REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (15). Páginas 168–187.
Junio de 2013. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=75

# Análisis de la estabilidad de una economía con desequilibrios sectoriales

Pereira López, Xesús
Departamento de Economía Cuantitativa
Universidade de Santiago de Compostela (España)
Correo electrónico: xesus.pereira@usc.es

Quiñoá López, José Luis
Departamento de Economía Cuantitativa
Universidade de Santiago de Compostela (España)
Correo electrónico: joseluis.quinoa@usc.es

Fernández Fernández, Melchor
Departamento de Fundamentos del Análisis Económico
Universidade de Santiago de Compostela (España)
Correo electrónico: melchor.fernandez@usc.es

**RESUMEN**

La presencia de elementos negativos en el vector de *inputs* primarios en el contexto del marco input-output ha sido considerada un impedimento para la formulación de modelos lineales multisectoriales. Lo cierto es que si se da esta circunstancia, las correspondientes ramas productivas presentan un desequilibrio, aunque la economía en su conjunto puede ser estable a corto plazo. En este artículo se demuestra que este hecho no implica obligatoriamente un error en la elaboración de las tablas input-output ni conlleva forzosas modificaciones de las mismas para facilitar su utilización en la modelización. En efecto, se verá cómo pueden existir soluciones no negativas, sin necesidad de acudir a la clásica condición de Hawkins-Simon. Dicho de otra forma, se estudia hasta qué punto los desequilibrios sectoriales no ponen en riesgo la viabilidad del sistema económico objeto de estudio. En esa línea, se introducen varias herramientas, a modo de teoremas, para averiguar si en determinados casos existen inversas de Leontief no negativas que permitan el desarrollo y solución de los conocidos modelos de oferta y demanda input-output. También se abordan las interpretaciones económicas de las distintas matrices instrumentales utilizadas en el análisis descrito.

**Palabras clave:** input-output; valores negativos; estabilidad económica.
**Clasificación JEL:** C67; D57.
**MSC2010:** 93D25.

Artículo recibido el 21 de diciembre de 2012 y aceptado el 31 de mayo de 2013.

# Analysis of the Stability in an Economy with Sectoral Imbalances


## ABSTRACT

The presence of negative values in the primary inputs vector in the input output framework has been considered as a limitation to the development of multi-sectoral linear models. It is true that, when this circumstance happens, the industries that are related appear unbalanced, however, the whole economic system could be stable within a short time. In this paper we demonstrate that this fact does not imply an error in the construction of the input-output tables nor involves unavoidable modifications to facilitate its use in modeling. It will be shown how non-negatives solutions can appear without taking into account the classic Hawkins-Simon condition. In other words, in this paper we examine until which extent sectoral imbalances do not put in danger the viability of the whole economic system under study. In line with this, we introduce several tools, as theorems, in order to see in which cases non-negatives Leontief's inverses can exist that enable the development and solution of supply and demand input-output models. It is also considered the possible economic interpretations of the different instrumental matrices used in the described analysis.



**Keywords:** input-output; negative values; economic stability.
**JEL classification:** C67; D57.
**MSC2010:** 93D25.

# 1. INTRODUCCIÓN

La metodología input-output se utiliza en distintos campos de conocimiento y tiene bastante presencia en el ámbito del análisis económico. Las tablas input-output (TIOs) recogen los flujos de transacciones productivas de un determinado territorio, así como una desagregación sectorial de la demanda final e *inputs* primarios del mismo. La obtención de matrices como la de coeficientes técnicos o la inversa de Leontief permiten cuantificar determinados multiplicadores que facilitan la interpretación de la estructura productiva del territorio objeto de estudio. En concreto, permiten calcular el impacto de interdependencia, directo e indirecto, realizado sobre todos los sectores en función de un cambio en la demanda final. Las ventajas y dificultades de dicha metodología, así como sus múltiples aplicaciones, son suficientemente conocidas.[1]

El marco input-output, como así lo denomina el Sistema Europeo de Cuentas vigente (SEC-95), engloba distintos tipos de tablas: bien con formato simétrico o bien rectangulares; consúltese Eurostat (1996) o Naciones Unidas (1999), que tienen como objetivo describir el flujo de bienes y servicios entre los distintos sectores de la economía de referencia durante un periodo de tiempo fijado. Aunque el objetivo de este artículo no es efectuar un repaso demorado de estos esquemas contables, por lo menos se cree oportuno señalar que, en las TIOs simétricas, la demanda intermedia de cada uno de los bienes y servicios que realizan los diferentes sectores homogéneos y la correspondiente demanda final figuran por filas; y los bienes, los servicios y los factores primarios adquiridos por cada uno de los sectores figuran por columnas; de tal forma que aportan una información estadística acerca de los flujos intersectoriales, de la demanda final y del valor añadido por sectores.[2]

En las TIOs, los elementos de la matriz de consumos intermedios son no negativos y lo más frecuente es que los elementos del vector de *inputs* primarios (la agregación de Sueldos y Salarios, Excedente Bruto de Explotación/Rentas Mixtas e Impuestos netos sobre la producción[3]) por industria también lo sean. Sin embargo, es posible que algunas actividades en años concretos puedan obtener beneficios negativos, lo cual se traduciría en las estadísticas oficiales en una entrada negativa en la fila donde se representa el vector de coste del capital (véase por ejemplo, en los marcos input-output recientemente publicados con referencia 2008, la rama de Fabricación de otro material de transporte en Galicia o la rama de Actividades postales y de correos en Andalucía). Por supuesto, este beneficio negativo podría llegar a superar el valor del resto de componentes del valor añadido por sectores y, por lo tanto, suponer que el total de *input* primarios fuese una cifra negativa. La agregación de industrias evita en algunas ocasiones

---

[1] Para mayor detalle véase Pulido y Fontela (1993).

[2] En el formato rectangular, las filas se corresponden con productos y las columnas con ramas de actividad no homogéneas. Pero en este caso no se trata dicho formato.

[3] Los impuestos netos sobre la producción pueden tener un valor agregado negativo cuando las subvenciones a la producción superan a los impuestos sobre la misma.

esta circunstancia al compensar las pérdidas entre sectores.[4] Por lo tanto, si las sumas de los distintos componentes del valor añadido son no negativas todas las ramas productivas del sistema económico están en equilibrio y, en consecuencia, la economía en su conjunto también está en equilibrio. En este sentido, se considera que una economía tiene todos sus sectores en equilibrio si se cumple la condición de Brauer-Solow. En efecto, si se acude al modelo de demanda input-output se asegura una producción no negativa para todo vector de demanda final (neta de importaciones) no negativo.

Esta condición suficiente es bastante restrictiva porque se exige que todos los sectores ofrezcan un beneficio positivo o nulo en todo momento cuando es perfectamente plausible que sean relativamente numerosas las industrias que generen pérdidas en un año concreto. Sin embargo, las TIOs publicadas por los institutos oficiales de estadística cumplen casi siempre este requisito, cuestión que puede ser debida a la propia realidad económica o al nivel de desagregación sectorial elegido.[5] Si esos valores fuesen negativos, las ramas de actividad vinculadas a los mismos consumirían una mayor cantidad de *inputs* intermedios que sus propios niveles de producción. En ese caso, las sumas de las correspondientes columnas de los coeficientes técnicos serían mayores que uno. A pesar de ello, si aparecen cifras negativas hay que averiguar si existen soluciones no negativas, o sea, hay que analizar si esos desequilibrios sectoriales pueden ser soportados por el conjunto del el sistema económico y obtener soluciones donde algunas actividades observen pérdidas. En principio, no resultaría extraño encontrarse con un escenario como el ahora señalado, sobre todo si se trabaja con una desagregación considerable.[6] Es probable que en un momento puntual existan pérdidas sectoriales (o sub-sectoriales) y, a pesar de ello, una economía sea capaz de ofrecer una elevada estabilidad económica. En este sentido, es factible que haya sub-sectores con un valor añadido negativo, en algunos casos como resultado de un *shock* negativo en precios o productividad y otros por una decisión consciente (subvenciones de explotación) justificada por la cohesión territorial, por el freno del despoblamiento rural, por la conservación del patrimonio rural o por la sostenibilidad del entorno ambiental. No obstante, como todos estos factores benefician al conjunto de la sociedad es lógico que sectores excedentarios –que, en general, son más propensos al deterioro medioambiental– contribuyan de algún modo a la conservación del medio y faciliten la

[4] En las cuentas satélites es necesario recurrir a un mayor grado de desagregación en aquellos sectores encuadrados en el ámbito de estudio, por lo tanto es más probable que aparezcan valores añadidos negativos para los sub-sectores.

[5] Aquí no se considera el trato dado en su momento a los Servicios de Intermediación Financiera Medidos Indirectamente (SIFMI). En efecto, antes de la entrada en vigor del Reglamento de la Comisión Europea Nº 1889/2002, de 23 de octubre de 2002 (sobre la medición de la producción de los intermediarios financieros y la asignación de esa producción entre las unidades que las utilizan) en las TIOs aparecían valores añadidos negativos en relación a los SIFMI.

[6] Este resultado es común en los procesos de actualización de matrices input-output o en desagregaciones territoriales. Si el precio de los *inputs* sufrió mayores variaciones que los precios del *output* durante el periodo de análisis, es factible que el valor añadido estimado sea negativo.

existencia y mantenimiento de estas actividades que difícilmente pueden ser rentables en una economía plenamente competitiva.[7]

Con relación a los modelos input-output dinámicos y otros afines, se han analizado múltiples conceptos y entre ellos el de equilibrio estable; véase Mckenzie (1960). Takayama (1974), entre otras nociones, analiza la relación entre estabilidad local y global. Rosenblatt (1957) y Lady (1996) muestran herramientas para detectar matrices estables. En definitiva, el uso del término *stable* (o *stability*) es muy frecuente en el análisis económico, sobre todo cuando influye la variable tiempo.

Por lo tanto, el principal objetivo de este artículo consiste en comprobar que la observación de pérdidas puntuales en diferentes ramas de actividad, que podrían dar lugar a uno o varios valores negativos en el vector de valor añadido, no implica necesariamente un problema para la elaboración y resolución de los tradicionales modelos lineales multisectoriales. En consecuencia, no sería necesario modificar el marco input-output para evitar, por distintas vías como agregaciones u otros ajustes más complejos, su reflejo en la estadística oficial. En esta línea, se presentan varios teoremas para analizar si existen soluciones viables desde el punto de vista económico. Además, como es lógico se efectuarán las demostraciones de dichos teoremas. También se exponen las interpretaciones económicas relativas a los elementos de las matrices que se emplearán posteriormente como herramientas de apoyo.

En todo caso, se hace explícito que la aplicación práctica de estos teoremas es limitada en la actualidad, dados los pocos casos reales existentes de sectores con valores añadidos negativos en las TIOs oficialmente publicadas. Sin duda, vencidos los problemas de computación, la necesidad de mejorar la desagregación sectorial del marco input-output para tratar ramas y sectores incipientes con un mayor nivel de detalle, mostrará el verdadero alcance de la propuesta realizada en este trabajo. En este caso, es mucho más sencillo que el problema de la existencia de valores añadidos negativos se dé en mayor medida lo que hace imprescindible la existencia de alternativas teóricas que permitan la elaboración de los diferentes modelos propuestos en el análisis input-output.

## 2. El MODELO DE DEMANDA Y LA INVERSA DE LEONTIEF

El modelo de demanda, o de Leontief, se emplea para analizar las repercusiones sectoriales mediante variaciones en la demanda final; por lo tanto, es un modelo orientado desde el lado de la demanda. Las relaciones por filas de una TIO simétrica se pueden escribir del siguiente modo:

[7] En este punto es interesante indicar que en muchas economías con elevados niveles de protección exterior de su producción podrían observar valores añadidos negativos en muchas actividades si los precios de referencia para la compra de los *inputs* necesarios para el proceso productivo o la venta del *output* dejasen de estar administrados por el sector público. Es decir, un proceso de producción puede ser eficiente para un conjunto de precios pero puede ser ineficiente para otro conjunto de precios diferentes (Naciones Unidas, 1993).

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} + y_1 \\ x_2 = x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} + y_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} + y_n \end{array}\right\}$$

donde $x_{ij}$ representa el flujo que va del sector suministrador $i$ al sector receptor $j\ (i, j \in N^*)$, $x_i$ es la producción total del sector $i$, $y_i$ es la demanda final neta de importaciones del sector $i$ y $n$ es el número de sectores considerado. Los flujos se pueden expresar en términos de unidades físicas o monetarias. Matricialmente se tiene que:

$$x = Ze + y, \tag{1}$$

donde $x$ es el vector columna de producción por sectores, $Z$ es la matriz de transacciones o flujos intersectoriales, $e$ es una matriz columna (vector) de unos e $y$ es el vector de demanda final (neta de importaciones) por sectores.[8]

A partir de la relación contable (1), se elabora el modelo de demanda. Eso sí, asumiendo que la proporción de factores empleada por cada sector productivo es invariable. Previamente, se define la matriz de coeficientes técnicos totales: $A = Z\ \hat{x}^{-1}$, donde $\hat{x}$ es la matriz diagonal de producción. Mediante operaciones elementales se obtiene el sistema de Leontief:

$$(I - A)x = y, \tag{2}$$

donde $(I - A)$ es la matriz de Leontief, que es de la siguiente forma:

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1 - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

El sistema presentado en (2) se conoce como el modelo del sistema input-output. Si la inversa de $(I - A)$ es no negativa, el sistema tendría por solución la siguiente expresión[9]:

$$x = (I - A)^{-1} y, \tag{3}$$

La matriz $(I - A)^{-1}$ se denomina inversa de Leontief y hace referencia a los requerimientos totales (directos e indirectos), de tal modo que relaciona la producción de cada

[8] Las notaciones en minúsculas hacen referencia a vectores y las que aparecen en mayúsculas a matrices, excepto aquellas matrices que se corresponden con vectores diagonalizados. El símbolo ^ asociado a un vector indica la correspondiente diagonalización del mismo

[9] En relación con las TIOs simétricas, se admite que se verifican las siguientes condiciones: i) El input total es igual a la producción total de cada sector o rama de actividad. ii) Las estructuras productivas y de distribución son diferentes por ramas, o sea, en la matriz de coeficientes técnicos no se manifiesta dependencia lineal tanto por columnas como por filas. iii) Cada elemento de *A* es no negativo y al mismo tiempo estrictamente menor que uno. iv) La suma de los coeficientes técnicos de inputs intermedios y primarios (por unidad de producción) de cada columna es igual a uno.

sector con la demanda final neta de importaciones. Los elementos de la diagonal principal deben ser mayores o iguales a uno, lo que significa que para producir una unidad adicional para satisfacer la demanda final neta de importaciones, es necesario aumentar la producción al menos en una unidad. La inversa de Leontief se emplea asiduamente para explicar los distintos efectos de la demanda final sobre la producción, diferenciándolos entre directos e indirectos. Seguidamente se analizan ciertos aspectos acerca de la inversa de Leontief que se tomarán a posteriori como referentes.

De tal modo que se parte de la relación (1)[10]. Ahora bien, admitiendo la estabilidad de los coeficientes técnicos, también se puede presentar de modo alternativo de la siguiente forma:

$$x = y + Ax.$$

En este contexto se supone que ninguna fila de la matriz de consumos intermedios es combinación lineal de las restantes[11], bajo este supuesto se tiene que $|A| \neq 0$ y, por lo tanto, existe la inversa de $A$. A continuación, se multiplican por la izquierda ambos miembros de esta identidad por la matriz de coeficientes técnicos:

$$Ax = A(y + Ax),$$

pero como $Ax = x - y$ se tiene que:

$$x - y = Ay + A^2 x.$$

Entonces, el vector de producción se escribe como sigue:

$$x = y + Ay + A^2 x = (I + A)y + A^2 x.$$

De tal forma que aparece una primera aproximación de la descomposición de la producción dada por la demanda final (efecto directo), por el primer efecto indirecto dado por esa demanda final $(Ay)$[12] y por los restantes efectos. A partir de aquí, si se desea continuar desagregando los restantes efectos, hay que multiplicar de nuevo por la izquierda por $A$ y realizar las pertinentes operaciones de manera sucesiva, obteniendo la expresión general[13]:

$$x = y + Ay + A^2 y + \cdots + A^n y + A^{n+1} x = (I + A + A^2 + \cdots + A^n)y + A^{n+1} x.$$

Entonces se tiene que:

$$x = (I + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots)y = (\sum_{n=0}^{\infty} A^n)y = (I - A)^{-1} y.$$

---

[10] A los efectos de esta exposición, se considera que las TIOs se expresan en términos de valor.

[11] En muchos ocasiones se denomina a una economía de estas características como indescomponible; véase Morillas (1982).

[12] Morillas (1982) denomina a este vector como *inputs* directos requeridos para hacer posible la necesidad original de *output* (demanda final estipulada).

[13] Dadas las características de $A$, según se incrementa $n$ la potencia $A^{n+1}$ converge hacia la matriz nula. Por ejemplo, puede consultarse este resultado en Miller y Blair (2009).

Se observa que la inversa de Leontief se corresponde con una serie de potencias de matrices. En realidad, es una forma de descomponer la producción a través de los distintos efectos: el directo y los indirectos, que en cada eslabón se van reduciendo.[14] Aunque no se verifique que todas las sumas por columnas de la matriz $A$ sean estrictamente menores que uno, fácilmente las de $A^2$ lo verifican. Por lo tanto, la serie matricial convergería y no existiría ningún problema en la búsqueda de una solución con significado económico. También se considera oportuno detenerse en los elementos de la matriz $A^2$. Su elemento genérico es de la siguiente forma:

$$a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \cdots + a_{in}a_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}, \quad i, j = 1,2,\cdots,n.$$

El hecho de exigir que las sumas por columnas de $A^2$ sea estrictamente menor que uno ya implica tener presente la interrelación entre las distintas ramas que constituyen el sistema económico. En este contexto ya existe una diferencia con la primera exigencia, donde se analizaban los sectores a través de las sumas de las distintas columnas, aunque de forma aislada. La expresión genérica concerniente a la suma por columnas de los elementos de esta matriz es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}, \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

Considerando TIOs en términos de valor[15], la anterior expresión representa la *proporción que las distintas ramas de actividad aportan a la rama* 1 *por la proporción que esta aporta a la rama* $j$ *y así sucesivamente, a través de las restantes ramas de la economía*. De esta forma, se va más allá de los requerimientos directos de la rama $j$ porque también se consideran los inputs que precisan las distintas ramas suministradoras del sector $j$, es decir, se acude al primer eslabón de requerimientos indirectos. Si se procede por filas, se ve como la suma de la fila $i$ es del siguiente modo:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj},$$

representando *la proporción de inputs de la rama* $i$ *destinada a la rama* 1 *por las proporciones que esta última rama aporta a las restantes ramas y así para las demás ramas productivas.* Por lo tanto, se explicita la mencionada interrelación sectorial, que evidentemente no es tan palpable si se analiza solamente la matriz de coeficientes técnicos.

---

[14] El algoritmo que aquí aparece se toma como referente en muchas ocasiones, por ejemplo, en Sánchez-Chóliz y Duarte (2003). En lo que respecta a la descomposición de la producción aquí presentada, en Robles y Sanjuán (2005) se puede ver la exposición del cálculo de efectos directos e indirectos de acuerdo con la misma.

[15] Si el sistema se formula en términos de cantidades no tiene sentido la interpretación; consúltese Morillas (1982).

# 3. UNA EXPRESIÓN ALTERNATIVA DEL MODELO DE DEMANDA

En este apartado se expresa el modelo de demanda (flujos totales) de una forma alternativa. Previamente se construye una matriz instrumental, $(I - K^{-1}(I - A))$, que será objeto de estudio posteriormente. A partir de la matriz $(I - A)$, se elabora una matriz diagonal con los elementos de su diagonal principal.

$$K = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dadas las características de los coeficientes técnicos (recuérdese que los mismos son no negativos y estrictamente menores que uno), existe $K^{-1}$. A partir de estas matrices, se construye la siguiente matriz instrumental:

$$(I - K^{-1}(I - A)) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{a_{12}}{1-a_{11}} & \cdots & \dfrac{a_{1n}}{1-a_{11}} \\ \dfrac{a_{21}}{1-a_{22}} & 0 & \cdots & \dfrac{a_{2n}}{1-a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{a_{n1}}{1-a_{nn}} & \dfrac{a_{n2}}{1-a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

A efectos de buscar otra expresión del modelo de demanda, se multiplica por la izquierda ambos miembros de (2) por la matriz $K^{-1}$:

$$K^{-1}(I - A)x = K^{-1}y.$$

Y ahora se suman a los mismos el vector de producción:

$$x + K^{-1}(I - A)x = K^{-1}y + x.$$

Obteniendo que:

$$x = K^{-1}y + x - K^{-1}(I - A)x;$$

$$x = K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))x. \tag{4}$$

Donde las ecuaciones son de la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{1-a_{11}}y_1 + \frac{a_{12}}{1-a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{1-a_{11}}x_n \\ x_2 &= \frac{1}{1-a_{22}}y_2 + \frac{a_{21}}{1-a_{22}}x_1 + \cdots + \frac{a_{2n}}{1-a_{22}}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \frac{1}{1-a_{nn}}y_n + \frac{a_{n1}}{1-a_{nn}}x_1 + \cdots + \frac{a_{n(n-1)}}{1-a_{nn}}x_{n-1} \end{aligned}\right\},$$

o sea, cada ecuación se escribe de la siguiente manera:

$$\forall i = 1,2,\cdots,n, \quad x_i = \frac{1}{1-a_{ii}} y_i + \sum_{j=1(j\neq i)}^{n} \frac{a_{ij}}{1-a_{ii}} x_j .$$

En realidad, cada ecuación representa una descomposición de la producción de la rama *i* por destinos, bien sea encaminada hacia la demanda final o bien hacia la demanda intermedia de las restantes ramas productivas del sistema, atendiendo siempre a los autoconsumos de la rama productora. Ahora, si se multiplican por la izquierda ambos miembros de (4) por $(I - K^{-1}(I - A))$ se obtiene que:[16]

$$(I - K^{-1}(I - A))x = (I - K^{-1}(I - A))[K^{-1} y + (I - K^{-1}(I - A))x].$$

A partir de aquí,

$$x - K^{-1}(I - A))x = (I - K^{-1}(I - A))K^{-1} y + (I - K^{-1}(I - A))^2 x,$$

pero como $(I - A)x$ se corresponde con $y$, se tiene que:

$$x = K^{-1} y + (I - K^{-1}(I - A))K^{-1} y + (I - K^{-1}(I - A))^2 x.$$

Repitiendo el proceso de forma sucesiva, se logra la expresión general:

$$x = K^{-1} y + (I - K^{-1}(I - A))K^{-1} y + \cdots + (I - K^{-1}(I - A))^n K^{-1} y + (I - K^{-1}(I - A))^{n+1} x.$$

A partir de un determinado $n$, la matriz $(I - K^{-1}(I - A))^{n+1}$ se aproxima a la matriz nula, o sea que $\lim_{n\to\infty}(I - K^{-1}(I - A))^n = 0$. Entonces, se tiene que:

$$x = [\sum_{n=0}^{\infty} (I - K^{-1}(I - A))^n ]K^{-1} y. \tag{5}$$

En esta representación alternativa del modelo de demanda, a la matriz $(I - K^{-1}(I - A))$ se le otorga la función que cumple la matriz de Leontief en (3) y el vector $K^{-1} y$ es la variable independiente.

## 4. ¿CÓMO SE PUEDE DETERMINAR LA ESTABILIDAD DE UN SISTEMA INPUT-OUTPUT?

De entrada, se indica que es necesario diferenciar una economía productiva de una economía con todos los sectores productivos en equilibrio; por supuesto que lo segundo implica lo primero. Generalmente, se dice que una economía es productiva si existe la inversa de Leontief no negativa; para determinar este hecho, se usa la condición necesaria y suficiente de Hawkins-Simon. Sin embargo, a veces cuando se analizan las características de una matriz de Leontief se recurre a la condición suficiente de Brauer-Solow; consúltese Waugh (1950) o Morillas (1982). Así, una economía tiene todos los sectores en equilibrio si las sumas por columnas de los

[16] Aunque no se demuestra si existe la inversa de esta matriz, se asume que se puede obtener.

elementos de la matriz de coeficientes técnicos son estrictamente menores que uno. Esta condición suficiente implica que el autovalor máximo de $A$ es estrictamente menor que uno. Por tanto, la matriz de Leontief es invertible y no negativa. En efecto, si se acude al modelo de Leontief (3) se asegura una producción no negativa para todo vector de demanda final (neta de importaciones) no negativo.

En este apartado se explica cómo se puede averiguar, a través del análisis de la matriz instrumental $(I - K^{-1}(I - A))$, si una economía puede admitir un desequilibrio en una rama, o incluso en varias ramas productivas. Así, hay que demostrar como en un contexto de este tipo el sistema sigue funcionando, en el sentido de que exista la inversa de Leontief (relativa a dicha economía) y al mismo tiempo sea no negativa.[17] Una forma fácil de afrontar el análisis anteriormente descrito consiste en ver si la matriz de Leontief $(I - A)$ cumple la condición necesaria y suficiente de Hawkins-Simon, que se expresa como sigue[18]: *Existe la inversa de Leontief y la misma es no negativa si y solo si todos los menores principales de la matriz de Leontief* $(I - A)$ *son estrictamente positivos.*

También se puede dar una caracterización de las matrices productivas como aquellas en que todos sus autovalores (en valor absoluto) son menores que 1. Esta última caracterización se basa en la combinación de dos resultados: el primero es el Teorema de Perron-Frobenius (Perron (1907); Frobenius (1912)), por el que el radio espectral de la matriz (máximo de los autovalores en valor absoluto) vendría determinado por el mayor autovalor real, llamado raíz de Perron o autovalor de Perron-Frobenius; mientras que el segundo dice que una matriz no negativa $A$ satisface que la inversa de $(\rho I \;\; A)$ es no negativa si y solo si $\rho$ es mayor que la raíz de Perron (es decir, que el radio espectral). Las demostraciones se encuentran en Takayama (1974); para Perron-Frobenius pp. 372–375 y para el segundo resultado pp. 385–387.

Una primera observación acerca de la condición de Hawkins-Simon es que al intentar buscar una interpretación económica a los menores principales resulta complicado,[19] porque normalmente se trabaja con una matriz de dimensión elevada. Al acudir al concepto de determinante las dificultades de interpretación aumentan. A veces se considera un único menor principal: el determinante de la matriz de Leontief. Ahora bien, centrándose en este último menor principal y en el supuesto caso de sea muy próximo a cero –aunque sea estrictamente positivo– se entiende que es una exageración calificar a una economía como productiva, puesto que los efectos que provocaría un incremento en la demanda final sobre la producción serían excesivos e inasumibles en la práctica por cualquier economía. Además, los elementos de la

[17] En Economía Matemática se han realizado muchos esfuerzos en relación a las características de las inversas no negativas; véase, por ejemplo, Fujimoto y Ranade (2004).

[18] Véanse, entre otros, los propios autores Hawkins y Simon (1949), Bidard (2007) o Barrios *et al.* (2006).

[19] Fujita (2008) aborda este asunto.

inversa, a pesar de que sean estrictamente positivos, se incrementarían mucho y, como es obvio, los multiplicadores también se comportarían del mismo modo. En realidad, existe una discrepancia entre el significado económico y el significado matemático del término productivo en una situación como la apuntada. Esta circunstancia sugiere buscar herramientas intermedias, entre la flexibilidad de la condición de Hawkins-Simon y la relativa rigidez de la condición de Brauer-Solow, que tengan una interpretación económica más clara y al mismo tiempo que sean capaces de justificar desequilibrios sectoriales. A continuación, se presentan y demuestran varios teoremas para lograr inversas de Leontief no negativas cuando aparezcan valores negativos en el vector de *inputs* primarios, de tal forma que sea posible asegurar la deseada viabilidad del sistema. En primer lugar, se introduce una condición suficiente que facilita inversas no negativas de Leontief. Para explicar esta condición y las siguientes, se opta por el modelo de demanda relativo a la tabla simétrica de flujos totales, estudiado anteriormente en (5). La primera condición queda expuesta por el siguiente teorema:

**Teorema 1.** *Sea la matriz de Leontief* $(I-A)$ *y sea* $(I-K^{-1}(I-A))$*. Si existe* $K^{-1}$ *y si las sumas por filas de* $(I-K^{-1}(I-A))$ *son estrictamente menores que* 1, *es decir, si* $\|(I-K^{-1}(I-A))\|<1,$ *entonces* $(I-A)$ *es invertible y su inversa es no negativa.*[20]

*Demostración.* En este sentido, si se considera la aplicación $\Phi : \mathrm{M}_n(\Re) \to \mathrm{M}_n(\Re)$ definida por:

$$\Phi(X) = K^{-1} + (I-K^{-1}(I-A))X, \tag{6}$$

se tiene que:

$$\|\Phi(X)-\Phi(X')\| = \|(I-K^{-1}(I-A))(X-X')\| \le \|(I-K^{-1}(I-A))\|\|X-X'\|,$$

y si se supone que $\|(I-K^{-1}(I-A))\|<1,$ entonces $\Phi$ es una contracción en $\mathrm{M}_n(\Re)$ que admite un punto fijo único $X^*$ en este espacio[21]:

$$\Phi(X^*) = K^{-1} + (I-K^{-1}(I-A))X^* = X^*.$$

[20] Se define la norma matricial

$$\|A\| = \sup_j(\sum_i |a_{ij}|), \quad A \in \mathrm{M}_n(\Re)$$

que es compatible con el producto, en el sentido de que $\|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\|$ y $\|I\|=1.$ Una norma matricial que satisface $\|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\|$ se dice submultiplicativa; véase, por ejemplo, Jungers (2008). $\mathrm{M}_n(\Re)$ con esta norma es un álgebra de Banach con unidad $I$. Aunque, en este caso, solamente se estudian las matrices no negativas. En otro contexto, Wood y O´Neill (2005) trabajan de forma alternativa con el concepto de radio espectral.

[21] Se emplea el Teorema del Punto Fijo de Banach para funciones contractivas en un espacio métrico completo; consúltese Debnath y Mikusinski (2005). En efecto, el teorema es aplicable porque el espacio de las matrices $\mathrm{M}_n(\Re)$ con la norma matricial definida, al ser un álgebra de Banach, también es un espacio métrico completo.

Simplificando, queda:

$$K^{-1}(I-A))X^{*}=K^{-1},$$

a partir de aquí, multiplicando ambos miembros por la izquierda por $K$ y resolviendo se tiene que $(I-A))X^{*}=I.$ Por lo que se deduce que $X^{*}$ es la inversa por la derecha de la matriz de Leontief,[22] o sea que $X^{*}=(I-A)^{-1}$.

Se sabe que $(I-A)^{-1}$ es un punto fijo de $\Phi(X)=K^{-1}+(I-K^{-1}(I-A))X,$ de modo que partiendo de una matriz $X_0 \geq 0$ ($K^{-1}>0$ e $(I-K^{-1}(I-A))\geq 0$) se tiene que la sucesión $X_0,\, X_1=\Phi(X_0), ..., X_n=\Phi(X_{n-1}), ...$ es tal que $X_n \geq 0, \forall\, n$ y, en consecuencia, se obtiene que $(I-A)^{-1}\geq 0.$ ∎

De modo alternativo, la condición suficiente se expresa analíticamente según se indica a continuación:

$$\text{Si } \forall\ i \in \{1,2,...,n\},\ \sum_{j=1 (j\neq i)}^{n} \frac{a_{ij}}{1-a_{ii}}<1 \quad \Rightarrow \quad \exists\ (I-A)^{-1}\geq 0.$$

Con relación al supuesto ahora expresado a través del sumatorio estrictamente menor que uno, se entiende que se toman como referentes los elementos de la matriz instrumental $(I-K^{-1}(I-A)).$ Aun así, cuando se acude al sumatorio indicar que $j$ nunca es igual a $i$, dado que los elementos de la diagonal principal de esta matriz son iguales a cero. A continuación se aborda la interpretación económica de la suma de los elementos de las filas de esta matriz. En general, se acude a la *i*-ésima fila:

$$\frac{a_{i1}}{1-a_{ii}}+\cdots+\frac{a_{i(i-1)}}{1-a_{ii}}+\frac{a_{i(i+1)}}{1-a_{ii}}+\cdots+\frac{a_{in}}{1-a_{ii}}$$

Y, para una mejor compresión, se selecciona una fila intermedia. El primer sumando, $\frac{a_{i1}}{1-a_{ii}}$, representa el *tanto por uno que tiene que producir la rama $i$ para que la rama* 1 *pueda elaborar una unidad monetaria de producción*. Se señala que esta cantidad está infravalorada, pues de este modo solamente se incluyen los autoconsumos de la rama $i$, es decir, no se consideran los efectos indirectos en su totalidad, tan solo una estimación que supera la cantidad dada por los coeficientes técnicos. El efecto global (infravalorado) se corresponde con la *producción necesaria del sector $i$ para que cada una de las restantes ramas del sistema pueda producir una unidad monetaria de producto*. Se supone que los coeficientes de disponibilidad de las distintas ramas productivas son menores o iguales que uno y al mismo tiempo estrictamente positivos, o sea que $0<1-a_{ii}\leq 1$. En estas condiciones, se tiene que

[22] En $\mathrm{M}_n(\Re)$ la inversa por la derecha de una matriz coincide con la inversa por la izquierda.

$\dfrac{a_{ij}}{1-a_{ii}} \geq a_{ij}$. Por lo tanto, la rama $i$ está obligada a producir una cantidad mayor o igual de productos que la cantidad de *inputs* demandada por la rama $j$, precisamente la (posible) diferencia vendrá dada por los autoconsumos del propio sector suministrador. En definitiva, el Teorema 1 sirve para abordar determinados escenarios, pero en una situación más extrema alguna de las sumas por filas de la matriz instrumental puede ser mayor o igual que uno. A pesar de ello, es factible que exista la inversa de Leontief y sea no negativa. Para tratar estos hipotéticos casos, es posible trabajar con otra condición suficiente menos restrictiva que la anteriormente presentada. Véase el siguiente teorema:

**Teorema 2.** *Sea la matriz de Leontief* $(I - A)$ *y sea* $(I - K^{-1}(I - A))$. *Si existe* $K^{-1}$ *y si las sumas por filas de* $(I - K^{-1}(I - A))^2$ *son estrictamente menores que* 1, *entonces la matriz* $(I - A)$ *es invertible y su inversa es no negativa*.

Antes de realizar la demostración se hacen algunas aclaraciones. En este sentido, se indica que el elemento genérico de la matriz $(I - K^{-1}(I - A))^2$ es de la siguiente forma:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{ik}}{1-a_{ii}} \frac{a_{kj}}{1-a_{kk}},\ k \neq i, j \text{ y } \forall\, i, j \in \{1,2,\cdots,n\}.$$

Los elementos de la diagonal principal poseen $n-1$ sumandos y los restantes $n-2$ sumandos. Los elementos de esta matriz adquieren cierta complejidad. Así, a modo de ejemplo, se selecciona el situado en la primera fila y la primera columna:

$$\frac{a_{12}}{1-a_{11}} \frac{a_{21}}{1-a_{22}} + \cdots + \frac{a_{1n}}{1-a_{11}} \frac{a_{n1}}{1-a_{nn}},$$

que representa la *proporción que aporta la rama* 1 *a las otras ramas de tal modo que las mismas puedan satisfacer los consumos intermedios necesarios para producir una unidad monetaria de producción de la rama* 1, *incluidos los autoconsumos de las distintas ramas de la economía que ejercen de suministradoras*. Cuando se analizan los elementos de esta matriz, ya se respetan ciertas interrelaciones sectoriales.

*Demostración.* Se considera la aplicación $\Phi$ definida en (6) para la cual:

$$\Phi^2(X) = \Phi(\Phi(X)) = \Phi(K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))X).$$

Entonces:

$$\Phi^2(X) = K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))^2 X.$$

Se tiene que:

$$\left\|\Phi^2(X) - \Phi^2(X')\right\| = \left\|(I - K^{-1}(I - A))^2 (X - X')\right\| \leq \left\|(I - K^{-1}(I - A))^2\right\| \cdot \left\|(X - X')\right\|$$

y, suponiendo que $\left\|(I - K^{-1}(I - A))^2\right\| < 1$, entonces:

$$\left\|\Phi^2(X)-\Phi^2(X')\right\| \leq \left\|(X-X')\right\|.$$

Por lo tanto, $\Phi^2(X)$ es una contracción en $\mathrm{M}_n(\Re)$ que admite un punto fijo $X^*$. En consecuencia, se sabe que $\Phi^2(X^*)=X^*$. Entonces:

$$\Phi\left[\Phi^2(X^*)\right]=\Phi\left[X^*\right]$$

y, como $\Phi\circ\Phi^2=\Phi^2\circ\Phi$, también $\Phi^2\left[\Phi(X^*)\right]=\Phi(X^*)$ y $\Phi(X^*)$ es punto fijo de $\Phi^2$. Como el punto fijo de $\Phi^2$ es único, entonces se tiene que $\Phi(X^*)=X^*$ y $X^*$ es punto fijo de $\Phi$. De tal forma que $K^{-1}+(I-K^{-1}(I-A))X^*=X^*$ y a continuación, simplificando, se obtiene que $(I-A))X^*=I$, donde $X^*$ es la matriz inversa de Leonteif por la derecha. De modo análogo a lo hecho en la demostración del Teorema 1, se concluye que $(I-A)^{-1}$ es punto fijo de $\Phi(X^*)$ y que $(I-A)^{-1}\geq 0$. ■

A continuación se aborda la interpretación económica de la hipótesis de este Teorema 2. Así, al actuar sobre esta matriz, $(I-K^{-1}(I-A))^2$, es posible comprobar si el supuesto desequilibrio de una rama (o varias ramas) es, o no, asimilado por el conjunto del sistema. En efecto, se pide que las sumas de los elementos por filas de esta matriz sean menores que uno. Para facilitar su interpretación, se opta por escoger la suma relativa a la primera fila:

$$\frac{a_{12}}{1-a_{11}}\left(\frac{a_{21}}{1-a_{22}}+\cdots+\frac{a_{2n}}{1-a_{22}}\right)+\cdots+\frac{a_{1n}}{1-a_{11}}\left(\frac{a_{n1}}{1-a_{nn}}+\cdots+\frac{a_{n(n-1)}}{1-a_{nn}}\right).$$

Si se exige que esta suma sea menor que uno, también se exige que la suma de los *inputs* que aporta la rama de actividad 1 a las restantes ramas de actividad sea inferior a la unidad; todo ello para que estas ramas a su vez puedan realizar las correspondientes aportaciones de *inputs* a las restantes ramas del sistema. Ahora bien, es preciso indicar que se están considerando los niveles de autoconsumos de las distintas ramas productoras. Al trabajar con la matriz $(I-K^{-1}(I-A))^2$ se posee una visión más global de la economía, cuestión que no sucede si se analiza directamente la matriz de Leontief, ya que en ese supuesto se estudian los sectores productivos de una forma más aislada.

Hasta el momento se acudía a $(I-K^{-1}(I-A))$ y $(I-K^{-1}(I-A))^2$, y se procedía por filas, para saber si la matriz de Leontief era invertible y si su inversa era no negativa. Ahora se acude solamente a la matriz instrumental y, acto seguido, se suma por columnas para ver si se alcanza el mismo objetivo[23]. Por lo tanto, se considera otra norma, en concreto la correspondiente al supremo de la suma en valor absoluto por columnas de los elementos de la

[23] Como la exposición es análoga a la surgida en relación a la otra norma, solamente se acude a la matriz $(I-K^{-1}(I-A))$.

matriz.[24] A continuación se introduce una condición necesaria y suficiente acerca de la inversas no negativas de Leontief:

**Teorema 3.** *Sea la matiz de Leontief* $(I - A) \in \mathrm{M}_n(\Re)$. $(I - A)$ *es invertible si y solo si existe* $B \in \mathrm{M}_n(\Re)$ *invertible y además* $\left\| I - B^{-1}(I - A) \right\|^* < 1$.

*Demostración.* La demostración de la condición necesaria es inmediata. En efecto, solamente basta con tomar $B = (I - A)$. Ahora, en lo que concierne a la demostración de la condición suficiente, se supone que existe $B$ invertible y además $\left\| I - B^{-1}(I - A) \right\|^* < 1$.

Se considera la aplicación $\Phi : \mathrm{M}_n(\Re) \to \mathrm{M}_n(\Re)$ definida por:

$$\Phi(X) = B^{-1} + (I - B^{-1}(I - A))X,$$

se tiene que

$$\left\| \Phi^2(X) - \Phi^2(X') \right\|^* = \left\| (I - B^{-1}(I - A))(X - X') \right\|^* \leq \left\| (I - B^{-1}(I - A)) \right\|^* \cdot \left\| (X - X') \right\|^*$$

y, si se acepta que $\left\| I - B^{-1}(I - A) \right\|^* < 1$, entonces $\Phi$ es una contracción en $\mathrm{M}_n(\Re)$ que admite un punto fijo único $X^*$ en este espacio:

$$\Phi(X^*) = B^{-1} + (I - B^{-1}(I - A))X^* = X^*.$$

Por lo tanto, resulta que $B^{-1}(I - A))X^* = B^{-1}$. A partir de aquí, multiplicando por la izquierda ambos miembros por $B$ y simplificando se tiene que $(I - A))X^* = I$. De lo que se deduce que $X^*$ es la inversa por la derecha de $(I - A)$. Entonces se tiene que $X^* = (I - A)^{-1}$. ■

A efectos prácticos, el problema radica en estipular la matriz $B$. De ahí que, a continuación se introduzca una condición suficiente en donde se recurre nuevamente a la matriz instrumental, que (como ya se sabe) ostenta unas características determinadas.

**Teorema 4.** *Sea la matriz de Leontief* $(I - A)$ *y sea* $(I - K^{-1}(I - A))$. *Si existe* $K^{-1}$ *y si las sumas por columnas de* $(I - K^{-1}(I - A))$ *son estrictamente menores que* 1, *o sea*, *si* $\left\| I - K^{-1}(I - A) \right\|^* < 1$, *entonces* $(I - A)$ *es invertible y su inversa es no negativa.*

---

[24] Se define la siguiente norma en $M_n(\Re)$:

$$\|A\|^* = \sup_i (\sum_j |a_{ij}|),$$

Además, con la misma $M_n(\Re)$ también es un álgebra de Banach con unidad $I$.

*Demostración.* Su demostración es semejante a la condición necesaria del Teorema 3. Se trata de particularizar $B = K$, obteniendo así el punto fijo $X^* = (I - A)^{-1}$. Ahora solamente queda por comprobar que esa inversa es no negativa.

Dado que $(I - A)^{-1}$ es un punto fijo único de $\Phi(X^*) = K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))X^*$, se puede proceder del mismo modo que en el Teorema 1 para concluir que $(I - A)^{-1} \geq 0$. ■

La tarea de comprobar si las sumas por filas o por columnas (de la matriz instrumental) son estrictamente menores que uno se traduce en un procedimiento sencillo para determinar si un sistema económico es capaz de mantener el equilibrio global, a pesar de presentar algún desequilibrio sectorial.

Por último, cabe indicar que en el momento de efectuar simulaciones a medida en que la demanda final va disminuyendo a favor de la demanda intermedia –lo que implica, de modo paralelo, que los *inputs* primarios pierdan peso frente a los consumos intermedios– los elementos de las inversas de Leontief resultantes van aumentando su valor. Es más, en relación con este contexto, el dominio de la aplicación que transforma matrices en sus inversas es un conjunto abierto, así que al aproximarse a su frontera los elementos de las matrices imagen tienden a infinito. Se puede comprobar que en ese hipotético caso el determinante de $(I - A)$ es estrictamente positivo pero prácticamente nulo, y aunque la matriz cumpla las condiciones de Hawkins-Simon los posibles efectos de la demanda final serían tremendamente exagerados al acercarse a la frontera del dominio, pero cuando aparezcan elementos negativos en las matrices imagen, los elementos de estas inversas tenderán a menos infinito. En esas circunstancias el determinante de $(I - A)$ ya sería negativo, por lo tanto no se verificaría la condición de Hawkins-Simon. En este sentido, se indica que si se parte de una matriz de Leontief, $(I - A)$, y por alguna razón se desea modificar su estructura hay que exigir que la nueva matriz, $(I - A')$, cumpla la siguiente condición suficiente (Bourbaki, 1967):

$$\left\| (I - A') - (I - A) \right\| < \frac{1}{\left\| (I - A)^{-1} \right\|},$$

para que exista y sea no negativa $(I - A)^{-1}$. En definitiva, no hay que desviarse mucho de la matriz inicial y cuanto mayor sea la norma de la inversa menor será el margen de maniobra.

## 5. UNA APLICACIÓN PRÁCTICA

Seguidamente se introduce una hipotética economía en la que existe un desequilibrio sectorial. Se trata de analizar, a través de la matriz instrumental, si ese supuesto desequilibrio puede ser asumido, o no, por el sistema. Se consideran los siguientes datos relativos a una economía ficticia:

| | R.1 | R.2 | R.3 |
|---|---|---|---|
| R.1 | 15 | 18 | 20 |
| R.2 | 2 | 14 | 8 |
| R.3 | 12 | 9 | 10 |
| Inputs intermedios | 29 | 41 | 38 |
| Inputs primarios | 31 | -1 | 14 |
| Producción | 60 | 40 | 52 |

No todas las sumas de los elementos por filas de la matriz de coeficientes técnicos, $A$, son menores que uno[25]. En este caso, también sucede lo mismo por columnas. En efecto, se tiene que:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,25 | 0,45 | 0,38 | 1,08 |
| 0,03 | 0,35 | 0,15 | 0,54 |
| 0,20 | 0,23 | 0,19 | 0,62 |
| 0,48 | 1,03 | 0,73 | |

La suma de los elementos de la primera fila de la matriz instrumental $(I - K^{-1}(I - A))$ tampoco es menor que uno:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,60 | 0,51 | 1,11 |
| 0,05 | 0 | 0,24 | 0,29 |
| 0,25 | 0,28 | 0 | 0,53 |
| 0,30 | 0,88 | 0,75 | |

Aunque todas las sumas por filas no son estrictamente menores que uno, por columnas si lo son. En este caso, ya se asegura el objetivo marcado de acuerdo con el Teorema 4 sin necesidad de acudir al Teorema 2, donde aparecía una matriz algo más compleja. Pero si se calcula la matriz $(I - K^{-1}(I - A))^2$ y se suma por filas, se observa que los correspondientes resultados son inferiores al valor uno:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0,16 | 0,14 | 0,14 | 0,44 |
| 0,06 | 0,10 | 0,03 | 0,18 |
| 0,01 | 0,15 | 0,19 | 0,36 |
| 0,23 | 0,39 | 0,36 | |

Se cumple la hipótesis del Teorema 2. Por lo tanto, por esta vía es posible obtener una inversa no negativa de Leontief. También se ve como no se verifica el supuesto del Teorema 1, de ahí que en esta ocasión dicha herramienta no sea válida.

Por último, se indica que la $(I - A)^{-1}$ es del siguiente modo:

| | | |
|---|---|---|
| 1,70 | 1,56 | 1,10 |
| 0,20 | 1,83 | 0,44 |
| 0,48 | 0,90 | 1,64 |

[25] El determinante de la matriz de Leontief es igual a 0,29.

# 6. CONCLUSIONES

En las TIOs, los elementos de la matriz de consumos intermedios son no negativos y lo más frecuente es que los valores añadidos por industria también lo sean. Si estos valores son no negativos, todas las ramas productivas del sistema permanecerán en una situación de equilibrio y, de ser así, la economía en su conjunto también estaría en equilibrio. Pero en una economía es factible que haya sectores, o sub-sectores, que no verifiquen este requisito. Esta situación podría venir causada por un excedente bruto de explotación negativo y relativamente importante (y, por tanto, superior al resto de elementos que forman los *inputs* primarios), permitido en gran medida por las subvenciones a los sectores en cuestión. Además, una sociedad puede mantener dichas subvenciones por distintas causas: cohesión territorial, freno del despoblamiento rural, conservación del patrimonio rural o mantenimiento del entorno ambiental.

En este artículo se analizó la existencia de cifras negativas en el vector de *inputs* primarios para ver si suponen un problema insalvable, o por contra pueden ser soportados (momentáneamente) por el resto del sistema. Aun así, se matizó que el supuesto caso de que aparezcan esas cifras hay que observar si es posible lograr soluciones no negativas. En escenarios como el ahora indicado, el empleo de modo alternativo de los Teoremas 1 y 4, donde se acude a la matriz instrumental observando si las sumas de las filas o de las columnas son estrictamente menores que uno, se convierte en un método muy manejable para determinar si el sistema económico está en equilibrio. La utilización del Teorema 2 es primordial para esclarecer la posible viabilidad de un sistema input-output con sectores en desequilibrio, ya que se trata de un instrumento de índole global que sirve para comprobar si las interrelaciones sectoriales son capaces de soportar esos desequilibrios.

Por último, cabe indicar que a medida que la demanda final va perdiendo peso frente a la demanda intermedia los elementos de las correspondientes inversas se incrementan. De hecho, como el dominio de la aplicación que transforma matrices en sus inversas es un conjunto abierto, al aproximarse a su frontera los elementos de las matrices imagen tienden a infinito. En este contexto, el determinante de la matriz de Leontief sería estrictamente positivo pero prácticamente nulo; consecuentemente, la matriz cumpliría la condición de Hawkins-Simon, pero desde el punto de vista económico difícilmente se podría calificar una economía como productiva, dado que los efectos que provocaría un incremento de la demanda final sobre la producción serían exagerados. En el fondo, el significado matemático de los términos no siempre coincide plenamente con el significado económico.

# AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a los evaluadores anónimos sus comentarios y sugerencias durante la preparación de la versión final de este artículo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Barrios, J.; González, C.; Moreno, J.C. (2006) *Álgebra Matricial para Economía y Empresa*, Madrid, Delta Publicaciones.

Bidard, C. (2007) "The Weak Hawkins-Simon Condition", *Electronic Journal of Linear Algebra*, 16, pp. 44–59.

Bourbaki, N. (1967) *Thèories Spectrales: Éléments de Mathématique*, Paris, Hermann.

Debnath, L.; Mikusinski, P. (2005) *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, San Diego, Elsevier Academic Press (3rd Editon).

Eurostat (1996) *European System of National and Regional Accounts: ESA 1995*, Luxemburgo, Statistical Office.

Frobenius, G. (1912) *Über Matrizen aus nicht Negativen Elementen*, Berlin, Sitzungsberg. Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften, pp. 456–477.

Fujimoto, T.; Ranade, R. (2004) "Two characterizations of inverse-positive matrices: The Hawkins-Simon Condition and the Chatelier-Braun Principle", *Electronic Journal of Linear Algebra*, 11, pp. 59–65.

Fujita, Y. (2008) "A Reconsideration of a Correct Economic Interpretation of the Hawkins-Simon Condition", *Fukuoka University Review of Economics*, 53 (1-2), pp. 11–15.

Hawkins, D.; Simon, H.A. (1949) "Note: Some Conditions of Macro-Economic Stability", *Econometrica*, 17, pp. 245–248.

Jungers, R. (2008) *Thesis: Infinite Matrix Products from the Joint Spectral Radius to Combinatorics*, Louvain, Université Catholique de Louvain.

Lady, G. (1996) "Detecting Stable Matrices", *Annuals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 17, pp. 29–36.

McKenzie, L.W. (1960) "Stability of Equilibrium and the Value of Excess Demand", *Econometrica*, 28, pp. 606–617.

Miller, R.E.; Blair, P.D. (2009) *Input-Output Analysis: Foundations and Extensions*. 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge.

Morillas, A. (1982) "El Modelo de Leontief (Input-Output): Formulación y Limitaciones", *Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales*, 9 y 10, pp. 189–216.

Naciones Unidas (1999) *Handbook of Input-Output Table Compilation and Analysis*, *Studies in Methods*, Series F. 74.

Perron, O. (1907) "Zur Theorie der Matrices", *Mathematische Annalen*, 64 (2), pp. 248–263.

Pulido, A.; Fontela, E. (1993): *Análisis Input-Output. Modelos*, *Datos y Aplicaciones*, Madrid, Pirámide.

Robles, L.; Sanjuán, J. (2005) "Análisis Comparativo de las Tablas Input-Output en el Tiempo", *Estadística Española*, 27 (158), pp. 143–177.

Rosenblatt, D. (1957) "On Linear Models and the Graphs of Minkowski-Leontief Matrices", *Econometrica*, 25, pp. 323–338.

Sánchez-Chóliz, J.; Duarte, R. (2003) "Production Chains and Linkage Indicators", *Economics Systems Research*, 15 (4), pp. 481–494.

Takayama, A. (1974) *Mathematical Economics*, Hinsdale, III, Dryden Press.

Waugh, F.V. (1950) "Inversion of the Leontief Matrix by Power Series", *Econometrica*, 18 (2), pp. 142–154.

Wood, R.J.; O´Neill, M.J. (2005) "A Faster Algorithm for Identification of an M-Matrix", *ANZIAM Journal*, 46 (E), C732–C743.