.

La clase de todos los problemas de división asociados con el conjunto de agentes, N , se denota por \mathcal{C}_N . Una asignación para el problema $(c, E) \in \mathcal{C}_N$ es un vector $x \in \mathbb{R}_+^n$, que satisface la propiedad de eficiencia³ $x(N) = \sum_{i \in N} x_i = E$, esto es, se reparte la totalidad del estado y, además, satisface la propiedad de no negatividad: $x_i \geq 0, \forall i \in N$; es decir, que

²Se denota por \mathbb{R}_{++} al conjunto de todos los números reales positivos, por \mathbb{R}_+ al conjunto de todos los números reales no negativos y por \mathbb{R}_+^n y $\mathbb{R}_+^{n \times m}$, respectivamente, al conjunto de vectores n -dimensionales y matrices de dimensión $n \times m$ compuestas por elementos de \mathbb{R}_+ .

³Aquí y en adelante, para cada vector n -dimensional x se denotará por $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ para cualquier $S \subseteq N = \{1, 2, \dots, n\}$.

las asignaciones no son negativas. Se denota por $X(E) \subseteq \mathbb{R}_+^n$ al conjunto de asignaciones. Una regla de división sobre \mathcal{C}_N es una función, f , que asocia a cada $(c, E) \in \mathcal{C}_N$ una única asignación $f(c, E) \in X(E)$. La regla dual, f^* , de la regla de reparto f es para cada $(c, E) \in \mathcal{C}_N$ $f^*(c, E) = c - f(c, c(N) - E)$. Una regla de reparto se dice autodual si $f^* = f$.

Una de las reglas de reparto más estudiadas es la regla proporcional que establece que las asignaciones son proporcionales a las referencias consideradas.

Definición 2.1 (regla proporcional) *La regla proporcional es, para cada $(c, E) \in \mathcal{C}_N$,*

$$p(c, E) = \frac{E}{c(N)}c.$$

A continuación se detallan las caracterizaciones más importantes que cumple la regla proporcional:

Teorema 2.2 (Young, 1988) *La regla proporcional es la única regla autodual que cumple composición hacia arriba⁴.*

Teorema 2.3 (Young, 1988) *La regla proporcional es la única regla autodual que cumple composición hacia abajo⁵.*

Teorema 2.4 (Moulin, 1985; Chun, 1988; Ju y Miyagawa, 2002) *La regla proporcional es la única regla que es no manipulable⁶ y cumple la propiedad de asignación nula a referencias nulas⁷.*

⁴Una regla de reparto, f , cumple la propiedad de composición hacia arriba si para cada $(c, E) \in \mathcal{C}_N$ y cada $E' > E$ se cumple $f(c, E') = f(c, E) + f(c - f(c, E), E' - E)$. Esta propiedad significa que se obtiene el mismo resultado al repartir E' que al repartir primero E y asignar el incremento del estado, $E' - E$, tomando como nuevas referencias las referencias iniciales menos lo que previamente ya se ha asignado.

⁵Una regla de reparto, f , cumple la propiedad de composición hacia abajo si para cada $(c, E) \in \mathcal{C}_N$ y cada $E' < E$ entonces $f(c, E') = f(f(c, E), E')$. Esta propiedad significa que se obtiene el mismo resultado al repartir E' que al repartir primero E y en función de las asignaciones obtenidas repartir E' .

⁶Una regla de reparto, f , se dice que es no manipulable si ningún grupo puede mejorar su resultado global mediante transferencias de las referencias entre los agentes del grupo. Formalmente, para cada $(c, E) \in \mathcal{C}_N$, cada $N' \subseteq N$ y cada $(c'_i)_{i \in N'}$ si $\sum_{i \in N'} c'_i = \sum_{i \in N'} c_i$, se cumple $\sum_{i \in N'} f_i(c, E) = \sum_{i \in N'} f_i(c'_{N'}, c_{N \setminus N'}, E)$.

⁷Para cada $(c, E) \in \mathcal{C}_N$, cada $i \in N$ si $c_i = 0$ se cumple $f_i(c, E) = 0$.

2.1. Actualización de probabilidades

Un caso particular en el que se aplica la regla proporcional es el problema de actualización de probabilidades que aparece cuando, habiendo inicialmente una distribución de probabilidad sobre un conjunto de estados de la naturaleza, la situación cambia porque aparece la información de que un suceso (un subconjunto propio del conjunto de estados de la naturaleza) ocurre. Las componentes del vector inicial correspondientes a este subconjunto de estados de la naturaleza tienen que actualizarse para convertirse en un vector de probabilidades, es decir, para que sumen la unidad. En esta situación, si se interpretan los estados de la naturaleza como agentes, aparece un problema de división de la unidad entre los agentes correspondientes al suceso que ha ocurrido en el que se toman como referencias las componentes del vector inicial de probabilidades asociadas a dichos agentes. La aplicación de la regla proporcional a este problema da como resultado la denominada regla de Bayes (Majumdar, 2004). Por tanto, si N es el conjunto de estados de la naturaleza, $S \subset N$ es el suceso que ha ocurrido, c es el vector de probabilidades inicial y c_S es la proyección de c sobre S , la regla de Bayes establece como resultado de la actualización de probabilidades el vector $p(c_S, 1)$. Obsérvese que mediante esta regla se reparte la cantidad $1 - c(S) = 1 - \sum_{i \in S} c_i$ entre los agentes de S , proporcionalmente al vector c_S .

Pueden definirse otras reglas de actualización de probabilidades. A continuación se pone un ejemplo de familias de reglas para este problema:

Sea $\mathcal{P} \subseteq 2^N$ el conjunto de los posibles subconjuntos no vacíos de estados de la naturaleza que finalmente pueden ocurrir. Supondremos que \mathcal{P} es no vacío. Un problema de actualización de probabilidades en este marco es una terna $(c, 1, \mathcal{P})$, donde c es una distribución de probabilidad sobre N . La clase de todos los problemas de actualización de probabilidades que se asocian con el conjunto de estados de la naturaleza N y la estructura de subconjuntos, \mathcal{P} , se denota por $\mathcal{C}(N, \mathcal{P})$.

Una regla de reparto sobre $\mathcal{C}(N, \mathcal{P})$ es una función, f , que asocia con cada problema, $(c, 1, \mathcal{P}) \in \mathcal{C}(N, \mathcal{P})$, una asignación $x^S \in X(E)$ para cada $S \in \mathcal{P}$ de forma que $x_r^S = 0$ si $r \notin S$.

Un ejemplo de familia de reglas para este problema de actualización de probabilidades consiste en añadir a c_S , para cada $S \in \mathcal{P}$, el reparto entre los agentes de S de la cantidad $1 - c(S)$ según una proporción β , es decir, fijado el β , la regla es:

$$f^\beta(c, 1, \mathcal{P}) = c_S + p(1 - c(S), \beta), \quad \forall S \in \mathcal{P},$$

donde $\beta \in \mathbb{R}_+^S$.

Obsérvese que, para el problema particular en el que para un conjunto $S \in \mathcal{P}$ se tome como parámetro β el vector c_S , la regla f^β asocia a dicho grupo S una cantidad proporcional a c_S (esto es consecuencia de que la regla proporcional es autidual).

Nótese también que en el dominio de problemas de actualización de probabilidades estas reglas son también no manipulables.

3. REGLA PROPORCIONAL PONDERADA

En el modelo que se presenta en este trabajo, para el reparto se tienen en cuenta m vectores de referencias distintos (se denota por $M = \{1, 2, \dots, m\}$ al conjunto de referencias para el reparto). Sea $C \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ la matriz de referencias. Por c_i^j se denota al elemento de la matriz C correspondiente al i -ésimo agente y a la j -ésima referencia. Para cada $i \in N$, $c_i \in \mathbb{R}_+^m$ representa las distintas referencias del agente i -ésimo. Para cada $j \in M$, $c^j \in \mathbb{R}_+^n$ representa la referencia j -ésima para cada uno de los agentes. Un problema de división con múltiples referencias es un par $(C, E) \in \mathbb{R}_+^{n \times m} \times \mathbb{R}_{++}$.

Un ejemplo de problema de división con múltiples referencias es un problema de bancarrota como el que se presentó anteriormente, pero en el que las reclamaciones de cada acreedor son sobre distintos tipos de activos. Otro ejemplo es el problema de reparto de excedentes similar al problema clásico de división, pero en el que aparecen distintos tipos de inversiones iniciales.

La clase de todos los problemas de división asociados con el conjunto de agentes, N , donde el conjunto de referencias es M , se denota por \mathcal{C}_N^M . Una asignación para el problema $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$ es un vector $x \in \mathbb{R}_+^n$, que satisface la propiedad de eficiencia $x(N) = \sum_{i \in N} x_i = E$ y además, satisface la propiedad de no negatividad $x_i \geq 0, \forall i \in N$. Se denota por $X(E) \subseteq \mathbb{R}_+^n$ al conjunto de asignaciones. Una regla de división sobre \mathcal{C}_N^M es una función, f , que asocia a cada $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$ una única asignación $f(C, E) \in X(E)$.

Una extensión de la regla proporcional clásica en el modelo de división con múltiples referencias es la regla proporcional ponderada.

Definición 3.1 (regla proporcional ponderada) Para cada $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$ y cada $\alpha \in \Delta_+^M = \{\alpha \in \mathbb{R}_+^m : \sum_{j \in M} \alpha^j = 1\}$ la regla proporcional ponderada por el vector de pesos α es:

$$P^\alpha(C, E) = \sum_{j \in M} \alpha^j p(c^j, E).$$

A continuación se describen algunas propiedades de las reglas de reparto para los problemas de división con múltiples referencias que cumple la regla proporcional ponderada y se demuestra un teorema de caracterización de dicha regla.

- *No manipulabilidad.* Una regla de reparto, f , se dice que es no manipulable si ningún grupo puede mejorar su resultado global mediante transferencias de los vectores de referencias entre los agentes del grupo. Formalmente, para cada $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$, cada $N' \subseteq N$ y cada $(c'_i)_{i \in N'}$ si $\sum_{i \in N'} c'_i = \sum_{i \in N'} c_i$, entonces $\sum_{i \in N'} f_i(C, E) = \sum_{i \in N'} f_i(c'_{N'}, c_{N \setminus N'}, E)$.
- *Asignación nula a referencias nulas.* Para cada $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$, cada $i \in N$ si $c_i = 0$ se cumple $f_i(C, E) = 0$.
- *Homogeneidad en el estado.* Una regla de reparto, f , cumple la propiedad de homogeneidad en el estado si para cada $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$ y cada $\mu > 0$ se verifica $f(C, \mu E) = \mu f(C, E)$. Esta propiedad significa que el resultado es independiente de la unidad en la cual el estado ha sido medido.
- *Invarianza en las referencias.* Para cada $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^m$, si $\lambda * C = (\lambda^j \cdot c^j)_{j \in M}$, se cumple que $f(\lambda * C, E) = f(C, E)$. Esta propiedad significa que el resultado es invariante de las unidades en las que se midan cada una de las referencias.

Teorema 3.2 *La regla proporcional ponderada es la única regla de reparto para el problema de múltiples referencias que es no manipulable, de asignación nula a referencias nulas, homogénea en el estado e invariante en las referencias.*

Para demostrar el Teorema 3.2 se utiliza el resultado de Ju *et al.* (2007), que se detalla a continuación.

Lema 3.3 (Corolario 1 en Ju et al., 2007) *La única regla no manipulable y de asignación nula a referencias nulas es para cada $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$,*

$$f(C, E) = \sum_{j \in M} W^j(C(N), E) p(c^j, E) \quad (3.1)$$

donde $W^j(C(N), E)_{j \in M}$ es un conjunto de pesos que dependen del estado a repartir y de las referencias del problema a través del vector $C(N) = (c^j(N))_{j \in M}$.

Demostración del Teorema 3.2 Es fácil ver que la regla proporcional ponderada cumple no manipulabilidad, asignación nula a referencias nulas, homogeneidad en el estado e invarianza en las referencias. Por tanto, nos centraremos en la implicación inversa.

Sea f una regla de reparto que satisface no manipulabilidad, asignación nula a referencias nulas, homogeneidad en el estado e invarianza en las referencias y sea $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$ un problema de división con múltiples referencias.

Por el Lema 3.3, la regla f viene dada por la expresión (3.1). Vamos a demostrar que, para cada $j \in M$, $W^j(C(N), E) = \alpha^j$ para todo $(C, E) \in \mathcal{C}_N^M$.

En primer lugar, vamos a ver que, por homogeneidad en el estado, se tiene que, para cada $j \in M$, $W^j(C(N), E) = W^j(C(N), E')$, cualquiera que sean E y E' reales y positivos. Supongamos, por reducción al absurdo, que existen dos estados, E y E' , y una matriz de referencias, C , tales que $(W^j(C(N), E))_{j \in M} \neq (W^j(C(N), E'))_{j \in M}$.

Sea $\mu = \frac{E'}{E}$ y consideremos los poliedros R y R' , generados respectivamente por $\{p(c^j, E)\}_{j \in M}$ y $\{p(c^j, E')\}_{j \in M}$. Como para cada $j \in M$, $p(c^j, E') = \mu p(c^j, E)$, se tiene que R' es la proyección cónica de R ($R' = \mu R$). Entonces, como los vectores de pesos $(W^j(C(N), E))_{j \in M}$ y $(W^j(C(N), E'))_{j \in M}$ son distintos, las combinaciones convexas que generan en R y R' respectivamente (que son $f(C, E)$ y $f(C, E')$, respectivamente) no son proporcionales. Esto supone una contradicción con que la regla f es homogénea en el estado.

En segundo lugar, vamos a ver que, por invarianza en las referencias, se tiene que, para cada $j \in M$, $W^j(C(N), E) = W^j((\lambda * C)(N), E)$, cualquiera que sea el vector $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^m$. Como para cada $j \in M$, $p(\lambda^j c^j, E) = p(c^j, E)$, tiene que cumplirse $(W^j(C(N), E))_{j \in M} = (W^j(C(N), E'))_{j \in M}$, pues en otro caso los vectores generarían combinaciones convexas distintas ($f(C, E) \neq f(\lambda * C, E)$) y eso supondría una contradicción con que f verifica invarianza en las referencias. \square

3.1. Agregación y actualización de probabilidades

Un caso particular en el que se aplica la regla proporcional ponderada es el problema de agregación de probabilidades que surge cuando hay varias distribuciones de probabilidad que proporcionan distintos expertos sobre un conjunto de estados de la naturaleza y se quiere obtener como resultado una única distribución de probabilidad. Por tanto, si N es el conjunto de estados de la naturaleza, M es el conjunto de expertos y C es una matriz cuyas columnas representan las distintas distribuciones de probabilidad proporcionadas por los diferentes expertos, la aplicación de la regla proporcional ponderada a este problema da como resultado una media ponderada de las distribuciones de probabilidad, lo que se conoce en la literatura como *linear opinion pool* (McConway, 1981).

En algunas ocasiones se presenta el problema de actualización de probabilidades en combinación con el problema de agregación de probabilidades. Este problema aparece cuando hay varias distribuciones de probabilidad que proporcionan distintos expertos sobre un conjunto de estados de la naturaleza, pero a su vez la situación cambia cuando aparece información de que un suceso (un subconjunto propio del conjunto de estados de la naturaleza) ocurre. Por tanto, si N es el conjunto de estados de la naturaleza, $S \subset N$ es el suceso que ha ocurrido, M es el conjunto de expertos, C es una matriz cuyas columnas representan las distintas distribuciones de probabilidad proporcionadas por los diferentes expertos y C_S es la proyección de C sobre S (matriz que resulta al eliminar de C las filas correspondientes a los agentes de $N \setminus S$), la aplicación de la regla proporcional ponderada a este problema se puede realizar de dos formas:

Una posibilidad es actualizar cada predicción y luego agregar los resultados obtenidos, $\sum_{j \in M} \alpha^j p(c_S^j, E)$. El resultado así obtenido coincide con la aplicación de la regla proporcional ponderada a la proyección, C_S , de C sobre S , es decir,

$$P^\alpha(C_S, 1) = \sum_{j \in M} \alpha^j p(c_S^j, E).$$

Otra posibilidad es agregar las predicciones mediante la regla proporcional ponderada y actualizar el resultado, obteniéndose $p((P^\alpha(C, 1))_S, 1)$.

$P^\alpha(C_S, 1) \neq p((P^\alpha(C, 1))_S, 1)$, como puede comprobarse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4 *Un experto en bolsa predice una subida en el mercado con probabilidad 0,2; un mantenimiento de la cotización con probabilidad 0,4 y una bajada con probabilidad 0,4,*

mientras que otro experto, al que se le da la misma fiabilidad que al primero, predice otra distribución de probabilidad, (0,5, 0,2 y 0,3). Además, una inesperada noticia en el ámbito político hace que la posibilidad de que el mercado baje quede anulada. Por consiguiente, en este ejemplo, $N = \{1, 2, 3\}$, $S = \{1, 2\}$, $E = 1$, $\alpha = (0,5; 0,5)$ y la matriz de referencias es:

$$C = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Actualizar las dos predicciones y agregar las actualizaciones a continuación da como resultado:

$$P_1^\alpha(C_S, 1) = 0,5 \cdot \frac{0,2}{0,6} + 0,5 \cdot \frac{0,5}{0,7} \simeq 0,524;$$

$$P_2^\alpha(C_S, 1) = 0,5 \cdot \frac{0,4}{0,6} + 0,5 \cdot \frac{0,2}{0,7} \simeq 0,476.$$

Sin embargo, si se agregan primero las predicciones y luego se actualiza la agregación, se obtiene:

$$p_1((P^\alpha(C, 1))_S, 1) = \frac{0,5 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,5}{0,5 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,2} \simeq 0,538;$$

$$p_2((P^\alpha(C, 1))_S, 1) = \frac{0,5 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,2}{0,5 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,2} \simeq 0,462.$$

En las siguientes figuras se representan gráficamente los dos resultados:

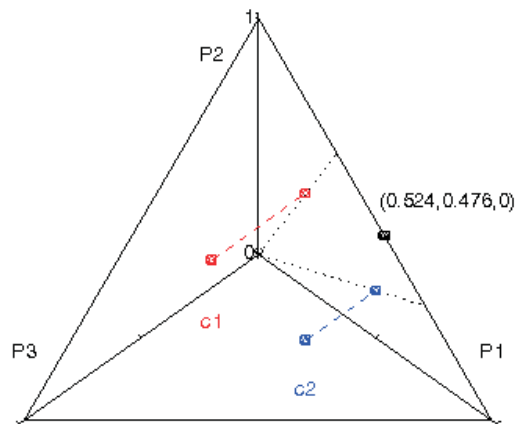


Figura 1. Actualización + agregación.

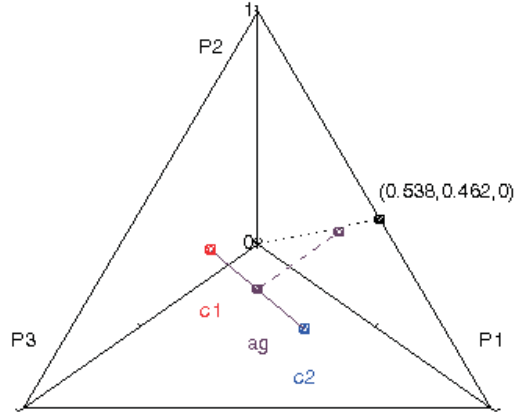


Figura 2. Agregación + actualización.

En la línea del segundo de los procedimientos expuestos arriba (agregación+actualización) y de forma similar a como se han definido las reglas de actualización de probabilidades en la Sección 2.1, pueden definirse otras reglas para este problema. A continuación se pone un ejemplo de familia de reglas.

Igual que en el caso de actualización de probabilidades, se denota por $\mathcal{P} \subseteq 2^N$ al conjunto de las posibles subconjuntos no vacíos de estados de la naturaleza que finalmente pueden ocurrir. Supondremos que \mathcal{P} es no vacío. Un problema de agregación y actualización de probabilidades en este marco es una terna $(C, 1, \mathcal{P})$, donde $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tiene por columnas las distintas distribuciones de probabilidad proporcionadas por los diferentes expertos. La clase de todos los problemas de actualización de probabilidades que se asocian con el conjunto de estados de la naturaleza, N , el conjunto de referencias, M , y la estructura de subconjuntos, \mathcal{P} , se denota por $\mathcal{C}(N, M, \mathcal{P})$.

Una regla de reparto sobre $\mathcal{C}(N, M, \mathcal{P})$ es una función, f , que asocia con cada problema, $(C, 1, \mathcal{P}) \in \mathcal{C}(N, M, \mathcal{P})$, una asignación $x^S \in X(E)$ para cada $S \in \mathcal{P}$ de forma que $x_r^S = 0$ si $r \notin S$.

Un ejemplo de familia de reglas para este problema de agregación y actualización de probabilidades consiste en añadir a la asignación según la regla proporcional ponderada por el vector de pesos α , $P^\alpha(C, 1)$, para cada $S \in \mathcal{P}$, el reparto entre los agentes de S de la cantidad $1 - P^\alpha(C, 1)(S) = P^\alpha(C, 1)(-S)$ según una proporción β , es decir, fijado el β , la regla es

$$f^{\alpha, \beta}(C, 1, \mathcal{P}) = P_S^\alpha(C, 1) + p(1 - P^\alpha(C, 1)(S), \beta) \quad \forall S \in \mathcal{P},$$

donde $\beta \in \mathbb{R}_+^S$.

4. CONCLUSIONES

Los problemas de división con múltiples referencias se están estudiando cada vez más porque se ajustan de una forma adecuada a problemas reales. Estos problemas pueden ser básicamente de dos tipos. En el primer tipo de problemas, el reparto de la cantidad (generalmente insuficiente para satisfacer todas las reclamaciones) se realiza con arreglo a diferentes conceptos y, dentro de estos conceptos, cada agente recibe su asignación (por ejemplo, la Unión Europea divide su presupuesto en distintas partidas, tales como agricultura, medio ambiente, etc. y los distintos países tienen unas reclamaciones en estos diferentes conceptos). En estos problemas se procede en dos pasos: en el primero se agregan las reclamaciones de los agentes en cada concepto y se reparte la cantidad total entre los distintos conceptos con arreglo a dichas referencias agregadas y, en un segundo paso, cada una de estas asignaciones se reparten entre los agentes. Este análisis es el que se sigue en Lorenzo-Freire *et al.* (2009), Moreno-Tertero (2009) y Bergantiños *et al.* (2008, 2010).

El otro tipo de problemas es el que se aborda en este trabajo. Hay distintas referencias a tener en cuenta para obtener una asignación a los agentes (una de las posibles situaciones que se representan mediante este modelo es, por ejemplo, aquélla en la que se pide la colaboración de expertos o árbitros para valorar las necesidades de los agentes y cada experto da unas referencias distintas que se quieren tener en cuenta en el reparto). Así se aborda el problema también en los trabajos de Calleja *et al.* (2007), González-Alcón *et al.* (2007) y Ju *et al.* (2007).

La principal virtud de este segundo modelo es que acomoda diversas situaciones reales como la bancarrota, cuando la deuda se refiere a distintos activos o bienes, el reparto de incentivos o el reparto de excedentes (cuando se toman varias referencias para obtener la asignación) o también situaciones de reparto bajo incertidumbre en las que el reparto ha de realizarse sin concretarse el escenario futuro que finalmente ocurrirá.

La extensión de la idea de proporcionalidad a este nuevo modelo de reparto con referencias múltiples puede abordarse de distintas formas. En este trabajo se estudia la regla proporcional ponderada y se prueba un resultado que caracteriza esta regla como la única regla no manipulable que cumple algunas propiedades deseables.

Un caso particular de regla proporcional agregada (en el que las referencias son realmente distintas asignaciones) es la agregación de probabilidades. Si este problema de agregación se analiza en conjunción con el problema de actualización de probabilidades

(alguno o algunos de los estados de la naturaleza se revela que no son posibles) resulta que no se obtiene el mismo resultado si se agregan las probabilidades iniciales y se actualiza el resultado que si se actualizan las probabilidades iniciales y se agregan dichas actualizaciones. En el primero de los casos, como la agregación de probabilidades es el resultado de aplicar la regla proporcional ponderada, lo que se obtiene es una asignación proporcional a la proyección de la probabilidad agregada; el segundo caso consiste en aplicar la regla proporcional ponderada a la proyección de las referencias o probabilidades iniciales.

El trabajo desarrollado deja abiertas otras posibles líneas futuras de investigación. En nuestro punto de mira está estudiar otras extensiones de la regla proporcional a este nuevo marco en el que hay referencias múltiples. La asignación proporcional al maximal de los vectores de referencias (podríamos decir que se adopta un punto de vista optimista en este caso) y la asignación proporcional al minimal (bajo un punto de vista pesimista) son dos posibilidades.

En el caso particular de la agregación y actualización de probabilidades, se persigue también proponer otras reglas que permitan agregar y/o actualizar probabilidades y analizar sus propiedades estadísticas en relación a la regla proporcional agregada. En particular, son interesantes las reglas que aquí se apuntan con un vector de proporcionalidad fijo.

REFERENCIAS

- Bergantiños, G.; Lorenzo, L.; Lorenzo-Freire, S. (2010) “A characterization of the proportional rule in multi-issue allocation situations”. *Operations Research Letters* **38**, 17–19.
- Bergantiños, G.; Lorenzo, L.; Lorenzo-Freire, S. (2008) “New characterizations of the constrained equal awards rule in multi-issue allocation situations”. *Mimeo, University of Vigo*.
- Branzei, R.; Dimitrov, D.; Pickl, S; Tijs, S. (2004) “How to cope with division problems under interval uncertainty claims?”. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* **12**, 191–200.
- Calleja, P.; Borm, P.; Hendrickx, R. (2005) “Multi-issue allocation situations”. *European Journal of Operational Research* **164**, 730–747.
- Chun, Y. (1988a) “The proportional solution for rights problem”. *Mathematical Social Sciences* **15**, 231–246.

- Gilboa, I.; Schmeidler, D. (1993) “Updating ambiguous beliefs”. *J. Econ. Theory* **59**, 33–49.
- González-Alcón, C.; Borm, P.; Hendrickx, R. (2007) “A composite run to the bank rule for multi-issue allocation situations”. *Mathematical Methods of Operations Research* **65**, 339–352.
- Ju, B.G.; Miyagawa, E. (2002) “Proportionality and non-manipulability in claims problems”. *mimeo*.
- Ju, B.G., Miyagawa, E.; Sakai, T. (2007) “Non-manipulable division rules in claim problems and generalizations”. *Journal of Economic Theory* **132**, 1–26.
- Lorenzo-Freire, S.; Casas-Méndez, B.; Hendrickx, R. (2009) “The two-stage constrained equal awards and losses rules for multi-issue allocation situations”. *Top*.
- Majumdar, D. (2004) “An axiomatic characterization of Bayes’ rule”. *Math. Soc. Sci.* **47**, 261–273.
- McConway, K.J. (1981) “Marginalization and Lear Opinion Pools”. *J. Amer. Statist. Assoc.* **76**, 410–414.
- Moreno-Ternero, J. (2009) “The proportional rule for multi-issue bankruptcy problems”. *Economics Bulletin* **29**, 483–490.
- Moulin, H. (1985b) “The separability axiom and equal-sharing methods”. *Journal of Economics Theory* **36**, 120–148.
- Pulido, M.; Sánchez-Soriano, J.; Llorca, N. (2002) “Game theory techniques for university management: an extended bankruptcy model”. *Annals of Operations Research* **109**, 129–142.
- Pulido, M.; Borm, P.; Hendrickx, R.; Llorca, N.; Sánchez-Soriano, J. (2008) “Compromise solutions for bankruptcy situations with references”. *Annals of Operations Research* **158**, 133–141.
- Rubinstein, A.; Fishburn, P.C. (1986) “Algebraic aggregation theory”. *J. Econ. Theory* **38**, 63–77.
- Thomson, W. (2003) “How to divide when there isn’t enough: from the Talmud to modern game theory”. *University of Rochester*.
- Young, P. (1988) “Distributive justice in taxation”. *Journal of Economic Theory* **44**, 321–335.



UNIVERSIDAD
PABLO DE
OLAVIDE
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (12). Páginas 81–110.
Diciembre de 2011. ISSN: 1886-516X. D.L.: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=54>

¿Qué factores explican la pobreza multidimensional en España? Una aproximación a través de los modelos de ecuaciones estructurales

POZA LARA, CARLOS

Departamento de Economía y Administración de Empresas
Universidad Antonio de Nebrija, Madrid
Correo electrónico: cpoza@nebrija.es

FERNÁNDEZ CORNEJO, JOSÉ ANDRÉS

Departamento de Economía Aplicada III (Política Económica)
Universidad Complutense de Madrid
Correo electrónico: jafercor@ccee.ucm.es

RESUMEN

La finalidad de este estudio es presentar los factores más importantes que explican la pobreza multidimensional en España, destacando las interrelaciones entre los propios elementos explicativos, con el ánimo de potenciar los efectos de la política económica contra la pobreza. Para ello, se ha construido un modelo de ecuaciones estructurales utilizando la muestra ampliada del Panel de Hogares de la Unión Europea del año 2000. El nivel de educación y el empleo parecen ser los constructos más determinantes. Concretamente, el nivel de formación y el tipo de contrato son las variables con mayor poder explicativo sobre la pobreza multidimensional.

Palabras clave: pobreza multidimensional; ecuaciones estructurales.

Clasificación JEL: H31; H75; I32.

MSC2010: 62H25; 62J99.

What Factors Explain the Multidimensional Poverty in Spain? An Approach by Means of Structural Equation Models

ABSTRACT

The aim of this study is to present the most important factors that explain multidimensional poverty in Spain, highlighting the relationships between the explanatory elements themselves in the spirit of enhancing the effects of poverty policy. For this purpose, we have designed a Structural Equation Model using the enlarged sample of Household Panel European Union in 2000. Education and employment seem to be the most determining latent construct. In particular, the level of education and the type of employment contract are the most important variables to explain multidimensional poverty.

Keywords: multidimensional poverty; structural equations.

JEL classification: H31; H75; I32.

MSC2010: 62H25; 62J99.



1. INTRODUCCIÓN

Numerosos estudios han identificado las principales bolsas de pobreza en España, pero no demasiados han explicado la causalidad de dichos niveles de pobreza. Tampoco existen tantos que analicen el grado de importancia de cada uno de esos factores en comparación con los demás de forma simultánea y aún menos que identifiquen relaciones de causalidad no solo entre los factores y la pobreza sino entre los propios factores causales. Averiguar el impacto de cada elemento explicativo sobre la pobreza, así como entre ellos, se convierte en un punto estratégico para elaborar política económica enfocada a reducir la pobreza.

Al revisar los principales trabajos sobre pobreza publicados hasta el momento se aprecia la posibilidad de utilizar otras técnicas estadísticas distintas a las aplicadas en dichos estudios, con la oportunidad de construir modelos más complejos que sean capaces de contrastar no solo la relación causa-efecto entre las variables explicativas de la pobreza y la propia pobreza sino también las relaciones entre las variables “independientes”, que ulteriormente terminarán afectando a la pobreza. Este trabajo propone una metodología distinta (modelos de ecuaciones estructurales) a las usadas normalmente (regresión lineal y logística), no con la finalidad sustituirlas sino con el objeto de reforzar los resultados desde otra óptica, aportando relaciones causales indirectas que con los modelos de regresión no son posibles.

En esta línea, el objetivo concreto de este trabajo se orienta hacia la determinación de los factores más importantes que explican la pobreza en la economía española, tratando de interrelacionar los efectos indirectos entre los propios factores explicativos, que multiplicarían la eficacia de la medida implementada. A diferencia de otras investigaciones, donde solo se produce causa-efecto en una dirección (por ejemplo, desempleo–pobreza), en este trabajo los elementos causales pueden ser explicados a su vez por terceros elementos (por ejemplo, educación–desempleo–pobreza). De ahí que el efecto de la política económica se pueda multiplicar.

Para acometer este objetivo se realiza una revisión exhaustiva de la literatura empírica sobre estudios de pobreza en España y, en menor medida, en la Unión Europea, tratando de detectar las causas fundamentales de la misma. Posteriormente, se aplica la técnica de los modelos de ecuaciones estructurales, para elaborar un diagrama de relaciones causales directas e indirectas simultáneas –de origen empírico– muy acorde al complejo concepto de pobreza. En tercer lugar, se presentan los resultados obtenidos y, en última instancia, las conclusiones de la investigación.

2. MARCO DE REFERENCIA

Los estudios sobre pobreza han proliferado de forma notable en los últimos años, distinguiéndose dos ejes fundamentales: las investigaciones enmarcadas en la medición de la pobreza, incluyendo el tratamiento de cuestiones metodológicas tales como la definición de la pobreza, la selección de

variables y la construcción de índices; y las investigaciones enfocadas hacia las propuestas y análisis de políticas económicas para combatir la pobreza, ya sea mediante intervenciones directas con políticas de redistribución de la renta o intentando identificar y actuar sobre las raíces de la pobreza (Pérez Moreno, 2009). Este trabajo se sitúa en el segundo eje de la economía de la pobreza; concretamente, en el del análisis causal, cuyo fin es la búsqueda de factores explicativos de los distintos niveles de pobreza. Según Martínez Álvarez (2003), la evolución histórica de los estudios de pobreza en España ha sido creciente. Desde la etapa de los precursores, a partir finales del s. XIX hasta primera mitad s. XX, donde el pauperismo evoluciona desde un hecho individual hacia un problema social; pasando por la etapa de la industrialización y modernización de la economía, desde 1960 hasta mediados de los 70, en que aparecen las primeras investigaciones tales como Cáritas (1965) o FOESSA (1966 y 1970); hasta finalizar en la etapa de la democracia, donde trabajos pioneros como los de Ruiz-Castillo (1987), Fernández-Morales *et al.* (1988), Bosch *et al.* (1989) o Escribano (1990) comienzan a cuantificar el número de pobres así como a conocer su composición y características a través de fuentes estadísticas más precisas tales como las Encuestas de Presupuestos Familiares (Cantó, Del Río y Gradín, 2000).

A partir de ese momento, y con mucha más asiduidad, se comienzan a desarrollar numerosos trabajos utilizando los distintos datos disponibles. Datos provenientes de la misma Encuesta de Presupuestos Familiares (EPF), de la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares (ECPF), del Panel de Hogares de la Unión Europea (PHOGUE) y de la reciente Encuesta de Condiciones de Vida (ECV). En algunos de ellos, el análisis es descriptivo, como por ejemplo: Martínez y Ruiz Huerta (2000), Pérez Mayo, Fajardo y Sánchez Rivero (2000), Adiego y Moneo (2002), Navarro y Ayala (2004), Ayala, Jurado y Pérez Mayo (2006), Jurado y Pérez Mayo (2007), Cantó, Del Río y Gradín (2008) o Fundación FOESSA (2008), entre otros. Ofrecen datos sobre los niveles de pobreza (o privación, según el caso) e identifican las bolsas de riesgo de la población a partir de una serie de características socioeconómicas y geográficas. Esta segunda parte resulta especialmente interesante para este trabajo, puesto que se reconocen las potenciales razones que podrían explicar la pobreza en España. Solo son potenciales porque carecen de un enfoque causal¹.

Pero también ha proliferado otro tipo de investigaciones, en los últimos diez años, conducentes a encontrar los factores que explican si se es pobre o no, o si se sufre de privación o no. Este enfoque causal es más completo que el utilizado en la batería de trabajos descriptivos, porque da un salto cualitativo desde la mera descripción e identificación de características que discriminan a los pobres hacia la relación causa-efecto de ciertos factores socioeconómicos sobre la pobreza o privación. Algunos ejemplos importantes se pueden encontrar en García Mainar y Toharia (1998), Cantó (2003),

¹ Por ejemplo, en los análisis descriptivos de la pobreza, se observa que a medida que el grado de formación es superior se reducen las tasas de pobreza. Se intuye relación causa-efecto, pero mientras no se contraste empíricamente no se puede afirmar que mayores niveles de educación llevarán consigo mejoras de la pobreza. Sin embargo, una vez que se realizan los análisis causales pertinentes (con regresión lineal, logit, ecuaciones estructurales, etc.) y éstos resultan significativos, entonces sí se podrá afirmar que la educación influye en la pobreza.

Lafuente *et al.* (2009), Gil y Ortiz (2009) o Ayala, Jurado y Pérez Mayo (2009). En el primer y tercer estudios, se utiliza la regresión logística para contrastar que una serie de factores explican la pobreza. Y en el segundo y cuarto casos, aunque la técnica empleada es la misma, la variable explicada es la privación multidimensional.

Del mismo modo que en España han aparecido profusos trabajos sobre pobreza y privación con un enfoque causal, a nivel internacional también ha ocurrido lo mismo. Destacan algunos como Böhnke y Delhey (1999), donde utilizan la regresión logística para explicar y comparar la privación en Alemania y Gran Bretaña; Layte *et al.* (2000), donde emplean la regresión con mínimos cuadrados ordinarios (MCO) para explicar la privación en la Unión Europea de forma comparativa; Whelan *et al.* (2003), donde a través de un análisis de regresión logística determinan los factores causales de la pobreza consistente, también en Europa; Cappellari y Jenkins (2004), que utilizan un probit para contrastar que una serie de elementos explican la privación de un estilo de vida básico; Coromaldi y Zoli (2007), cuya metodología es similar a la de Böhnke y Delhey (1999) pero adaptada al caso italiano; o Whelan y Maitre (2010), donde se utiliza la regresión logística multinomial para explicar el grado de privación en Irlanda. De estos trabajos se pueden deducir las principales causas que explican la pobreza, puesto que existe cierto consenso en los factores que producen situaciones de mayor debilidad, de menor acceso a bienes y servicios necesarios o de presentar niveles de renta inferiores a un determinado umbral de pobreza. Cualquiera que sea el indicador utilizado (pobreza o privación), las raíces explicativas suelen estar relacionadas con tres aspectos, según Leisering y Walker (1998) y Leisering y Leibfried (1999): “*biographisation*”, “*temporalisation*” y “*democratisation*”. El primero se refiere a que la pobreza se asocia con un hecho o evento particular en la vida de una persona (divorcio, separación, hogares con niños, etc.). El segundo significa que la pobreza se relaciona con una fase de la vida, sea corta o larga, de carácter excepcional o recurrente, y que constituye un reflejo de la creciente discontinuidad de los cursos de la vida individual, más que de un estado fijo. Y el tercero se refiere a que la pobreza ya no está confinada a los miembros de las clases bajas sino que también alcanza a las clases medias, aunque solo sea como una experiencia temporal (Fernández, 2002). Aunque autores como Layte *et al.* (2000) han encontrado evidencias empíricas que contradicen, o al menos restan importancia, a la “*biographisation*”, puesto que detectan algunos factores estructurales socioeconómicos que se comportan como mejores predictores de la pobreza que los eventos puntuales promulgados por la “*biographisation*”.

A modo de resumen, se describen algunos de los trabajos más recientes en los que se destacan las causas más importantes que podrían explicar la pobreza en España. El criterio seguido para seleccionarlos radica en la importancia de la publicación o autores y en el alcance de los resultados obtenidos, entendidos éstos como los conseguidos a través del uso de un elevado número de variables y de técnicas de causalidad para explicar la pobreza o privación. También se ha pretendido resaltar distintos trabajos que usaran diferentes bases de datos (ECPF, PHOGUE y ECV). Indudablemente, no

se recogen todos los estudios de pobreza realizados en España, pero sí una parte substancial de ellos, en lo que se refiere a la búsqueda de los principales factores explicativos de la pobreza.

Cuadro 1. Estudios recientes de donde se extraen los factores explicativos de la pobreza

Autor y Fuente	Objetivos y variables	Resultados
García Mainar y Toharia (1998)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Identificar las causas que explican la pobreza, con raíz en el mercado laboral 	<ul style="list-style-type: none"> - El desempleo y, más aún, una situación familiar en la que hay algún parado y ningún ocupado, está claramente relacionado con la pobreza.
PHOGUE, 1994	<ul style="list-style-type: none"> Variable dependiente: <ul style="list-style-type: none"> - Pobreza Variables independientes: <ul style="list-style-type: none"> - Desempleo - Tipo de familia - Edad - Nivel de estudios - Sexo 	<ul style="list-style-type: none"> - Las familias cuya persona de referencia es una mujer con un nivel de estudios bajo son las que muestran más posibilidades de encontrarse en situación de pobreza y más dificultades para salir de ella. - Otras características que inducen a estar en esa situación son la menor edad de la persona de referencia y el número de personas de la familia, que favorecen la situación de la pobreza pero proporcionan mayores garantías para abandonarla.
Martínez y Ruiz Huerta (2000)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Identificar las razones que explican la privación 	<ul style="list-style-type: none"> - En términos generales, las mujeres, los jóvenes, los mayores, los desempleados, especialmente, los de larga duración, los empleados recientemente, desempleados, hogares monoparentales con hijos y hogares con viviendas de precio elevado (en propiedad o alquilada), presentan peores cifras de privación.
PHOGUE, 1995	<ul style="list-style-type: none"> Variable dependiente: <ul style="list-style-type: none"> - Privación Variables independientes: <ul style="list-style-type: none"> - Características del hogar - Situación laboral - Sexo y edad - Situación con la vivienda 	
Adiego y Moneo (2002)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Estudio de la pobreza monetaria y persistente 	<ul style="list-style-type: none"> - Ser mujer, tener menos de 25 años o más de 65, no poseer estudios o tenerlos primarios, estar parado o inactivo, pertenecer a un hogar monoparental con al menos un hijo dependiente o a uno de dos adultos pero con más de tres hijos, aumentan la probabilidad de incurrir en situaciones de pobreza.
PHOGUE, 1994-2001	<ul style="list-style-type: none"> Variables dependientes: <ul style="list-style-type: none"> - Pobreza monetaria - Pobreza persistente Variables independientes: <ul style="list-style-type: none"> - Sexo y edad - Nivel educativo - Actividad principal del cabeza de familia - Tipo de hogar 	
Cantó (2003)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Identificar causas que explican la pobreza 	<ul style="list-style-type: none"> - Los que presentan mayores riesgos de ser pobres son las mujeres, las personas mayores, los sin estudios o con estudios primarios, los que viven en ciudades de gran tamaño, de alquiler y con cónyuge parado, los desempleados y los ocupados a tiempo parcial; también los que desempeñan trabajos de baja cualificación (empleo precario).
ECPF, 1985-1995	<ul style="list-style-type: none"> Variable dependiente: <ul style="list-style-type: none"> - Pobreza Variables independientes: <ul style="list-style-type: none"> - Sexo y edad - Nivel de educación - Nº indiv. y edad dependientes hogar - Tamaño del municipio donde residen - Tipo de vivienda - Sit. lab. persona referencia y cónyuge - Variables ficticias relacionadas con efectos estacionales y temporales 	

Navarro y Ayala (2004)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Analizar a los hogares que sufren exclusión en la vivienda 	<p>- Los resultados no difieren de los anteriores, por tanto, la posición en el mercado de trabajo, los hogares que viven en régimen de alquiler, en casas de tamaños extremos, con sustentadores mayores de 65 años, con bajo nivel de estudios y de salud, sumado a la mayor incidencia en el caso de la mujer, constituyen las principales características de los más desfavorecidos.</p>
PHOGUE, 2000	<p>Variable dependiente:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Privación <p>VARIABLES INDEPENDIENTES:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Región (NUTS) - Fuente principal de ingresos - Capacidad de llegar a fin de mes - Régimen tenencia de la vivienda - Educación - Estado de salud - Relaciones sociales - Sexo, edad y estado civil - Tamaño y composición del hogar - 	
Cantó, Del Río y Gradín (2008)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Caracterización de la pobreza monetaria crónica, transitoria, recurrente y no recurrente 	<p>- Se produce consenso entre las distintas definiciones de pobreza en los siguientes casos: régimen de tenencia de la vivienda en cesión gratuita, hogares formados por una pareja de adultos con 3 o más niños o monoparental con hijos, cuyo sustentador principal del hogar haya alcanzado únicamente la educación primaria y esté divorciado o que se encuentre en una situación de desempleo o inactividad.</p> <p>- Por último, se hace especial hincapié en que los eventos laborales resultan ser los más importantes para abandonar una situación de pobreza.</p>
PHOGUE, 1994-2001	<p>Variable dependiente:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Pobreza <p>VARIABLES INDEPENDIENTES:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Características del hogar y del sustentador principal 	
Fundación FOESSA (2008)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Análisis descriptivo de la desigualdad, pobreza y privación 	<p>- Los resultados para la pobreza monetaria destacan algunos patrones que localizan focos de mayor riesgo. Dichos factores están relacionados con la edad, el sexo y el tipo de hogar, principalmente. Ser mayor de 65 años, especialmente si se es mujer, tener menos de 16 años y vivir en una familia cuyo cabeza de familia carece de estabilidad laboral, son elementos que aumentan la probabilidad de sufrir procesos de pobreza. Además, los hogares monoparentales con algún hijo y las familias numerosas presentan peores cifras que el resto. En último lugar, el informe resalta que hay una mayor incidencia de la pobreza entre la población extranjera no comunitaria, no así en la europea con respecto a la española, debido a los bajos niveles salariales, la segregación ocupacional y la necesidad de atender cargas familiares.</p> <p>- El perfil socioeconómico de los grupos con mayores niveles de privación no modifica demasiado la lista de factores asociados a la pobreza monetaria, pero sí altera su importancia relativa. Las principales conclusiones de este apartado derivan del estudio de Cantó, Del Río y Gradín (2008) resumido anteriormente.</p>
ECPF, 1985-1995 y 1998-2004; PHOGUE, 1994-2001; y ECV, 2004-2006.	<p>VARIABLES DEPENDIENTES:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Pobreza monetaria - Privación <p>VARIABLES INDEPENDIENTES:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Edad - Sexo - Tipo de hogar - Inmigración 	

Gil y Ortiz (2009)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Identificar los determinantes socioeconómicos de la pobreza extrema desde una aproximación monetaria y, también, de privación 	<ul style="list-style-type: none"> - Se obtienen resultados comunes al resto de investigaciones, pero también algunos cambios, debido a que se utiliza la Encuesta de Condiciones de Vida de 2004.
ECV, 2004	<p>VARIABLES DEPENDIENTES:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Pobreza monetaria - Privación <p>VARIABLES INDEPENDIENTES:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Variables relacionadas con el sustentador principal: edad, sexo, estudios, tipo de contrato y situación laboral - Variables asociadas al hogar: tipo y tamaño del hogar - Variables relativas a la zona geográfica: densidad de población 	<ul style="list-style-type: none"> - Desde el punto de vista monetario, parece que el riesgo de pobreza se reduce con la edad, con la diferencia de que ahora son las mujeres las que presentan una menor probabilidad de ser pobres. En relación al hogar, por el contrario, los unipersonales muestran mayores riesgos. En el ámbito educacional y laboral, se demuestra que tener mayores estudios reduce los niveles de pobreza, al igual que encontrarse ocupado, sobre todo, si se está de forma indefinida. Por último, vivir en zonas con alta densidad de población incrementa los niveles de pobreza. - Desde el punto de vista de la privación, la mujer presenta mayores riesgos y los hogares monoparentales menor probabilidad, al contrario que en el enfoque monetario. Estos diferentes resultados, según los autores, confirman la necesidad de considerar a la pobreza como un concepto multidimensional.
Ayala, Jurado y Pérez Mayo (2009)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Elaborar un indicador de privación multidimensional y comparar la situación por comunidades autónomas. Explicar las causas 	<ul style="list-style-type: none"> - Nuevamente, el nivel de estudios completado y la situación laboral impactan determinadamente en la pobreza, ya sea desde el enfoque monetario o de privación. Asimismo, el peso de no tener estudios o de tenerlos universitarios es muy superior al resto de variables. También sucede lo mismo entre estar desempleado y ocupado, máxime, si se está a tiempo completo. - Las otras variables independientes también ejercen influencia, pero no tanta como las relativas a la educación y al empleo.
ECV, 2005	<p>VARIABLES DEPENDIENTES:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Pobreza monetaria - Privación multidimensional <p>VARIABLES INDEPENDIENTES:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Sexo y edad - Estudios - Tamaño del hogar - Situación laboral - Tipos de hogar 	
Lafuente <i>et al.</i> (2009)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Destacar los principales factores explicativos de la pobreza consistente 	<ul style="list-style-type: none"> - Los resultados se asemejan a los de otros trabajos: estar separado o divorciado, ser extranjero no comunitario, estar desempleado o empleado con contrato temporal, vivir de alquiler, tener un nivel de formación bajo y encontrarse con un estado de salud malo o muy malo eleva la probabilidad de ser pobre. Es más, no tener estudios o solo primarios y estar desempleado son los factores que ejercen una mayor influencia en la pobreza, según se extrae de los elevados coeficientes (significativos) de la regresión.
ECV, 2006	<p>VARIABLE DEPENDIENTE:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Pobreza <p>VARIABLES INDEPENDIENTES:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Sexo, edad y estado civil - Nacionalidad - Situación del hogar - Régimen de tenencia de la vivienda - Nivel de estudios - Situación laboral - Tipo de contrato - Estado general de la salud 	

Poza y Fernández Cornejo (2010)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Identificar las bolsas de la población en situación de pobreza multidimensional, por áreas geográficas y características socioeconómicas 	<ul style="list-style-type: none"> - Las comunidades autónomas que presentan mayores niveles de pobreza son: Andalucía, Extremadura y Murcia. - En cuanto a las características de la población que mejor discriminan los elevados niveles de pobreza son: mujer, joven o mayor de 65 años, viudo/a, hogar monoparental con hijos menores de 16 años, con contrato temporal, de poca duración, insistente en situaciones de paro, desempleo de larga duración, trabajar a tiempo parcial, tener un nivel bajo de formación, hablar solo un idioma, no utilizar internet, tener un estado de salud deficiente, relacionarse en exceso o nada con los demás, ser extranjero no comunitario, vivir de alquiler o en cesión gratuita así como en una vivienda pequeña.
PHOGUE, 1994-2001	<p>Variable dependiente:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Pobreza <p>VARIABLES INDEPENDIENTES:</p> <ul style="list-style-type: none"> - CCAA - Sexo, edad y estado civil - Tipo de hogar - Tipo y duración del contrato - Nº veces paro y desempleo larga duración - Tipo de jornada - Nivel de formación, uso de idiomas e internet - Estado general de salud - Relaciones sociales - Nacionalidad - Tipo y régimen de tenencia de vivienda 	

Fuente: elaboración propia

3. OBJETIVOS E HIPÓTESIS

El fin último de este trabajo radica en resaltar los principales factores que explican la pobreza multidimensional en España. Para ello, se definen tres objetivos generales y seis específicos:

1. *Establecer constructos² explicativos de la pobreza.* Dada la gran variedad de elementos que son capaces de explicar la pobreza, se ha optado por elaborar constructos a partir de una serie de variables directamente observables. Esto es, se pretende reducir el número de variables originales explicativas en un menor número de constructos, que contengan una mayor capacidad informativa y eliminen posibles problemas de multicolinealidad. Específicamente se trata de:
 - Definir las variables directamente observables que integran los constructos.
 - Construir los constructos de manera objetiva, esto es, ponderar las variables que componen las dimensiones de manera no arbitraria (con técnicas estadísticas multivariantes).

2. *Identificar las interrelaciones más importantes entre los constructos.* Una vez generados los constructos, se trata de señalar las relaciones causa-efecto más importantes extraídas de la literatura teórica y empírica. En nuestro caso, las relaciones de causalidad tienen su origen en la revisión de una batería de trabajos llevados a cabo en los últimos años tanto en España como en la Unión Europea. Concretamente los objetivos específicos son:
 - Resaltar los efectos directos e indirectos sobre la pobreza.

² También denominadas dimensiones o variables latentes. Son variables directamente no observables compuestas por variables directamente observables.

- Identificar los factores más influyentes sobre la pobreza.
3. *Establecer un modelo empírico de la pobreza multidimensional en España.* Una vez creados los constructos e identificadas las relaciones de causalidad, se pretende contrastar dichas relaciones así como realizar pequeñas modificaciones del modelo para mejorar su capacidad explicativa. De este modo, se trata de:
- Construir un modelo base con los factores más importantes que explican la pobreza con el ánimo de contrastar las interrelaciones.
 - Crear modelos rivales que compitan con el modelo base para mejorar el ajuste y la capacidad explicativa.

Derivados de estos objetivos y de la revisión de la literatura, se plantean las siguientes hipótesis a contrastar:

H₁: Las variables directamente observables elegidas miden correctamente las variables latentes subyacentes de ellas.

H₂: Existen factores sociodemográficos que determinan el nivel de pobreza: sexo, edad, nacionalidad o tipo de hogar, entre otros.

H₃: El nivel de formación, el estado de salud y el tipo de contrato influyen de forma crucial en la pobreza, en comparación con otros elementos explicativos.

H₄: Los constructos que más impactan sobre la pobreza son el empleo y los medios básicos.

4. METODOLOGÍA

4.1. Datos

Se utiliza el *Panel de Hogares de la Unión Europea (PHOGUE)*, que es una fuente de datos abundante para analizar la situación social, circunstancias financieras y condiciones de vida de un panel de hogares seguidos entre 1994 y 2001 (Whelan, Nolan y Maitre, 2006). Ha sido ampliamente utilizada para realizar estudios de pobreza, tanto en España como en el resto de la Unión Europea (Martínez y Ruiz-Huerta, 2000). El PHOGUE pertenece al conjunto de operaciones estadísticas armonizadas para los países de la Unión, por lo que todos y cada uno de ellos siguen una misma metodología de elaboración de las encuestas, facilitándose las comparaciones entre países. Su objetivo fundamental es poner a disposición de la Comisión Europea un instrumento estadístico que le permita seguir y evaluar la cohesión social en el territorio de su ámbito, estudiar las necesidades de la población y el impacto de las políticas sociales y económicas sobre los hogares y las personas, así como diseñar nuevas políticas. Esta fuente de datos utiliza técnicas de panel fijo. De esta forma, se pueden analizar datos desde un punto de vista transversal así como longitudinal.

Ésta ha sido sustituida por la Encuesta de Condiciones de Vida (ECV), que si bien ofrece datos más recientes, no incluye algunas variables que sí incluía el PHOGUE. Un ejemplo son las variables relacionadas con el grado de satisfacción del individuo (situación económica, ocio, vivienda y trabajo)

que informan sobre la pobreza subjetiva y que han sido utilizadas para la construcción de un indicador de pobreza multidimensional (Poza y Fernández Cornejo, 2010), que posteriormente se incorpora en el análisis de este trabajo.

4.2. Muestra

Se utiliza la muestra ampliada del año 2000 para obtener unos resultados más robustos. Alcanza los 36.000 individuos en todo el territorio español, frente a los 15.000 de media del resto de años, a los que habría que restar algunos más por la pérdida de muestra (*attrition*).

4.3. Técnica

La herramienta empleada es el modelo de ecuaciones estructurales (en adelante, SEM), entendido como una extensión de la regresión múltiple y el análisis factorial. El SEM examina simultáneamente una serie de relaciones de dependencia. En este caso es particularmente útil, porque alguna variable dependiente se convierte en variable independiente en posteriores relaciones de dependencia. Este conjunto de relaciones, cada una con variables dependientes e independientes, es la base del SEM. Según Hair *et al.*:

“abarca una familia entera de modelos conocidos con muchos nombres, entre ellos análisis de la estructura de la covarianza, análisis de variable latente, análisis de factor confirmatorio y a menudo simplemente LISREL” (Hair *et al.*, 1999: 612).

Es una técnica multivariante que trata de analizar las relaciones de causalidad entre distintas variables, las cuales pueden comportarse tanto como dependientes como independientes, simultáneamente. Siguiendo a Hair *et al.* (1999) el SEM se distingue por: a) estimación de relaciones de dependencia múltiples y cruzadas y b) la capacidad de representar conceptos no observados en estas relaciones y tener en cuenta el error de medida en el proceso de estimación.

El SEM tiene como objetivo fundamental la evaluación de una serie de relaciones. Estas relaciones son construidas en dos fases: la primera de ellas, es el modelo de medida (donde aparecen las relaciones entre las variables originales y la latente) y, la segunda, el modelo estructural (donde se contrastan las relaciones entre los constructos o variables latentes; es, por tanto, la modelización de las ecuaciones estructurales propiamente dicho). De este modo, dada la complejidad de relaciones simultáneas que se pueden dar en la pobreza, a continuación se justifica por qué se ha empleado esta técnica:

- Permite reducir información redundante. Dado que una parte del análisis está orientada a construir variables latentes (modelo de medida), permite incorporar múltiples variables explicativas que en condiciones normales podrían provocar problemas de multicolinealidad. Con esta técnica, no obstante, las variables terminan integrándose en constructos con gran contenido explicativo.

- Permite analizar relaciones de causalidad simultáneas (modelo estructural), hecho que otras técnicas como la regresión lineal múltiple, la regresión logística, el análisis discriminante o el probit, no permiten realizar. Estas son unidireccionales: las independientes explican a la dependiente. Sin embargo, el SEM es multidireccional porque las variables que inicialmente eran dependientes, posteriormente pueden convertirse en explicativas de terceras variables; y eso en el campo de la economía de la pobreza es especialmente útil. La evaluación de la eficacia de la política económica para combatir la pobreza sería algo más realista. Así, por ejemplo, un aumento de la formación podría reducir la pobreza, directamente e indirectamente, por su influencia sobre el mercado de trabajo y sobre la igualdad de género, por ejemplo. Mejorando la pobreza desde diferentes vías simultáneamente.

4.4. Variables

Variables independientes

La selección de variables subyace de la revisión teórica y empírica resumida en el marco de referencia del presente trabajo. Como se ha podido observar, existe un elevado consenso en que los factores relacionados con determinadas características sociodemográficas, la salud, la educación, la vivienda, la inmigración, el empleo y las relaciones sociales, ofrecen un potencial explicativo de la pobreza, importante. Así, se han incorporado al análisis aquellas variables del PHOGUE relacionadas con los factores anteriores y que han sido utilizadas en diferentes estudios previamente. Las variables relacionadas con las características sociodemográficas han sido empleadas en la mayoría de estudios (ver Cuadro 1); las asociadas a la salud han sido utilizadas en trabajos como los de Navarro y Ayala (2004) y Lafuente *et al.* (2009); las relacionadas con la educación han sido utilizadas en la inmensa mayoría de estudios de pobreza y privación (ver Cuadro 1); las asociadas con la vivienda se han empleado en estudios como los de Martínez y Ruiz-Huerta (2000), Cantó (2003) y Navarro y Ayala (2004), entre otros; las correspondientes a la inmigración también han sido incluidas en ciertas ocasiones, destacando el trabajo de la Fundación FOESSA (2008), que empieza a analizar la pobreza en 1985 y finaliza en 2006; las asociadas con el empleo han sido manejadas comúnmente, aunque destacan los trabajos de García Mainar y Toharia (1998), Cantó (2003) y Ayala, Jurado y Pérez Mayo (2009) por su mayor profundización en el área del mercado de trabajo; y, por último, las variables asociadas con las relaciones sociales han sido incluidas en estudios como los de Navarro y Ayala (2004) y Fundación FOESSA (2008).

En aras de concretar todos y cada uno de estos factores en variables directamente observables, a continuación se exponen las variables independientes utilizadas:³

³ Téngase en cuenta que algunas de las variables independientes se convertirán en dependientes de otras, según el método SEM. Por otro lado, debe reconocerse la limitación del modelo de no incluir todas las variables potencialmente explicativas de la pobreza, sin embargo, sí recoge una parte substancial de ellas, en línea con la mayoría de estudios de esta índole.

Características sociodemográficas

1. Sexo [1=hombre, 2=mujer]
2. Edad [1=mayor de 65 años, 2=resto de edades]
3. Composición del hogar⁴ [1=hogar monoparental con hijos menos de 16 años, 2=resto de casos]

Salud

4. ¿Cuál es, en general, su estado de salud? [1=muy bueno, 2=bueno, 3=aceptable, 4=malo, 5=muy malo]
5. Durante los últimos 12 meses naturales, ¿aproximadamente cuántas veces ha tenido que asistir a la consulta de medicina general, médico especialista o dentista?

Estudios

6. ¿Cuál es el nivel más alto de estudios que ha completado? [1=licenciado-postgrado, 2=diplomado, 3=segundo nivel de enseñanza secundaria, 4=FP2, 5=FP1, 6=primer nivel de enseñanza secundaria, 7=estudios primarios-EGB, 8=analfabetos-sin estudios]
7. ¿Habla algún idioma, aparte del materno? [1=sí, 2=no]
8. ¿Ha usado internet en los últimos 7 días? [1=sí, 2=no]

Vivienda

9. Clase vivienda y tipo de edificio [1=independiente, 2=adosada-pareada, 3=edificio con menos de 10 viviendas, 4=edificio con 10 viviendas o más, 5=vivienda situada en un edificio destinado principalmente a otros fines (colegio, oficina, taller, etc.), 6=alojamiento fijo (barraca, cabaña, chabola, cueva, etc.)]
10. ¿Cuál es el régimen de tenencia de la vivienda? [1=propiedad, 2=alquiler, 3=cesión gratuita]

Inmigración

11. País de nacimiento [1=España, 2=Comunidad Europea, 3=resto de países]
12. Último país en que residió antes de venir a España [1=España, 2=Comunidad Europea, 3=resto países]
13. ¿Cuál es su nacionalidad? [1=España, 2=Comunidad Europea, 3=resto de países]

Empleo

14. Número de veces que ha estado en paro en los últimos 5 años
15. ¿Algunos de los períodos de paro duraron más de 12 meses? [1=no, 2=sí]
16. Tipo de contrato [1=indefinido, 2=temporal, 3=sin contrato]
17. Duración del contrato [1=más de 5 años, 2=2-5 años, 3=1-2 años, 4=6 meses-1 año, 5=menos de 6 meses]

Relaciones sociales

18. Frecuencia con la que se ve con amigos o parientes (que no residan con usted), bien sea en su casa o fuera de ella [1=la mayoría de los días, 2=1 o 2 veces a la semana, 3=1 o 2 veces al mes, 4=menos de una vez al mes, 5=nunca]

⁴ Existen numerosos tipos de hogar y cada uno de ellos presenta tasas de pobreza distintas a los demás. Sin embargo, la literatura empírica indica que de todos los tipos de hogar existentes, los monoparentales con hijos pequeños son los que presentan una mayor probabilidad de incurrir en pobreza (ver Cuadro 1). Dado el consenso en los trabajos previamente analizados, se decidió convertir la variable nominal tipo de hogar, en una variable ficticia que fuera 1=hogar monoparental con hijos menores de 16 años y 2=resto de casos.

19. Frecuencia con la que habla con alguno de sus vecinos [1=la mayoría de los días, 2=1 o 2 veces a la semana, 3=1 o 2 veces al mes, 4=menos de una vez al mes, 5=nunca]

Variable dependiente

La variable dependiente es la pobreza, medida a través de un indicador de pobreza multidimensional, previamente calculado por Poza y Fernández Cornejo (2010) y utilizado en este trabajo para construir el modelo explicativo posterior. Las razones del uso de este indicador radican en que el concepto utilizado es el del enfoque multidimensional, que es el que se sigue en este trabajo, y además, se emplea la misma base de datos (PHOGUE), con los mismos individuos y el mismo año de análisis. Dicho indicador se obtuvo a través de un análisis factorial de segundo orden. Se compone de dos indicadores parciales: el de pobreza objetiva (IPO) y el de pobreza subjetiva (IPS). El IPO se compone de los ingresos totales netos percibidos por el individuo en el año anterior a la entrevista, de los ingresos totales netos percibidos por el hogar también en el año anterior a la entrevista, aplicando la escala de equivalencia de la OCDE modificada y de los ingresos mensuales netos actuales del hogar, escala OCDE modificada. El IPS se constituye del grado de satisfacción en el trabajo, del grado de satisfacción con la situación económica, del grado de satisfacción con la vivienda y del grado de satisfacción con el tiempo de ocio. El IPO tiene aproximadamente una ponderación del 60% y el IPS del 40%, cifras extraídas a partir del análisis factorial. El indicador adopta valores adimensionales entre -2,040 (pobreza multidimensional extrema) hasta 11,930 (riqueza multidimensional extrema); para mayor detalle véase Poza y Fernández Cornejo (2010).

5. RESULTADOS

5.1. Elaboración de un diagrama de secuencias: modelos de medida y estructural

Modelo de medida

En este apartado se aglutinan las variables independientes originales (19) en un menor número de ellas (5), llamados constructos o dimensiones, para eliminar cualquier tipo de problema de multicolinealidad y para simplificar la información.

Para ello, se han aplicado dos⁵ análisis de correspondencias múltiples (ACM), que sustituyen al análisis factorial –clásico dentro del modelo de medida–, puesto que algunas de las variables independientes son nominales u ordinales y el análisis factorial está enfocado a variables métricas. Al aplicar el primer ACM aparecen:

⁵ Los indicadores de aceptación para aplicar los ACM se encuentran en valores correctos (ver Anexos 1 y 2). Se han realizado dos ACM porque se tiene el objetivo de crear modelos rivales que permitan incorporar ligeras modificaciones del modelo base, para conseguir un mejor ajuste y explicación del problema. Así, el primer ACM extrae cuatro constructos: medios básicos, situación laboral, inmigración y relaciones sociales. Mientras que en el segundo ACM, se incorporan las variables relacionadas con el sexo, la edad y el tipo de hogar. Fruto de ese nuevo ACM surge el quinto constructo: características sociodemográficas. Éste solo se utiliza en los modelos rivales 3 y 4, ya que se han pretendido resaltar nuevas variables que mejoraran los resultados.

Constructo o dimensión 1: FALTA DE MEDIOS BÁSICOS

$$FALTA DE MEDIOS BÁSICOS = 0,442 \text{ estado salud} + 0,234 \text{ veces al médico} + 0,386 \text{ otro idioma} + 0,299 \text{ internet} + 0,631 \text{ nivel de estudios} + 0,110 \text{ clase de vivienda} + 0,044 \text{ régimen de vivienda} \quad [1]$$

La dimensión 1 se compone de las variables salud, vivienda y educación. Los coeficientes que aparecen muestran el grado de importancia de la variable directamente observable sobre la latente. El nivel de estudios completado junto con el estado de salud conforman las razones más potentes de la falta de medios básicos. Estos resultados son acordes a los desarrollados por la Iniciativa de Oxford sobre la Pobreza y el Desarrollo Humano. De hecho, el nuevo indicador de pobreza multidimensional que han calculado, que sustituye al índice de pobreza humana de las Naciones Unidas, se compone de variables relacionadas con la salud, la educación y el nivel de vida, dentro del cual se encuentra la vivienda (Alkire and Santos, 2010).

Constructo o dimensión 2: INMIGRACIÓN

$$INMIGRACIÓN = 0,647 \text{ último país residencia} + 0,738 \text{ país de nacimiento} + 0,608 \text{ nacionalidad} \quad [2]$$

La dimensión 2 está compuesta por variables relacionadas con la procedencia de los individuos y su lejanía.

Constructo o dimensión 3: PRECARIEDAD DE LA SITUACIÓN LABORAL

$$PRECARIEDAD DE LA SITUACIÓN LABORAL = 0,305 \text{ veces en paro} + 0,494 \text{ tipo contrato} + 0,325 \text{ paro12} + 0,389 \text{ duración contrato} \quad [3]$$

Este constructo aglutina variables directamente observables relacionadas con el mercado de trabajo, especialmente con la situación laboral que tiene un individuo. Se puede apreciar que el factor más influyente en la situación laboral es el tipo de contrato, seguido de la duración de los contratos temporales y del paro superior a 12 meses.

Constructo o dimensión 4: FALTA DE RELACIONES SOCIALES

$$FALTA DE RELACIONES SOCIALES = 0,060 \text{ hablar vecinos} + 0,076 \text{ ver amigos} \quad [4]$$

Este constructo está formado por la frecuencia de hablar con los vecinos así como la de ver a los amigos y familiares.

Al aplicarse el segundo análisis de correspondencias se obtiene:

Constructo o dimensión 5: CARACTERÍSTICAS SOCIODEMOGRÁFICAS

$$CARACTERÍSTICAS SOCIODEMOGRÁFICAS = 0,60 \text{ sexo} + 0,07 \text{ edad} + 0,40 \text{ hogar} \quad [5]$$

Este factor trata de aglutinar las variables originales sociodemográficas que mejor discriminan situaciones de pobreza en España: mujeres, personas mayores de 65 años y hogares monoparentales con hijos menores de 16 años.

Modelo estructural

El método de estimación aplicado es el *asintóticamente libre de distribución* ya que se han realizado las pruebas de normalidad para las variables a estudiar y siguen patrones de distribución anormales. Además, como la muestra es elevada (más de 36.000 individuos), se supera con creces las restricciones que pudieran causar este tipo de estimaciones (Hair *et al.*, 1999 y Campos *et al.*, 1999).

En primera instancia, se representa el modelo base y, posteriormente, los modelos rivales que, manteniendo la base teórico-empírica, intentarán mejorar las relaciones y el ajuste global del modelo. El modelo base presenta la siguiente estructura:

Diagrama 1. Modelo 1 (modelo base)

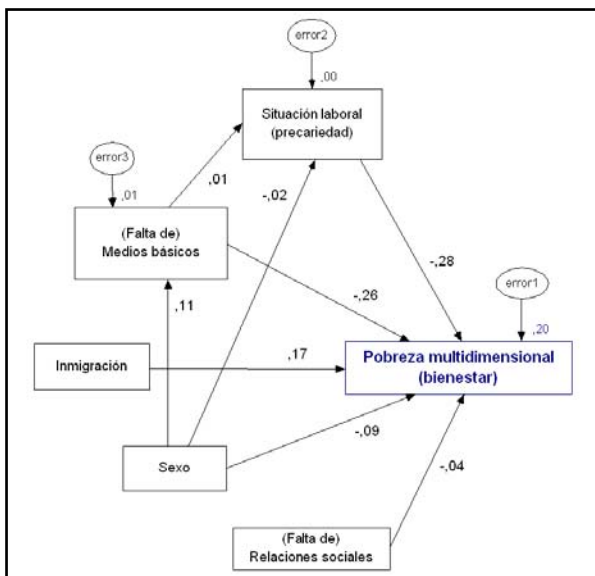


Diagrama 2. Modelo 2 (modelo rival)

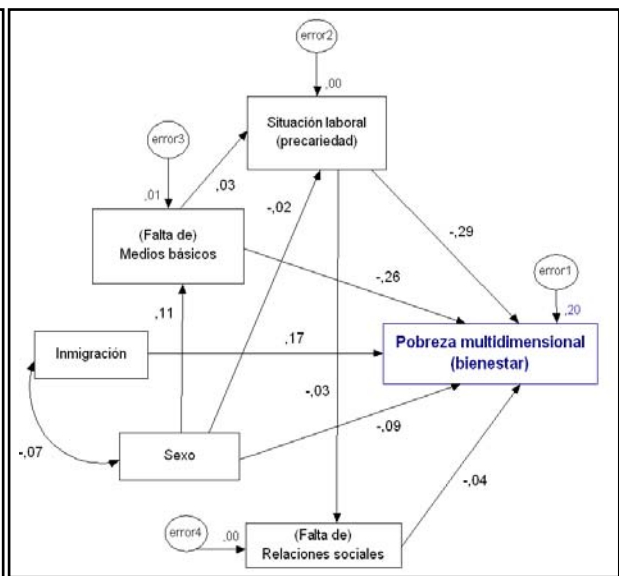


Diagrama 3. Modelo 3 (modelo rival)

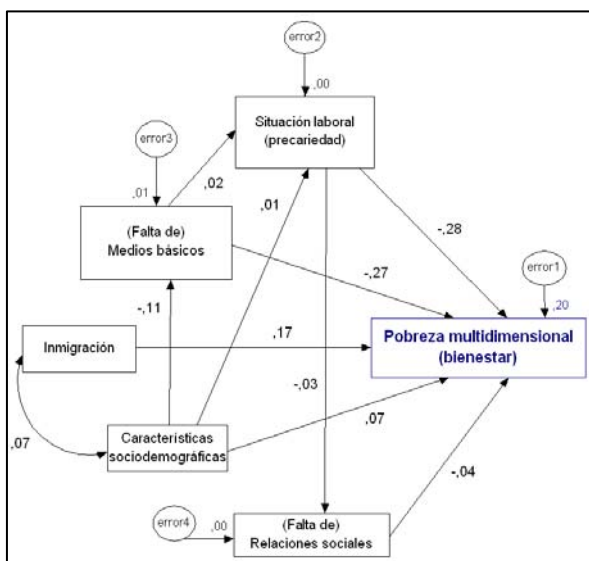
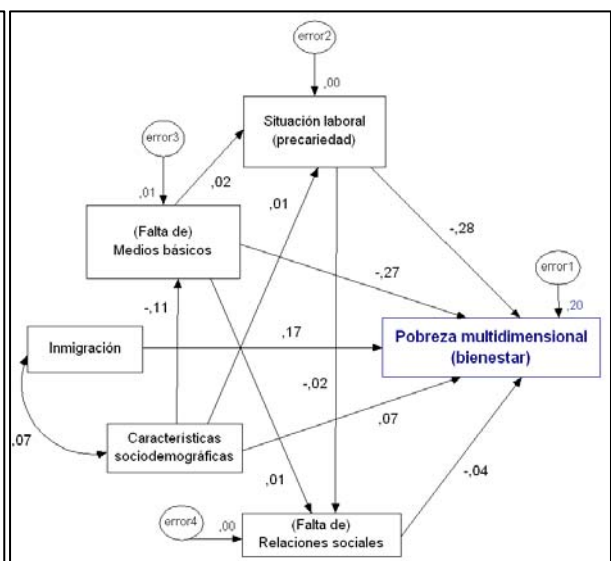


Diagrama 4. Modelo 4 (modelo rival)



Fuente: elaboración propia a partir de PHOGUE, con AMOS 7.0.

NOTA: téngase en cuenta que se puede hacer una doble lectura del modelo; si consideramos los paréntesis estaríamos tratando el bienestar, sin embargo, si los obviamos resaltaremos la pobreza multidimensional.

La pobreza multidimensional estaría explicada por la situación laboral, por los medios básicos, por el lugar de procedencia, por el sexo y por las relaciones sociales. Siendo más específicos, al apreciar los coeficientes estandarizados de las regresiones múltiples inherentes, la *situación laboral precaria* mantiene una relación inversa con el bienestar de un individuo, lo que en nuestros términos significaría que aumenta la pobreza multidimensional, siendo el factor más influyente (-0,28), similares resultados a los obtenidos en García Mainar y Toharia (1998), Cantó, Del Río y Gradín (2003 y 2008), Ayala, Jurado y Pérez Mayo (2009) y Lafuente *et al.* (2009). La *falta de medios básicos* es otro de los elementos más contundentes sobre las variaciones de la pobreza (-0,26). De modo que la educación, la salud y la vivienda toman un papel primordial, máxime el primer y segundo componente, coincidiendo especialmente con los trabajos de Navarro y Ayala (2004), Cantó, Del Río y Gradín (2008) y Gil y Ortiz (2009). El factor *inmigración*, contradiciendo uno de los planteamientos iniciales, influye favorablemente en la reducción de la pobreza. Recientes estudios muestran desigualdades entre sectores de la población nacional y extranjeros, a favor de los primeros (Cachón, 2005 y 2006). Sin embargo, se encuentran dos razones que pueden explicar este suceso: primero, que la afluencia inmigratoria en los últimos años ha cambiado con respecto a la habida entre los años 1992 y 2001. Esto queda corroborado en el estudio sobre las características de la población extranjera en España realizado por Ferrer y Urdiales (2004), donde exponen, a grandes rasgos, que no solo ha aumentado a partir de 2001 la población extranjera residente en España, sino que su composición según el país de procedencia también ha variado considerablemente. Mientras que a comienzos de los años noventa algo más del 50% del colectivo de inmigrantes procedía de países desarrollados, fundamentalmente de la Comunidad Europea y de América del Norte, en 2001, aunque la población extranjera procedente de estos países continúa teniendo una importancia considerable (24%), otros colectivos de países menos desarrollados –África (21,5%) y América Central y del Sur (38,2%)– han pasado a ocupar las primeras posiciones del ranking por importancia numérica. Con esto se puede deducir que los inmigrantes analizados en la muestra del año 2000 presentan unos niveles de pobreza inferiores a los llegados a partir de 2001, por lo que es lógico que al realizar la modelización exista una relación positiva entre ser extranjero y no ser pobre. Además, los niveles de pobreza de los inmigrantes de origen europeo son inferiores a los de los españoles.

La variable *sexo*⁶ revela que ser mujer aumenta la probabilidad de ser pobre, de ahí que el coeficiente sea negativo (-0,09). Es la conocida feminización de la pobreza. Los resultados para esta variable coinciden con la inmensa mayoría de los estudios sobre pobreza y privación, salvo con el de Gil y Ortiz (2009), donde en el caso de la pobreza monetaria el ser mujer reduce la probabilidad de ser pobre pero no así en el de privación multidimensional.

⁶ Probablemente, la variable sexo afecte a otras variables como por ejemplo las relaciones sociales, sin embargo añadir nuevas relaciones al modelo hace empeorar los indicadores de calidad de ajuste, debido a la complejidad y, por tanto, a la falta de parsimonia.

Por último, se aprecia que la *falta de relaciones sociales* influye directamente en la pobreza multidimensional –también en Navarro y Ayala (2004), pero para privación multidimensional–, aunque el peso es pequeño (-0,04). De este modo, utilizando el constructo relaciones sociales como una posible variable *proxy* del aislamiento, se observa que éste podría terminar siendo otra causa de la pobreza (López Aranguren, 2005).

En definitiva, según este modelo tanto la educación, como la salud y el empleo son las variables más influyentes en la pobreza. Dado que el proceso de la pobreza es complejo, existen efectos indirectos que a través de terceras variables pueden modificar los resultados. Así, la falta de medios básicos, tales como la falta de educación, de salud o de una vivienda digna, pueden influir no solo directamente en el nivel de pobreza sino también mermar la situación laboral del individuo y, por ende, afectar nuevamente y en última instancia a la pobreza. También, la variable sexo condiciona la situación laboral (Del Río, Gradín y Cantó, 2008), que en última instancia termina por afectar a la pobreza. Esto es, como cada constructo se compone de diferentes variables, la alteración de esas variables va a modificar el constructo. Al variar el constructo, afectará a la pobreza multidimensional directa e indirectamente. Este entramado de causalidades puede mostrarse analíticamente a través de las ecuaciones estructurales representadas en el diagrama de secuencias 1:

$$\text{Falta de medios básicos} = \beta_1 \text{ Sexo} + \varepsilon_3 \quad [6]$$

$$\text{Precariedad situación laboral} = \beta_2 \text{ Sexo} + \beta_3 \text{ Falta de medios básicos} + \varepsilon_2 \quad [7]$$

$$\begin{aligned} \text{Pobreza multidimensional} = & \beta_4 \text{ Precariedad situación laboral} + \beta_5 \text{ Falta de medios básicos} + \\ & + \beta_6 \text{ Inmigración} + \beta_7 \text{ Sexo} + \beta_8 \text{ Falta de relaciones sociales} + \varepsilon_1 \end{aligned} \quad [8]$$

Es decir:

$$Y_1 = \beta_1 X_4 + \varepsilon_3 \quad [9]$$

$$Y_2 = \beta_2 X_4 + \beta_3 Y_1 + \varepsilon_2 \quad [10]$$

$$Y_3 = \beta_4 Y_2 + \beta_5 Y_1 + \beta_6 X_3 + \beta_7 X_4 + \beta_8 X_5 + \varepsilon_1 \quad [11]$$

Como se puede apreciar, existen variables que en un principio se comportan como endógenas y, posteriormente, en ecuaciones sucesivas, como explicativas de otras, que en relaciones ulteriores podrán ser a su vez variables independientes. Este transcurso de regresiones lineales múltiples y simultáneas en procesos ulteriores hace incluso, según Hair *et al.* (1999: 624), acercarnos a otro estadio de la modelización, ya que tanto los efectos indirectos como las modificaciones en las relaciones “*pueden aproximar relaciones no lineales*”.

Evaluación de los criterios de calidad de ajuste

La evaluación de los criterios de calidad de ajuste se realiza en dos niveles: a) el modelo en su conjunto y b) los modelos estructural y de medida.

Ajuste global

Como apunta Gondar Nores (1999), la calidad del ajuste mide la correspondencia entre la matriz de entrada real u observada con la que se predice mediante el modelo propuesto. Esto es, en qué medida el modelo que se propone se ajusta a los datos analizados.

Cuadro 2. Modelos empíricos de la pobreza multidimensional: medidas de bondad del ajuste

Medidas de bondad del ajuste	Modelo base	Modelos rivales		
	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
Medidas de ajuste absoluto				
Chi-cuadrado	229,110	27,630	39,330	36,680
Grados de libertad	7	5	5	4
Nivel de significación	0,000	0,000	0,000	0,000
Índice de bondad del ajuste (GFI)	1,000	1,000	0,999	0,999
Error de aproximación cuadrático medio (RMSEA)	0,030	0,011	0,014	0,015
Medidas de ajuste incremental				
Índice de bondad de ajuste incremental (AGFI)	1,000	1,000	0,996	0,995
Índice Tucker-Lewis (TLI)	0,913	0,988	0,981	0,977
Índice de ajuste incremental (NFI)	0,958	0,995	0,993	0,993
Medidas de ajuste de parsimonia				
Índice de ajuste normado de parsimonia (PNFI)	0,447	0,332	0,331	0,265
Índice de bondad de ajuste de parsimonia (PGFI)	0,333	0,238	0,238	0,190
Chi-cuadrado normada	32,730	5,500	7,800	9,100
Criterio de información de Akaike (AIC)	257,110	59,630	71,330	70,680
Criterio de información de Bayes (BIC)	376,049	195,557	207,200	215,100

Fuente: elaboración propia con AMOS 7.0.

Medidas de ajuste absoluto

El primer indicador que aparece es el estadístico chi-cuadrado, siendo éste 229,11 con 7 grados de libertad y un nivel de significación menor que 0,0005. Al encontrarse por debajo de 0,05 el modelo debería ser rechazado, dado que los modelos bien ajustados presentan un valor de χ^2 no significativo, lo que indica que las matrices de entrada previstas y efectivas no son estadísticamente diferentes. No obstante, siguiendo a Hair *et al.* (1999) así como a Musitu *et al.* (2007) se puede decir que esta medida de calidad del ajuste es muy sensible al tamaño de la muestra, de tal modo que si el número de sujetos es elevado (generalmente a partir de 200), el poder del test aumenta y la χ^2 alcanza niveles de probabilidad significativos. En consecuencia, dado que la muestra es del orden de 36.000 individuos, es necesario complementar esta medida con otros índices de ajuste.

Así, el índice GFI toma el valor máximo de calidad del ajuste, dando información sobre la adecuación de aceptar el modelo estimado. Junto a este indicador aparece otro relativo al ajuste absoluto, es el RMSEA teniendo un valor de 0,03, por lo que podemos concluir que al situarse entre el rango $0 < \text{RMSEA} < 0,05$ se produce un gran ajuste.

Medidas de ajuste incremental

El siguiente tipo de medidas de bondad evalúan el ajuste incremental del modelo comparado con un modelo nulo. En este caso, el modelo nulo se supone como un modelo sin error de medida. Para ello, se observa el índice Tucker-Lewis (TLI) cuyo valor es de 0,913; el índice de ajuste incremental (NFI) (0,958) y el de bondad de ajuste incremental (AGFI) (1,000), todos con niveles sensiblemente superiores al nivel recomendado de 0,90 (Hair *et al.*, 1999).

Medidas de ajuste de la parsimonia

En palabras de Campos *et al.* (1999: 36): “*un modelo es parsimonioso si utiliza pocas variables para lograr un buen ajuste*”; de forma que si los valores que se obtienen son inaceptables se deben eliminar variables que aporten poca información y además compliquen el modelo. En este caso, se puede concluir que este modelo no se caracteriza por una parsimonia elevada. No obstante, es tolerable (ver AGFI).

Ajuste del modelo de medida

Las 19 variables iniciales se han reducido a 5 dimensiones (a través de dos análisis de correspondencia múltiples), explicando más del 60% de la varianza total (Anexos 1 y 2). Se ha considerado adecuado continuar con 5 dimensiones porque si se añade una más solo se elevaría la varianza explicada a 64,8%, lo que se considera escaso en relación al aumento de la complejidad del modelo.

Ajuste del modelo estructural

Se considera un modelo adecuado en la medida en que los constructos exógenos consiguen explicar a los constructos endógenos, para ello, se presentan los niveles de significatividad en el Cuadro 3. En suma, los resultados del modelo base serían válidos, pero probablemente mejorables.

5.2. Modelos rivales

Situados en este punto, donde el modelo base propuesto cumple con los requisitos mínimos de aceptación, se realizan pequeñas variaciones en las relaciones, incorporando algunas que traten de mejorar los niveles explicativos, así como hacer que se mejoren las medidas de bondad del ajuste, pero siempre manteniendo la estructura inicial. A continuación se presentan los diagramas de secuencias y las medidas de calidad del ajuste de los modelos rivales.

Atendiendo al modelo 2 se puede observar cómo se mantiene la estructura inicial incorporando dos nuevas relaciones: una, relativa al carácter explicativo de la situación laboral precaria sobre la falta de relaciones sociales y, otra, la correlación existente entre la inmigración y el género (ver Diagrama 2).

Cuadro 3. Coeficientes y nivel de significatividad de las ecuaciones estructurales

Relaciones causales		Nivel de significación	Pesos regresión estandarizada
Modelo base			
(Falta de) Medios básicos	←	Sexo	***
Situación laboral (precariedad)	←	Sexo	0,001
Situación laboral (precariedad)	←	(Falta de) Medios básicos	0,027
Pobreza multidim. (bienestar)	←	Inmigración	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	(Falta de) Medios básicos	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	Situación laboral (precariedad)	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	Sexo	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	(Falta de) Relaciones sociales	***
Modelo 2			
(Falta de) Medios básicos	←	Sexo	***
Situación laboral (precariedad)	←	Sexo	0,001
Situación laboral (precariedad)	←	(Falta de) Medios básicos	***
(Falta de) Relaciones sociales	←	Situación laboral (precariedad)	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	Inmigración	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	(Falta de) Medios básicos	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	Situación laboral (precariedad)	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	Sexo	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	(Falta de) Relaciones sociales	***
Modelo 3			
(Falta de) Medios básicos	←	Características sociodemográficas	***
Situación laboral (precariedad)	←	Características sociodemográficas	0,042
Situación laboral (precariedad)	←	(Falta de) Medios básicos	***
(Falta de) Relaciones sociales	←	Situación laboral (precariedad)	0,011
Pobreza multidim. (bienestar)	←	Inmigración	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	(Falta de) Medios básicos	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	Situación laboral (precariedad)	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	Características sociodemográficas	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	(Falta de) Relaciones sociales	***
Modelo 4			
(Falta de) Medios básicos	←	Características sociodemográficas	***
Situación laboral (precariedad)	←	Características sociodemográficas	0,050
Situación laboral (precariedad)	←	(Falta de) Medios básicos	***
(Falta de) Relaciones sociales	←	Situación laboral (precariedad)	0,019
(Falta de) Relaciones sociales	←	(Falta de) Medios básicos	0,103
Pobreza multidim. (bienestar)	←	Inmigración	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	(Falta de) Medios básicos	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	Situación laboral (precariedad)	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	Características sociodemográficas	***
Pobreza multidim. (bienestar)	←	(Falta de) Relaciones sociales	***

Fuente: elaboración propia a partir de PHOGUE con AMOS 7.0.

NOTA: *** = 0,000

Análíticamente:

$$Falta\ de\ medios\ básicos = \beta_1\ Sexo + \varepsilon_3 \quad [12]$$

$$Precariedad\ situación\ laboral = \beta_2\ Sexo + \beta_3\ Falta\ de\ medios\ básicos + \varepsilon_2 \quad [13]$$

$$Falta\ de\ relaciones\ sociales = \beta_4\ Precariedad\ situación\ laboral + \varepsilon_4 \quad [14]$$

$$Pobreza\ multidimensional = \beta_5\ Precariedad\ situación\ laboral + \beta_6\ Falta\ de\ medios\ básicos + \beta_7\ Inmigración + \beta_8\ Sexo + \beta_9\ Falta\ de\ relaciones\ sociales + \varepsilon_1 \quad [15]$$

Es decir:

$$Y_1 = \beta_1 X_4 + \varepsilon_3 \quad [16]$$

$$Y_2 = \beta_2 X_4 + \beta_3 Y_1 + \varepsilon_2 \quad [17]$$

$$Y_3 = \beta_4 Y_2 + \varepsilon_4 \quad [18]$$

$$Y_4 = \beta_5 Y_2 + \beta_6 Y_1 + \beta_7 X_3 + \beta_8 X_4 + \beta_9 Y_3 + \varepsilon_1 \quad [19]$$

Respecto a la primera, existe una relación inversa entre la precariedad de la situación laboral y la falta de relaciones sociales, aunque de baja intensidad. Parece que al estar en paro, sobre todo, si es de larga duración, se disfruta de más tiempo de ocio y, por consiguiente, existe más tiempo para las relaciones sociales (disyuntiva trabajo-ocio de la teoría microeconómica⁷). La otra variante incluida es la correlación entre la inmigración y el género. Se destaca que una mayor parte de la población inmigrante es de sexo masculino. Por otro lado, el modelo 3 trata de incluir una variable latente nueva (características sociodemográficas) que incorpora también el sexo, con el objetivo de representar mejor la complejidad del análisis de la pobreza (ver Diagrama 3). Así:

Analíticamente:

$$\text{Falta de medios básicos} = \beta_1 \text{Características sociodemográficas} + \varepsilon_3 \quad [20]$$

$$\text{Precariedad situación laboral} = \beta_2 \text{Característ. sociodemográficas} + \beta_3 \text{Falta de medios básicos} + \varepsilon_2 \quad [21]$$

$$\text{Falta de relaciones sociales} = \beta_4 \text{Precariedad situación laboral} + \varepsilon_4 \quad [22]$$

$$\begin{aligned} \text{Pobreza multidimensional} = & \beta_5 \text{Precariedad situación laboral} + \beta_6 \text{Falta de medios básicos} + \\ & + \beta_7 \text{Inmigración} + \beta_8 \text{Características sociodemográficas} + \beta_9 \text{Falta de relaciones sociales} + \varepsilon_1 \end{aligned} \quad [23]$$

Esto es:

$$Y_1 = \beta_1 X_4 + \varepsilon_3 \quad [24]$$

$$Y_2 = \beta_2 X_4 + \beta_3 Y_1 + \varepsilon_2 \quad [25]$$

$$Y_3 = \beta_4 Y_2 + \varepsilon_4 \quad [26]$$

$$Y_4 = \beta_5 Y_2 + \beta_6 Y_1 + \beta_7 X_3 + \beta_8 X_4 + \beta_9 Y_3 + \varepsilon_1 \quad [27]$$

En este caso, se sustituye la variable “sexo” por el constructo “características sociodemográficas”, donde se incardinan el sexo, la edad y la composición del hogar.

Por último, el modelo 4 incrementa el número de relaciones entre las variables. No obstante, se hace menos parsimonioso, por lo que los beneficios de tener más interrelaciones (más explicaciones), se contrarresta por el coste de complicarlo demasiado (pérdida de ajuste). En este caso, se ha añadido una nueva relación, la influencia de la falta de medios básicos sobre la falta de relaciones sociales, siendo ésta directa y de escasa potencia (ver Diagrama 4).

⁷ Se utiliza la relación trabajo-ocio de la corriente neoclásica (Frank, 2002), donde un individuo se enfrenta a la disyuntiva de cuántas horas va a trabajar cada día con respecto al tiempo dedicado al ocio, entre el cual se encuentra cualquier actividad que no sea el trabajo remunerado en el mercado.

Analíticamente:

$$\text{Falta de medios básicos} = \beta_1 \text{ Características sociodemográficas} + \varepsilon_3 \quad [28]$$

$$\text{Precariedad situación laboral} = \beta_2 \text{ Característ. sociodemográficas} + \beta_3 \text{ Falta de medios básicos} + \varepsilon_2 \quad [29]$$

$$\text{Falta de relaciones sociales} = \beta_4 \text{ Precariedad situación laboral} + \beta_5 \text{ Falta de medios básicos} + \varepsilon_4 \quad [30]$$

$$\begin{aligned} \text{Pobreza multidimensional} = & \beta_6 \text{ Situación laboral precariedad} + \beta_7 \text{ Falta de medios básicos} + \\ & + \beta_8 \text{ Inmigración} + \beta_9 \text{ Características sociodemográficas} + \beta_{10} \text{ Falta de relaciones sociales} + \varepsilon_1 \end{aligned} \quad [31]$$

Esto es:

$$Y_1 = \beta_1 X_4 + \varepsilon_3 \quad [32]$$

$$Y_2 = \beta_2 X_4 + \beta_3 Y_1 + \varepsilon_2 \quad [33]$$

$$Y_3 = \beta_4 Y_2 + \beta_5 Y_1 + \varepsilon_4 \quad [34]$$

$$Y_4 = \beta_6 Y_2 + \beta_7 Y_1 + \beta_8 X_3 + \beta_9 X_4 + \beta_{10} Y_3 + \varepsilon_1 \quad [35]$$

Evaluación de los criterios de calidad de ajuste de los modelos rivales

Ajuste global

Medidas de ajuste absoluto

Las medidas de ajuste absoluto calculadas para los cuatro modelos manifiestan una aprobación de cualesquiera. Todos tienen unos grados de libertad mayores que cero y un GFI máximo. El RMSEA ofrece mejores cifras en los modelos 2 y 3.

Medidas de ajuste incremental

Para el caso del índice de bondad del ajuste incremental (AGFI) toman el valor 1 o muy cercano a 1, aceptándose los modelos. Además, el TLI y el NFI muestran niveles en torno a lo aconsejable.

Los cuatro podrían ser validados; no obstante, según los índices Tucker-Lewis y de ajuste incremental, los modelos rivales mejoran el “base”.

Medidas de ajuste de parsimonia

Ninguno goza de una parsimonia elevada; sin embargo, los tres primeros son aceptables. El modelo 4 es demasiado complejo, ya que sus medidas de parsimonia se alejan de los niveles recomendables.

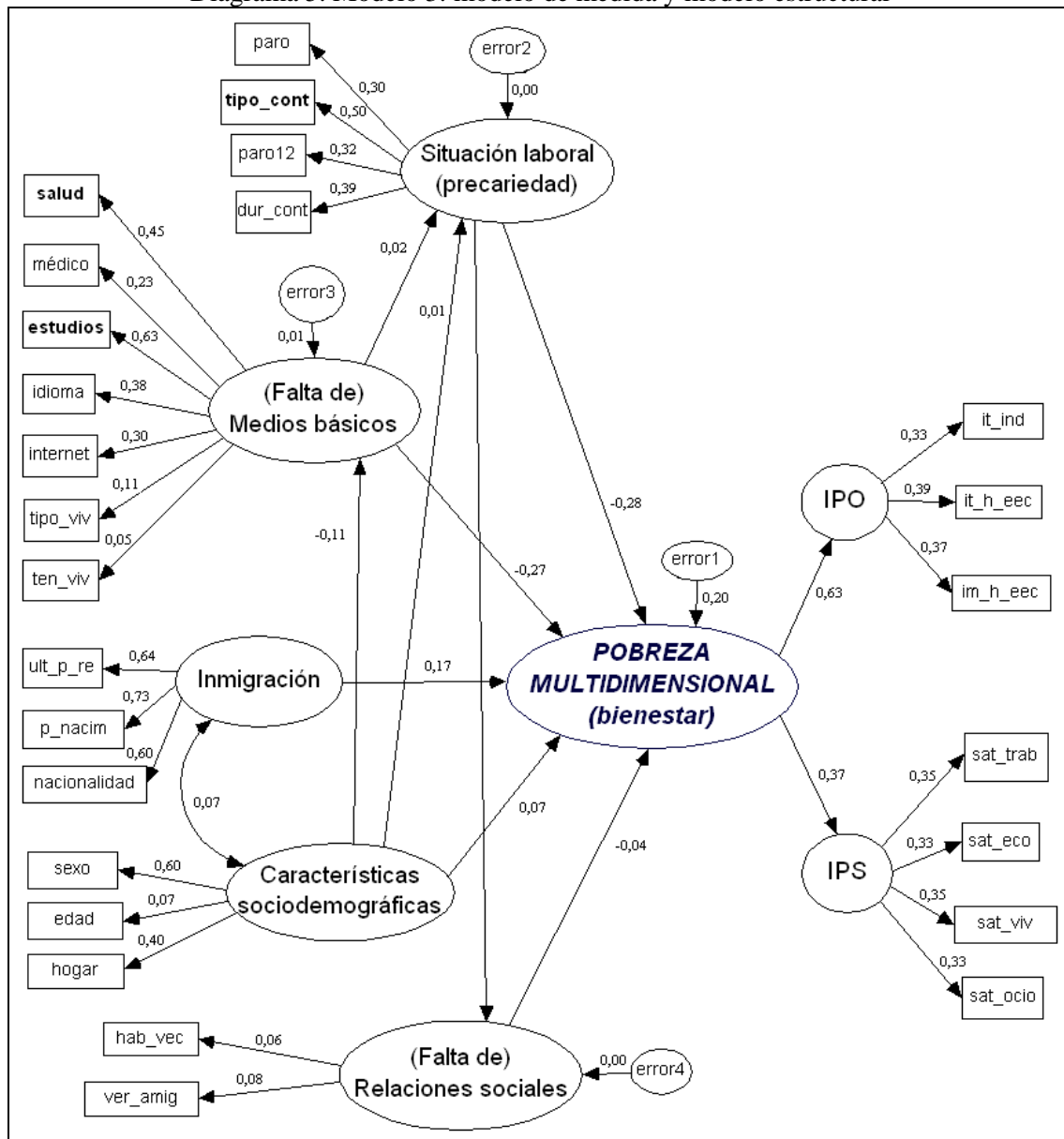
Como conclusión, dadas las medidas analizadas de ajuste global y los objetivos de la investigación, parece que lo más lógico es seleccionar el *Modelo 3* como aquel que mejor explica la realidad de la pobreza multidimensional en España (ver Cuadro 2).

Ajuste del modelo estructural

Al igual que se hizo con el modelo base, se presentan los *p-valores* y los pesos de las diferentes relaciones detectadas (ver Cuadro 3).

Por último, a modo de resumen se presenta el **modelo empírico de pobreza multidimensional en España** en forma de diagrama de secuencias:

Diagrama 5. Modelo 3: modelo de medida y modelo estructural



Fuente: elaboración propia a partir de PHOGUE con AMOS 7.0.

Dado que el modelo tiene como objetivo identificar los factores que explican la pobreza, se puede aportar información para aplicar política económica que la combata. Existen dos variantes generales: las políticas redistributivas y las políticas derivadas de las conexiones de la pobreza con el medio económico y social (Pérez Moreno, 2009). Las primeras, de efecto más a corto plazo,

modificarían directamente la variable dependiente y, por tanto, paliaría la pobreza temporalmente (recuérdese que el indicador de pobreza contiene variables de ingresos). Pero no la solucionaría estructuralmente. Las segundas, de efecto más a largo plazo, modificarían indirectamente la variable dependiente y, por ende, al influir sobre la estructura y características socioeconómicas, los resultados podrían ser más duraderos. De este modo, políticas que redujeran *las desigualdades de género, las diferencias entre individuos de distinta edad y las divergencias por tipos de hogar* permitirían mejorar la pobreza, de una manera directa y a través de la influencia sobre la falta de medios básicos y de la precariedad laboral. También, dentro de la *falta de necesidades básicas*: estado de salud, nivel de formación y vivienda; por ejemplo, mediante una política educativa, *ceteris paribus*, destinada a incrementar la formación de analfabeto a primer nivel de enseñanza secundaria (de 8 a 6 en la codificación de la variable –ver apartado 4.4–), la situación podría mejorar un 3,7% de forma directa (teniendo en cuenta los coeficientes 0,63 estudios – medios básicos y -0,27 medios básicos – pobreza), y un 4% si tenemos en cuenta tanto el impacto directo como las relaciones indirectas (como es el caso de los coeficientes 0,02 medios básicos – situación laboral y -0,28 situación laboral – pobreza). Del mismo modo, si se implementaran políticas más agresivas que hicieran pasar de analfabeto o sin estudios hacia unos niveles universitarios de ciclo largo, se generaría una reducción de la pobreza de un 14% aproximadamente.

Asimismo, dentro de la *situación laboral* se podría realizar el mismo análisis. Este constructo se compone de paro y estabilidad contractual. En Walker (1995) se expone que la probabilidad de salir de la pobreza es cinco veces más alta entre las personas que han conseguido un empleo que entre las personas que permanecen en el paro. No obstante, también existen familias cuyo sustentador principal se encuentra ocupado y el hogar podría ser considerado como pobre. La baja o nula cualificación del empleado y los tipos de contrato firmados (contrato temporal y a tiempo parcial) podrían ser la causa. Por ello, si se aplicaran medidas destinadas a reducir el número de veces que una persona está en paro (desempleo recurrente), como por ejemplo pasar de tres veces a ninguna en los últimos cinco años siguiendo la definición de las variables del apartado 4.4, podría mejorar la pobreza un 3,6%, al igual que de cinco a ninguna cerca de un 6%. También, si una persona que está en paro encontrara trabajo antes de los 12 meses, la situación podría mejorar en torno a un 2%.

Por último, dentro de la situación laboral es fundamental mostrar las variaciones de los cambios en los contratos de trabajo. Una reducción de la temporalidad favorecería la estabilidad laboral y, por ende, los niveles de pobreza. Según el modelo, si una persona cambiara de un contrato de trabajo de duración entre seis meses y un año por otro indefinido la pobreza mejoraría un 8%, lo cual refleja la importancia de aplicar políticas que suavicen la dualidad en el mercado de trabajo.

En definitiva, los elementos más importantes que pueden explicar la pobreza en España son el nivel de educación, el estado de salud y la estabilidad laboral. Resultados acordes con la mayoría de los tratados en el marco de referencia (ver Cuadro 1).

6. CONCLUSIONES

A modo de resumen, los factores más importantes para combatir a la pobreza serían:

- Precariedad de la situación laboral (número de veces en paro, estar desempleado más de 12 meses, tipo y duración del contrato). Un aumento del número de veces que un individuo está en paro, experimentar desempleo de larga duración, tener un contrato temporal y de corta duración, eleva la precariedad de la situación laboral y, por tanto, la pobreza. El tipo de contrato es la variable con mayor poder explicativo.
- Falta de medios básicos (estado de salud, número de veces que se acude al médico, nivel de estudios, hablar otros idiomas, utilizar asiduamente internet, tipo y tenencia de la vivienda). Sufrir un estado general de salud manifiestamente mejorable, acudir al médico muy a menudo, poseer un nivel de educación bajo, no hablar otro idioma, no utilizar internet con cierta asiduidad, no vivir en una vivienda sino en algún lugar no destinado para ello o tener vivienda en régimen de cesión gratuita o alquiler, incrementa la probabilidad de experimentar escenarios de pobreza. El nivel de formación y el estado de salud son las variables que más influencia ejercen.
- Inmigración (último país de residencia, país de nacimiento y nacionalidad). Ser extranjero no comunitario está relacionado con mayores niveles de pobreza, no así en el caso de los extranjeros de origen europeo, cuya situación es incluso mejor que la de los nacidos en España.
- Falta de relaciones sociales (hablar con vecinos y ver amigos o familiares). Hablar poco o nada con vecinos y reunirse muy esporádicamente con amigos o familiares mantiene cierta relación con sufrir situaciones de pobreza.
- Características sociodemográficas (sexo, edad y composición del hogar). En general, ser mujer, mayor de 65 años y representar un hogar monoparental, explica situaciones de pobreza. Se aprecian, por tanto, problemas de feminización y ancianización.

Asimismo, dada la complejidad de la pobreza, aparecen interrelaciones de carácter indirecto que impactan en última instancia sobre la misma. La falta de medios básicos no solo afecta a la pobreza directamente sino también a través de la inducción a la precariedad laboral y ésta a su vez sobre la pobreza y falta de relaciones sociales, donde en procesos posteriores también incide sobre la pobreza. Por otro lado, la variable características sociodemográficas condiciona el nivel de pobreza, de forma directa y mediante la influencia que ejerce sobre los medios básicos y la situación laboral.

Las dimensiones que provocan una mayor influencia sobre los niveles de pobreza multidimensional son la *precariedad de la situación laboral*, concretamente el tipo de contrato, y la *falta de medios básicos*, fundamentalmente el nivel de formación y el estado de salud.

En definitiva, las cuatro hipótesis planteadas inicialmente han sido aceptadas. Se puede concluir entonces que:

- Las variables directamente observables elegidas miden correctamente las variables latentes subyacentes de ellas.
- Existen factores socioeconómicos que determinan el nivel de pobreza: sexo, edad, nacionalidad o tipo de hogar, entre otros.
- El nivel de formación, el estado de salud y el tipo de contrato influyen de forma crucial en la pobreza, en comparación con otros elementos explicativos.
- Los constructos que más impactan sobre la pobreza son el empleo y los medios básicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adiego Estella, M.; Moneo Ocaña, C. (2002) *Pobreza y pobreza persistente en España. 1994-2001*. Instituto Nacional de Estadística, Madrid.
- Alkire, S.; Santos, M.E. (2010) “Acute Multidimensional Poverty: A New Index for Developing Countries”. *Oxford Poverty & Human Development Initiative (OPHI)*, Working Paper nº 38. University of Oxford.
- Ayala, L.; Jurado, A.; Pérez Mayo, J. (2006) *Pobreza monetaria y privación multidimensional: ¿qué explica el análisis territorial?* Universidad de Extremadura, Instituto de Estudios Fiscales y Universidad Rey Juan Carlos. Disponible en:
<http://www.ual.es/congresos/econogres/docs/Distribucion/Distribucion%204/Ayala%20Jurado.pdf>
- Ayala, L.; Jurado, A.; Pérez Mayo, J. (2009) *Income Poverty and Multidimensional Deprivation: Lessons from Cross-Regional Analysis*. ECINEQ WP 2009-106. Society for the Study of Economic Inequality.
- Ayala Cañón, L.; Martínez, R.; Ruiz-Huerta, J. (1993) “La distribución de la renta en España en los años ochenta: una perspectiva comparada”. *Actas del I Simposio sobre Igualdad y Distribución de la Renta y la Riqueza*, Vol. II, pp. 101–136, Madrid.
- Bohnke, P.; Delhey, J. (1999) “Poverty in a Multidimensional Perspective”. *Forschungsschwerpunktes Sozialer Wandel, Institutionen und Vermittlungsprozesse des Wissenschaftszentrums Berlin für Sozialforschung*. FS III 99–431.
- Bosch, A.; Escribano, C.; Sánchez, I. (1989) “La desigualdad y la pobreza en España: 1973-1981”, en: *Papeles de Trabajo de la Fundación Ortega y Gasset*. Nº 01/88, 02/88, 03/88.
- Cachón Rodríguez, L. (2005) “Los inmigrantes en el mercado de trabajo en España (1996-2005)” citado en Cachón Rodríguez, L. *Inmigración y mercado de trabajo en España: integración a través del trabajo y lucha contra la discriminación*. *Ekonomi Gerizan*. Pobreza y solidaridad: hacia un desarrollo sostenible, nº 13, Federación de Cajas de Ahorros Vasco-Navarras.
- Cachón Rodríguez, L. (2006) “Inmigración y mercado de trabajo en España: integración a través del trabajo y lucha contra la discriminación”, en: *Ekonomi Gerizan*. Pobreza y solidaridad: hacia un desarrollo sostenible, nº 13, Federación de Cajas de Ahorros Vasco-Navarras.
- Campos, D.; Jiménez, F.; Molinas, C. (1999) *La pobreza como proceso de exclusión múltiple*. Plan Internacional/SER. Disponible en:
<http://www.dgeec.gov.py/MECOVI/TEXTO%20DE%20DANIEL%20CAMPOS.pdf>
- Cantó, O. (2003) “Finding out the Reasons to Escape Poverty: the relevance of demographic vs. labour market events in Spain”. *Review of Income and Wealth*. Series 49, nº 4.

- Cantó, O.; Del Río, C.; Gradín, C. (2000) “La situación de los estudios de desigualdad y pobreza en España”. *Cuadernos de gobierno y administración*, 2: 25–94, especial monográfico Pobreza y Desigualdad en España: enfoques, fuentes y acción pública.
- Cantó, O.; Del Río, C.; Gradín, C. (2003) “La evolución de la pobreza estática y dinámica en España en el período 1985-1995”. *Revista de Economía Pública*, nº 167, Instituto de Estudios Fiscales.
- Cantó, O.; Del Río, C.; Gradín, C. (2008) *La Dinámica de la Pobreza en España: Cronicidad, Transitoriedad y Recurrencia*. Fundación FOESSA.
- Cappellari, L.; Jenkins, S. (2004) *Summarising Multiple Deprivation*. Institute for Social and Economic Research, University of Essex.
- Cáritas (1965) “Plan CCB”, citado en: Martínez Álvarez, J.A. *Economía de la pobreza*. UNED Ediciones, Colección Varia, Madrid.
- Coromaldi, M.; Zoli, M. (2007) *A Multidimensional Poverty Analysis. Evidence from Italian Data*. University of Rome.
- Del Río, C.; Gradín, C.; Cantó, O. (2008) “Pobreza y discriminación salarial por razón de género en España”. *Revista de Hacienda Pública Española / Revista de Economía Pública*, nº 184 (1/2008), pp. 67–98.
- Escribano, C. (1990) “Evolución de la pobreza y la desigualdad en España”, citado en: Martínez Álvarez, J.A. *Economía de la pobreza*. UNED Ediciones, Colección Varia, Madrid.
- Fernández, J.M. (2002) “Algunas tendencias nuevas en la teoría e investigación sobre la pobreza”. *Cuadernos de Trabajo Social*. Vol. 15, pp. 19–39.
- Fernández-Morales, A.; García-Lizana, A.; Martín-Reyes, G. (1988) “Técnicas para la medición de la pobreza y de su distribución territorial en España”. Comunicaciones presentadas a la *XIV Reunión de Estudios Regionales*. Asociación Española de Ciencia Regional.
- Ferrer Rodríguez, A.; Urdiales Viedma, M.E. (2004) “Características de la población extranjera en España”. *Scripta Nova*. Revista electrónica de geografía y ciencias sociales. Vol. VIII, nº 160, Universidad de Barcelona. Disponible en: <http://www.ub.es/geocrit/sn/sn-160.htm>
- Frank, R. (2002) *Microeconomía y conducta*. 4ª edición, McGraw-Hill.
- Fundación FOESSA (1966 y 1970) “Informe sociológico sobre la situación actual en España”, citado en: Martínez Álvarez, J.A. *Economía de la pobreza*. UNED Ediciones, Colección Varia, Madrid.
- Fundación FOESSA (2008) *VI Informe sobre exclusión y desarrollo social en España 2008*. Cáritas y Fundación de Estudios Sociales y de Sociología Aplicada, Madrid.
- García Mainar, I.; Toharia, L. (1998) “Paro, pobreza y desigualdad en España: análisis transversal y longitudinal”. *Ekonomiaz*, Revista Vasca de Economía, nº 40, pp. 134–165.
- Gil, M.; Ortiz, S. (2009) “Determinantes de la pobreza extrema en España desde una doble perspectiva: monetaria y de privación”. *Estudios de Economía Aplicada*, Vol. 27-2, pp. 437–462.
- Gondar Nores, J.E. (1999) *Técnicas estadísticas con SPSS. Amos*. Ed. Estudios Estadísticos, Madrid.
- Hair, J.F.; Anderson, R.E.; Tatham, R.L.; Black, W.C. (1999) *Análisis Multivariante*. 5ª edición, Prentice Hall Iberia, Madrid.
- Jurado, A.; Pérez-Mayo, J. (2007) “La dimensión territorial en la investigación sobre pobreza y privación”. En: Vidal, F.; Renes, V. (coord.): *La agenda de investigación en exclusión y desarrollo social*, pp. 165–177. Cáritas Española, Madrid.
- Lafuente, M.; Faura, U.; García, O.; Losa, A. (2009) “Pobreza y privación en España”. *Rect@*, Vol. 10, pp. 1–28.
- Layte, R.; Maitre, B.; Nolan, B.; Whelan, C.T. (2000) “Explaining Levels of Deprivation in the European Union”. *The Economic and Social Research Institute*. EPAG, University of Essex.

- Leisering L.; Walker, R. (1998) *The Dynamics of Modern Society. Poverty, Policy and Welfare*. The Policy Press, Bristol.
- Leisering L.; Liebfried, S. (1999) *Time and Poverty in western Welfare States: United Germany in Perspective*, Cambridge University Press, Cambridge.
- López Aranguren, E. (2005) *Problemas sociales. Desigualdad, pobreza y exclusión social*. Biblioteca Nueva, Madrid.
- Martínez, R.; Ruiz-Huerta, J. (2000) "Income, multiple deprivation and poverty: an empirical analysis using Spanish data. Measures of poverty and social exclusion". *The International Association for Research in Income and Wealth*. Paper nº 5, Poland.
- Martínez Álvarez, J.A. (2003) *Economía de la pobreza*. UNED Ediciones, Colección Varia, Madrid.
- Musitu, G.; Jiménez, T.I.; Murgui, S. (2007) *Family functioning, self-esteem and substance use in adolescents: a mediational model*. Salud Pública en México, México.
- Navarro, C.; Ayala, L. (2004) "La exclusión en vivienda en España: una aproximación a través de índices multidimensionales de privación" en conferencia dictada durante el ciclo *XI Encuentro de Economía Pública*. Barcelona. Disponible en:
http://www.ub.es/ecopubBCN/ponencias/arch_pdf/navarro_ayala.pdf
- Pérez Mayo, J.; Fajardo Caldera, M.A.; Sánchez Rivero, M. (2000) "Cálculo de un indicador de privación mediante un modelo de clases latentes". *XIV Reunión nacional ASEPELT*, 22-24 de junio de 2000, Oviedo.
- Pérez Moreno, S. (2009) "El estudio de la pobreza en España desde una óptica económica: medición y políticas". *Estudios de Economía Aplicada*, Vol. 27-2, pp. 349–372.
- Poza, C.; Fernández Cornejo, J.A. (2010) "Una aproximación a la construcción de un indicador de pobreza multidimensional. ¿Cuáles son los focos de riesgo en España?". *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, Vol. 10, pp. 43–72.
- Ruiz-Castillo, J. (1987) "La medición de la pobreza y la desigualdad en España. 1980-81". *Estudios Económicos*. Nº 42, Servicio de Estudios, Banco de España, Madrid.
- Ruiz-Huerta, J.; Martínez, R. (1994) *La pobreza en España, ¿qué nos dicen las encuestas de presupuestos familiares?* La pobreza en España hoy, Documentación Social, nº 96, Madrid, Cáritas.
- Walker, A. (1995) *Investing in Ageing Workers. A Framework for Analysing Good Practice in Europe*. Dublín, Fundación Europea para la Mejora de las Condiciones de Vida y de Trabajo.
- Whelan, C.T.; Layte, R.; Maitre, B.; Nolan, B. (2001) "Income, Deprivation and Economic Strain: An analysis of the European Community Household Panel" in *European Sociological Review*. Vol. 17, nº 4, pp. 357–372.
- Whelan, C.T.; Layte, R.; Maitre, B.; Nolan, B. (2003) *Persistent Income Poverty and Deprivation in the European Union: An Analysis of the First Three Waves of the European Community*. The Economic and Social Research Institute, April, Dublin.
- Whelan, C.T.; Maitre, B. (2010) "Identifying Economically Vulnerable Groups as the Economic Crisis Emerged". *The Economic and Social Review*, Vol. 41, nº 4, pp. 501–525.
- Whelan, C.T.; Nolan, B.; Maitre, B. (2006) "Trends in Economic Vulnerability in the Republic of Ireland". *The Economic and Social Review*, Vol. 37, nº 1, pp. 91–119.

ANEXOS

Anexo 1

Historial de iteraciones (ACM_1 año 2000)

		Ajuste	Diferencia desde la iteración anterior
Iteración	38(a)	0,608674	0,000010

Autovalores (ACM_1 año 2000)

		Autovalores
Dimensión	1	0,193
	2	0,163
	3	0,139
	4	0,114

Medidas de discriminación (ACM_1 año 2000)

	Dimensión			
	1 (Falta de) MEDIOS BÁSICOS	2 INMIGRACIÓN	3 SITUACIÓN LABORAL (precariedad)	4 (Falta de) RELACIONES SOCIALES
¿Cuál es, en general, su estado de salud?	0,442	0,135	0,015	0,130
Consulta médico últimos 12 meses	0,234	0,078	0,018	0,094
Clase de vivienda y tipo de edificio	0,110	0,017	0,041	0,003
Otro idioma aparte de materno	0,386	0,013	0,127	0,058
Uso de internet en últimos 7 días	0,299	0,057	0,154	0,004
Frecuencia habla con vecinos	0,106	0,018	0,022	0,060
Frecuencias ver amigos o familiares	0,006	0,060	0,021	0,075
Último país en el que residió	0,133	0,647	0,017	0,528
País de nacimiento	0,199	0,738	0,001	0,027
Nacionalidad	0,167	0,608	0,018	0,573
Número de veces en paro últimos cinco años	0,065	0,008	0,306	0,013
Tipo de contrato	0,147	0,045	0,494	0,088
¿Cuál es el régimen de tenencia de la vivienda?	0,044	0,040	0,022	0,021
Nivel de estudios	0,631	0,133	0,248	0,078
Duración de contrato	0,075	0,007	0,389	0,061
Paro 12	0,045	0,005	0,325	0,013

Anexo 2

ACM_2 (año 2000)

Medidas de discriminación

	Dimensión
	5 CARACTERÍSTICAS SOCIODEMOGRÁFICAS
Sexo	0,607
Hogar monoparental	0,386
Mayor de 65 años	0,062



El coste de los cuidados de larga duración en la población española: análisis comparativo entre los años 1999 y 2008

ALCAÑIZ ZANÓN, MANUELA

Dpto. Econometría, Estadística y Economía Española, RFA-IREA. Univ. de Barcelona
Correo electrónico: malcaniz@ub.edu

ALEMANY LEIRA, RAMÓN

Dpto. Econometría, Estadística y Economía Española, RFA-IREA. Univ. de Barcelona
Correo electrónico: ralemany@ub.edu

BOLANCÉ LOSILLA, CATALINA

Dpto. Econometría, Estadística y Economía Española, RFA-IREA. Univ. de Barcelona
Correo electrónico: bolance@ub.edu

GUILLÉN ESTANY, MONTSERRAT

Dpto. Econometría, Estadística y Economía Española, RFA-IREA. Univ. de Barcelona
Correo electrónico: mguillen@ub.edu

RESUMEN

Este trabajo analiza los costes de los cuidados de larga duración (CLD) ligados a los individuos en situación de dependencia. El coste económico unitario de los servicios de cuidados de larga duración está relacionado con el tiempo esperado de necesidad de la atención y la intensidad de los servicios requeridos. Se ha estimado el coste individual esperado en CLD, desde el momento en que se inicia la dependencia, para la población española mayor de 65 años y separadamente para los hombres y las mujeres. Los datos utilizados corresponden a las dos grandes operaciones estadísticas sobre discapacidad y dependencia llevadas a cabo por el Instituto Nacional de Estadística (INE) en 1999 y en 2008. También se han utilizado las tablas de mortalidad del INE y, con ellas, se han creado escenarios realistas para la longevidad. La posibilidad de reproducir el análisis para los años 1999 y 2008 ha permitido la comparación entre ambos años, así como el análisis de la tendencia registrada en la última década por la longevidad, la prevalencia de la dependencia y los costes esperados. Finalmente, hemos analizado, por un lado, el efecto del incremento de la esperanza de vida y de la prevalencia de la dependencia y, por otro, el efecto de la inflación sobre la evolución de los costes de los cuidados de larga duración.

Palabras clave: dependencia; costes de los cuidados de larga duración; esperanza de vida; tasa de prevalencia de la dependencia.

Clasificación JEL: I13; I18; C14; C15.

MSC2010: 62-07; 62G08.

Artículo recibido el 9 de septiembre de 2011 y aceptado el 30 de noviembre de 2011.

The Cost of Long-Term Care in the Spanish Population: Comparative Analysis between 1999 and 2008

ABSTRACT

This paper analyzes the cost of long-term care (LTC) associated to individuals in dependence situation. The economic cost of care per unit of service is linked to the expected time of needed care and the intensity of required services. We have estimated the expected lifetime cost of LTC in dependence for individuals aged 65 years and above. Calculations have been made separately for men and women. The estimations have been done for year 1999 and 2008, respectively, using data from the two official surveys carried out by the Spanish Institute of Statistics (INE). Official mortality records and life table trends were used to create realistic scenarios for longevity. We have made comparisons between 1999 and 2008 results, and we have also analysed the last decade trends for longevity, for prevalence of dependence, and for the expected costs of long-term care. We have studied the effects on the evolution of the costs of long-term care due to increasing in longevity and prevalence of dependence and, finally, and separately, we analyzed the effect of the inflation.

Keywords: dependency; costs of long-term-care; life expectancy; prevalence rate of dependence.

JEL classification: I13; I18; C14; C15.

MSC2010: 62-07; 62G08.



1. INTRODUCCIÓN

Los costes de los cuidados de larga duración (CLD) dependen de una serie de factores difícilmente predecibles, de ahí la dificultad asociada a la estimación de los costes individuales de los CLD. Estos factores son, principalmente, la edad del individuo en el momento en el que empiezan las necesidades de CLD, la duración de la dependencia y su intensidad. Estos tres factores suponen una fuente de incertidumbre en la predicción de los costes individuales de los CLD. La evolución de la esperanza de vida también interviene en la predicción de los costes de los CLD. Desde hace años se viene observando un aumento en la longevidad de la población, tendencia que es muy probable que continúe en el futuro, por lo que se plantea la cuestión de si vivir más años significará estar más años en activo o si, por el contrario, los individuos estarán en situación de dependencia durante un mayor período de tiempo (Wittenberg *et al.*, 2002 y Guillén *et al.*, 2007). En este trabajo, por un lado, analizamos en qué medida los cambios en la esperanza de vida y en las tasas de prevalencia de la dependencia en la población española afectan al incremento de costes de los CLD. Por otro lado, observamos cómo los precios de los servicios relacionados con los CLD se han incrementado por encima de lo previsto por la inflación media española en los últimos años. Analizamos el efecto de la inflación media y la observada en el coste individual esperado de los CLD. Además, hay que tener en cuenta que los precios tenderán a crecer a ritmos mayores debido a que la oferta de servicios asistenciales no ha crecido, ni remotamente, al ritmo que lo ha hecho la demanda.

La Ley de Dependencia fue aprobada por el Parlamento Español en diciembre de 2006, entró en vigor en enero de 2007 y establece un sistema público de atención a la dependencia que dota a los ciudadanos de nuevos derechos frente a las necesidades de asistencia personal. Dicha Ley fue reconocida como el cuarto pilar del estado del bienestar. Desde entonces los presupuestos generales del Estado han ido asignando niveles crecientes de fondos para los ciudadanos necesitados de apoyo, ante la pérdida de autonomía personal, y esos fondos se han establecido de forma independiente del sistema público de salud. Sin embargo, en la actualidad se está planteando la imposibilidad de que la administración pueda financiar todos los niveles de dependencia y cubrir las necesidades de cuidados de larga duración de todos los individuos con dependencia. Por este motivo, es importante analizar la evolución de los costes de los CLD y valorar la relevancia de las coberturas privadas.

Previamente a la promulgación de la Ley de Dependencia y tras la publicación de los resultados de la primera gran operación estadística del Instituto Nacional de Estadística (INE) sobre discapacidades y dependencia, la Encuesta sobre Discapacidad, Dependencia y Estado de Salud (EDDES) en 1999, se dan a conocer muchos trabajos sobre dependencia en España con distintos enfoques. Así, se publican estudios de carácter agregado sobre los volúmenes de población dependiente (Otero *et al.*, 2004), sobre el gasto asociado a la dependencia (aunque con tendencia a tratarlo conjuntamente como gasto sociosanitario) (Rodríguez *et al.*, 2002; Ahn *et al.*, 2003) y aproximaciones a la necesidad de un seguro público de dependencia (Braña, 2004).

Más recientemente, y con los resultados de la segunda gran operación estadística del INE, la Encuesta de Discapacidades, Autonomía Personal y Situaciones de Dependencia (EDAD) en 2008, también han aparecido nuevos estudios sobre los costes de la dependencia, aunque fundamentalmente de carácter

agregado (Sosvilla *et al.*, 2011). Sin embargo, este trabajo se realiza desde una perspectiva individual, dado que el objetivo es el análisis de la evolución del coste individual esperado de los CLD.

La prevalencia de la dependencia la estimamos con los datos obtenidos por el Instituto Nacional de Estadística (INE) a partir del porcentaje de personas que necesitan ayuda para realizar las actividades básicas de la vida diaria (ABVD), por edad y sexo. Hemos realizado proyecciones de cuánto espera gastar un individuo en CLD sobre la base de su edad actual, centrandó la atención en los individuos de 65 años o más, distinguiendo entre hombres y mujeres. La definición de dependencia considerada es la que se estableció en España a partir de la entrada en vigor de la Ley de Dependencia, por lo que se distinguen tres grados de dependencia según su severidad. A partir de datos de los costes unitarios por servicios de cuidados, hemos comparado las estimaciones obtenidas con la población dependiente mayor de 65 años en 1999 y en 2008.

A continuación, en la segunda sección de este trabajo se describe el Sistema para la Autonomía y Atención a la Dependencia (SAAD) español, a partir del cual definimos las necesidades de CLD en función de la intensidad de la dependencia. En esta segunda sección también mostramos cuáles son los costes de los servicios de CLD en función del número de horas de cuidados en el hogar, en centros de día y en residencias. En la tercera sección presentamos los datos utilizados en nuestro análisis. Posteriormente, en la cuarta sección describimos la metodología utilizada para obtener los resultados que aparecen en la sección quinta. Por último, en la sección sexta se exponen las principales conclusiones del trabajo.

2. GRADOS DE DEPENDENCIA Y COSTES DE LOS CLD

En la Ley Española, el concepto de dependencia se define como “el estado de carácter permanente en que se encuentran las personas que, por razones derivadas de la edad, la enfermedad o la discapacidad, y ligadas a la falta o a la pérdida de autonomía física, mental, intelectual o sensorial, precisan de la atención de otra u otras personas o ayudas importantes para realizar ABVD o, en el caso de las personas con discapacidad intelectual o enfermedad mental, de otros apoyos para su autonomía personal”. Para determinar cuál es el grado de dependencia de los individuos, utilizamos los criterios que se establecen en dicha Ley.

Uno de los elementos clave de cualquier sistema de protección frente a la dependencia es cómo se define el nivel de necesidades que requieren apoyo, es decir, cómo se clasifica en uno u otro grupo a un individuo que haya solicitado la prestación. Esto se realiza habitualmente mediante una escala, que en el caso español se denomina Baremo de Valoración de la Dependencia (BVD), según la cual, una vez examinado por los expertos y como consecuencia de dicho examen, al solicitante se le dictamina uno de los tres posibles grados de dependencia establecidos en la Ley o bien se le deniega el reconocimiento de dicha situación. El BVD mide la incapacidad de un individuo para llevar a cabo las actividades de la vida diaria utilizando una escala de 0 a 100 puntos. Dicho baremo pone mucho énfasis en la intensidad del apoyo necesitado y las tareas para las que se requiere la asistencia de otras personas. De hecho, el propio baremo ha sido cambiado en un par de ocasiones desde su primera publicación y todavía hay dudas de que esté siendo coherentemente aplicado, existiendo discusión sobre el papel que juega en él la evaluación de las limitaciones para llevar a cabo las actividades de la vida diaria. En función de las puntuaciones obtenidas en el BVD, el sistema español determina tres grados de dependencia con dos niveles dentro de cada uno (Esparza, 2010):

- Grado 1, Dependencia Moderada: la persona necesita ayuda para realizar las ABVD al menos una vez al día (nivel I: 25-39 puntos, nivel II: 40-49 puntos).
- Grado 2, Dependencia Severa: la persona necesita ayuda para realizar las ABVD dos o tres veces al día (nivel I: 50-64 puntos, nivel II: 65-74 puntos).
- Grado 3, Gran dependencia: la persona necesita ayuda para realizar las ABVD varias veces al día (nivel I: 75-89 puntos, nivel II: 90-100 puntos).

Una vez que al individuo se le dictamina un grado y un nivel, recibe un plan personalizado y puede escoger entre la atención residencial o la prestación económica, si prefiere ser atendido en casa cuando esto sea posible. No todos los grados y niveles reciben prestación y la cobertura se irá extendiendo gradualmente hasta el año 2016, dependiendo de la disponibilidad presupuestaria. A día de hoy son beneficiarios de alguna prestación aquellos que tienen reconocido un nivel de dependencia con severidad de grado 1 y nivel II o superior. Es probable que las restricciones presupuestarias obstaculicen la plena implementación de la ley para todos los niveles de dependencia e incluso, dada la evolución de los costes de los CLD, que se alcance a poder cubrir todas las necesidades de los individuos que forman parte del sistema. También es muy posible que la categorización de la dependencia comporte algún nivel de riesgo moral (“moral hazard”).

Para calcular el coste de los cuidados de larga duración a lo largo de la vida hemos hecho algunas hipótesis realistas sobre el coste de los servicios, en lugar de utilizar el máximo o el mínimo de las cuantías públicas vigentes. De ese modo, hemos calculado el coste medio de los cuidados en España, recogido en la Tabla 1, según el cual el coste de una hora de atención en domicilio se incrementó en un 52,40% de 1999 a 2008, por encima de la inflación acumulada en dicho período¹, el coste anual de los centros de día también aumentó sustancialmente en el mismo periodo, en tanto que el precio de las residencias para personas dependientes aumentó un 30,78% entre 1999 y 2003, aunque desde entonces el precio no ha crecido de forma importante. El servicio de teleasistencia se proporciona mediante un dispositivo de telecomunicaciones que alerta a los centros médicos o a los miembros de la familia cuando el usuario pulsa un botón; el coste de este servicio era en 2008 más bajo que en 1999 debido a las innovaciones tecnológicas y a la generalización de su uso.

A partir de los datos de la Tabla 1, y disponiendo de información sobre las tasas de prevalencia para los años 1999 y 2008, hemos calculado un coste promedio de los cuidados por dependencia para cada grado de severidad: Grado 1 (dependencia moderada), Grado 2 (dependencia severa) y Grado 3 (gran dependencia). Suponemos una composición de tipos de cuidados que para los dependientes de Grado 2 combina cuidados en el hogar y centros de día, y para los de Grado 3 supone que el individuo está en una residencia. Para los no dependientes asumimos que el coste anual de los cuidados de larga duración es cero.

¹ El IPC (Índice de Precios al Consumo) según el INEbase, para 1999M06 fue de 82,29 y para 2008M06 era de 112,3. Por tanto, la inflación acumulada desde 1999 a 2008 es del 36,47%.

Tabla 1. Costes por hora o año de servicios de CLD 1999, 2003, 2008*, en euros.

Tipos de Cuidados de Larga Duración	1999	2003	2008	Variación 1999-2003	Variación 1999-2008	Variación 2003-2008
Servicios públicos de ayuda a domicilio (por hora)	8,34	9,73	12,71	16,67%	52,40%	30,63%
Servicios públicos de teleasistencia (anual)	273,53	242,23	253,92	-11,44%	-7,17%	4,83%
Servicios públicos de día persona dependiente (anual por plaza)	5510,49	6625,2	7873,32	20,23%	42,88%	18,84%
Plazas residenciales públicas persona dependiente (anual por plaza)	12870,34	16832,3	17295,6	30,78%	34,38%	2,75%
Plazas residenciales públicas persona no dependiente (anual por plaza)			15531			

* Enero 2008. Fuente: IMSERSO (2008).

La Tabla 2 muestra la información sobre el coste medio anual de los CLD en 1999 y 2008 según el grado de severidad y el tipo de cuidados. El coste medio anual de CLD para personas con dependencia moderada (Grado 1) pasa de 9132,30 euros en 1999 a 13917,45 euros en 2008, siendo el incremento acumulado entre los dos años del 52,40%. El coste medio anual de CLD para personas con dependencia severa (Grado 2) es de 8554,59 euros en 1999 y de 12512,47 euros en 2008, lo que supone un incremento acumulado del 46,27%.

Tabla 2. Coste individual anual de los cuidados de larga duración por grado de severidad, en euros.

Grado de dependencia	Servicios de CLD	Coste Individual
2008		
Grado 1	3 h/día a domicilio	13917,45
Grado 2	Centro de día y 1 h/día a domicilio	12512,47
Grado 3	Residencia	17295,6
1999		
Grado 1	3 h/día a domicilio	9132,3
Grado 2	Centro de día y 1 h/día a domicilio	8554,59
Grado 3	Residencia	12870,34

Fuente: elaboración propia a partir de datos del IMSERSO (2008).

Aunque parezca contradictorio que aquellos individuos con dependencia severa tengan unos costes medios anuales en CLD más bajos que aquellos con dependencia moderada, esto es debido al hecho de que la dependencia moderada comporta únicamente atención en domicilio que, proporcionalmente, es más costosa que la atención en centros de día. Las hipótesis sobre los servicios necesarios para cada grado de severidad se han fundamentado en diferentes estudios (Hennessy, 1995; Jacobzone *et al.*, 1998; Moragas *et al.*, 2003; Monteverde, 2004) que evalúan las mejores alternativas de atención para las personas mayores dependientes atendiendo a su grado de discapacidad. Dichos estudios recomiendan extender la atención en domicilio al máximo para prolongar el estado de dependencia moderada el mayor tiempo posible y detener la progresión de la pérdida de autonomía. Los individuos que se mantienen en su domicilio son, en general, más autónomos que quienes asisten a un centro de día. Finalmente, la atención residencial es la alternativa recomendada para personas con el nivel más severo de dependencia (Grado 3). Una residencia para una persona dependiente costaba 12870,34 euros anuales en 1999 y pasó a costar 17295,60 euros al año en 2008,

incluyendo únicamente los costes derivados de la dependencia y no los costes de manutención y alojamiento. El incremento acumulado en los costes de los CLD en residencia es del 34,38%.

Si comparamos la evolución de los costes medios de los CLD con la inflación global en el mismo periodo, que fue del 36,47%, observamos que para los dependientes de Grado 1 y 2 el aumento es superior al que supone la inflación global en España, debido al fuerte incremento de los costes por hora de la atención a domicilio. El incremento de la esperanza de vida y de las tasas de prevalencia de la dependencia de la población española viene provocando un incremento de la demanda de los servicios de cuidados de larga duración, tanto en lo que se refiere a servicios de atención a domicilio como en residencias. Este aumento de la demanda de cuidados de larga duración no ha ido acompañado de un crecimiento proporcional en la oferta de infraestructuras asistenciales, lo que ha dado lugar a un exceso de demanda que tensiona los precios al alza. Por este motivo, si se quiere poner freno al incremento de los precios de determinados servicios es importante hacer hincapié en la necesidad de proveer a la población de una mayor oferta de infraestructuras asistenciales, tanto desde el sector público como desde el privado. En este sentido, el seguro de dependencia privado puede tener un importante papel como complemento a la cobertura pública dado que, entre otros aspectos, puede incentivar la inversión privada en servicios específicos para las personas dependientes.

Finalmente, cabe señalar que otros trabajos calculan un coste medio por punto de BVD (Sosvilla *et al.*, 2011) en lugar de asignar un coste medio a cada grado de dependencia, obteniendo valores muy similares. Dicho enfoque más individualizado puede ser más adecuado si el objetivo es analizar la forma de la distribución de los costes de los CLD (Bolancé *et al.*, 2010).

3. DATOS

Para la obtención de los resultados que presentamos en la quinta sección de este trabajo, hemos utilizado datos recogidos por el Instituto Nacional de Estadística, INE (1999, 2008). La primera encuesta de 1999 se denominó EDDES (Encuesta sobre Discapacidad, Dependencia y Estado de Salud). La muestra era de un tamaño considerable dado que 220.000 personas fueron entrevistadas mediante un cuestionario muy extenso, en el que los individuos con al menos una discapacidad proporcionaron información sobre el grado de severidad de la misma, la edad en la que empezó dicha discapacidad, el tipo de atención necesitado y recibido, etc. (Bermúdez *et al.*, 2009). La EDDES (1999) entiende por discapacidad “toda limitación grave que afecte o se espera que vaya a afectar de forma duradera a la actividad del que la padece y tenga su origen en una deficiencia, u obedezca a procesos degenerativos en los que la edad de la persona influye decisivamente”. En la encuesta se contemplan diez tipos de discapacidades que afectan a un total de 36 actividades. En particular, la encuesta recogía información sobre las limitaciones que las personas tenían en la realización de las actividades básicas de la vida diaria (asearse, beber, comer, levantarse, vestirse...), que asociadas al carácter permanente y a la necesidad de atención por parte de otras personas, constituyen los tres elementos relevantes en la definición de la dependencia. La definición de tres niveles de severidad de la discapacidad (dificultad moderada para realizar la actividad, dificultad grave para realizar la actividad e imposibilidad de realizar la actividad) que recoge la EDDES refleja la mayor o menor necesidad de ayuda. Solo 22 de esas actividades (las que tienen que ver con la vida diaria) relacionadas con 6 discapacidades son

tenidas en cuenta a la hora de determinar si la persona es o no dependiente, juntamente con los niveles de severidad, utilizando para ello el BVD que establece la Ley de Dependencia.

En 2008 el INE llevó a cabo una segunda encuesta a gran escala, que se llamó EDAD (Encuesta de Discapacidades, Autonomía personal y situaciones de Dependencia). En esta se seleccionó una muestra nueva, por lo que no se dispone de información longitudinal. La estructura de esta encuesta era muy similar a la EDDES y, aproximadamente, fueron entrevistadas 260.000 personas. En la encuesta EDAD había 22.795 entrevistados que manifestaron tener al menos una dificultad para llevar a cabo las actividades de la vida diaria (AVD). La estimación del número total de personas con al menos una dificultad en las AVD, que se obtiene con el factor de elevación muestral, es de 3,85 millones, lo que corresponde a una prevalencia de aproximadamente 85,5 por mil personas en la población total. Para un análisis pormenorizado del contenido de la EDAD 2008 y de las principales diferencias con la EDDES 1999 se puede consultar Blay (2009).

En ambas encuestas se pregunta sobre las actividades de la vida diaria utilizadas en el BVD para medir la severidad de la dependencia. Cuando un entrevistado indica que tiene una dificultad para actuar en una AVD específica, debe indicar si tal dificultad es moderada, severa o total. Se asigna un coeficiente de valor 0,90 para dificultad moderada, 0,95 para dificultad severa y 1,00 para el totalmente incapacitado para llevar a cabo aquella AVD concreta. También identificamos a los individuos con dificultades en la realización de actividades de la vida diaria asociadas a discapacidades intelectuales o por enfermedad mental, debido a que la escala del BVD tiene una tabla de coeficientes distinta para ellos. En el Anexo 1 se presenta una tabla con las equivalencias entre las discapacidades relacionadas con las AVD que se recogen en la EDDES y en la EDAD. La puntuación del BVD se obtiene sumando los productos de los coeficientes de severidad por los pesos asignados en la escala a cada tarea concreta para cada una de las AVD (BOE 18 de febrero de 2011, Real Decreto 174/2011 del 11 de febrero).

4. METODOLOGÍA

La metodología utilizada sigue el mismo esquema que el modelo práctico de invalidez descrito en Ayuso *et al.* (2001), en el cual la población a una determinada edad x se divide en dos colectivos: activos e inválidos. En este trabajo dicho modelo se generaliza de modo que la población queda dividida en cuatro colectivos: los activos o no dependientes, los dependientes de Grado 1, los dependientes de Grado 2 y los dependientes de Grado 3. La metodología propuesta proporciona una forma sencilla de obtener la esperanza de vida desagregada en cuatro tramos (en no dependencia, en Grado 1, en Grado 2 y en Grado 3) sin necesidad de estimar las probabilidades de transición entre los cuatro estados. Se supone el cumplimiento de algunas hipótesis similares a las que se han asumido anteriormente en otros trabajos sobre la misma temática (Albarrán *et al.*, 2005; Ayuso *et al.*, 2007 y Ayuso *et al.*, 2010). Se asume que la dependencia es un estado permanente y, por lo tanto, el individuo no puede mejorar su situación. Es decir, los individuos no dependientes pueden morir sanos o pasar a un estado de dependencia de Grado 1, 2 o 3; los dependientes de Grado 1 pueden morir en ese estado o pasar a Grado 2 o 3; los dependientes de Grado 2 pueden morir en ese estado o pasar a Grado 3; y, finalmente, los dependientes en el Grado 3 se morirán en ese mismo estado. En cada periodo se contabilizan, por un lado, las salidas de la población debida a las muertes en cada

uno de los estados (a partir de las tasas de mortalidad) y, por otro, las entradas de individuos en cada uno de los tres grados de dependencia (siguiendo las tasas de prevalencia de la dependencia estimadas). Conviene apuntar también que la metodología supone que un individuo no puede cambiar de estado y morirse instantáneamente, es decir, que una vez cambia de estado permanecerá en él al menos un periodo.

La metodología utilizada nos permite obtener los costes esperados a partir de diferentes supuestos sobre la inflación y las tasas de prevalencia y mortalidad. A continuación, describimos cómo estimamos la esperanza de vida, total y en cada grado de dependencia, y los costes individuales esperados de los CLD. La notación que utilizamos es común en la ciencia actuarial. Siendo p_x la probabilidad de que un individuo vivo a la edad x sobreviva a la edad $x + 1$, entonces $q_x = 1 - p_x$ es la probabilidad de que un individuo de edad x muera antes de llegar a la edad $x + 1$. En este trabajo hemos supuesto que la probabilidad de muerte no cambia con el nivel de dependencia de un individuo. Aunque esta hipótesis pueda parecer poco realista, en España no existen estudios específicos que justifiquen que la probabilidad de muerte de los individuos dependientes, según la definición de la ley, sea mayor o menor que la de los no dependientes. Por ello, en este trabajo se asume la hipótesis establecida en algunos modelos actuariales como es el Modelo Danés (Haberman y Pitacco, 1999 y Ramlau-Hansen, 1991), en el que se supone que “la mortalidad de los discapacitados es igual a la de los activos” (véase también Crimmins *et al.*, 1994; Albarrán *et al.*, 2005; Cairns *et al.*, 2008 y Ayuso *et al.*, 2010). Llamamos t_x a la tasa de prevalencia de la dependencia de los individuos en la edad x . Cuando especificamos la prevalencia de la dependencia por grado de severidad utilizamos la siguiente notación: $t_x^{(1)}$, $t_x^{(2)}$ y $t_x^{(3)}$, que son, respectivamente, los porcentajes de individuos en los grados 1, 2 y 3 de entre todos los de edad x . Se cumple que:

$$t_x = t_x^{(1)} + t_x^{(2)} + t_x^{(3)} = \sum_{k=1}^3 t_x^{(k)}$$

y denotamos $t_x^{(0)} = 1 - t_x$ a la tasa de prevalencia de la no dependencia.

Sea l_x el número de individuos vivos en la edad x . Para cada edad tenemos que:

$$l_{x+1} = (1 - q_x) \cdot l_x.$$

Aquellos que están vivos en la edad x pueden clasificarse de modo que, o bien son no dependientes o pertenecen a alguno de los tres grados de dependencia 1, 2 o 3. El número de personas en cada estado puede calcularse como sigue:

$$l_x^{(j)} = t_x^{(j)} \cdot l_x, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Entonces sabemos que:

$$l_x = l_x^{(0)} + l_x^{(1)} + l_x^{(2)} + l_x^{(3)} = \sum_{j=0}^3 l_x^{(j)}.$$

Como resultado de lo anterior, el número total de años vividos por los individuos en la edad x se puede expresar como la suma del número total de años vividos por cada individuo en cada uno de los niveles de dependencia:

$$T_x = \sum_{i=x}^{105} l_i = \sum_{i=x}^{105} (l_i^{(0)} + l_i^{(1)} + l_i^{(2)} + l_i^{(3)}) = T_x^{(0)} + T_x^{(1)} + T_x^{(2)} + T_x^{(3)}. \quad (1)$$

De la expresión anterior podemos obtener el conocido concepto de esperanza de vida en la edad x como la suma de cuatro términos, lo que llamamos la desagregación de la esperanza de vida (Sullivan, 1971 y Chiang, 1984):

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{T_x^{(0)}}{l_x} + \frac{T_x^{(1)}}{l_x} + \frac{T_x^{(2)}}{l_x} + \frac{T_x^{(3)}}{l_x} = e_x^{(0)} + e_x^{(1)} + e_x^{(2)} + e_x^{(3)}. \quad (2)$$

La expresión (2) muestra que la esperanza de vida en la edad x se puede descomponer en la esperanza de vida libre de dependencia $e_x^{(0)}$ y la esperanza de vida en la edad x en los grados 1, 2 y 3, respectivamente.

Sea C_x la variable aleatoria que representa el coste en CLD para lo que resta de vida de un individuo de edad x . Cuando calculamos la esperanza matemática $E(C_x)$ necesitamos $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ y $c^{(3)}$, que corresponden a los costes anuales promedio de los CLD de los individuos en los grados de severidad 1, 2 y 3, respectivamente (dados en la Tabla 2 para 1999 y 2008). Suponemos que el coste de los cuidados de los no dependientes es cero. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} E(C_x) &= \frac{\sum_{i=x}^{105} (c^{(1)}l_i^{(1)} + c^{(2)}l_i^{(2)} + c^{(3)}l_i^{(3)}) (1+r)^{i-x}}{l_x} \\ &= \frac{\sum_{i=x}^{105} (c^{(1)}l_i^{(1)}) (1+r)^{i-x}}{l_x} + \frac{\sum_{i=x}^{105} (c^{(2)}l_i^{(2)}) (1+r)^{i-x}}{l_x} + \frac{\sum_{i=x}^{105} (c^{(3)}l_i^{(3)}) (1+r)^{i-x}}{l_x}, \quad (3) \\ &= E(C_x^{(1)}) + E(C_x^{(2)}) + E(C_x^{(3)}) \end{aligned}$$

donde r es la tasa de inflación anual. Una ampliación de lo anterior, introduciendo más hipótesis, se puede encontrar en Haberman y Pitacco (1999). El resultado de la expresión (3) se interpreta como una proyección a futuro del coste esperado que tendrá que asumir un individuo a partir de una edad $x \geq 65$ años debido a la dependencia. Con esta información, el individuo puede valorar si el sistema público de dependencia cubre estos costes esperados o si, por el contrario, existe la necesidad de contratar un seguro privado que alcance a cubrir al menos la parte del coste esperado no financiada públicamente.

4.1. Método de alisamiento para la estimación de las tasas de prevalencia de la dependencia

En este apartado se describe el método no paramétrico utilizado para obtener una curva alisada de tasas de prevalencia que no presupone la existencia de una forma funcional para la relación existente entre dichas tasas y la edad. Sencillamente es la información muestral la que dará forma a la curva.

Denotamos por $f_x^{(k)}$ la frecuencia de individuos de edad x con un nivel de dependencia indexado por $k = 1, 2, 3$. Habitualmente las tasas estimadas de prevalencia se obtienen a partir de encuestas, de modo que los errores de muestreo introducen fluctuaciones cuando se calculan para cada grupo de edad. Especialmente en cohortes pequeñas, es decir, por encima de los 90 años de edad, las estimaciones no muestran formas crecientes como sería de esperar, dado que la población es poco numerosa.

Por lo tanto, podemos suponer que:

$$f_i^{(k)} = t_x^{(k)} + \varepsilon, \quad (4)$$

donde ε es un error aleatorio incorrelacionado con x , con media cero y varianza constante. La expresión (4) puede interpretarse como un modelo de regresión del tipo:

$$y = m(x) + \varepsilon, \quad (5)$$

donde $m(x)=E(y|x)$ es la esperanza condicionada y donde x puede ser un valor predeterminado o una variable aleatoria; en el caso que nos ocupa, es un valor predeterminado que coincide con la edad en la que queremos calcular la tasa de prevalencia de la dependencia.

Nadaraya (1964) y Watson (1964) proponen un estimador no paramétrico del modelo de regresión expresado en (5) basado en el estimador núcleo de la función de densidad (Silverman, 1986), ampliamente conocido como estimador de Nadaraya-Watson y que adaptado al modelo expresado en (4) equivale a:

$$\hat{t}_x^{(k)} = \frac{\sum_{i=65}^{105} K\left(\frac{i-x}{b_n^{(k)}}\right) f_i^{(k)}}{K\left(\frac{i-x}{b_n^{(k)}}\right)} = \sum_{i=65}^{105} W\left(\frac{i-x}{b_n^{(k)}}\right) f_i^{(k)}, \quad (6)$$

donde $b_n^{(k)}$ es el parámetro de alisado o ventana de la estimación, n es el número de observaciones utilizadas en el alisamiento, en este caso $105-65+1=41$, y $K(\cdot)$ es la función núcleo (*kernel*). Utilizando la expresión (6) para cada edad x la tasa de prevalencia estimada equivale a una media ponderada de las frecuencias observadas $f_i^{(k)}$, de modo que las frecuencias observadas en edades i más cercanas a x tienen mucho peso en la estimación y, por el contrario, las frecuencias $f_i^{(k)}$ en edades i alejadas de x poseen poco o ningún peso en la estimación. La función núcleo se corresponde con una función de densidad simétrica, centrada en el cero y acotada o asintóticamente acotada. Ejemplos de funciones núcleo ampliamente usadas son el núcleo de Epanechnikov y el núcleo Gaussiano o normal estándar (Silverman, 1986). En nuestra aplicación hemos usado el núcleo Gaussiano, de forma que $K(\cdot)$ se corresponde con la función de densidad de una variable aleatoria con distribución Normal (0,1). El valor del parámetro de alisamiento $b_n^{(k)}$, como su propio nombre indica, controla el grado de alisamiento de la estimación, es decir, cuanto mayor es el valor de este parámetro más alisado es el resultado y menor es la influencia de las edades i cercanas a x en la estimación de la tasa de prevalencia. Este valor puede calcularse de forma subjetiva, a partir de la representación gráfica de las distintas estimaciones obtenidas con distintos valores dados a este parámetro. Sin embargo, existen métodos automáticos de cálculo de $b_n^{(k)}$, como el propuesto por Silverman (1986) en el contexto de la estimación núcleo de la función de densidad, aunque también es una alternativa válida en la estimación núcleo de Nadaraya-Watson. Utilizando dicho criterio de cálculo, el valor del parámetro de alisamiento que utilizamos para obtener el estimador expresado en (4) es:

$$b_n^{(k)} = s_x n^{-\frac{1}{5}},$$

donde s_x es una medida de dispersión (por ejemplo, la desviación estándar) asociada a la variable x .

Finalmente, la tasa de prevalencia de la no dependencia se calcula, por consistencia, como:

$$\hat{t}_x^{(0)} = 1 - \left(\hat{t}_x^{(1)} + \hat{t}_x^{(2)} + \hat{t}_x^{(3)} \right).$$

5. RESULTADOS

En este apartado analizamos el incremento entre 1999 y 2008 del coste individual esperado de los CLD ligados a una situación de dependencia a partir de los 65 años de edad. En dicho incremento han influido dos factores importantes que se analizan por separado. Por un lado, tal y como hemos mostrado en la segunda sección de este trabajo, el incremento de los precios de los servicios de CLD ha sido superior al marcado por la inflación en España. Por otro lado, los cambios en la población también influyen en el aumento del coste individual esperado de los CLD, dado que entre 1999 y 2008 la esperanza de vida y las tasas de prevalencia de la dependencia han aumentado.

Como se ha descrito en la Sección 3, hemos utilizado la información de las encuestas EDDDES y EDAD, realizadas por el INE en los años 1999 y 2008, respectivamente. Para cada encuesta se han obtenido las tasas de prevalencia de dependencia en cada nivel de severidad para hombres y mujeres en la edad x utilizando la metodología descrita en la Sección 4.1. Hemos utilizado la definición de los grados de dependencia fijados por la legislación española, aunque esto puede ser discutible dado que el número de personas con alguna discapacidad que requiere alguna forma de cuidado o asistencia es distinto del número de personas dependientes que define el Baremo de Valoración de la Dependencia. Nuestro cálculo del coste de los CLD solo hace referencia a aquellos que necesitan ayuda de terceras personas porque así es como lo define la Ley de Dependencia española.

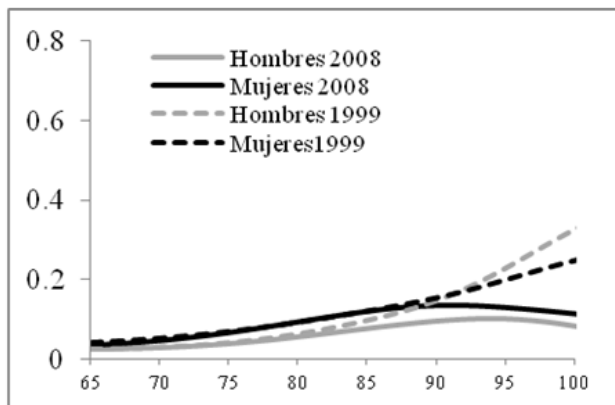
Las probabilidades de supervivencia o tablas de mortalidad se toman también de las estadísticas oficiales del INE para la población residente en España. Para obtener los resultados de las expresiones (1), (2) y (3) utilizamos dichas tasas de mortalidad brutas. El valor máximo de la edad registrada en las encuestas es de 105 años. Sin embargo, observamos que las probabilidades de supervivencia estimadas por el INE poseen una gran dispersión en las edades más avanzadas, por lo que, al igual que en el trabajo de Ayuso, *et al.* (2007), supondremos que a partir de los 99 años de edad la probabilidad de muerte es constante e igual a 0,5, tanto para hombres como para mujeres.

La Figura 1 muestra las tasas alisadas de prevalencia de la dependencia en 2008 y en 1999, para hombres y mujeres, separando los resultados para cada uno de los grados de dependencia y haciendo también el cálculo para todos los grados de severidad conjuntamente. Para este último caso, en la Figura 1d) observamos que las tasas de prevalencia son mayores para las mujeres que para los hombres y, en ambos casos, han aumentado entre 1999 y 2008. Los resultados de las tasas de prevalencia para cada grado de dependencia muestran como el mayor incremento entre las de 1999 y 2008 se produce en el Grado III. Incluso en la Figura 1a) observamos cómo para el Grado I las tasas de prevalencia tienden a disminuir. Por tanto, el incremento de la prevalencia de la dependencia se produce en la dependencia severa y la gran dependencia.

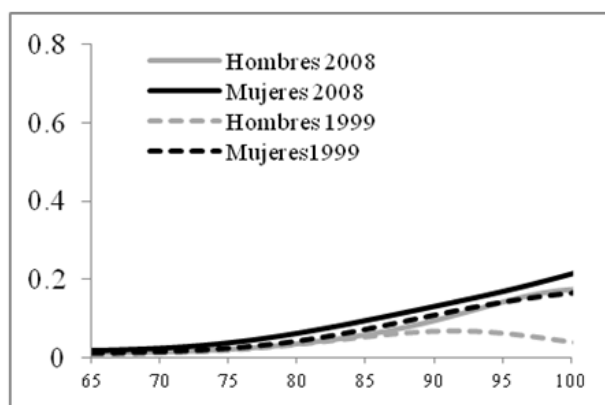
La Figura 2 representa la esperanza de vida a partir de los 65 años en 2008 y 1999, para distintas edades y separadamente para hombres y mujeres. Podemos ver que existen diferencias en la esperanza de vida de hombres y mujeres. Los gráficos también muestran que las esperanzas de vida para edades por encima de los 65 años han crecido en 2008 con respecto a las que existían en 1999, tanto para hombres como para mujeres. Este fenómeno indica que la longevidad ha aumentado considerablemente en la pasada década.

Figura 1. Tasas de prevalencia de la dependencia en función de la edad para mujeres (en negro) y hombres (en gris) y para los años 2008 (línea continua) y 1999 (línea discontinua), para cada grado de dependencia y para el total.

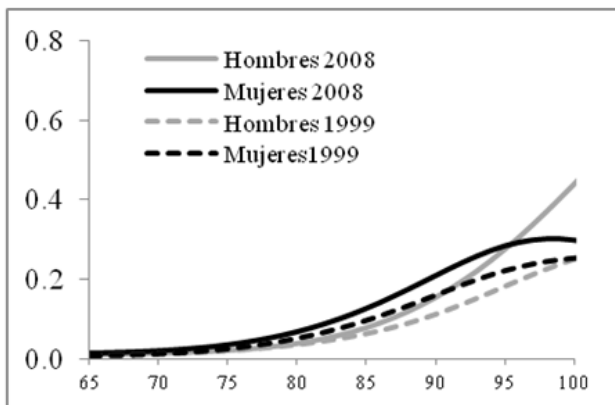
a) Dependientes con Grado I.



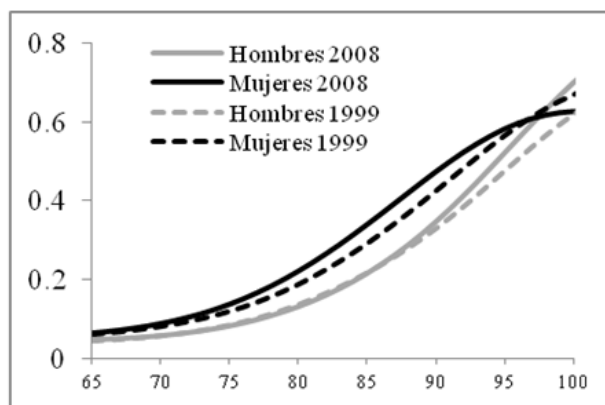
b) Dependientes con Grado II.



c) Dependientes con Grado III.



d) Todos los dependientes.

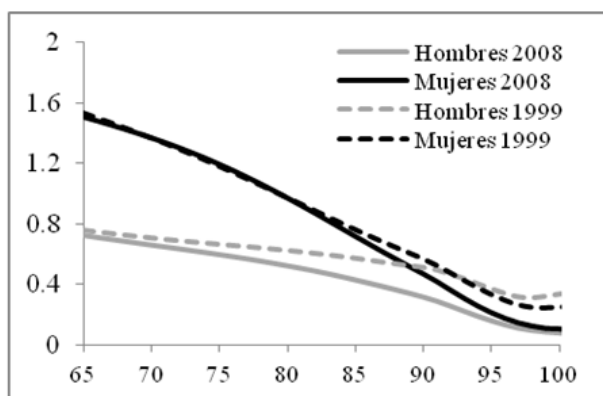


Fuente: elaboración propia a partir de los datos de EDDDES 1999 y EDAD 2008.

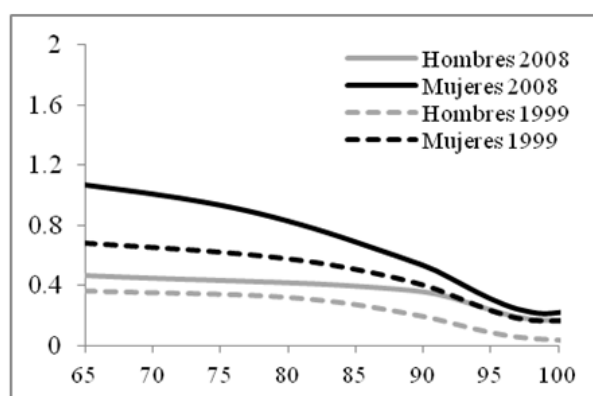
La Tabla 3 muestra los valores representados en la Figura 2, que son el resultado de calcular las expresiones (1) y (2) de la Sección 4 de metodología, y que dan lugar en dicha tabla a la esperanza de vida restante para algunas edades concretas en 2008. Las estimaciones para 1999 se muestran entre paréntesis. Por ejemplo, un hombre de 65 años en 2008 tiene una esperanza de vida restante de 16,33 años y de ese total, 14,58 años corresponden a esperanza de vida en no dependencia, 0,72 años, en promedio, corresponden a dependencia moderada, 0,47 a dependencia severa y 0,56 a gran dependencia. Es evidente que el incremento de las tasas de prevalencia en los grados de dependencia 2 y 3 ha provocado que la parte de esperanza de vida en estos estados se haya incrementado más significativamente, tanto para los hombres como para las mujeres. El hecho que las tasas de prevalencia de la dependencia aumenten para todas las edades podría implicar que, en promedio, los individuos pasarán más tiempo de su vida en dicha situación.

Figura 2. En d), la esperanza de vida a partir de los 65 años y en a), b) y c) la esperanza de vida en dependencia, en función de la edad para mujeres (en negro) y hombres (en gris) y para los años 2008 (línea continua) y 1999 (línea discontinua).

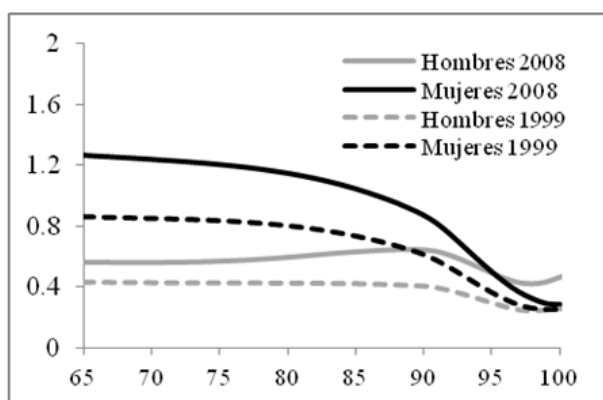
a) Dependencia con Grado I.



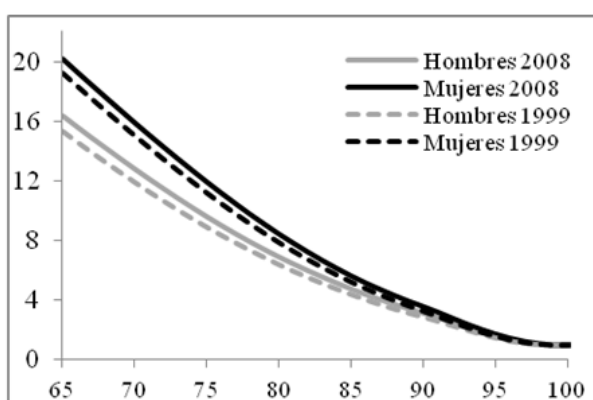
b) Dependencia con Grado II.



c) Dependencia con Grado III.



d) Esperanza de vida total.



Fuente: elaboración propia a partir de los datos de EDDDES 1999 y EDAD 2008.

Tabla 3. Esperanza de vida para una edad dada por sexo en España en 2008 (1999).

Edad	Hombres				Total
	No dependiente	Dependencia Moderada	Dependencia Severa	Gran Dependencia	
65	14,58 (13,81)	0,72 (0,76)	0,47 (0,36)	0,56 (0,43)	16,33 (15,36)
70	11,11 (10,45)	0,66 (0,71)	0,45 (0,35)	0,56 (0,43)	12,78 (11,93)
75	7,98 (7,48)	0,59 (0,66)	0,43 (0,34)	0,57 (0,43)	9,58 (8,91)
80	5,35 (5,03)	0,52 (0,62)	0,42 (0,32)	0,60 (0,43)	6,89 (6,40)
85	3,30 (3,13)	0,43 (0,57)	0,40 (0,27)	0,63 (0,42)	4,75 (4,39)
90	1,81 (1,76)	0,31 (0,51)	0,36 (0,19)	0,64 (0,41)	3,13 (2,87)
95	0,69 (0,73)	0,16 (0,37)	0,24 (0,09)	0,50 (0,30)	1,58 (1,48)
100	0,27 (0,36)	0,08 (0,33)	0,17 (0,04)	0,47 (0,26)	0,98 (0,98)
Edad	Mujeres				Total
	No dependiente	Dependencia Moderada	Dependencia Severa	Gran Dependencia	
65	16,35 (16,15)	1,51 (1,53)	1,07 (0,68)	1,27 (0,86)	20,19 (19,23)
70	12,29 (12,16)	1,37 (1,37)	1,01 (0,66)	1,24 (0,85)	15,91 (15,04)
75	8,60 (8,56)	1,20 (1,18)	0,93 (0,62)	1,20 (0,84)	11,94 (11,20)
80	5,49 (5,51)	0,97 (0,98)	0,83 (0,58)	1,15 (0,80)	8,44 (7,87)
85	3,18 (3,22)	0,72 (0,76)	0,69 (0,51)	1,05 (0,73)	5,64 (5,23)
90	1,70 (1,68)	0,47 (0,57)	0,54 (0,41)	0,87 (0,61)	3,58 (3,27)
95	0,70 (0,65)	0,22 (0,34)	0,31 (0,24)	0,50 (0,36)	1,73 (1,58)
100	0,37 (0,32)	0,11 (0,25)	0,22 (0,17)	0,29 (0,25)	0,98 (0,98)

Fuente: elaboración propia a partir de los datos de EDDDES 1999 y EDAD 2008.

En la Tabla 3 y en la Figura 2 podemos ver que tanto para hombres como para mujeres la esperanza de vida en los grados de dependencia con mayor severidad (Grado II y Grado III) ha aumentado considerablemente entre 1999 y 2008, siendo además este incremento mayor en el Grado III. De los resultados en la Tabla 3 y la Figura 2 podemos concluir que la longevidad ha aumentado en la pasada década y que la esperanza de vida en situación de dependencia ha crecido en mayor medida para aquellos individuos dependientes con más severidad.

Con el objetivo de ver si es la longevidad o bien la duración media en un nivel de dependencia es la que más ha crecido, hemos calculado el porcentaje de esperanza de vida que corresponde a la esperanza de vida en no dependencia en 2008 y en 1999 (entre paréntesis) para algunas edades concretas y separadamente para hombres y mujeres. Los resultados se pueden encontrar en la Tabla 5. A partir de ellos observamos que la proporción de años vividos en un estado de no dependencia ha disminuido desde 1999 a 2008 para todas las edades en España, tanto para hombres como para mujeres. Por tanto, esto significa que en la pasada década la duración media en un estado de dependencia ha aumentado más que la longevidad. Existe una excepción a la anterior conclusión que se produce para las mujeres centenarias, para las cuales dicho patrón cambia, aunque se desconoce si se debe a fluctuaciones aleatorias o si es un resultado estable. Las estimaciones indican que las mujeres centenarias tienen, proporcionalmente, una mayor esperanza de vida en no dependencia en 2008 que en 1999.

Tabla 4. Proporción de esperanza de vida en situación de no dependencia con respecto a la esperanza de vida restante para hombres y mujeres, en España en 2008 (1999).

Edad	Hombres	Mujeres
65	89% (90%)	81% (84%)
70	87% (88%)	77% (81%)
75	83% (84%)	72% (76%)
80	78% (79%)	65% (70%)
85	69% (71%)	56% (62%)
90	58% (61%)	47% (51%)
95	43% (49%)	40% (41%)
100	27% (36%)	37% (32%)

Fuente: elaboración propia a partir de los datos de EDDDES 1999 y EDAD 2008.

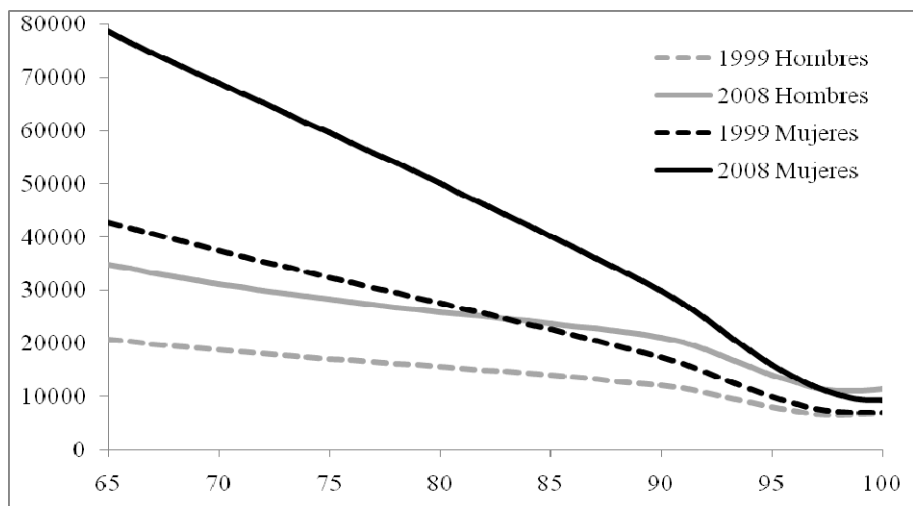
Nuestros resultados evidencian que la longevidad en España aumenta mientras que la esperanza de vida con dependencia aumenta prácticamente en todas las edades por encima de los 65 años, tanto para mujeres como para hombres. Simultáneamente, la esperanza de vida en no dependencia ha disminuido en la pasada década para casi todas las edades por encima de los 65 años. No hemos explorado las razones que expliquen dicho fenómeno, aunque probablemente sean el resultado de la existencia de unas mejores terapias médicas para las personas dependientes que dan lugar a unas mejores perspectivas de supervivencia.

El aumento de la esperanza de vida en dependencia, junto al que también se produce en las tasas de prevalencia representadas en la Figura 1, constituyen unos cambios entre ambas generaciones de mayores de 65 años (la del 1999 y la del 2008) que ocasionan el incremento de los costes de los CLD, tanto a nivel individual, debido a la mayor esperanza de vida en dependencia, como a nivel total, debido al mayor número de dependientes. Por otro lado, de los datos que mostramos en la Tabla 1 se deduce que, en promedio, los

costes de los servicios de los CLD han aumentado anualmente, entre 1999 y 2008, por encima de la inflación global anual, tendencia que posiblemente seguirá manteniéndose en el futuro por el exceso de demanda de servicios (por el envejecimiento de la población) sobre la oferta de los mismos (puesto que no se está invirtiendo suficientemente en infraestructuras de servicios sociosanitarios). Por tanto, en el incremento del coste individual esperado de los CLD influyen dos factores: por un lado, lo que podríamos llamar el cambio generacional y, por otro, el diferencial de inflación entre los costes de los servicios de los CLD y la inflación global. A continuación, analizamos cuál es el efecto de cada uno de estos factores.

Hemos estimado los costes individuales esperados de los CLD en dependencia a lo largo de la vida para los individuos de 65 años o más. Los cálculos se han realizado de forma separada para hombres y mujeres, tomando por un lado los costes de los servicios de 1999 y aplicando una inflación anual del 2%, así como también los costes de los servicios de 2008 y suponiendo nuevamente una inflación anual del 2%. Es decir, comparamos las proyecciones a futuro de los costes individuales esperados de los CLD que se hubieran obtenido en 1999 con aquellas que se han obtenido en 2008, teniendo en cuenta el fuerte incremento de precios entre 1999 y 2008. Estos resultados nos permiten estimar cuál ha sido el incremento total en el coste individual esperado de los CLD a partir de los 65 años o más. En la Figura 3 mostramos los resultados obtenidos, diferenciando entre hombres y mujeres, y en la Tabla 5 apuntamos los mismos resultados para algunas edades. Estos resultados muestran un incremento considerable de los costes entre 1999 y 2008, situándose para los individuos de 65 años por encima del 60% para los hombres y por encima del 80% para las mujeres.

Figura 3. Costes individuales esperados de los CLD en función de la edad de partida para mujeres (en negro) y hombres (en gris) y para los años 2008 (línea continua) y 1999 (línea discontinua).



Fuente: elaboración propia a partir de los datos de EDDDES 1999, EDAD 2008 e IMSERSO (2008).

Posteriormente analizamos qué parte del incremento de los costes que apuntamos en la Tabla 5 se debe a los cambios habidos en la población mayor de 65 años entre 1999 y 2008, mostrando los resultados en la Figura 4 y en la Tabla 6. Estos resultados han sido obtenidos tomando como base los costes de los servicios en 1999, utilizamos las tasas de prevalencia y las probabilidades de muerte de la población de 1999 y de la población de 2008, y suponemos también una tasa de inflación del 2%. Hay que señalar que los

costes en 1999 coinciden con los de la Tabla 5 mientras que los de 2008 difieren de los de aquella, ya que se han obtenido suponiendo una inflación a largo plazo del 2% desde el año 1999. Por ejemplo, de la Tabla 5 y la Tabla 6 deducimos que para las mujeres de 65 años, el incremento del coste individual esperado entre 1999 y el 2008 es del 83,6%, del cual 28,19% se debe a los cambios poblacionales, es decir, al incremento de las tasas de prevalencia y de la esperanza de vida.

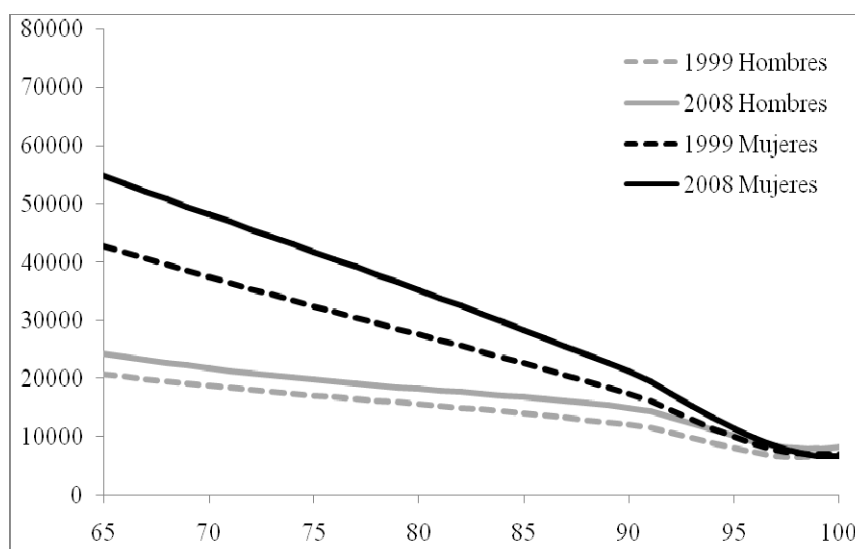
Tabla 5. Estimación de los costes individuales esperados de los CLD en 2008 (1999) en miles de euros.

A partir de la edad	Hombres		Mujeres	
	Costes de CLD	Incr., 1999-2008	Costes de CLD	Incr., 1999-2008
65	34,86 (20,83)	67,38%	78,57 (42,80)	83,60%
70	31,23 (18,78)	66,27%	68,93 (37,43)	84,18%
75	28,30 (17,12)	65,32%	59,62 (32,43)	83,84%
80	25,95 (15,65)	65,83%	50,07 (27,55)	81,72%
85	23,79 (14,05)	69,24%	40,13 (22,64)	77,29%
90	21,09 (12,13)	73,94%	29,90 (17,41)	71,75%
95	14,16 (8,14)	73,95%	16,07 (10,03)	60,21%
100	11,51 (6,80)	69,31%	9,40 (7,08)	32,76%

Fuente: elaboración propia a partir de los datos de EDDDES 1999, EDAD 2008 e IMSERSO (2008).

Tanto en la Figura 4 como en la Tabla 6 observamos que los cambios en la población afectan más al incremento de los costes individuales de las mujeres en las edades más cercanas a los 65 años. Sin embargo, para individuos con 90 años, o más, el incremento en las tasas de prevalencia y en la esperanza de vida afecta más al aumento de los costes individuales esperados en los hombres.

Figura 4. Costes individuales esperados de los CLD en función de la edad de partida para mujeres (en negro) y hombres (en gris) y para los años 2008 (línea continua) y 1999 (línea discontinua), teniendo en cuenta únicamente la actualización de los indicadores demográficos.



Fuente: elaboración propia a partir de los datos de EDDDES 1999, EDAD 2008 e IMSERSO (2008).

Tabla 6. Estimación de los costes individuales esperados de los CLD en 2008 (1999) en miles de euros, teniendo en cuenta únicamente la actualización de los indicadores demográficos.

A partir de la edad	Hombres		Mujeres	
	Costes de CLD	Incr., 1999-2008	Costes de CLD	Incr., 1999-2008
65	24,31 (20,83)	16,70%	54,86 (42,80)	28,19%
70	21,81 (18,78)	16,14%	48,20 (37,43)	28,78%
75	19,81 (17,12)	15,75%	41,78 (32,43)	28,82%
80	18,24 (15,65)	16,55%	35,20 (27,55)	27,75%
85	16,81 (14,05)	19,61%	28,34 (22,64)	25,19%
90	15,01 (12,13)	23,76%	21,22 (17,41)	21,87%
95	10,15 (8,14)	24,72%	11,44 (10,03)	14,07%
100	8,33 (6,80)	22,61%	6,69 (7,08)	-5,52%

Fuente: elaboración propia a partir de los datos de EDDDES 1999, EDAD 2008 e IMSERSO (2008).

7. CONCLUSIONES

Tal y como muchos expertos indican, el sistema público de salud y de servicios sociales debe reforzar la prevención para la extensión de la duración de la vida activa entre las personas de mayor edad. En nuestro análisis hemos visto que existen tres factores que han tenido influencia en la última década sobre el aumento en los costes en CLD a lo largo de la vida: el aumento de la longevidad, un incremento de los años vividos en estado de dependencia y el aumento del precio de los servicios de atención y cuidado a los dependientes.

En general, los resultados muestran cómo los incrementos en las tasas de prevalencia de la dependencia y de la esperanza de vida influyen en la evolución de los costes individuales esperados de los CLD, dado que una mayor prevalencia de la dependencia y esperanza de vida en todas las edades implica un incremento del tiempo que el individuo pasa en situación de dependencia y, por tanto, de los costes. Sin embargo, durante el periodo analizado, es el aumento de los precios de los servicios asociados a los CLD, que se sitúa muy por encima de la inflación media española, el causante de la mayor parte del incremento de los costes individuales esperados.

Las políticas sociales deben dirigirse a reducir el periodo de tiempo en estado de dependencia, promoviendo la vida activa y la autonomía personal, y también se deberán regular los mercados para proveer eficientemente servicios de atención y cuidados a los dependientes con variaciones en los precios que vayan acordes a la evolución de la inflación. Dichas políticas deberían afectar a los centros de día y las residencias para evitar que los previsibles incrementos de población dependiente acaben suponiendo excesos de demanda que se traduzcan en incrementos de los precios de los servicios. Además, cabe pensar en la necesidad de que exista un seguro de dependencia privado que pueda complementar la cobertura pública, así como incentivar la inversión privada en servicios específicos para las personas dependientes; lo cual, sin duda, puede también incrementar la oferta de infraestructuras asistenciales y, con ello, reducir el exceso de demanda que se acabaría traduciendo en un aumento de los precios.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación, ECO2010-21787-C03-01 y ECO2008-01223.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ahn, N., Alonso, J. y Herce, J.A. (2003) *Gasto Sanitario y Envejecimiento de la población en España*, Documentos de Trabajo, 7/03. Fundación BBVA.
- Albarrán, I., Ayuso, M., Guillén, M. y Monteverde, M. (2005) A multiple state model for disability using the decomposition of death probabilities and cross-sectional data. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, vol. 24, 2063–2076.
- Artís, M., Ayuso, M., Guillén, M. y Monteverde, M. (2007) Una estimación actuarial del coste individual de la dependencia en la población de mayor edad en España. *Estadística Española*, vol. 49, 373–402.
- Ayuso, M., Bermúdez, L. y Santolino, M. (2010) Valoración actuarial del perjuicio económico futuro derivado de los accidentes de tráfico. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, vol. 16, 141–160.
- Ayuso, M., Corrales, H., Guillén, M., Pérez-Marín, A.M. y Rojo, J.L. (2001) *Estadística Actuarial Vida*. Ediciones Universidad de Barcelona. Barcelona.
- Bermúdez, L., Guillén, M. y Solé-Auró, A. (2009) Scenarios for the impact of immigration in the longevity and dependence of the elderly in the Spanish population. *Revista Española de Geriatria y Gerontología*, vol. 44, 19–24.
- Blay, D. (2009) *Sistemas de cuidados de larga duración para la cobertura y la financiación de las situaciones de dependencia: seguro privado e hipoteca inversa*. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona.
- Bolancé, C., Alemany, R. y Guillén, M. (2010) Prediction of the economic cost of individual long-term care in the Spanish population, *Documentos de trabajo de la Xarxa de Referència en Economia Aplicada*, XREAP2010-8 y *Documentos del Institut de Recerca en Economia Aplicada*, IREA2010-11.
- Braña, F.J. (2004) Una estimación de los costes de un seguro público de dependencia de los mayores en España, *Estudios de Economía Aplicada*, 22-3, 1–33.
- Cairns, A., Blake, D. y Dowd, K. (2008) Modeling and management of mortality risk: A review. *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2, 79–113.
- Chiang, C.L. (1984) *The Life Table and its Applications*. Florida: Robert E. Krieger Publishing Company. Malabar.
- Crimmins, E., Hayward, M. y Saito, Y. (1994) Changing mortality and morbidity rates and the health status and life expectancy of the older population. *Demography*, vol. 31, 159–175.
- Esparza, C. (2010) Métodos de cálculo de la gravedad de la discapacidad [Web, consultada 25/06/2010]: <http://www.imsersomayores.csic.es/documentos/documentos/pmmetodos-01.pdf>
- Fernández J.L., Forder, J., Trukeschitz, B., Rokosova, M. y McDaid, D. (2009) How can European states design efficient, equitable and sustainable funding systems for long-term care projects for older people? Copenhagen: World Health Organisation.
- Guillén, M., Rodríguez, N. y Strassberg, B.A. (2007) The new responsibilities of social sciences in aging societies. The case of Spain. *International Journal of Interdisciplinary Social Sciences*, vol. 2, 213–228.
- Haberman, S. y Pitacco, H. (1999) *Actuarial models for disability insurance*. CRC Press. London.

- Hennessy, P. (1995), Social protection for dependent elderly people: Perspectives from a review of OECD countries, *OECD: Labour Market and Social Policy Occasional paper 1995 n° 16*
- Holdenrieder, J. (2006) Equity and efficiency in funding long-term care from an EU perspective. *Journal of Public Health*, vol. 14, 139–147.
- Jacobzone, S., Cambois, E., Chaplain, E. y Robine, J.M. (1998), The health of older persons in OECD countries: Is it improving fast enough to compensate for population ageing?, *OECD: Labour Market and Social Policy, Occasional paper 1998 n° 37*
- Monteverde, M. (2004) *Discapacidades de las personas mayores en España: prevalencia, duraciones e impacto sobre los costes de cuidados de larga duración*. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona.
- Moragas, R. y Cristòfol, R. (2003) *El Coste de la Dependencia al Envejecer*, Ed. Herder.
- Nadaraya, E.A. (1964) On Estimating Regression. *Theory of Probability and its Applications*, vol. 9, 141–142.
- Otero, A., Zunzunegui, M.V., Rodríguez-Laso, A., Aguilar, M.D. y Lázaro, P. (2004). Volumen y tendencia de la dependencia asociada al envejecimiento de la población española. *Revista Española de Salud Pública*, 78, 210–213.
- Ramlau-Hansen, H. (1991). Distribution of surplus in life insurance. *Astin Bulletin*, vol. 21, 57–71.
- Reimat, A. (2009) Welfare regimes and long-term care for elderly people in Europe. The European Social Model in a Global Perspective. IMPALLAESPAnet Joint conference. March 6-7.
- Rodríguez, G. y Montserrat, J. (2002) *Modelos de Atención Sociosanitaria: Una aproximación a los costes de la dependencia*. IMSERSO. Madrid
- Silverman, B.W. (1986) *Density estimation for statistics and data analysis*. Chapman and Hall, London.
- Solé-Auró, A. y Crimmins, E.M. (2008) Health of immigrants in European countries. *International Migration Review*, vol. 42, 861–876.
- Sosvilla, S. y Moral, I. (2011) Estimación de la población dependiente en España y del gasto asociado a su atención, 2007–2045. *Mimeo*.
- Sullivan, D. (1971) A Single Index of Mortality and Morbidity. *HSMHA Health Reports*, vol. 86, 347-354.
- Watson, G.S. (1964) Smooth Regression Analysis. *Sankhya*, Ser. A, vol. 26, 359–372.
- Wittenberg, R, Sandhu, B. y Knapp, M. (2002) Funding long-term care: the public and private options. En *Funding Health Care: Options for Europe* edited by Elias Mosialos *et al.*, cap. 10, 226–249.

Anexo 1

EDES (1999)		EDAD (2008)	
041	Reconocer personas, objetos y orientarse en el espacio y el tiempo	APR_14_1	Tiene dificultad importante para prestar atención con la mirada o mantener la atención con el oído
042	Recordar informaciones y episodios recientes y/o pasados	APR_15_1	Tiene dificultad importante para aprender a leer, aprender a escribir, aprender a contar (o calcular), aprender a copiar o aprender a manejar utensilios
043	Entender y ejecutar órdenes sencillas y/o realizar tareas sencillas	APR_16_1	Tiene dificultad importante para llevar a cabo tareas sencillas sin ayudas y sin supervisión
044	Entender y ejecutar órdenes complejas y/o realizar tareas complejas	APR_17_1	Tiene dificultad importante para llevar a cabo tareas complejas sin ayudas y sin supervisión
051	Cambios y mantenimiento de las diversas posiciones del cuerpo	MOV_19_1	Tiene dificultad importante para mantener el cuerpo en la misma posición sin ayudas y sin supervisión
052	Levantarse, acostarse, permanecer de pie o sentado	MOV_18_1	Tiene dificultad importante para cambiar de postura sin ayudas y sin supervisión
053	Desplazarse dentro del hogar	MOV_20_1	Tiene dificultad importante para andar o moverse dentro de su vivienda sin ayudas y sin supervisión
071	Deambular sin medio de transporte	MOV_21_1	Tiene dificultad importante para andar o moverse fuera de su vivienda sin ayudas y sin supervisión
072	Desplazarse en transportes públicos	MOV_22_1	Tiene dificultad importante para desplazarse utilizando medios de transporte como pasajero sin ayudas y sin supervisión
073	Conducir vehículo propio	MOV_23_1	Tiene dificultad importante para conducir vehículos sin ayudas
081	Asearse solo: lavarse y cuidarse de su aspecto	AUT_27_1	Tiene dificultad importante para lavarse o secarse las diferentes partes del cuerpo sin ayudas y sin supervisión
		AUT_28_1	Tiene dificultad importante para realizar los cuidados básicos del cuerpo sin ayudas y sin supervisión
082	Control de las necesidades y utilizar solo el servicio	AUT_29_1	Tiene dificultad importante para controlar las necesidades o realizar las actividades relacionadas con la micción sin ayudas y sin supervisión
		AUT_30_1	Tiene dificultad importante para controlar las necesidades o realizar las actividades relacionadas con la defecación sin ayudas y sin supervisión
083	Vestirse, desvestirse, arreglarse	AUT_32_1	Tiene dificultad importante para vestirse o desvestirse sin ayudas y sin supervisión
084	Comer y beber	AUT_33_1	Tiene dificultad importante para llevar a cabo las tareas de comer o beber sin ayudas y sin supervisión
091	Cuidarse de las compras y del control de los suministros y los servicios	VDOM_36_1	Tiene dificultad importante para organizar, hacer y trasladar las compras de la vida cotidiana sin ayudas y sin supervisión
092	Cuidarse de las comidas	VDOM_37_1	Tiene dificultad importante para preparar comidas sin ayudas y sin supervisión
093	Cuidarse de la limpieza y el planchado de la ropa	VDOM_38_1	Tiene dificultad importante para ocuparse de las tareas de la casa sin ayudas y sin supervisión
094	Cuidarse de la limpieza y mantenimiento de la casa		
095	Cuidarse del bienestar de los demás miembros de la familia	AUT_34_1	Tiene dificultad importante para cumplir las prescripciones médicas sin ayudas y sin supervisión
		AUT_35_1	Tiene dificultad importante para evitar situaciones de peligro en la vida diaria sin ayudas y sin supervisión
101	Mantener relaciones de cariño con familiares próximos	INTER_39_1	Tiene dificultad importante para mostrar a otras personas afecto, respeto o para transmitir sentimientos
		INTER_43_1	Tiene dificultad importante para crear y mantener relaciones familiares
		INTER_44_1	Tiene dificultad importante para crear y mantener relaciones sentimentales, de pareja o sexuales
102	Hacer amigos y mantener la amistad	INTER_42_1	Tiene dificultad importante para crear y mantener relaciones con amigos/as, vecinos/as, conocidos/as o compañeros/as
103	Relacionarse con compañeros, jefes y subordinados	INTER_41_1	Tiene dificultad importante para crear y mantener relaciones con personas subordinadas, iguales o con cargos superiores

Volumen 12 (diciembre de 2011)

Editorial

Páginas 3–4

Branch-and-Price and Heuristic Column Generation for the Generalized Truck-and-Trailer Routing Problem

Branch-and-Price y generación heurística de columnas para el problema generalizado de rutas de trenes de carretera

Drexl, Michael

Páginas 5–38

Análisis comparativo de sectores clave desde una perspectiva regional a través de matrices de contabilidad social: enfoques alternativos

Comparative Keysector Analysis from Regional Perspective Using Social Accounting Matrices: Alternative Approaches

Cardenete, Manuel Alejandro

Páginas 39–64

Regla de reparto proporcional con referencias múltiples: aplicación al caso de agregación y actualización de probabilidades

A Proportional Rule for the Division Problems with Multiple References: An Application to the Problems of Probability Aggregation and Probability Updating

Hinojosa Ramos, Miguel Ángel; López Sánchez, Ana Dolores

Páginas 65–80

¿Qué factores explican la pobreza multidimensional en España? Una aproximación a través de los modelos de ecuaciones estructurales

What Factors Explain the Multidimensional Poverty in Spain? An Approach by Means of Structural Equation Models

Poza Lara, Carlos; Fernández Cornejo, José Andrés

Páginas 81–110

El coste de los cuidados de larga duración en la población española: análisis comparativo entre los años 1999 y 2008

The Cost of Long-Term Care in the Spanish Population: Comparative Analysis between 1999 and 2008

Alcañiz Zanón, Manuela; Alemany Leira, Ramón; Bolancé Losilla, Catalina; Guillén Estany, Montserrat

Páginas 111–131