



UNIVERSIDAD
**PABLO DE
OLAVIDE**
SEVILLA

Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa



**Journal of Quantitative Methods for
Economics and Business Administration**

ISSN: 1886-516 X
D.L.: SE-2927-06



**REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA**

**Journal of Quantitative Methods for
Economics and Business Administration**

Número 15. Junio de 2013.

ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.

URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/>

Editores:

Dr. Eugenio M. Fedriani Martel
Universidad Pablo de Olavide
Ctra. de Utrera, km 1 - 41013
Sevilla (Spain).
Correo-e: efedmar@upo.es

Dr. Alfredo García Hernández-Díaz
Universidad Pablo de Olavide
Ctra. de Utrera, km 1 - 41013
Sevilla (Spain).
Correo-e: agarher@upo.es

Comité Editorial:

Dr. S. Ejaz Ahmed, University of Windsor, Ontario (Canadá)
Dr. Adam P. Balcerzak, Nicolaus Copernicus University, Toruń (Polonia)
Dr. Carlos A. Coello Coello, CINEVESTAV-IPN, México D.F. (México)
Dr. Ignacio Contreras Rubio, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dra. Manuela Coromaldi, University of Social Sciences UNISU, Roma (Italia)
Dr. Miguel Ángel Hinojosa Ramos, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. Matías Irigoyen Testa, Universidad Nacional del Sur, Buenos Aires (Argentina)
Dr. M. Kazim Khan, Kent State University, Ohio (EE.UU.)
Dr. Manuel Laguna, University of Colorado at Boulder, Colorado (EE.UU.)
Dra. María Amparo León Sánchez, Universidad de Pinar del Río (Cuba)
Dr. Jesús López-Rodríguez, Universidad de A Coruña, (España)
Dr. Cecilio Mar Molinero, University of Kent, Canterbury (Reino Unido)
Dra. Ana M. Martín Caraballo, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dra. M^a Carmen Melgar Hiraldo, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. Gábor Nagy, University of Kent, Canterbury (Reino Unido)
Dr. José Antonio Ordaz Sanz, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)
Dr. Andrés Rodríguez-Pose, London School of Economics, Londres (Reino Unido)
Dr. José Manuel Rueda Cantuche, IPTS-DG J.R. Centre-European Commission
Dra. Mariagrazia Squicciarini, OECD, París (Francia)
Dra. Mariangela Zoli, Università degli Studi di Roma 'Tor Vergata', Roma (Italia)



Una aplicación de los árboles de expansión mínima y árboles jerárquicos al estudio de la convergencia interregional en dinámica de regímenes

BRIDA, JUAN GABRIEL

Facoltà di Economia, Libera Università di Bolzano (Italia)

Correo electrónico: JuanGabriel.Brida@unibz.it

LONDON, SILVIA

Departamento de Economía, IIESS, UNS-CONICET (Argentina)

Correo electrónico: slondon@uns.edu.ar

ROJAS, MARA

Departamento de Economía, IIESS, UNS-CONICET (Argentina)

Correo electrónico: mrojas@uns.edu.ar

RESUMEN

Este trabajo analiza la convergencia regional de las provincias y estados para el caso del Mercosur durante 1961-2005 mediante un método de técnicas no paramétricas de “clusterización” bajo el concepto de “régimen de desempeño”. En la primera sección se revisan los antecedentes. Seguidamente, se presentan los principales conceptos metodológicos: régimen, dinámica de regímenes y evolución de *clusters*. Los estados mejor posicionados de Brasil muestran un proceso de convergencia interregional de dinámica de regímenes con las regiones más ricas de Argentina y Uruguay; mientras que Paraguay, las regiones del norte brasileño y las provincias argentinas históricamente más retrasadas permanecen en estadios de baja *performance* económica, reduciendo la distancia intragrupo pero evidenciando un proceso de divergencia respecto del grupo de alto desempeño. El resultado arroja evidencias a favor de la convergencia por clubes de desempeño. La discusión final se centra en las consecuencias de la integración económica sobre este proceso.

Palabras clave: dinámica de regímenes; convergencia; árbol de expansión mínima; árbol jerárquico; *clusters*.

Clasificación JEL: C14; O54; O49.

MSC2010: 62-07; 37N40.

An Application of Minimum Spanning Trees and Hierarchical Trees to the Study of Interregional Convergence in Regime Dynamics

ABSTRACT

This paper studies the regional convergence of sub-national states in the case of Mercosur from 1961 to 2005 by using a non-parametric technique of clustering under the concept of “regime of performance”. In the first section, a review in interregional convergence is shown for the Mercosur case. Then, methodological concepts are introduced: regimens, dynamic of regimens, and clusters evolution. The best positioned Brazilian states show an interregional convergence process in dynamics of regimens towards the richest Argentinean regions and Uruguay; moreover, Paraguay, the North part of Brazil and the historically underdevelopment regions of Argentina are in scenarios of low economic performance, reducing the intra-group distance but showing a divergence process in reference to the highest income group. Results exhibit evidences in favor to convergence clubs of performance. The final discussion deals with the consequences of economic integration on that process.

Keywords: quantitative methods; environmental performance; economic result; empirical evidence.

JEL classification: C14; O54; O49.

MSC2010: 62-07; 37N40.



1. INTRODUCCIÓN

Los procesos de liberalización y globalización acaecidos en el último cuarto del siglo XX alentaron, paradójicamente, un proceso contrapuesto: el surgimiento de bloques de integración económica. Ante el debate originado entre las ideas de multilateralización y regionalización, se postularon los beneficios de esta última como herramienta válida para los procesos de convergencia dada la necesidad de reducir las enormes brechas de ingresos observadas entre economías (Carton y Guzman, 2007). El acuerdo de mayor relevancia en América Latina dio origen al Mercado Común del Sur (Mercosur), el cual está conformado por las economías de Argentina, Brasil, Uruguay y Paraguay¹.

La teoría tradicional de la economía internacional, con base en el modelo Hecksher (1919)-Ohlin (1933) y el Teorema de Stolper-Samuelson (1942), establece que una economía de menores ingresos encontrará beneficioso comercializar con otra de mayores ingresos, produciéndose la igualación de precios y factores y, por lo tanto, de ingresos. Esto alienta la concepción de una integración Norte-Sur o vertical a nivel mundial. Claro que el cumplimiento de aquella hipótesis requiere perfecta movilidad de factores y mercados completamente competitivos, no verificables en la realidad. Así, la Nueva Economía Internacional y la Nueva Economía Geográfica (Krugman, 1991) destacan que una integración Sur-Sur u horizontal puede ser igualmente beneficiosa en términos de convergencia.

Brida, Garrido y London (2011) y Barrientos Quiroga (2011) establecen que los estudios intra-país o intra-bloque económico deberían mostrar un acercamiento entre las diferentes jurisdicciones, dado que es esperable que sus características estructurales tiendan a asemejarse. Tal ha sido el caso de los estados que conforman los países desarrollados (Johnson, 2000) o de bloques como OCDE (Barro y Sala-i-Martin, 1992). Por otra parte, Moncayo (2004) señala que la ampliación de los mercados a través de la integración económica, podrían favorecer la concentración en aquellas áreas de relativo avance económico “[...] con una lógica de causación circular, allí donde (el producto) ya es abundante” (p. 22).

Como se verá a continuación, para el Mercosur han sido reducidos los desarrollos empíricos en materia de convergencia y del estudio de las consecuencias de la integración económica sobre la misma. Asimismo, los resultados no siempre han sido homogéneos. Una de las causas atribuidas a esta última observación ha sido el uso de metodologías que suponen un modelo teórico subyacente y que estarían condicionando el nexa crecimiento económico-convergencia (Brida *et al.*, 2011).

Por ello, el objetivo del presente trabajo es introducir una nueva metodología de análisis para el estudio de la convergencia, tomando como base el comportamiento (dinámico) estadístico y dejando de lado los modelos paramétricos tradicionales. De esta forma, se pretende el análisis de la convergencia de las regiones que conforman el Mercosur bajo el concepto de “desempeño económico”, tomando como unidades de observación las economías de Uruguay, Paraguay y las

¹ El Mercosur tuvo su origen en 1991, con la firma del Tratado de Asunción. Actualmente, se trata de una unión aduanera. Venezuela se encuentra en proceso de incorporación, siendo Bolivia, Chile, Colombia, Perú, Ecuador y México países asociados.

diferentes jurisdicciones argentinas y brasileñas, en el período 1961-2005². Se introduce la noción de “régimen económico” desde una perspectiva bidimensional (definido según tasas de crecimiento y niveles de ingreso per cápita) para el estudio de la permanencia y el tránsito de las regiones por los distintos regímenes y se analiza la posible conformación de “clubes de convergencia” mediante el uso de técnicas estadísticas no paramétricas: el árbol de expansión mínima y el árbol jerárquico.

A continuación, se presentan los antecedentes junto con una breve discusión acerca del concepto de convergencia. Luego, se presenta la metodología propuesta, siendo los resultados expuestos en el apartado siguiente. Por último, se muestran las principales conclusiones y una discusión final sobre las consecuencias de la integración económica sobre la convergencia/divergencia intrarregional.

2. ANTECEDENTES

La idea de la convergencia se encuentra presente en el análisis económico desde los desarrollos de la Escuela Clásica. Beneficiados por la libre circulación de tecnologías y conocimientos, los países más pobres deberían crecer más rápidamente que los ricos, alcanzándolos en sus niveles de producto per cápita (De Long, 1997). Esta idea cobra particular relevancia a partir del modelo neoclásico expuesto por Solow (1956), donde los rendimientos marginales decrecientes del factor acumulable ocasionarían procesos de aceleración en las tasas de crecimiento de los países con menores acervos iniciales de capital per cápita, dando éstos alcance a las economías de mayores niveles de ingreso. Tal situación se ha dado a conocer en la literatura del crecimiento como “ β -convergencia absoluta o incondicional” (Barro y Sala-i-Martin, 1995). Por otra parte, se dice que existirá “ σ -convergencia” si la dispersión alrededor del producto interior bruto (PIB) per cápita medio disminuye a lo largo del tiempo³.

La noción de convergencia absoluta ha sido criticada a la luz de los hechos estilizados que evidencian una ampliación de las brechas entre economías (véase Barro y Sala-i-Martin, 1995; Quah, 1997; Ros, 2001; entre otros) y de los más recientes desarrollos de la Teoría de Crecimiento Endógeno, cuyos dos puntos de partida han sido los cuestionamientos acerca de las fuentes del crecimiento y las diferentes *performances* exhibidas (por ejemplo, Lucas, 1988; Romer, 1989; Aghion y Howitt, 1998; entre muchos otros). Por su parte, la defensa de las conclusiones derivadas del modelo neoclásico viene dada por una reinterpretación del concepto de convergencia (Barro, 1991; Mankiw, Romer y Weil, 1992; entre otros): el proceso de emparejamiento de rentas per cápita

² El hecho de no dividir Uruguay y Paraguay en regiones más pequeñas responde a su reducido tamaño, tanto geográfico como en términos de su contribución al producto del bloque. Si bien Argentina utiliza el criterio de “provincias” en su subdivisión territorial y Brasil el criterio de “estados”, en este trabajo se hará referencia indistintamente a estados o regiones aludiendo a los términos “provincia”, “estado federal” o las naciones de Uruguay y Paraguay. Por otro lado, la ausencia de datos de mayor actualización a nivel regional para el caso argentino, ha limitado el período de estudio al año 2005.

³ Una condición necesaria para la existencia de σ -convergencia es la existencia de β -convergencia: para que los niveles de renta per cápita tiendan a concentrarse hacia un nivel medio, es necesario que las economías más pobres sufran un proceso de crecimiento de mayor aceleración que el resto. Sin embargo, la presencia de β -convergencia es una condición necesaria aunque no suficiente para la σ -convergencia.

no es independiente de los fundamentos y características estructurales que definen una economía, y solo sería válido plantear la convergencia hacia un único estado estacionario si todos los países fueran idénticos exceptuando su nivel de capital inicial. Por tanto, la tasa de crecimiento de una economía se relacionará inversamente con su propio estado estacionario (β -convergencia condicional).

La literatura empírica ha utilizado habitualmente modelos simples de corte transversal o paneles sin restricciones para el testeo de la β -convergencia absoluta. Para la evaluación de la convergencia condicional, o bien se limita el estudio a economías que se presuponen similares o bien se introducen variables adicionales que estarían aproximando el modelo a un estado estacionario particular o bien se utilizan técnicas econométricas específicas como los llamados paneles con efectos fijos (EF) que presuponen la existencia de variaciones sistemáticas entre las unidades de observación. La σ -convergencia suele comprobarse a partir de la observación de índices de desigualdad y medidas de dispersión. Como se mencionó en la introducción, son reducidos los desarrollos en materia de convergencia para las economías que conforman el Mercosur. Contrario a la idea intuitiva de países o regiones aproximándose en sus niveles de ingreso dentro de un bloque económico, la hipótesis de convergencia absoluta es la que menor respaldo encuentra. Carton y Guzman (2007) y Camarero, Flores y Tamarit (2008) presentan alguna evidencia a su favor. Los primeros amplían el concepto de β -convergencia absoluta a efectos intra e inter zonas, hallando un proceso de doble convergencia⁴, mientras que Camarero *et al.* (*op. cit.*) dicen no rechazar la hipótesis de no convergencia, aunque los niveles de significatividad se reducen al incluir países adherentes al tratado, como Bolivia y Perú. Por su parte, Ramón-Berjano (2002) y Capello *et al.* (2011) observan ciclos alternantes de convergencia y divergencia absoluta.

Respecto de la σ -convergencia, existe plena coincidencia en la ausencia de una disminución absoluta de la dispersión de los niveles de ingreso a nivel interregional, tanto entre los países del bloque (Blyde, 2006; Barrientos Quiroga, 2011), como entre las regiones brasileñas (Ferreira y Diniz, 1995; Serra *et al.*, 2006) y argentinas (Utrera y Koroch, 1998; Russo y Delgado, 2000; Serra *et al.*, 2006). Sí se observan en el caso brasileño tendencias hacia una convergencia intrarregional (como en Ferreira y Diniz, 1995 y en Magalhães da Costa, 2009), en congruencia con la idea expuesta por Madariaga, Montout y Ollivaud (2004) de una mayor concentración “hacia adentro” de ciertas actividades productivas en determinadas zonas de Argentina y Brasil luego del establecimiento del Mercosur.

Los estudios *cross-section* de convergencia condicional no suelen ofrecer evidencia unívoca. Madariaga *et al.* (2004) exhiben evidencia a su favor para las economías argentina y brasileña, con una disminución en la velocidad de aproximación a partir de la década de los

⁴ Evaluando también el caso del Tratado de Libre Comercio de América del Norte (TLCAN), señalan que la evidencia a la convergencia absoluta no es concluyente mientras que los resultados en términos de convergencia condicional muestran un *catch-up* demasiado lento de los niveles de producto per cápita de México respecto de Estados Unidos y Canadá.

noventa. Capello *et al.* (2011) vuelven a concluir la existencia de ciclos alternantes de convergencia y divergencia condicional en Argentina, mientras que Barrientos Quiroga (2011) hace lo propio para el Mercosur. Por otra parte, Marina, Garrido y Sotelsek (2002) y Figueras, Arrufat y Regis (2003), ambos trabajos para las provincias argentinas, no aceptan la hipótesis de convergencia condicional ni absoluta a través del análisis de corte transversal.

Las discrepancias antes mencionadas han llevado al planteo de las ventajas de métodos econométricos más complejos mediante el uso de datos de panel. Aún así, los resultados no dejan de ser contradictorios, exhibiéndose alternativamente evidencias a favor de la divergencia (Serra *et al.*, 2006, para las provincias argentinas); de la convergencia condicional (Figueras *et al.*, 2003, y Figueras *et al.*, 2004, para Argentina; Magalhães da Costa, 2009, para los estados brasileños; y Carton y Guzman, 2007, para el Mercosur); de la convergencia condicional por períodos (nuevamente, Barrientos Quiroga, 2011, y Capello *et al.*, 2011, ambos para Argentina); y aún de convergencia condicional por regiones cuando se subdivide la muestra o se introduce alguna variable *dummy* indicadora. Este último caso se relaciona con otra concepción diferente de convergencia planteada por Galor (1996), la “convergencia en clubes”: los productos per cápita de las economías que poseen idénticas características estructurales convergen entre sí sólo en el caso de condiciones iniciales similares. Serra *et al.* (2007) obtienen evidencias a favor de la convergencia en clubes *à la Galor* para el caso de los 25 estados brasileños condicionados por 5 variables *dummies* regionales. Se observa una convergencia en clubes “norte vs. sur”, estableciéndose las causas en las diferencias históricas de dotación de recursos y estructuras productivas. Azzoni (2001) también observa un proceso de β -convergencia intrarregional y divergencia interregional.

El análisis del desempeño relativo de los países y regiones económicas no debería plantearse como una validación o invalidación de algún modelo subyacente (Brida *et al.*, 2011). Como se vio, los resultados suelen ser sensibles a las especificaciones utilizadas. La base de esta crítica se encuentra en los trabajos de Quah⁵ (1993, 1996, 1997), quien se concentró en la dinámica que siguen las economías a lo largo de su senda de desarrollo. Quah (1996) observó una tendencia de las economías a segregarse en dos grupos definidos, de altos y bajos ingresos, dando origen a la llamada *twin-peak hypothesis* y al concepto de “clubes de convergencia”, o sea, coaliciones de economías que, independientemente de sus condiciones iniciales, poseen características estructurales que tienden a asemejarse en el tiempo y a converger en sus niveles de PBI per cápita.

Los estudios basados en esta línea de investigación presentan mayor homogeneidad en cuanto a sus resultados⁶. Blyde (2006), en el único trabajo que hace referencia a los países del Mercosur en su conjunto, establece la conformación de dos clubes de convergencia entre las 88

⁵ Quah (1993) planteó como crítica principal a los análisis convencionales de convergencia realizados hasta la fecha la existencia de la Falacia de Galton de reversión a la media, según la cual los países de mayores niveles de ingreso tenderían a mostrar menores tasas de crecimiento aún en ausencia de convergencia.

⁶ Las herramientas más utilizadas se encuadran dentro de las metodologías no paramétricas, tales como el análisis estadístico de cadenas de Markov, las estimaciones de densidad de Kernel, los perfiles de dinámicas y matrices de transición *à la Quah* y, de gran relevancia para el presente trabajo, el estudio de las dinámicas de regímenes según métodos de clusterización.

regiones en las cuales subdivide la muestra, observando que el proceso dinámico de conformación se aceleró durante los años noventa del siglo XX. Los demás trabajos se centran solo en el análisis a nivel regional de las jurisdicciones argentinas y brasileñas.

En referencia a las jurisdicciones argentinas, Marina *et al.* (2002) y Arrufat *et al.* (2005) establecen la existencia de dos clubes de convergencia. Marina *et al.* (2002) muestran distribuciones de Kernel bimodales a partir de los años ochenta, mientras que Arrufat *et al.* (2005) encuentran que la probabilidad de polarización es alta en el período 1980-1990. Capello *et al.* (2011), miden la convergencia en términos de diferentes indicadores de bienestar, señalando que aunque las brechas de ingresos pueden haberse mantenido, existiría una convergencia en términos de medidas de bienestar⁷. No obstante, varios de los indicadores también exhiben distribuciones bimodales. Introduciendo el estudio de regímenes de desempeño, Brida *et al.* (2011) reconocen la conformación de dos *clusters* para el caso de las provincias argentinas, aunque también se detectan algunas jurisdicciones de desempeño medio apartadas de ambos grupos.

El análisis de los estados brasileños señala una tendencia general hacia la polarización norte-sur. Bosch Mossi *et al.* (2003) y Gondim, Barreto y Carvalho (2007) consideran cuestiones de economía espacial puntualizando que las condiciones de las regiones más próximas son un fuerte condicionante para la evolución de cada estado. Si bien también concluye la existencia de dos clubes de convergencia para Brasil, Magalhães da Costa (2009) llama la atención respecto de la gran diferenciación que presenta el Distrito Federal (de mayor nivel de renta) respecto de los otros estados.

Como puede observarse, este último grupo de trabajos evidencia una tendencia constante hacia la polarización. Si las energías productivas se concentran en subregiones, tanto dentro de Argentina como Brasil, los dos mayores países del Mercosur, la implementación de políticas tendientes a la unificación podrían verse entorpecidas. Sin embargo, no existe evidencia suficiente ni unívoca en torno a lo sucedido en materia de convergencia. Así, en la siguiente sección se presentará un método de análisis ex-post en línea con los trabajos de dinámica de la distribución del producto per cápita introducidos por Quah (1996). Se trata de una metodología de estadística descriptiva sobre desempeño económico que posee la ventaja de no introducir errores de especificación al no depender de la estructura subyacente en la modelización convencional. Se estudia el comportamiento de las diferentes divisiones geopolíticas que integran el Mercosur, permitiendo establecer la convergencia o divergencia entre grupos en términos de dinámicas de regímenes.

3. METODOLOGÍA

En esta sección se presentan los principales conceptos de la metodología utilizada (régimen, dinámica de regímenes y evolución de *clusters*) y se aplican a las 24 provincias argentinas, los 27

⁷ Las estimaciones de Kernel muestran disminuciones en la dispersión de los indicadores de educación, aumento en el indicador NBI y, en general, un incremento de la dispersión de todos los indicadores desde los años noventa del siglo XX, con cambios en las posiciones relativas de algunas provincias.

estados federales brasileños agrupados en 21 regiones⁸ y los estados de Uruguay y Paraguay, a fin de identificar los regímenes a los que pertenecen las diferentes regiones y la formación de conglomerados con regímenes cercanos dentro del Mercosur. En el análisis se utiliza el PBI per cápita, expresados en dólares y a precios constantes de 2000, y la tasa de incremento del mismo, ambos para el período 1961-2005. Los datos del Producto Geográfico Bruto (PBG) para los casos de Argentina y Brasil fueron obtenidos del Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INDEC) y de Brida *et al.* (2011), y del Instituto Brasileiro de Geografia y Estadística (IBGE), respectivamente. Los datos referentes al PBI per cápita de Paraguay y Uruguay fueron obtenidos del Banco Mundial.

El concepto de régimen surge a consecuencia de la variedad de trayectorias de crecimiento observadas para las diferentes economías nacionales y subnacionales (Moncayo, 2004). Pocos son los estudios que utilizan esta idea para el análisis de la convergencia. Brida *et al.* (2011) mencionan a Durlauf y Johnson (1995), Prichett (2000) y Jerzmanowski (2006).

Siguiendo los trabajos de Brida (2008) y Brida y Punzo (2008), el régimen se define como una partición del espacio de estados conformado por dos variables particulares (producto per cápita y tasa de crecimiento, en este caso), donde los cuadrantes de dicha partición se determinan mediante los valores medios de las variables consideradas. Es posible ubicar las trayectorias de las diferentes regiones a partir del pase o permanencia por los distintos regímenes, estableciéndose la dinámica de comportamiento. El análisis de tales dinámicas puede realizarse con técnicas como las utilizadas en Brida, Puchet Anyul y Punzo (2003); Brida y Garrido (2006) y Brida, London y Risso (2010).

3.1. Dinámica de regímenes

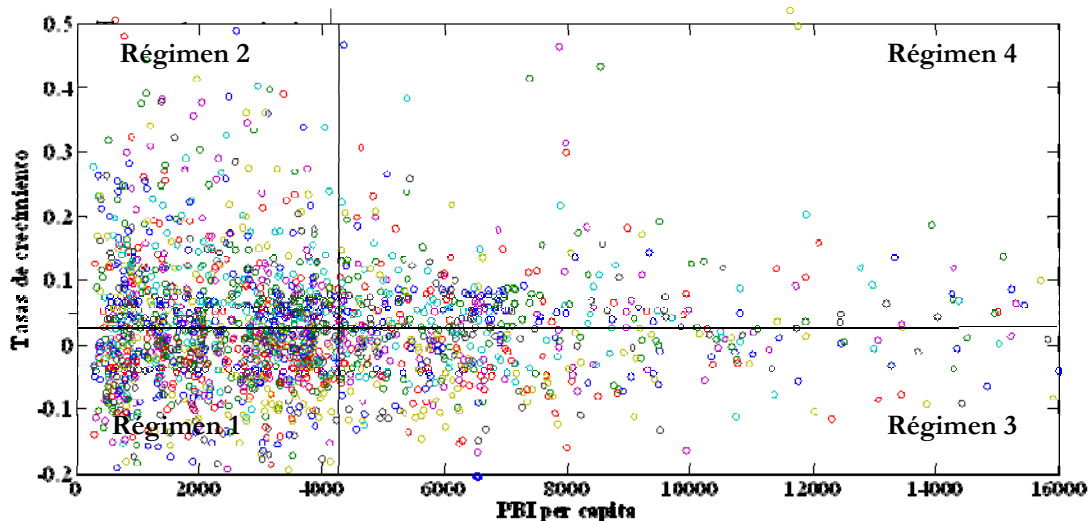
La dinámica de regímenes permite una descripción cualitativa de la evolución económica de los estados que conforman el Mercosur. La caracterización bidimensional de los diferentes espacios se encuentra determinada por los valores medios para todos los estados y todos los períodos muestrales de las tasas de crecimiento del producto m_g y del PBI per cápita m_y . En base a estos valores se definen cuatro subconjuntos: $R1 = \{(y, g_y): y \leq m_y, g_y \leq m_g\}$, $R2 = \{(y, g_y): y \leq m_y, g_y > m_g\}$, $R3 = \{(y, g_y): y > m_y, g_y \leq m_g\}$ y $R4 = \{(y, g_y): y > m_y, g_y > m_g\}$; los cuales son caracterizados como regímenes de “bajo desempeño” (bajas tasas de crecimiento y bajos niveles de producto per cápita), régimen de “despegue económico” (bajo nivel de producto, aunque altas tasas de crecimiento), régimen de “madurez económica” (altos niveles de producto pero reducidas tasas de crecimiento) y régimen de “alto desempeño” (altos niveles de producto y de tasas de crecimiento) (Brida *et al.*, 2011).

Siguiendo a Brida *et al.* (2010), se dirá que los estados ubicados en los dos primeros regímenes son “pobres”, dada la magra *performance* histórica que han evidenciado, reflejada en un bajo nivel de producto. Por contrapartida, las regiones que se encuentren en los otros dos regímenes,

⁸ Amazonas, Acre, Rondônia y Roraima se integran en una única región, dado que los tres últimos estados formaron parte del primero hasta 1970, por lo cual no se encuentra información desagregada del Producto Geográfico Bruto (PBG) hasta esa fecha. Lo mismo sucede con Pará y Amapá, y Goiás y Tocantins (Amapá y Tocantins nacieron como estados independientes de Pará y Goiás en 1988) y la región de Mato Grosso, la cual se subdivide en Norte y Sur en 1979.

serán países “ricos”. El Gráfico 1 muestra la conformación de estos escenarios de acuerdo a las medias del PBI per cápita y las tasas de crecimiento (trazas negras). La nube de puntos corresponde a la ubicación de las diferentes regiones en los distintos momentos del tiempo.

Gráfico 1. División de regímenes y nube de puntos para la totalidad de estados, 1961-2005.



Fuente: elaboración propia.

Así, puede describirse la evolución de un estado a partir de los cambios de regímenes que sufra a lo largo de la historia. Simbólicamente, la consideración respecto de la media de las tasas y el PBI per cápita de cada estado en cada momento del tiempo permite la construcción de una matriz de $N \times T$ datos (N estados y T periodos muestrales), donde se ubica cada valor del régimen $R_{n,t}$. La dinámica del cambio de un escenario a otro indica, cada año, dónde se encuentra una determinada economía regional.

Los estados considerados muestran diferentes desempeños económicos en términos de la cantidad de veces que han visitado cada régimen. Mientras que la mayoría de los estados del centro y sur de Argentina (Tierra de Fuego, Santa Cruz, Chubut, Río Negro, La Pampa, Córdoba, Mendoza, Capital Federal, Buenos Aires y Santa Fe) solo se han encontrado en los regímenes de alto desempeño y madurez económica; los estados brasileños de las regiones noroeste (Acre, Amazonas, Rondônia y Roraima), norte (Amapá, Pará y Maranhão) noreste (Piauí, Paraíba, Pernambuco, Alagoas, Ceará y Rio Grande do Norte) y parte del este (Bahía, Minas Gerais y Sergipe), junto con São Paulo (Brasil), las provincias de Corrientes, Santiago del Estero, Misiones y Formosa en Argentina, y la nación paraguaya han visitado únicamente los regímenes 1 y 2, exhibiendo niveles de PBI per cápita inferiores a la media muestral. El Cuadro 1 muestra el porcentaje de veces que cada estado visitó cada régimen⁹.

⁹ Las referencias referentes a la codificación de las regiones se presentan en la Tabla A.1. del Apéndice.

Cuadro 1. Porcentaje de visita a cada régimen para el total de estados, 1961-2005.

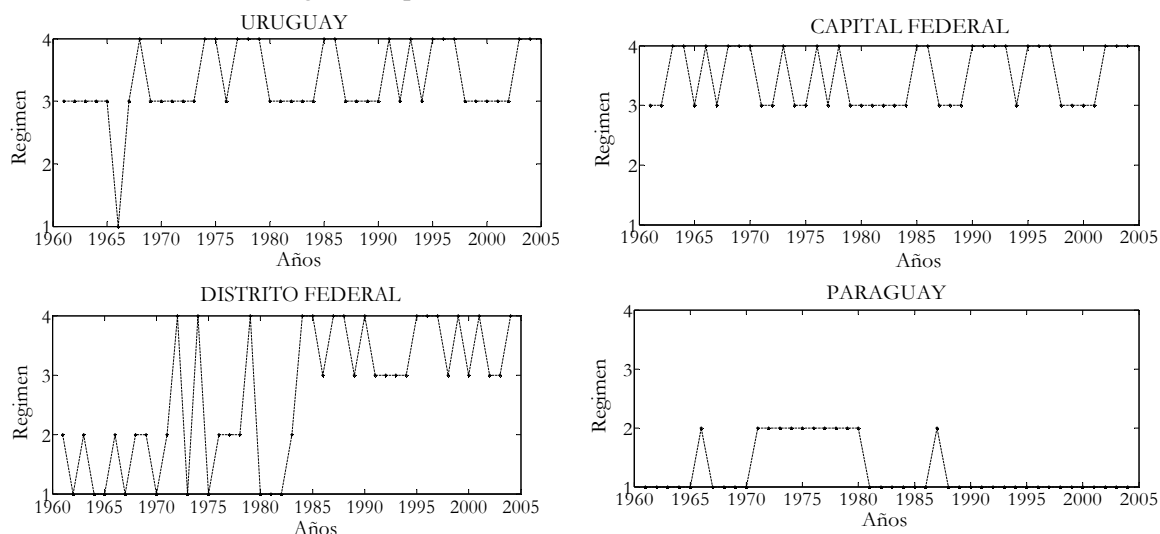
| Código | Regímenes | | | | Código | Regímenes | | | |
|--------|-----------|-------|-------|-------|--------|-----------|-------|------|------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| CF | 0.00 | 0.00 | 52.27 | 47.73 | Par | 52.27 | 38.64 | 4.55 | 4.55 |
| Chu | 0.00 | 0.00 | 56.82 | 43.18 | ES | 50.00 | 45.45 | 0.00 | 4.55 |
| TdF | 0.00 | 0.00 | 59.09 | 40.91 | GT | 56.82 | 38.64 | 0.00 | 4.55 |
| BS | 0.00 | 0.00 | 61.36 | 38.64 | MGr | 54.55 | 43.18 | 0.00 | 2.27 |
| LP | 0.00 | 0.00 | 61.36 | 38.64 | Sal | 70.45 | 27.27 | 0.00 | 2.27 |
| Cor | 0.00 | 0.00 | 63.64 | 36.36 | Pia | 47.73 | 52.27 | 0.00 | 0.00 |
| SC | 0.00 | 0.00 | 63.64 | 36.36 | SP | 47.73 | 52.27 | 0.00 | 0.00 |
| RN | 0.00 | 0.00 | 65.91 | 34.09 | Bah | 50.00 | 50.00 | 0.00 | 0.00 |
| SF | 0.00 | 0.00 | 65.91 | 34.09 | P | 52.27 | 47.73 | 0.00 | 0.00 |
| Men | 0.00 | 0.00 | 70.45 | 29.55 | Per | 52.27 | 47.73 | 0.00 | 0.00 |
| Uy | 2.27 | 0.00 | 63.64 | 34.09 | MG | 54.55 | 45.45 | 0.00 | 0.00 |
| Neu | 13.64 | 4.55 | 47.73 | 34.09 | Ala | 56.82 | 43.18 | 0.00 | 0.00 |
| DF | 22.73 | 22.73 | 22.73 | 31.82 | Cea | 56.82 | 43.18 | 0.00 | 0.00 |
| RGdS | 22.73 | 27.27 | 29.55 | 20.45 | Mar | 56.82 | 43.18 | 0.00 | 0.00 |
| SL | 22.73 | 31.82 | 25.00 | 20.45 | Corr | 59.09 | 40.91 | 0.00 | 0.00 |
| Sca | 36.36 | 34.09 | 9.09 | 20.45 | SdE | 59.09 | 40.91 | 0.00 | 0.00 |
| RdJ | 20.45 | 15.91 | 45.45 | 18.18 | AP | 59.09 | 40.91 | 0.00 | 0.00 |
| ER | 50.00 | 15.91 | 15.91 | 18.18 | Mis | 61.36 | 38.64 | 0.00 | 0.00 |
| Tuc | 36.36 | 31.82 | 13.64 | 18.18 | RGdN | 61.36 | 38.64 | 0.00 | 0.00 |
| LR | 29.55 | 29.55 | 27.27 | 13.64 | For | 63.64 | 36.36 | 0.00 | 0.00 |
| Cat | 45.45 | 27.27 | 13.64 | 13.64 | AARR | 63.64 | 36.36 | 0.00 | 0.00 |
| SJ | 52.27 | 25.00 | 9.09 | 13.64 | Ser | 65.91 | 34.09 | 0.00 | 0.00 |
| Cha | 52.27 | 29.55 | 9.09 | 9.09 | Py | 72.73 | 27.27 | 0.00 | 0.00 |
| Jy | 54.55 | 25.00 | 13.64 | 6.82 | | | | | |

Fuente: elaboración propia.

El curso tomado hasta aquí por los estados no puede ser analizado a través de herramientas estáticas. Es necesario recurrir al estudio de la secuencia temporal. El Gráfico 2 brinda una representación de la misma. En él pueden encontrarse diferentes comportamientos en las regiones bajo estudio. Por ejemplo, mientras que Uruguay y la Capital Federal argentina parecieran alcanzar el estado de madurez económica en los últimos años, alternando entre regímenes de altas y bajas tasas de crecimiento a lo largo de todo el período, el Distrito Federal del Brasil presenta oscilaciones espectaculares con un mayor porcentaje de estadios en los regímenes 1 y 2 hasta mediados de los años ochenta del siglo XX, exhibiendo luego una mejora en su desempeño. Paraguay muestra una de los peores *performances* de la región, con un estancamiento en el régimen de bajo desempeño desde finales de los años ochenta.

La representación de la dinámica de regímenes puede efectuarse etiquetando simbólicamente cada estado a partir del número de régimen que ha ocupado en cada observación temporal, transformando la serie bidimensional (y_t, g_t) en una serie simbólica $s_1, s_2, s_3, \dots, s_T$ tal que $s_t = j$ si y solo si (y_t, g_t) se encuentra en el régimen R_j . Así, del Gráfico 2 se desprende que la dinámica de regímenes de la región de Capital Federal puede escribirse como 334434344433433433333344333444434443333444, mientras que la secuencia 21211212212414122241112443443433334443434334 representa la dinámica del Distrito Federal.

Gráfico 2. Dinámica de regímenes para cuatro estados considerados.



Fuente: elaboración propia.

Para poder evaluar la cercanía de los diferentes desempeños económicos, se requiere una noción de distancia. Siguiendo a Brida *et al.* (2010) y Brida *et al.* (2011), se utiliza la distancia d que tiene en cuenta las coincidencias ponderadas de regímenes de dos regiones distintas. Esto es, si dos estados se encuentran en el mismo régimen en el momento t , corresponde un 0 a la suma total de la distancia entre ellos, mientras que si se encuentran en regímenes diferentes, esto aportará un valor positivo $p=1, 2, 3$ a la medida d , dependiendo de cuán lejos se encuentren. Dicha métrica se define como:

$$(1) \quad d(i, j) = \sqrt{\sum_{t=1}^{t=T} \frac{(S_{i,t} - S_{j,t})^2}{T}},$$

donde $S_{i,t}$ y $S_{j,t}$ es el régimen en que se encuentran los países i y j en el momento t , respectivamente; siendo T la cantidad total de períodos de estudio. Sobre la base de esta métrica, es posible reagrupar la totalidad de los estados considerados mediante una técnica de clusterización y observar el comportamiento de aproximación o alejamiento entre las diferentes regiones a lo largo del tiempo. Siguiendo las técnicas desarrolladas en Mantegna (1999), Brida y Risso (2009), Brida, Matesanz y Risso (2009) y Brida *et al.* (2010), se construyen un árbol de expansión mínima (AEM) y un árbol jerárquico (AJ).

El AEM se construye mediante el algoritmo de Kruskal¹⁰. Si la muestra tiene n series temporales, el algoritmo consiste en: i) iniciar el AEM con n nodos y sin arcos (sin conexiones entre nodos), tal que $AEM = (\{1, 2, \dots, n\}, \emptyset)$; ii) crear una lista L de arcos en orden ascendente de peso (en este caso, mediante la distancia definida anteriormente entre las series temporales); los arcos con el mismo peso son ordenados arbitrariamente; iii) seleccionar el arco (i, j) que esté posicionado al comienzo de L ; se transfiere a la lista T y se borra de L sólo si no forma ciclo con los ya añadidos

¹⁰ Para una mayor especificación, ver Brida *et al.* (2010).

a ella, en cualquier caso se borra de L y se continua con el paso siguiente; iv) si L es no vacío, se retoma el paso iii; de lo contrario, finaliza el proceso. El Cuadro 2 muestra la lista T de las distancias relevantes, después de aplicado el algoritmo descrito en el caso de las 47 regiones que integran el Mercosur.

Cuadro 2. Distancias relevantes para la construcción del AEM.

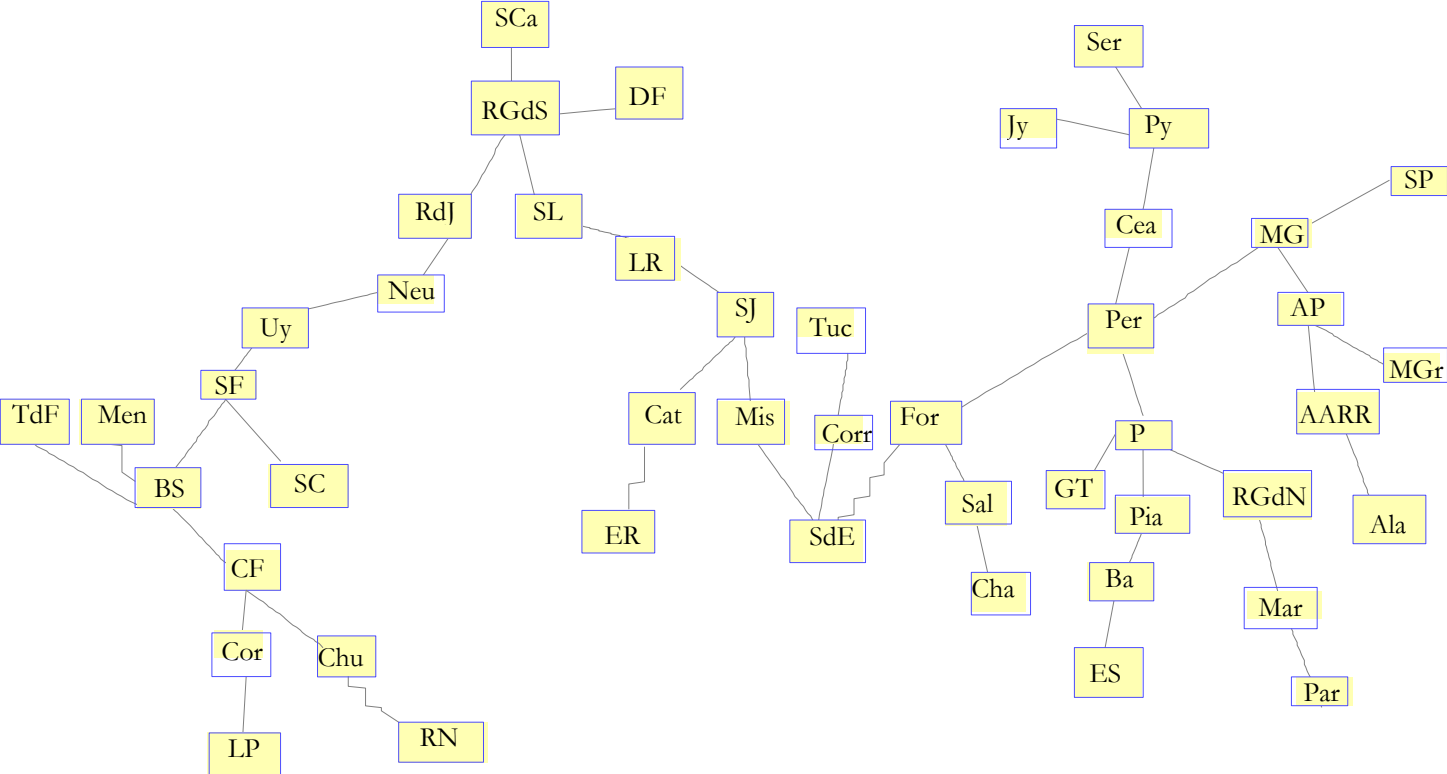
| Arco | Región 1 | Región 2 | Distancia | Arco | Región 1 | Región 2 | Distancia |
|------|----------|----------|-----------|------|----------|----------|-----------|
| 1 | BS | CF | 0.4264 | 24 | Sal | For | 0.5839 |
| 2 | SF | BS | 0.4264 | 25 | Per | For | 0.5839 |
| 3 | Men | BS | 0.4264 | 26 | Py | Cea | 0.5839 |
| 4 | Cor | CF | 0.4523 | 27 | Uy | SF | 0.603 |
| 5 | Chu | CF | 0.4767 | 28 | P | GT | 0.603 |
| 6 | RN | Chu | 0.4767 | 29 | SP | MG | 0.6216 |
| 7 | Per | P | 0.4767 | 30 | MGr | AP | 0.6396 |
| 8 | Pia | P | 0.4767 | 31 | ES | Bah | 0.6742 |
| 9 | ES | P | 0.4767 | 32 | Par | Mar | 0.7071 |
| 10 | TdF | BS | 0.5 | 33 | RGdS | SL | 0.8257 |
| 11 | SdE | Mis | 0.5 | 34 | RGdS | DF | 0.8394 |
| 12 | Per | MG | 0.5 | 35 | SL | LR | 0.8528 |
| 13 | SdE | For | 0.5222 | 36 | RGdS | RdJ | 0.8528 |
| 14 | AP | AARR | 0.5222 | 37 | Py | Jy | 0.879 |
| 15 | MG | AP | 0.5222 | 38 | Sal | Cha | 0.9535 |
| 16 | Per | Cea | 0.5222 | 39 | ER | Cat | 0.9653 |
| 17 | RGdN | Mar | 0.5222 | 40 | Uy | Neu | 1 |
| 18 | LP | Cor | 0.5436 | 41 | RdJ | Neu | 1.0871 |
| 19 | SF | SC | 0.5436 | 42 | SJ | Cat | 1.0975 |
| 20 | Ala | AARR | 0.5436 | 43 | SCa | RGdS | 1.118 |
| 21 | Pia | Bah | 0.5436 | 44 | SJ | Mis | 1.1282 |
| 22 | Py | Ser | 0.5436 | 45 | SJ | LR | 1.1481 |
| 23 | SdE | Corr | 0.5641 | 46 | Tuc | Corr | 1.3484 |

Fuente: elaboración propia.

El Cuadro 2 permite establecer que las distancias de menor tamaño, en este caso las coincidentes, son las que unen los nodos correspondientes a la provincia de Buenos Aires y Capital Federal, Santa Fe y Buenos Aires, y Mendoza y Buenos Aires, respectivamente, siendo $d(\text{Región1}, \text{Región2}) = 0.4264$. Entonces, se conecta Buenos Aires con las otras tres regiones en un grupo. Luego, se continúa con la segunda menor distancia, en este caso $d(\text{Cor}, \text{CF}) = 0.4523$, conectando a Capital Federal con Córdoba. Posteriormente, la tercera menor distancia conecta a la provincia de Chubut con Capital Federal. El proceso continúa sucesivamente hasta tener los 47 nodos conectados en un grafo de 46 arcos, como muestra el Gráfico 3.

El atractivo principal de esta herramienta gráfica es que genera un arreglo de las regiones seleccionando las conexiones más relevantes de cada elemento del conjunto.

Gráfico 3. Árbol de expansión mínima, 47 estados (1961-2005).



Fuente: elaboración propia.

Dos vértices cualesquiera del árbol pueden ser conectados directa o indirectamente a través de uno o más vértices, significando siempre la mínima distancia que puede ser recorrida de un nodo a otro consecutivo. El AEM permite la visualización de formación de *clusters* o conglomerados a partir de las regiones más conectadas entre sí, así como también de aquellas más aisladas en sus dinámicas. A partir del AEM, puede estudiarse el grado de organización jerárquica de los vértices del grafo utilizando la distancia ultramétrica¹¹, la cual es el máximo de las distancias calculadas de moverse un paso de los nodos i al j en el AEM a través de la trayectoria más breve posible. A partir del AEM, la distancia ultramétrica $d^<(i, j)$ entre i y j viene dada por:

$$(2) \quad d^<(i, j) = \text{Max}\{d_0(w_i; w_{i+1}); 1 \leq i \leq n - 1\},$$

donde $\{(w_1; w_2), (w_2; w_3), \dots, (w_{n-1}; w_n)\}$ denota la única trayectoria mínima en el AEM que conecta i con j , siendo $w_1 = i$ y $w_n = j$. El cálculo de las distancias $d^<(i, j)$ para cada pareja de regiones permite la construcción del AJ. Por ejemplo, la distancia ultramétrica entre Buenos Aires y Río de Janeiro se obtiene de la máxima distancia recorrida a través del siguiente conjunto de aristas: $\{(BS, SF); (SF, Uy); (Uy, Neu); (Neu, RdJ)\}$, la cual corresponde a $d(\text{Neu}, \text{RdJ}) = 1.0871$. Por lo tanto, $d^<(\text{Neu}, \text{RdJ}) = 1.0871$. El Gráfico 4 presenta el AJ para la totalidad de las regiones y de las observaciones temporales. La altura de cada U- invertida conectando dos nodos particulares representa la distancia ultramétrica entre ellos.

3.2. Análisis de los resultados

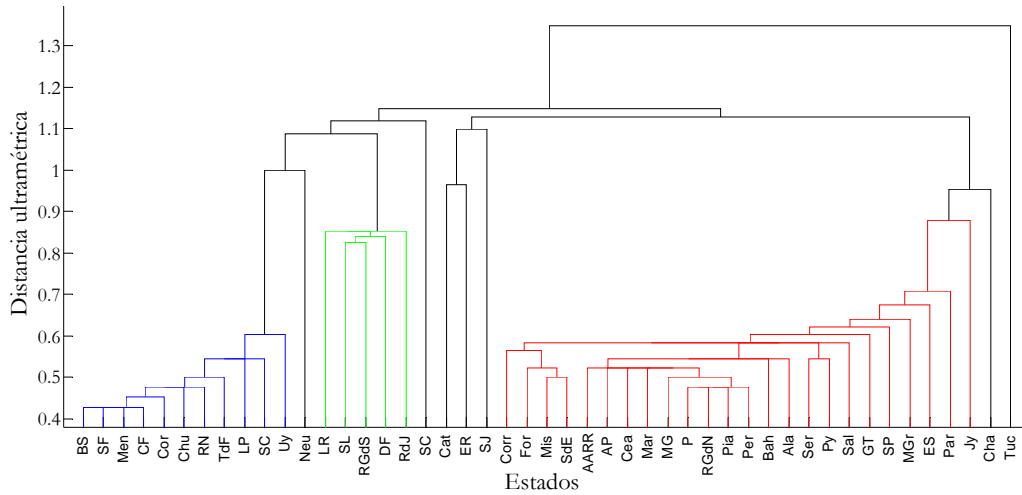
El Gráfico 4 muestra la conformación de tres grupos, y la presencia de algunas regiones aisladas en su comportamiento. Los dos grupos más compactos se corresponden con las regiones de alto desempeño macro por un lado (Capital Federal, Buenos Aires, Córdoba, Chubut, La Pampa, Mendoza, Río Negro, Santa Cruz, Santa Fe, Tierra del Fuego y Uruguay) y de bajo desempeño por otro (Corrientes, Formosa, Misiones, Santiago del Estero, AARR, AP, Ceará, Maranhão, Minas Gerais, Paraíba, Rio Grande do Norte, Piauí, Pernambuco, Bahía, Alagoas, Sergipe, Paraguay, Salta, Goiás y Tocantins, São Paulo, Mato Grosso, Espírito Santo, Paraná, Jujuy y Chaco). A su vez, La Rioja, San Luis, Rio Grande do Sul, Distrito Federal y Río de Janeiro, conforman un *cluster* de desempeño medio. Catamarca, Entre Ríos y San Juan aparecen como un cuartos bloque de desempeño medio, aunque de manera mucho más difusa. Por su parte, Neuquén, Santa Catarina, Chaco y Tucumán se muestran como los estados de mayor aislamiento en sus dinámicas.

Es posible, asimismo, encontrar algunos subgrupos dentro de cada *cluster*. Las zonas norte, noreste y noreste del Brasil, representan el conglomerado de menores distancias en el AJ dentro del grupo de regiones de bajo desempeño. Por su parte, la región centro de Argentina muestra las distancias más reducidas dentro del grupo de alto desempeño económico. Mientras que Uruguay se une al grupo de alto desempeño, y Paraguay al de desempeño bajo, ciertas regiones del sur de Brasil parecen encontrarse en un estadio intermedio de desempeño. Un análisis de la evolución de los grupos permitirá un mejor entendimiento del escenario actual, dado que es posible que el comportamiento de las regiones haya variado a lo largo del tiempo. De hecho, es probable que la conformación de los *clusters* no sea la misma a lo largo de la

¹¹ Véanse Ramal, Toulouse y Virasoro (1986) y Mantenga (1999).

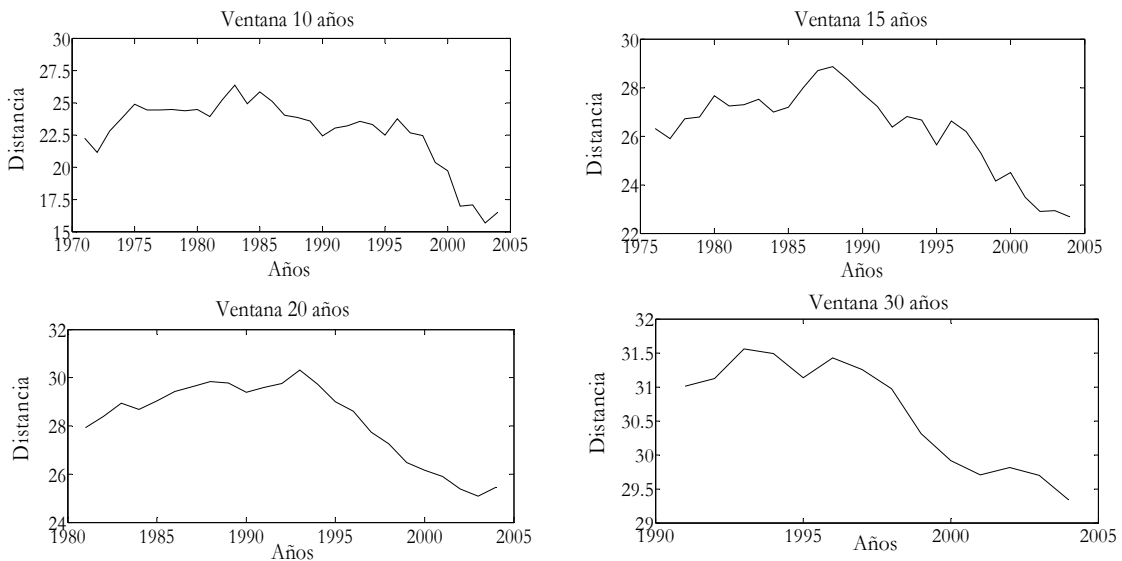
historia y que determinadas regiones se alejen o acerquen entre sí. Para analizar esta cuestión, se tomaron ventanas temporales sobre el total de las observaciones de longitud $v < T$ considerándose todos los períodos de duración v comprendidos en el arco temporal de análisis y repitiéndose el ejercicio anterior para la construcción de los AJ. A fin de estudiar si hubo una ampliación o disminución de las distancias a lo largo del tiempo, es necesaria una medida de distancia global. Siguiendo a Onnela (2002), esta medida se obtiene sumando todas las distancias del árbol, lo cual representa el diámetro del grupo. El Gráfico 5 muestra la evolución de las distancias entre todas las regiones para las ventanas consideradas. Nótese la ampliación de esta distancia global hasta principios de los años noventa y la gran disminución sufrida posteriormente. De hecho, la tendencia para el total del período muestra una reducción importante de las distancias entre 1961 y 2005. La pregunta que cabe entonces es si esto podría estar sugiriendo un acercamiento en el desempeño económico de las diferentes regiones que conforman el Mercosur.

Gráfico 4. AJ para las 47 regiones (1961-2005).



Fuente: elaboración propia.

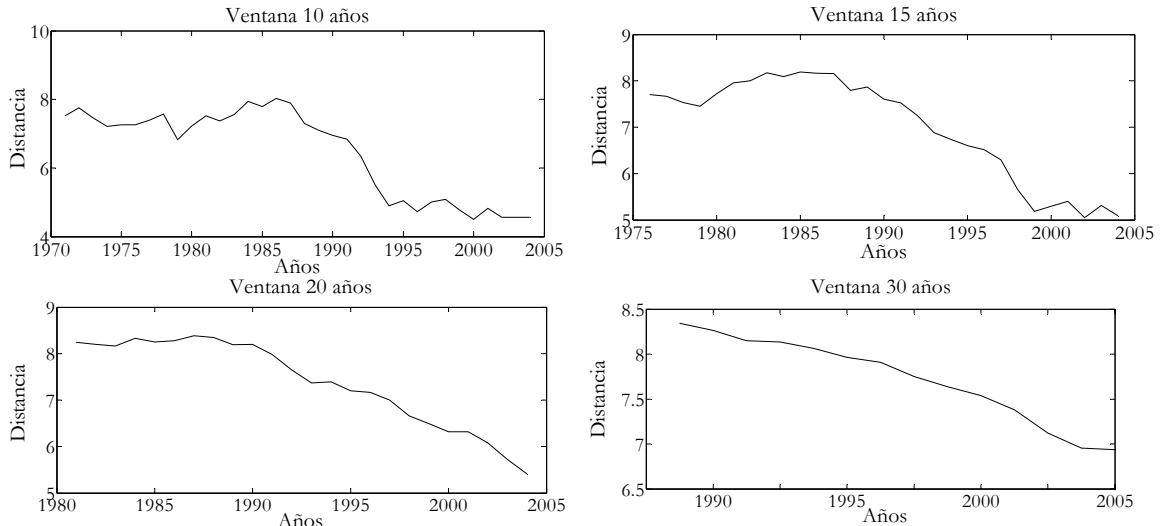
Gráfico 5. Evolución de la distancia para el total de las regiones (1961-2005).



Fuente: elaboración propia.

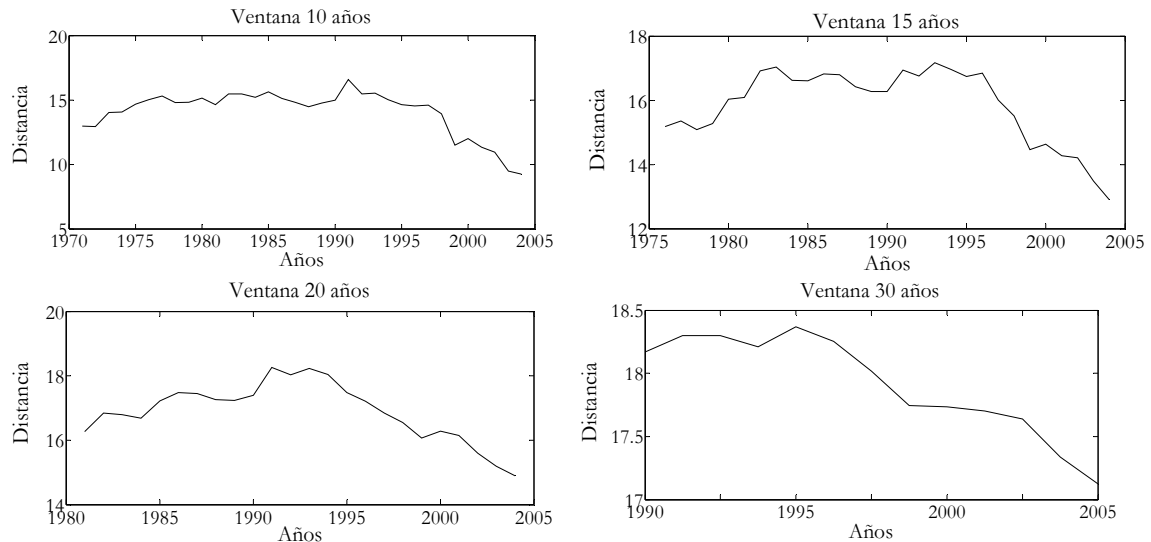
La respuesta que cabría es que la disminución de la distancia global puede haber respondido al acercamiento en el desempeño económico de todas las regiones consideradas, o al acercamiento entre sí de las regiones que conforman los diferentes *clusters*. Para observar la evolución de los conglomerados, se repitió el ejercicio anterior para los grupos de alto y bajo desempeño. Los Gráficos 6 y 7 muestran, respectivamente, la evolución de las distancias dentro del grupo “azul” (11 países más ricos) y dentro del grupo “rojo” (correspondiente a las 25 regiones más pobres).

Gráfico 6. Evolución de la distancia para el grupo de alto desempeño (1961-2005).



Fuente: elaboración propia.

Gráfico 7. Evolución de la distancia para el grupo de bajo desempeño (1961-2005).

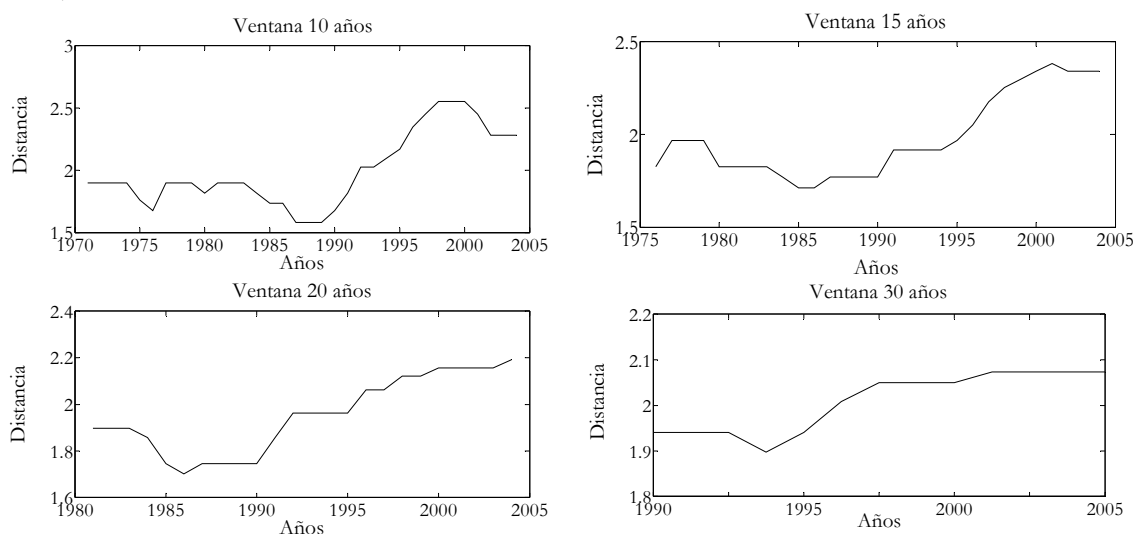


Fuente: elaboración propia.

La evolución de las distancias “intragrupo” fue cualitativamente similar a la evolución de la distancia para el total de las regiones. En todos los casos existió un incremento de las mismas hasta los años noventa y una reducción a partir de entonces, mostrando un acercamiento en la dinámica dentro de cada *cluster*. En un ejercicio adicional, se calculó la evolución de las distancias para dos regiones “promedio” de alto y bajo desempeño. Del Gráfico 8 se desprende el gran incremento que sufre la distancia entre ambas regiones promedio, indicando que el

aparente acercamiento entre los 47 estados analizados se corresponde más bien con una reducción de las distancias en el interior de cada *cluster* más que con una reducción del distanciamiento entre conglomerados. Este resultado ofrece cierta evidencia a favor de una convergencia en regímenes por clubes y se encuentra en línea con los trabajos de Quah (1996, 1997) y la llamada hipótesis de los dos picos. Es importante remarcar que el concepto de convergencia tomado aquí es más amplio, dado que se trata de una convergencia no solo en niveles de PBI per cápita, sino del desempeño de las regiones. Podría hablarse, entonces, de “clubes de desempeño”.

Gráfico 8. Evolución de la distancia entre regiones promedio de alto y bajo desempeño (1961-2005).



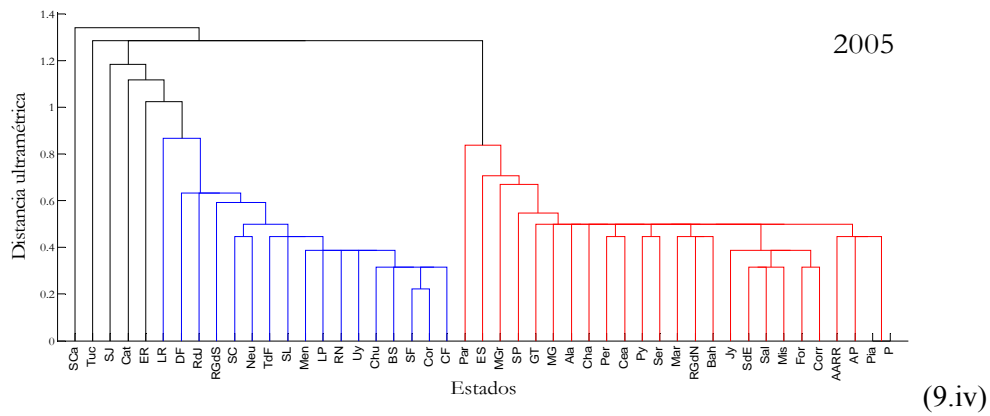
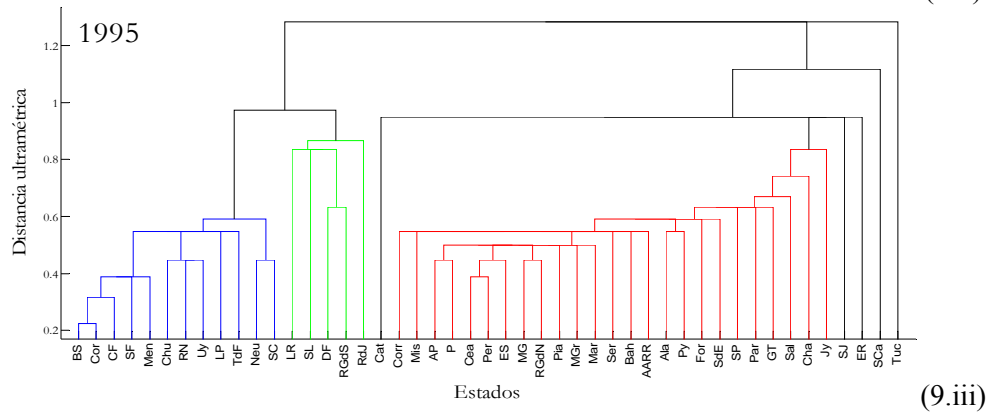
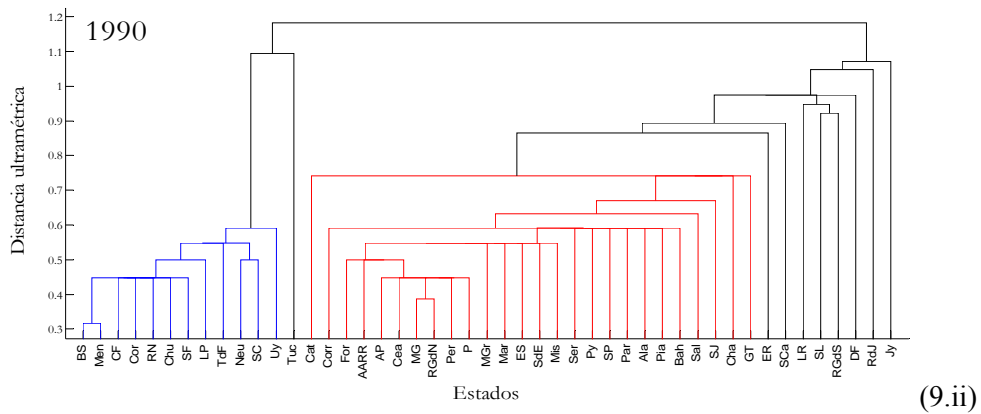
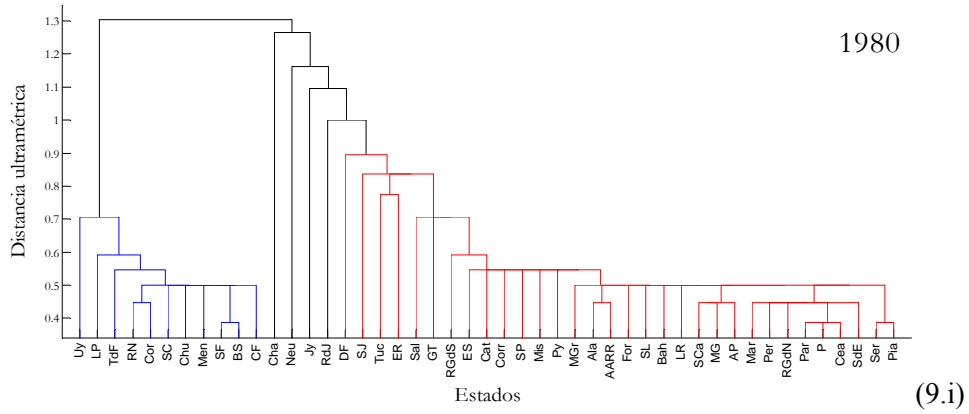
Fuente: elaboración propia.

A fin de avanzar en el estudio de la dinámica de *clusters*, se representaron los AJ para distintos períodos temporales y diferentes ventanas de análisis. El Gráfico 9 exhibe los AJ correspondientes a ventanas temporales de 20 años. El año señalado en cada panel indica el año de finalización de la ventana¹².

Hacia los ochenta puede observarse la conformación de dos grupos. Por un lado, un grupo más reducido y compacto de economías de alto desempeño cuyas conexiones se mantienen estables a lo largo de todo el período de análisis; por otro, un enorme grupo de economías de bajo desempeño integrado por regiones cuyas distancias diferían enormemente. Después de la implementación del Mercosur, la figura sugiere la aparición de un tercer grupo de desempeño que se desprende del *cluster* de más bajo desempeño económico. El Cuadro 3 resume el comportamiento de los diferentes estados, clasificándolos según el régimen al cual pertenecían en cada espacio temporal. La Rioja, San Luis, Rio Grande do Sul y Distrito Federal se apartan definitivamente del grupo de baja *performance* hacia los años noventa (puede observarse a la izquierda del tercer panel del Gráfico 9). Junto con Río de Janeiro, forman un tercer *cluster* visualizado en el árbol correspondiente a 1995.

¹² Por una cuestión espacial, los restantes árboles para ventanas de 15 y 30 años, y los correspondientes a los años 1985 y 2000 para el caso de ventanas de 20 años, se representan en el Apéndice.

Gráfico 9. AJ para el total de regiones, ventanas de 20 años.



Fuente: elaboración propia.

Más interesante aún es el hecho de que, hacia el año 2000, estas regiones se acercan en sus dinámicas al grupo de alto desempeño¹³. Tomando en consideración el primer y el último árboles del gráfico, puede verse cómo la disposición de los dos *clusters* ha variado: un mayor número de economías se ha incorporado al grupo de los “ricos”, incrementando el número de regiones en el grupo de alto desempeño y disminuyendo el correspondiente al grupo de bajo desempeño; las distancias intragrupo se han reducido, a no ser que se incorporen como economías de alto desempeño a los de desempeño medio recientemente unidos a este último conglomerado, en cuyo caso la distancia intragrupo aumenta; en el medio del horizonte temporal considerado puede observarse la conformación de un tercer *cluster* que posteriormente converge hacia el grupo “rico”; y, por último, la distancia entre grupos es ahora mayor que al inicio del período. Ningún estado perteneciente al grupo de las regiones “ricas” ha pasado a regímenes de menor desempeño.

El tercer *cluster* de desempeño medio observado en el AJ para la totalidad de las regiones en el Gráfico 4 desaparece al tomar la última ventana temporal de 20 años. Esto podría estar indicando la convergencia en regímenes del grupo medio hacia el grupo de alta *performance*.

Cuadro 3. Conglomerados de desempeño (1961-2005) tomando ventanas de 20 años.

| Desempeño | 1980 | 1985 | 1990 | 1995 | 2000 | 2005 |
|--------------|---|---|--|---|---|---|
| Alto | Uy, LP, TdF, RN, Cor, SC, Chu, Men, SF, BS, CF | Neu, Uy, TdF, RN, Chu, SC, LP, Cor, SF, Men, BS, CF | BS, Men, CF, Cor, RN, Chu, SF, LP, TdF, Neu, SC, Uy | BS, Cor, CF, SF, Men, Chu, RN, Uy, LP, TdF, Neu, SC | CF, Uy, BS, Men, Chu, RN, Neu, TdF, SC, LP, LR, DF, RdJ, RGdS, SL | LR, DF, RdJ, SC, Neu, TdF, SL, Men, LP, RN, Uy, Chu, BS, SF, Cor, CF, RGdS |
| Medio | | | LR, SL, RGdS | LR, SL, DF, RGdS, RdJ | SJ, ER, Cat | |
| Bajo | DF, SJ, Tuc, ER, Sal, GT, RGdS, ES, Cat, Corr, SP, Mis, Py, MGr, Ala, AARR, For, SL, Bah, LR, Sca, MG, AP, Mar, Per, RGdN, Par, P, Cea, SdE, Ser, Pia | Cha, ER, SJ, LR, RGdS, GT, Sal, ES, Py, MGr, Ala, AARR, Mar, SdE, Mis, Cat, AP, Corr, Ser, Bah, Pia, SL, For, RGdN, SP, Cea, P, Par, Sca, Per, MG | Cat, Corr, For, AARR, AP, Cea, MG, RGdN, Per, P, MGr, Mar, ES, SdE, Mis, Ser, Py, SP, Par, Ala, Pia, Bah, Sal, SJ, Cha, GT | Corr, Mis, AP, P, Cea, Per, ES, MG, RGdN, Pia, MGr, Mar, Ser, Bah, AARR, Ala, Py, For, SdE, SP, Par, GT, Sal, Cha, Jy | Par, Jy, SP, Ala, Cha, Py, Mis, SdE, Ser, Sal, For, AARR, Bah, MG, Corr, RGdN, MGr, Per, GT, Cea, Mar, ES, AP, Pia, P | Par, ES, MGr, SP, GT, MG, Ala, Cha, Per, Cea, Py, Ser, Mar, RGdN, Bah, Jy, SdE, Sal, Mis, For, Corr, AARR, AP, Pia, P |
| No agrupados | Cha, Neu, Jy, RdJ | Tuc, Jy, RdJ, DF | ER, Sca, DF, RdJ, Jy | SJ, ER, Sca, Tuc, Cat | Sca, Tuc | Sca, Tuc, SJ, Cat, ER |

Fuente: elaboración propia.

¹³ Aunque no se presentan en este trabajo por una cuestión espacial, adicionalmente se calcularon las distancias a lo largo de todo el período para los 18 países de mejor *performance*, incorporando este *cluster* de desempeño medio a las 11 economías de mejor *performance*. Puede verse cómo las distancias de este grupo aumentan durante los años 2000 a causa de la incorporación de países de más baja *performance* al grupo de desempeño alto.

Los árboles construidos para ventanas de 15 y 30 años (ver Apéndice) refuerzan estas conclusiones. Nuevamente, el AJ representado para los años 1991 y 1998 en ventanas de 30 años muestra el desprendimiento de las regiones que se incorporan al grupo de alto desempeño y de ciertas regiones que exhiben, luego, un comportamiento oscilante, como el caso de Entre Ríos y San Juan, que parecen acortar sus distancias respecto del grupo de alto desempeño. Otra región de comportamiento dinámico aislado es Neuquén, la cual también tiene un acercamiento al grupo de regiones “ricas” al considerar ventanas de 15 años.

Reiteradamente, los saltos solo ocurren de regiones “pobres” a “ricas” y no a la inversa. Como mencionara Quah (1993) para el caso de la comparación entre países, las probabilidades de que regiones “ricas” se transformen en “pobres” parecen ser extremadamente bajas, mientras que la probabilidad de que suceda lo inverso es mayor. Asimismo, también parece verificarse la idea de que las regiones de ingreso medio poseen un comportamiento más errático. Entre Ríos, San Juan, Santa Catarina, por ejemplo, muestran una tendencia oscilante a lo largo de todo el período aproximándose por momentos a las regiones de alto desempeño, pero sin terminar de conformar el *cluster* de los “ricos”.

4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se estudió la convergencia regional para el caso del Mercosur bajo un método no tradicional, utilizando técnicas no paramétricas de clusterización y bajo el concepto de régimen de desempeño, por el cual se establece la convergencia entre dos regiones por la aproximación de sus dinámicas de regímenes, independientemente de la existencia de un estado estacionario o de una estructura subyacente asumida. Los resultados mostrados se presentan como evidencia a favor de la convergencia regional por clubes de desempeño para el caso de los estados que conforman el cono sur de América Latina. Los ejercicios realizados mostraron la conformación de dos grupos de regiones, las llamados “ricas” y “pobres”. En el primer caso, los estados que conformaron el grupo al inicio del horizonte temporal de análisis, permanecieron en el conglomerado de alto desempeño durante los 44 años siguientes, mostrándose como el grupo más compacto. En el caso del grupo de bajo desempeño, algunas de las economías que guardaban un comportamiento más alejado del promedio integraron un tercer *cluster* hacia los años noventa del siglo XX y parecen estar convergiendo en sus dinámicas de regímenes hacia el grupo de alto desempeño. Sin embargo, los restantes estados considerados “pobres” han visto disminuida la distancia intragrupo, sugiriendo una mayor divergencia entre este conglomerado y el de alto desempeño. Por su parte, un grupo reducido de estados de medianos ingresos muestran un comportamiento oscilante y aislado del resto.

Si bien Brasil ha mejorado su *performance* económica en los últimos años, convirtiéndose en una de las economías emergentes más importantes del mundo, Argentina y Uruguay han sido, históricamente, países de mayores niveles de producto per cápita. Por dicha razón, los estados brasileños en general, parecieran poseer un desempeño menor que las provincias argentinas y el estado uruguayo. De la misma forma ha sucedido con Paraguay, la nación de menor producto per cápita del Mercosur. No obstante, han sido algunos de los estados brasileños (Rio Grande do Sul, Río de Janeiro y Distrito Federal) los que han mostrado un mayor dinamismo, principalmente a partir de la década del 1990, aproximándose al grupo de

alto desempeño. Otros, tales como Santa Catarina, Paraná o Espírito Santo, han visitado los regímenes de alto desempeño a partir del 2000 y si bien no han logrado formar parte del grupo de alto desempeño, se abren interrogantes respecto del comportamiento futuro, dado que desde entonces Brasil ha tenido un crecimiento continuo, concentrado principalmente en la región industrial sur del país.

El interrogante es cómo podría estar jugando la constitución del Mercosur en este aparente proceso de convergencia por clubes de desempeño. Según Daher (2000), el comercio intrazonal comenzó teniendo un fuerte sesgo industrial, a través del corredor que liga São Paulo-Buenos Aires (a la que podría anexarse la región del Uruguay) y Buenos Aires-Santiago (Chile). Este corredor ha delimitado dos áreas de relevancia en el caso argentino y una en el caso brasileño. Por una parte, el Nuevo Cuyo, integrado por Mendoza, San Juan y San Luis; por otra, gran parte de la Región Pampeana, siendo Buenos Aires, Capital Federal, Córdoba y Santa Fe las áreas de mayor influencia en el caso argentino. Nótese que, a excepción de San Juan y San Luis (provincias que han mostrado una mejora en su *performance*), estas regiones pertenecían ya al grupo de alto desempeño mucho antes de la conformación del Mercosur. En el caso de Brasil, el área de relevancia ocupa los estados de Distrito Federal, Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul y São Paulo. Salvo este último, todos los demás estados vieron un cambio positivo en su dinámica de regímenes a partir de los años noventa del siglo XX.

El caso de São Paulo llama especialmente la atención. A pesar de ser un estado de relevancia económica y de encontrarse bien posicionado en los estudios de convergencia regional brasileña (Gondim *et al.*, 2007; Magalhães da Costa, 2009), en el presente trabajo permanece en el grupo de baja *performance* económica. Esto puede deberse a dos causas. En primer lugar, relativo a los niveles promedios de Argentina, São Paulo posee aún un PBI per cápita reducido a pesar de tener niveles altos en referencia al promedio brasileño. En segundo lugar, este estado enfrenta un enorme problema de densidad poblacional, aportando más del 35% de la población total del corredor comercial mencionado (Daher, 2000), junto con una disminución en la participación relativa de la producción y las exportaciones de la región sur del país, lo cual hace necesario el replanteamiento de una política de reversión en la concentración geográfica de este estado (Diniz, 2003). Por lo demás, las restantes regiones del sur y suroeste (entre las que se encuentran Rio Grande do Sul, Distrito Federal y Santa Catarina) han visto incrementada su participación tanto en el PBI regional como en el volumen comercial. En este sentido, el Mercosur ha sido para el caso del Brasil una herramienta de refuerzo de la localización sur por su posicionamiento geográfico. Es posible que la dicotomía norte vs. sur de Brasil mencionada anteriormente (Bosch Mossi *et al.*, 2003; Serra *et al.*, 2007) se vea reforzada a partir de la integración económica.

En resumen, las regiones mejor posicionadas de Brasil mostraron un proceso de convergencia interregional de dinámica de regímenes con las regiones más ricas de Argentina y Uruguay, mientras que Paraguay, las regiones del norte brasileño y las provincias argentinas históricamente más retrasadas, permanecen en estados de baja *performance* económica, reduciendo la distancia intragrupo pero evidenciando un proceso de divergencia respecto del grupo de alto desempeño. El resultado de convergencia por clubes de desempeño aquí encontrado se muestran en concordancia con la evidencia hallada por Brida *et al.* (2011) para el

caso de las entidades federativas mexicanas y Brida *et al.* (2010) para el de las provincias argentinas, llamando la atención respecto de la frecuente evidencia a favor de los procesos de polarización en las economías latinoamericanas.

El método utilizado plantea como principal restricción la necesidad de contar con un alto número de observaciones (series de tiempo completas). Por otro lado, y en este caso particular de análisis, los resultados encontrados son sensibles a la definición de régimen, basada en dos variables macroeconómicas cuantitativas (descriptoras de procesos de crecimiento). Si bien esto puede ser interpretado como una limitación, se trata de un punto de partida fundamental para una futura agenda de investigación, donde se incorporen variables de carácter cualitativo, que reflejen procesos de *catching-up* en términos de desarrollo económico.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue realizado en el marco de los proyectos “Le attrazioni culturali e naturali come motore dello sviluppo turistico. Un’analisi del loro impatto economico, sociale e culturale” (financiado por la Provincia Autonoma di Bolzano, Research Funds 2009) y “Economic growth, regime convergence and clusters analysis” (financiado por la Libera Università di Bolzano). Los autores agradecen los comentarios a versiones anteriores que realizaron colegas participantes en la XLVII Reunión Anual de la AAEP, celebrado en la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco (Trelew) del 14 al 16 de noviembre de 2012, y en los seminarios de investigadores del Departamento de Economía de la Udelar y de la Universidad ORT Uruguay, en Montevideo, así como a los árbitros anónimos. Todos estos aportes mejoraron nuestro trabajo. Los errores remanentes son responsabilidad de los autores.

REFERENCIAS

- Aghion, P.; Howitt, P. (1998). *Endogenous Growth Theory*. Cambridge: MIT Press.
- Arrufat, J.L.; Figueras, A.J.; Blanco, V.J.; De la Mata, M.D. (2005). Análisis de la movilidad regional en Argentina: un enfoque basado en las cadenas de Markov. *Anales de la Asociación Argentina de Economía Política*. Disponible en <http://www.aaep.org.ar>
- Azzoni, C.R. (2001). Economic growth and regional income inequality in Brazil. *The Annals of Regional Science*, 35, 133–152.
- Barrientos Quiroga, P.A. (2011). Convergence Clubs in Latin America: A Historical Approach. *Development Research Working Paper Series* (1), University of Aarhus.
- Barro, R. (1991). Economic Growth in a cross section of Countries. *Quarterly Journal of Economics*, 106(2), 407–443.
- Barro, R.; Sala-i-Martin, X. (1992). Convergence. *Journal of Political Economy*, 100, 223–251.
- Barro, R.; Sala-i-Martin, X. (1995). *Economic Growth*. New York: McGraw-Hill.
- Blyde, J. (2006). Convergence Dynamics in Mercosur. *Journal of Economic Integration*, 21(4), 784–815.
- Bosch Mossi, M.; Aroca, P.; Fernández, I.J.; Azzoni, C.R. (2003). Growth Dynamics and Space in Brazil. *International Regional Science Review*, 26(3), 393–418.
- Brida, J.G. (2008). The dynamic regime concept in Economics. *International Journal of Economic Research*, 5(1), 55–76.
- Brida, J.G.; Garrido, N. (2006). Exploring two inflationary regimes in Latin-American economies: a binary time series análisis. *International Journal of Modern Physics*, 17(1). Disponible en: <http://ssrn.com/abstract=785704>

- Brida, J.G.; Garrido, N.; London, S. (2011). Estudio del Desempeño Económico Regional: el caso Argentino. WP2011-02 Serie de Documentos de Trabajo en Economía UCN. Disponible en: <http://ideas.repec.org/p/cat/dtecon/dt201102.html>
- Brida, J.G.; London, S.; Risso, A.W. (2010). Clubes de desempeño económico en los países de América: 1955-2003. *Revista CEPAL*, 101, 39–57.
- Brida, J.G.; Matesanz, D.; Risso, W.A. (2009). Estructura Jerárquica y Dinámica en los Mercados Cambiarios Latinoamericanos. *Investigación Económica*, LXVIII(267), 115–157.
- Brida, J.G.; Pereyra, J.S.; Puchet Anyul, M.; Risso, W.A. (2011). Regímenes de desempeño económico y dualismo estructural en la dinámica de las entidades federativas de México, 1970-2006. Documentos de Trabajo 10/11. Montevideo: Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Sociales, Universidad de la República.
- Brida, J.G.; Puchet Anyul, M.; Punzo, L.F. (2003). Coding economic dynamics to represent regime dynamics: a teach-yourself exercise. *Structural Change and Economic Dynamics*, 14(2), 133–157.
- Brida, J.G.; Punzo, L.F. (2008). Multiregime dynamics: modelling and statistical tools. *Brazilian Journal of Business Economics*, 8(1), 15–28.
- Brida, J.G.; Risso, W.A. (2009). Dynamic and Structure of the Italian Stock Market based on returns and volume trading. *Economics Bulletin*, 29(3), 2420–2426.
- Camarero, M.; Flores, R.G.; Tamarit, C. (2008). A “SURE” Approach to Testing for Convergence in Regional Integrated areas: An Application to Output Convergence in Mercosur. *Journal of Economic Integration*, 23(1), 1–23.
- Capello, M.; Figueras, A.; Freille, S.; Moncarz, P. (2011). The role of federal transfers in regional convergence in human development indicators in Argentina. Disponible en: <http://ssrn.com/abstract=1773080>
- Carton Madura, C.; Guzmán Villagrán, L. (2007). Integración regional, capital humano y convergencia económica: las experiencias del Mercosur y del Tlcan. En *Desarrollo regional y globalización: estudios de casos aplicados a América Latina*. Ciudad Juárez: Instituto de Ciencias Sociales y Administración (ICSA), Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.
- Daher, A. (2000). Regiones metropolitanas binacionales en el Mercosur. *Revista EURE*, XXVI(78), 103–122.
- De Long, B. (1997). Slouching towards utopia? The economic history of the 20th century. Disponible en: http://www.j-bradford-delong.net/TCEH/Slouch_Old.html
- Diniz, C.C. (2003). Repensando la cuestión regional brasileña: tendencias, desafíos y caminos. *Revista EURE*, XXIX(88), 29–53.
- Durlauf, S.N.; Johnson, P. (1995). Multiple regimes and cross-country growth behavior. *Journal of Applied Econometrics*, 10(3), 365–84.
- Ferreira, A.H.; Diniz, C.C. (1995). Convergencia entre las rentas per cápita estatales en Brasil. *Revista EURE*, XXI (62), 17–31.
- Figueras, A.J.; Arrufat, J.L.; De la Mata, M.D.; Álvarez, S. (2004). Convergencia regional: un estudio sobre indicadores de tendencia. *Anales de la Asociación Argentina de Economía Política*. Disponible en: www.aaep.org.ar
- Figueras, A.J.; Arrufat, J.L.; Regis, P.J.; (2003). El fenómeno de la convergencia regional: una contribución. *Anales de la Asociación Argentina de Economía Política*. Disponible en: www.aaep.org.ar
- Galor, O. (1996). Convergence? Inferences from theoretical models. *The Economic Journal*, 106(437), 1056–1069.
- Gondim, J.L.B.; Barreto, F.A.; Carvalho, J.R. (2007). Condicionantes de Clubes de Convergência no Brasil. *Estudos Economicos*, 37(1), 71–100.
- Heckscher, E. (1919). L’effet du commerce international sur la répartition des revenus. En Lassudrie-Duchêne Eds. (1972): *Echange international et Croissance*. Paris: Economica.

- Jerzmanowski, M. (2006). Empirics of hills, plateaus, mountains and plains: A Markov-switching approach to growth. *Journal of Economic Development*, 81, 357–385.
- Johnson, P.A. (2000). A nonparametric analysis of income convergence across the US States. *Economics Letters*, 69, 219–223.
- Krugman, P. (1991). *Geography and Trade*. Cambridge: MIT Press.
- Lucas, R.E. (1988). On the Mechanics of Economic Development. *Journal of Monetary Economics*, 22, 3–42.
- Madariaga, N.; Montout, S.; Ollivaud, P. (2004). Regional Convergence, Trade Liberalization and Agglomeration of Activities: An Analysis of NAFTA and MERCOSUR Cases. Paris: Cahiers de la MSE, Maison des Science Economiques. Université de Paris Panthéon-Sorbonne.
- Magalhães da Costa, L. (2009). *Análise do processo de convergência de renda nos estados brasileiros: 1970-2005* (tesis inédita de maestría). Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas.
- Mankiw, N.G.; Romer, D.; Weil, N.D. (1992). A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 407–437.
- Mantegna, R.N. (1999). Hierarchical Structure in Financial Markets. *The European Physical Journal B*, 11, 193–197.
- Marina, A; Garrido, N.; Sotelsek, D. (2002). Dinámica de la distribución del producto a través de las provincias argentinas, 1970-1995. *Estudios de Economía Aplicada*, 20(2), 403–421.
- Moncayo. E. (2004). El debate sobre la convergencia económica internacional e interregional: enfoques teóricos y evidencia empírica. *Revista EURE*, XXX (90), 7–26.
- Ohlin, B. (1933). *Interregional and International Trade*. Cambridge: Harvard University Press.
- Onnela, J. (2002). *Taxonomy of Financial Assets* (tesis inédita de maestría). Dpt. of Electrical and Communications Engineering, Helsinki University of Technology.
- Pritchett, L. (2000). Understanding Patterns of Economic Growth: Searching for Hills among Plateaus, Mountains and Plains. *The World Bank Economic Review*, 14(2), 221–250.
- Quah, D. (1993). Empirical cross-section dynamics in economic growth. *European Economic Review*, 37, 426–434.
- Quah, D.T. (1996). Twin peaks: growth and convergence in models of distribution dynamics. *The Economic Journal*, 106(437).
- Quah, D.T. (1997). Empirics for growth and distribution: stratification, polarization and convergence clubs. *Journal of Economic Growth*, 2(1).
- Ramal, R.; Toulouse, G.; Virasoro, M.A. (1986). Ultrametricity for Physicists. *Review of Modern Physics*, 58(3), 765–788.
- Ramón-Berjano, C. (2002). Convergence of regional disparities in Argentina and Brazil: the implications for Mercosur. The Royal Institute of International Affairs Paper.
- Romer, P.M. (1989). Human Capital and Growth: Theory and Evidence, *NBER Working Paper Series*, nº 3173.
- Ros, J., (2001). *Development Theory and the Economics of Growth*. Michigan: University of Michigan Press.
- Russo, J.L.; Delgado, F.C. (2000). Evolución de la convergencia y disparidades provinciales en Argentina. *Revista de Estudios Regionales*, 57, 151–174.
- Serra, M.I.; Pazmino, M.F.; Lindow, G.; Sutton, B; Ramírez, G. (2006). Regional Convergence in Latin America, *IMF Working Paper*, WP/06/125.
- Solow, R. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*, 70, 65–94.
- Stolper, W.F.; Samuelson, P. (1941). Protection and Real Wages. *Review of Economic Studies*, 9.
- Utrera, G.; Koroch, J. (1998). Convergencia: evidencia empírica para las provincias argentinas (1953-1994). *Anales de la Asociación Argentina de Economía Política*. Disponible en: www.aep.org.ar

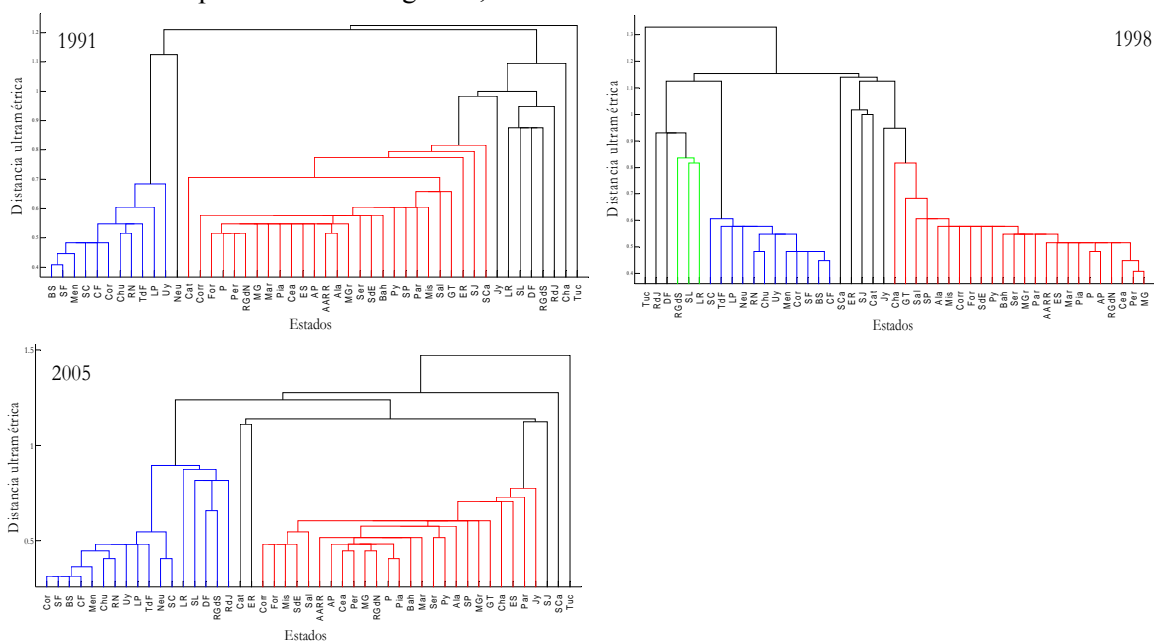
APÉNDICE

Tabla A.1. Código de las regiones analizadas.

| Región | Código | Región | Código |
|---------------------|--------|------------------------------------|--------|
| Argentina | | Brasil | |
| Capital Federal | CF | Acre, Amazonas, Rondônia y Roraima | AARR |
| Buenos Aires | BS | Alagoas | Ala |
| Catamarca | Cat | Amapá y Pará | AP |
| Córdoba | Cor | Bahia | Bah |
| Corrientes | Corr | Ceará | Cea |
| Chaco | Cha | Distrito Federal | DF |
| Chubut | Chu | Espírito Santo | ES |
| Entre Ríos | ER | Goiás y Tocantins | GT |
| Formosa | For | Maranhão | Mar |
| Jujuy | Jy | Minas Gerais | MG |
| La Pampa | LP | Mato Grosso | MGr |
| La Rioja | LR | Paraíba | P |
| Mendoza | Men | Pernambuco | Per |
| Misiones | Mis | Piauí | Pia |
| Neuquén | Neu | Paraná | Par |
| Río Negro | RN | Rio de Janeiro | RdJ |
| Salta | Sal | Rio Grande do Norte | RGdN |
| San Juan | SJ | Rio Grande do Sul | RGdS |
| San Luis | SL | Santa Catarina | Sca |
| Santa Cruz | SC | Sergipe | Ser |
| Santa Fe | SF | São Paulo | SP |
| Santiago del Estero | SdE | Uruguay | Uy |
| Tucumán | Tuc | | |
| Tierra del Fuego | TdF | Paraguay | Py |

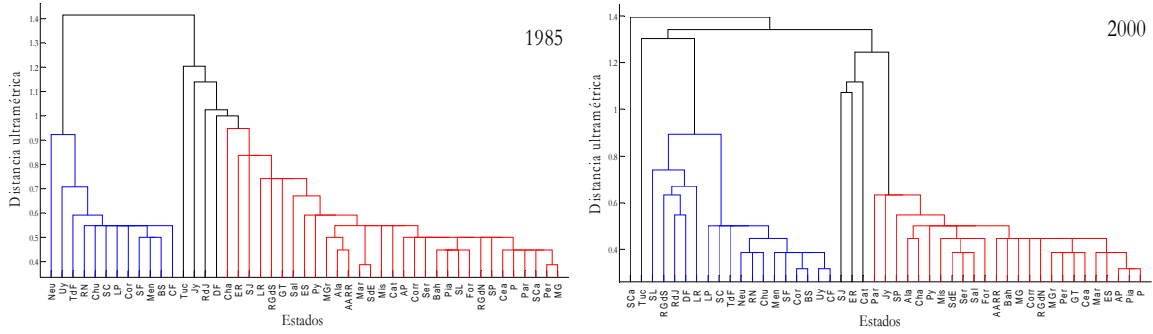
Fuente: elaboración propia.

Gráfico A.1. AJ para el total de regiones, ventanas de 30 años.



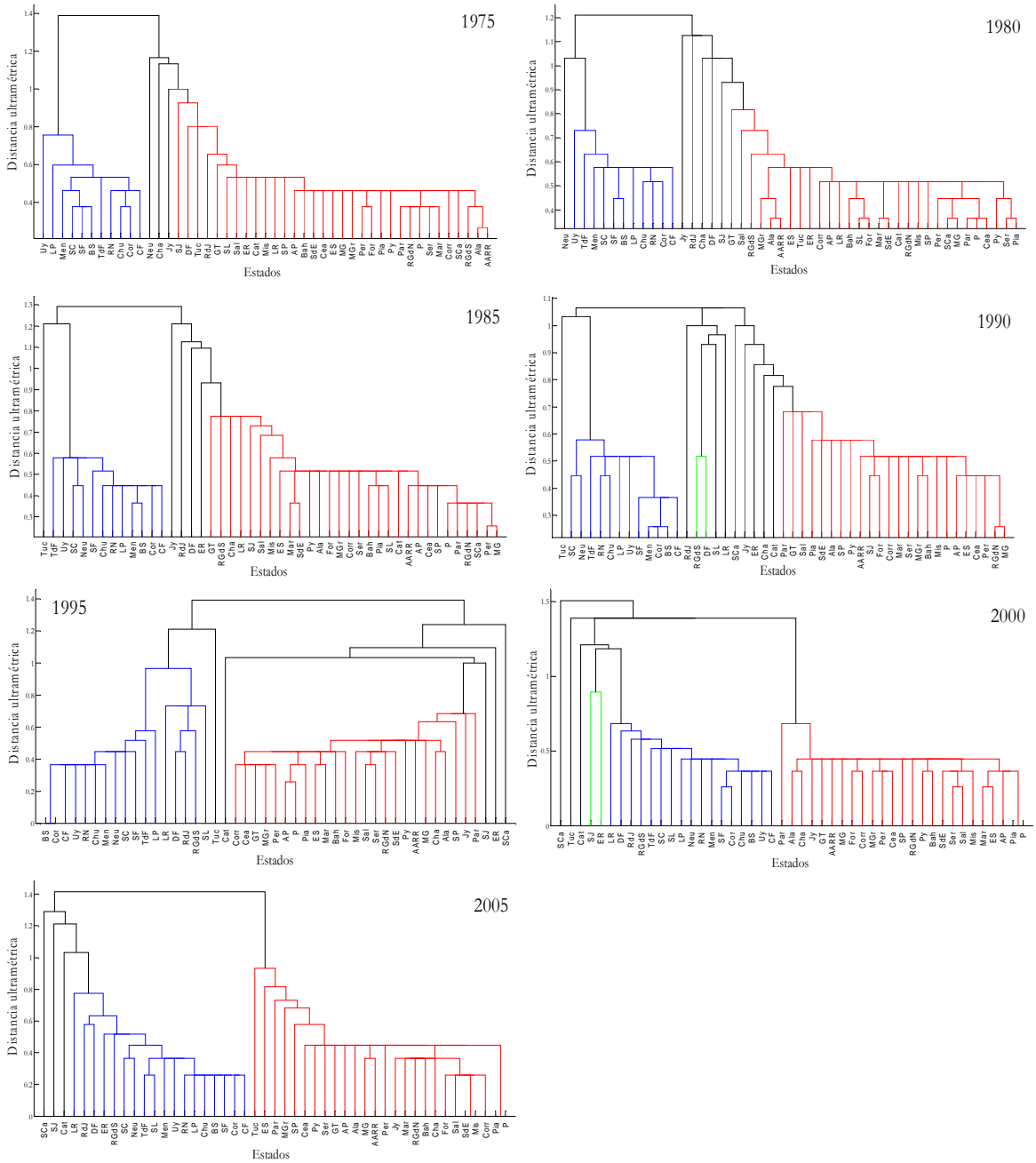
Fuente: elaboración propia.

Gráfico A.2. AJ para el total de regiones, ventanas de 20 años.



Fuente: elaboración propia.

Gráfico A.3. AJ para el total de regiones, ventanas de 15 años.



Fuente: elaboración propia.



Artificial Neural Networks for Predicting Real Estate Prices

NÚÑEZ TABALES, JULIA M.

Faculty of Economics, University of Cordoba (Spain)

Correo electrónico: es2nutaj@uco.es

CARIDAD Y OCERIN, JOSÉ MARÍA

Faculty of Economics, University of Cordoba (Spain)

Correo electrónico: ccjm@uco.es

REY CARMONA, FRANCISCO J.

Faculty of Economics, University of Cordoba (Spain)

Correo electrónico: jnt@uco.es

ABSTRACT

Econometric models, in the estimation of real estate prices, are a useful and realistic approach for buyers and for local and fiscal authorities. From the classical hedonic models to more data driven procedures, based on Artificial Neural Networks (ANN), many papers have appeared in economic literature trying to compare the results attained with both approaches. We insist on the use of ANN, when there is enough statistical information, and will detail some comparisons to hedonic modelling, in a medium size city in the South of Spain, with an extensive set of data spanning over several years, collected before the actual downturn of the market. Exogenous variables include each dwelling's external and internal data (both numerical and qualitative), and data from the building in which it is located and its surroundings. Alternative models are estimated for several time intervals, and enabling the comparison of the effects of the rising prices during the bull market over the last decade.

Keywords: house prices; artificial neural networks (ANN); valuation; econometric modelling.

JEL classification: C45; C51; E37.

MSC2010: 62P20.

Redes neuronales artificiales para la predicción de precios inmobiliarios

RESUMEN

Los modelos econométricos en la valoración de precios inmobiliarios constituyen una herramienta útil tanto para los compradores como para las autoridades locales y fiscales. Desde los modelos hedónicos clásicos hasta los planteamientos actuales a través de redes neuronales artificiales (RNA), han tenido lugar numerosas aportaciones en la literatura económica que tratan de comparar los resultados de ambos métodos. Insistimos en el empleo de RNA en el caso de disponer de suficiente información estadística. En este trabajo se aplica dicha metodología en una ciudad de tamaño medio situada en el sur de España, utilizando una extensa muestra de datos que comprende varios años precedentes a la crisis actual. Las variables utilizadas –tanto cuantitativas como cualitativas– incluyen datos externos e internos de la vivienda, del edificio en el que está localizada, así como de su entorno. Se construyen varios modelos alternativos para distintos intervalos de tiempo, siendo capaces de estimar los efectos de los precios crecientes del mercado alcista durante la década pasada.

Palabras clave: precios de la vivienda; redes neuronales artificiales (RNA); valoración; modelos econométricos.

Clasificación JEL: C45; C51; E37.

MSC2010: 62P20.



1. INTRODUCTION

During last decade, Spain presented a seller's real estate market. There is a strong tradition of home ownership in the country, coupled with fiscal stimuli and low interest rates associated with the euro zone. Prices have continuously gone up, and a growing part of the family's income was devoted to paying mortgages and housing related costs. This trend has come to an abrupt end in 2008, causing turmoil in the country's economy quite dependent on the building industry. In this context, an objective way to assess the prices of properties coming to the market is needed. The case study is presented with data before the downturn, as in the last years prices have been falling and the activity in the markets has slowed to nearly a standstill. Also, the market is distorted by several economic factors that, hopefully, will dwindle in the future: the large number of unsold properties in the hand of building companies and in the banking sector (due to foreclosures and to the bankruptcy of many builders), and the difficulty to access to mortgages and credit. The number of transactions has also fallen restricting the sample sizes available in the following years. The demand for precise valuation models comes from different parties: buyers and sellers of family flats and second homes, agents in the real state sector, investors, realtors and financial institutions, and fiscal authorities at national and municipal levels. Hedonic and Artificial Neural Network (ANN) models could fill the gap with the additional benefit of their usefulness in detecting and measuring price changes, although they must be updated and maintained.

Real estate prices have been studied since the fifties, and two decades later, Rosen (1974) proposed the use of regression models, called 'hedonic models', and applied mainly in urban areas. Hedonic models aim is to estimate the price of a complex good, such as a dwelling, as a function of its characteristics. These characteristics cannot be separated and should be treated as a whole. They include attributes such as the size of the residence, or its internal structure, and variables related to its environment, such as the building properties, its surroundings, and so on. Some authors have also used hedonic models as a tool to obtain price indices. The original methodology was based on classical, usually linear, econometric models. Some time ago, ANN were introduced, to avoid the specification of a functional form relating the exogenous variables to the property's price. A clear advantage was achieved taking into account the non-linearity of the causal relations, and, at the same time, avoiding some econometric problems linked to linear functions, as the multicollinearity among the explanatory variables. Also, as it will be shown, the marginal prices obtained with ANN are more realistic than the classical hedonic prices. The price to be paid to use this more complex methodology is linked both to the mathematical difficulties to obtain the marginal prices with even simple network topologies, and to the need of a fairly large sample to obtain stable parameter estimates.

In Spain there are macroeconomic and sectorial statistics that aim to explain investments in building and in home purchases, but it is unusual to dispose of a model driven

methodology to estimate prices. ANN have been applied in several previous studies in the country, and we return to this approach to be used in a dynamic framework, applying it to a case study.

This paper begins with a review of the recent publications on ANN applied to real estate valuation, emphasizing the main works in this field. Then, the methodology is presented with a real data set in a medium sized city in the South of Spain, this case study spans over several years (from 2002 to 2006), to show the feasibility of the methods employed, the stability of the results and the effects of the existing bull market in that period. The models could be employed in the following years to measure the turnaround at the end of the last decade, with falling prices, trend that expands up to the present. The sample includes more than ten thousand transactions of flats and apartments. The procedures can be extended to other type of dwellings, such as industrial and commercial buildings, or to the leasing of properties. The difficulties encountered in the last few years are related to the collapse of the real estate market in most of Spain: the number of transactions has gone down to less than a tenth of any of the years considered, and the credit crunch and falling disposable incomes are affecting dramatically the sale prices lengthening the period to achieve the transactions. Also, the largest segment of the market is absorbed by the banking sector, which is trying to sell its own stock of mortgage foreclosures, contributing to the distortion of the prices. The building industry is almost stalling, and the fiscal authorities are having difficulties with their own valuations.

2. ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS: APPLICATION TO REAL ESTATE VALUATION

ANN models were introduced by McCulloch and Pitts (1943) as an alternative to algorithmic programming with some previous work by Karl Lashley in the twenties. In Rumelhart and McClelland (1986), an ANN is presented as a set of operators or neurons, with a small amount of storage capacity, connected numerically one-way by links called axons. Nodes operate with local data supplied through the axons, weighted with some parameters, w_{ij} , linking neurons i and j . A propagation rule establishes how inputs to a neuron are valued and processed. The basic model has an input layer, one or several hidden layers formed by non-observable variables, and an output layer containing the dependent variables. Like any model, the specification is the core task when using ANN: it is necessary to define the network topology (number of hidden layers, and the neurons in each of them), the propagation rule, the transformation of explanatory input variables, and so on. The activation function and the learning rule should also be specified. An excessive number of neurons can originate a lack of forecasting power, due to overparametrization. Computer time to estimate the ANN parameters, learning process, is becoming less relevant with the evolution of the speed in the equipment. There are several learning procedures to estimate the parameters; a widely used technique is the back-propagation method.

An ANN is like a non-linear regression or a multivariate regression model, with non-observable linking variables. Once the topology and the parameters of the network are specified, it can be presented as an ordinary statistical or econometric model. Neural networks are used with different purposes, such as the estimation of models, classification, forecasting, and so on. Here it is used as a modelling tool and as a practical alternative to the well-known econometric hedonic models. Also, it aims at forecasting the value of properties, so it can be used to measure the downturn occurred in the last few years in the real estate market.

Here we use a Multi-Layer Perceptron (MLP) network with one hidden layer, an input layer with the exogenous variables used in estimating prices of a property, and an output layer with the real prices. Several alternative topologies have been tried, with two hidden layers, and different number of neurons and activation functions. The best results have been obtained with the ANN that will be presented.

Table 1. Use of AI methods in real estate price estimation

| AUTHORS | DATE | GEOGRAPHICAL AREA |
|--------------------------|------|-------------------|
| Borst | 1991 | New England (USA) |
| Tay and Ho | 1992 | Singapore |
| Do and Grudnitski | 1992 | California |
| Collins and Evans | 1994 | UK |
| Worzala, Lenk and Silva | 1995 | Colorado |
| Mc Cluskey <i>et al.</i> | 1996 | Ireland |
| Rossini | 1997 | Australia |
| Bonissone and Cheetham | 1997 | USA |
| Haynes and Tan | 1998 | Australia |
| Cechin <i>et al.</i> | 2000 | Brasil |
| Karakozova | 2000 | Finland |
| Nguyen and Cripps | 2001 | Tennessee (USA) |
| Kauko <i>et al.</i> | 2002 | Finland |
| Limsombunchai | 2004 | New Zealand |
| Liu, Zhang and Wu | 2006 | China |
| Selim | 2009 | Turkey |
| Hamzaoui and Hernández | 2011 | Mexico |

Source: Elaborated by authors; from Gallego (2004)

Artificial Intelligence (AI) methods started to be applied to real estate prices two decades ago. Some studies are shown in Table 1. In Spain several papers have been presented by Caridad y Ceular (2001), García Rubio (2004), Gallego (2004), and Lara (2005), and some others using data from different urban areas.

3. MATERIAL AND METHODS

The estimation of the selling price of a flat or apartment is the main objective of the ANN approach, as an alternative to hedonic modelling. For this purpose quite a large sample is obtained in a medium size city of the South of Spain, covering its main urban area. Exogenous variables include internal data both about the dwelling and of the building and its location. In 2001 the population is composed of 130,563 properties in town, and over 75% of these are used

as main residence; about 14% unoccupied, and less than 10% can be classified as second or holiday residences. This set has augmented during the period analysed to 135,920 properties at the end of 2006.

Price data is recorded by the National Statistics Institute (INE), and by the municipality, for fiscal purposes; however they are not focused on precise valuation of individual properties, but on a spatial classification where average values are considered. The market intermediaries are the main source of reliable data, as they record the real selling price which can differ from the fiscal official figure. The main real estate company in the urban area considered is *Grupo Barin*, and it has supplied 10,124 cases of transactions distributed as follows: in 2002, 772 cases, in 2003, 1,685, in 2004, 1,399, in 2005, 3,380, and in 2006, 2,888. This firm cover the market in the whole city area, with 18 offices scattered through the town. A complementary sample was obtained from several smaller realtors. Table 2 shows the exogenous variables used. The price of the transactions are the real market price (not the declared price, nor the offer price), avoiding, thus duplicities in the data used.

Table 2. Exogenous variables and attributes

| INTERNAL | | | EXTERNAL | |
|--------------|---|--------------|----------|--|
| BASIC | Area Bedrooms Bath Complimentary baths Terrace (*) Communications (*) Wardrobes (*) Garage (*) Storage room(*) Climatization | | GENERAL | Building year Lift (*) Laundry (*) |
| | GENERAL | QUALITY | | |
| REFORMATIONS | | Reformed (*) | | |
| ORIENTATION | Orientation (*) | | LOCATION | Zone |
| ECONOMICS | Common expenses Market price | | | |

Source: Elaborated by authors

Some of these variables are numerical (for example, the number of bedrooms or bathrooms), while categorical information has been represented as binary (*) variables denoting the presence (1) or absence (0) of a facility, such as a garage, a store room, or different important characteristics. With the categorical data, several numerical indices (normalized in the 0-1 range) have been elaborated¹, to represent the general situation of the property, its quality or extensions, or its location (Table 3). The results have been validated and by real estate firms, consulted for this purpose, as a procedure of summarizing this information.

The ANN model for 2006 is presented in the next section. Then the corresponding developments for the previous four years are summarized, and all are compared with the results

¹ Richardson (1973); Saura (1995); Jaén and Molina (1995).

obtained during this period with the classical hedonic models. The model described, for the last year in the sample can be applied to measure the effect on prices with data from 2008 to 2012, while the models estimated for the previous years are used for temporal comparisons and to show the stability of the methodology.

Table 3. Indexes associated to each property

| | VARIABLES USED |
|---------------------|--|
| QUALITY INDEX | Floors, windows type, kitchen furniture and reformations |
| FACILITIES INDEX | Pool, tennis, garden |
| BUILDING INDEX | Age, lift, laundry |
| EXTERNAL DATA INDEX | Orientation, terrace |
| EXTRAS INDEX | Garage, storage |
| LOCATION INDEX | Geographical position within the city |

Source: Elaborated by authors

The classical hedonic models introduced by Rosen (1974) can be used as an alternative method. The estimation of prices of complex goods composed by several intermingled characteristics has been analysed using regression methods. This approach is useful when there is not enough statistical information, as neural networks usually require quite large samples. Some econometric problems arouse usually in hedonic models, been the more worrisome the multicollinearity always present when many variables linked to each property are introduced. The usual solutions to round the corresponding estimation difficulties, like using principal component regressions, or partial least squares procedures, or others, are an alternative, with a price to be paid related to the statistical properties of the estimators. Heteroskedasticity is also present in these regressions, but the main difficulty in applying hedonic models is related to the specification of the causal relations between some explanatory variables and prices. These relations are non-linear in part of the range of some of these, and there are interactions that are influenced by previously introduced variables in the models. ANN provide an attractive solution, easy to implement, and showing better results that hedonic models for different properties.

Trajan Neural Network software was employed in model estimation, as an alternative to Neuroshell 2. The former is considered more flexible and powerful when working with large set of data. For internal comparisons with classical hedonic models, EViews 7 was used. Some alternative ANN software, included with R language was also employed, and this can be a practical and cheap alternative to elaborate price models.

4. MODEL SPECIFICATION

A *MLP*, with one hidden layer² 6:6-6-1:1 was used with the following input variables: size of the property measured in square meters, age of the building, location index, extras index,

² The network topology selected, MLP, was decided after several alternatives had been discarded, following also Freeman and Skapura (1993), Haykin (1999), García Rubio (2004). Different number of

community expenses and quality index. They were selected after an identification process with several alternatives. The output layer includes only the transaction price, and there are six neurons in the hidden layer.

Trajan software was used with a linear activation function in the input layer and logistic activation function in the output layer. The error function selected was the residual sum of squares. The training set includes 80% of the sample, corresponding, in the last period, to 952 transactions, leaving the remaining 237 cases as a test set³. The training method employed is the Backpropagation (BP) procedure, with the following options: a random starting point was used for the parameters, with the default limits, a maximum of 5,000 iterations are allowed, with a learning rate of 0.1, and a moment term equal to 0.1. The error evolution is showed in Figure 1. As the training time can cause an excess in the fitting process, limiting the forecasting power of the ANN, the estimation process has been stopped at iteration 4,624, when the minimum residual sum of squares was almost attained. Tables 4 and 5 present the weights and thresholds between the input and the hidden layer neurons (N1 to N6) and between the hidden and output layer.

Figure 1. Evolution of the residual error during the training process

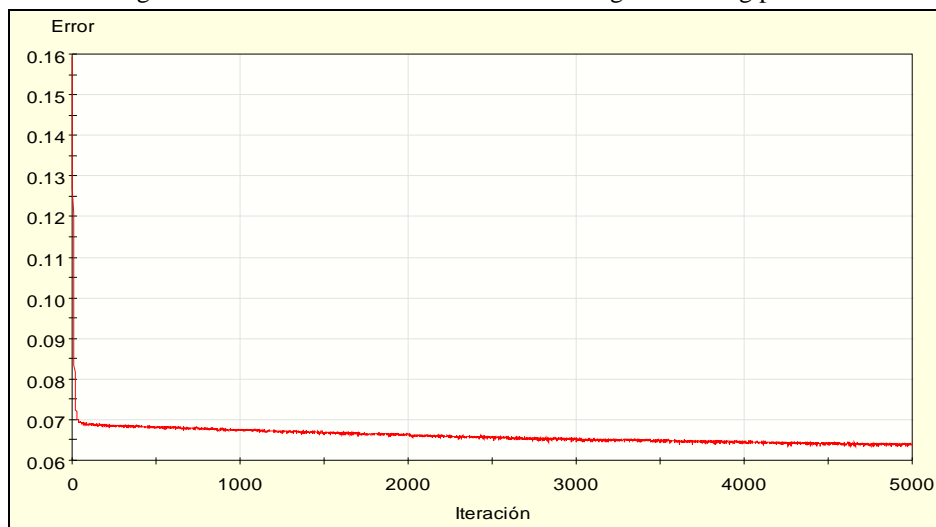


Table 4. Parameters between input and the hidden layer

| | N1 | N2 | N3 | N4 | N5 | N6 |
|------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Threshold | -0.8637 | -5.3193 | 0.8587 | 1.3877 | -0.8773 | -2.9494 |
| Area | 1.4581 | -2.4698 | -3.1902 | 0.8425 | -0.3820 | -0.6004 |
| Common expenses | 3.4714 | -1.6389 | 1.7720 | -0.5584 | 0.6896 | -1.0893 |
| Age | -0.0090 | -0.1852 | 0.8528 | 0.7126 | -1.2623 | 2.4097 |
| Extras index | 2.1949 | -1.4684 | -0.0846 | -0.2235 | -2.8127 | 1.4203 |
| Location index | -1.1403 | -0.7805 | -5.0060 | -1.5345 | 0.3433 | -2.8736 |
| Quality index | 0.3414 | -0.7721 | 0.2906 | 1.4205 | -1.0161 | -0.0384 |

hidden layers and neurons were also used; the results selected correspond to the considered best topology, and, also, it was stable for all the yearly subsamples.

³ All cases had no missing data -1189-.

Table 5. Parameters between the hidden and output layer

| | Prices |
|-----------|---------|
| Threshold | -0.9370 |
| N1 | 3.9678 |
| N2 | -3.9225 |
| N3 | -3.7264 |
| N4 | 1.8743 |
| N5 | 0.9303 |
| N6 | -2.5079 |

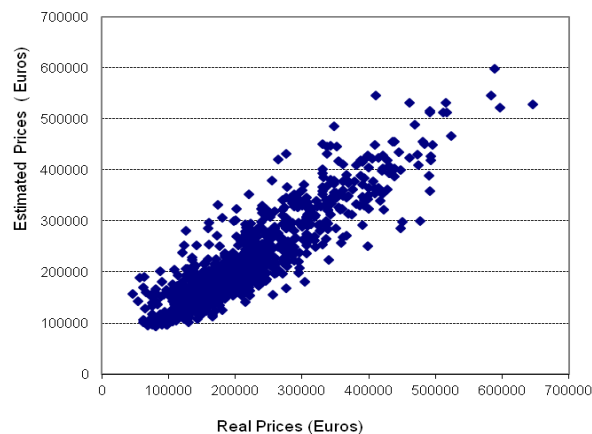
5. RESULTS

Sensitivity analysis allows the evaluation of the influence of each exogenous variable, using its errors ratio (Table 6), obtained as the error in the model without one of the explanatory variables compared to the error in the model including all the variables. As expected, the most important variable is area⁴ (1.2953), followed by the location index (1.2009), and the common expenses (1.1577) as shown in Table 6. The other three variables are less important, but if taken out of the model, the final results are less realistic. The determination coefficient ($R^2 = 86.05\%$) and the root mean square error ($RMSE = \text{€}9540.36$) are some goodness of fit measures. The mean absolute error (MAE) is $\text{€}28551.34$, measured in relative terms to the properties prices is 13.69%. In the scattergram (Figure 2) of the real versus the estimated price, it can be seen that the neural network model produces a good fit all over the spectrum of properties (this can seldom be achieved with classical hedonic models), without distortion at both extremes.

Table 6. Sensitivity analysis

| INPUT | RATIO | ORDER |
|----------------|--------|-------|
| Area | 1.2953 | 1 |
| Common E. | 1.1577 | 3 |
| Age | 1.0395 | 6 |
| Extras index | 1.0414 | 5 |
| Location index | 1.2009 | 2 |
| Quality index | 1.0644 | 4 |

Figure 2. Real and estimated prices



⁴ Different combinations of the exogenous variables were employed; in all cases, as expected, the property's size and location index presented the highest ratios.

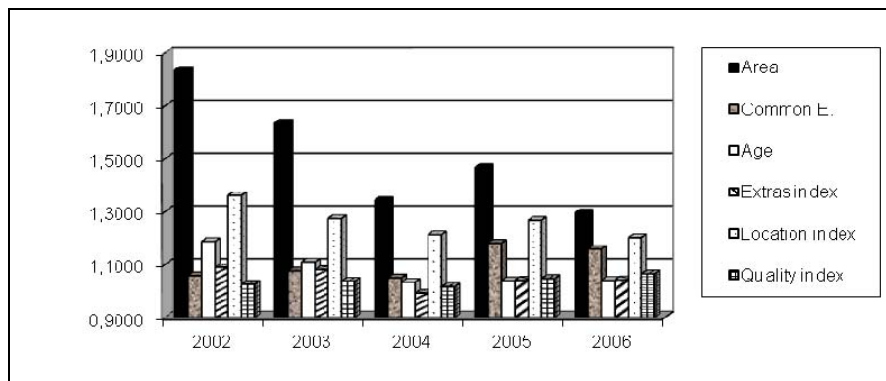
The ANN for the remaining years of the data set produces similar results, albeit with different values of the parameters. The topology of each network is stable over this period, as are the statistical measures of goodness of fit and absolute mean errors. Sample sizes employed are presented in Table 7; in all the models, 80% of the cases are used as training set, with similar tuning parameters.

Table 7. Sample size for the yearly models

| | CASES | TRAINING | TEST |
|------|-------|----------|------|
| 2002 | 470 | 376 | 94 |
| 2003 | 914 | 731 | 183 |
| 2004 | 791 | 633 | 158 |
| 2005 | 1686 | 1349 | 337 |
| 2006 | 1189 | 952 | 237 |

The endogenous variable in each network was the transaction price, and the exogenous variables were stable during the whole period. Sensitivity analysis allows the evaluation the input variable influence upon the dwelling's market price. In Figure 3, the variables are ordered with their relative influence, with some temporal variability. In each model the area variable appears in the first place, followed by the location of the property. Then a third variable that can be either the age of the building, the maintenance cost or the quality index. The rest of the variables show less influence.

Figure 3. Comparative sensibility analysis of the inputs



Different goodness of fit statistics is presented in Table 8, corresponding the sample from each year considered; the results are similar during the period considered. During the last years, with the collapse of the real estate market, the number of data available has fallen to such levels as to make the temporal comparisons difficult.

The determination coefficients (R^2) are similar every year, except for 2005. They are always larger than the R^2 of the classical hedonic econometric models (Table 9). The root mean square errors follow a similar pattern with mode variability at the end of the period considered, just before the market turnaround. Mean absolute error shows a growth trend, but the relative

errors (*RME*) remain stable, due to the increasing prices of the properties, in what was still a bull market.

Table 8. Goodness of fit measures for the yearly ANN models

| | <i>R</i> ² | <i>RMSE</i> | <i>RESIDUAL SE</i> | <i>MAE</i> | <i>RME</i> |
|-------------|-----------------------|-------------|--------------------|------------|------------|
| 2002 | 90.21% | 21652.25 | 21634.04 | 14900.48 | 13.78% |
| 2003 | 84.75% | 25884.77 | 25738.99 | 18999.93 | 14.75% |
| 2004 | 90.23% | 30983.78 | 28908.32 | 24157.36 | 16.26% |
| 2005 | 81.12% | 32825.44 | 32755.04 | 23562.59 | 13.82% |
| 2006 | 86.05% | 39540.36 | 39102.13 | 28551.34 | 13.69% |

RMSE: Root mean square error; Residual SE: Residual standard error; MAE: Mean absolute error; RME: Relative mean error

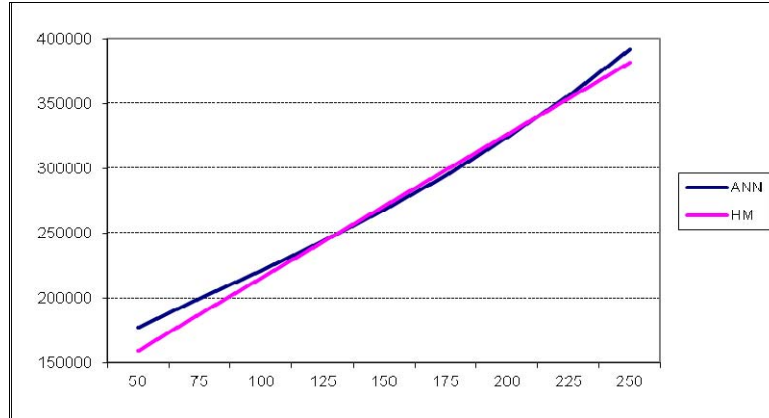
The classical hedonic models are estimated using the same exogenous variables. The estimations have been carried out with EViews 7 software, and it can be appreciated that the ANN approach produces better results. Of course, the neural networks have less degrees of freedom due to the larger number of parameters compared with the classical hedonic models. In this case, with quite large sample sizes, the ANN is to be recommended.

Table 9. Goodness of fit measures for the yearly classical hedonic models

| | <i>R</i> ² | <i>RMSE</i> | <i>RESIDUAL SE</i> | <i>MAE</i> | <i>RME</i> |
|-------------|-----------------------|-------------|--------------------|------------|------------|
| 2002 | 82.57% | 23887.05 | 23884.92 | 16118.19 | 14.91% |
| 2003 | 80.73% | 27951.62 | 27944.72 | 19861.95 | 15.42% |
| 2004 | 82.27% | 29414.24 | 29401.19 | 21734.29 | 14.63% |
| 2005 | 75.08% | 35156.87 | 35044.47 | 25124.25 | 14.74% |
| 2006 | 77.38% | 41645.43 | 41911.91 | 30579.18 | 14.45% |

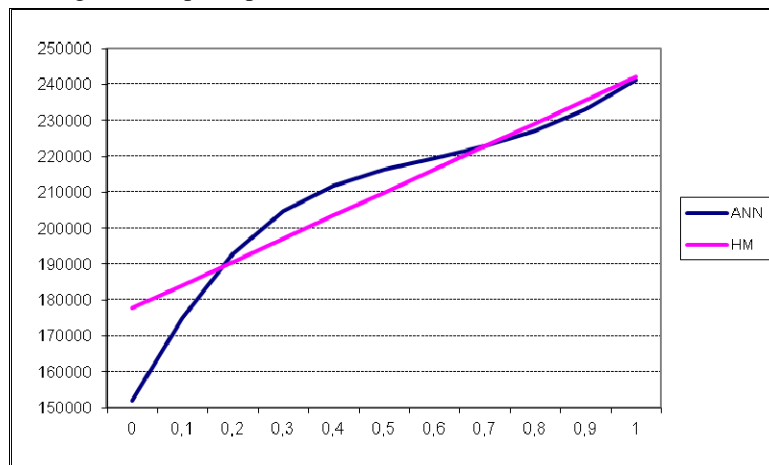
The advantage of the ANN approach over the classical hedonic methodology lies, not only in the more precise estimates of the transaction prices, but also on the results for the marginal prices associated to each of the characteristics of a property. In the classical econometric hedonic models the implicit prices are constant, which is not what a buyer or seller of a property can observe in the market. ANN, as non-linear adaptive models are more flexible. Once the topology is defined, marginal prices of the exogenous variable x_j can be obtained evaluating the function: $\partial Price / \partial x_j$. It is a cumbersome process that, nevertheless, allows the study of the evolution of the hedonic prices attributed to each exogenous variable. For example, to estimate the influence of an additional square metre upon the property price, as will be shown in Figure 4. The conclusions are in line with the results of García Rubio (2004) in a smaller city. The adaptability of the networks to the situations at both extremes of the size range is not possible with classical hedonic models.

Figure 4. Implicit prices (euros) associated to the dwelling surface (squared meters)



The location index takes into account the urban zone and the income level. Upper values correspond to better surroundings and higher income areas. In the hedonic model, an increase in 0.1 units in this index is valued at €6429.73. Being constant this marginal price is not very realistic, so it is necessary to estimate the corresponding implicit price using the neural network, as can be seen in Figure 5, compared to the classical hedonic price.

Figure 5. Implicit prices (Euros) associated to the location index



The influence of the location of the property shows a decreasing rate of increase at lower values of the location index, and then a stabilisation until an almost constant value for the best urban areas is reached.

The common expenses influence the valuation of each dwelling in a non-linear way; an additional euro in these expenses is linked to nearly 1.3 thousands euros in the value of the property. The neural network shows a stabilising influence. When the common expenses increase over a certain level, the implicit price is almost constant (Figure 6). The additional facilities at the property, such as an additional storage room and a parking place, are valued in a different way with the neural network than with the hedonic model, with more realistic values using ANN (Figure 7). When the number of years, since the property was built, is considered, the decrease in the implicit price is a decreasing concave function, with the neural network,

while the hedonic price does not show the real depreciation perceived by the buyers, showing a linear decrease over time (Figure 8).

Figure 6. Implicit prices (euros) associated to the common expenses (euros)

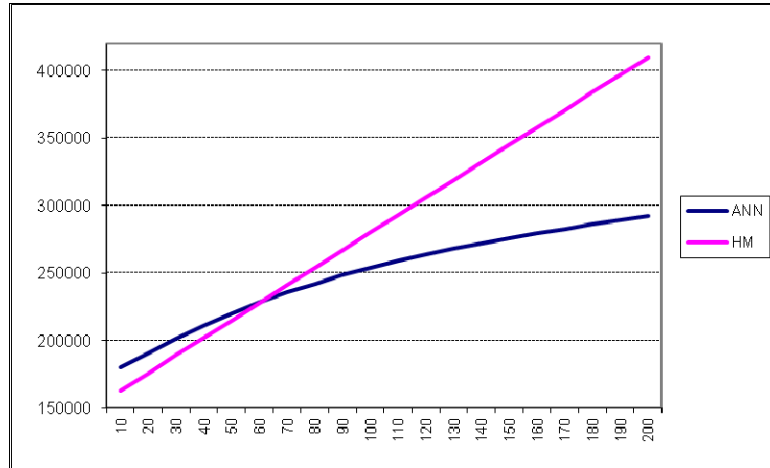


Figure 7. Implicit prices (euros) associated to the annexes (storage and garage)

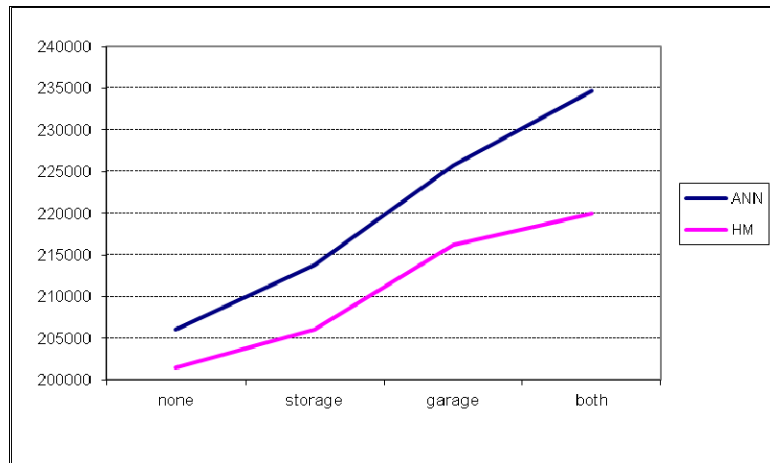
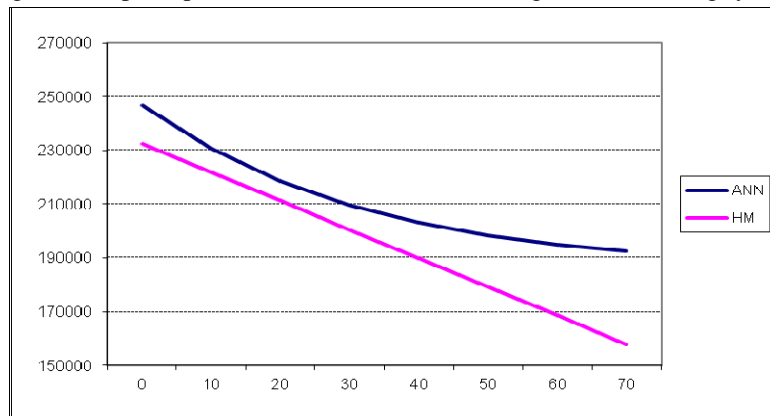


Figure 8. Implicit prices (euros) associated to the age of the building (years)



In general, the ANN approach presents clear advantages over the classical hedonic methodology, in spite of the increases in complexity and the need of large samples to obtain reasonable forecasting capabilities.

6. CONCLUSIONS

Classical hedonic models in real estate valuation have been used for several years as a procedure to estimate prices of such complex goods. The availability of neural network software packages has allowed the use of this alternative methodology, with significantly better results. The use of ANN is more flexible than classical econometric models, when enough sample data are available. Some common problems, in hedonic models, such as non-linearities in the extreme range of prices in real estate market, are well solved by using ANN, even adapting to properties that could be labelled as outliers, although, some authors⁵ criticize this ‘black box’ approach. In our case study with a MLP, estimates fit well with the real market situation, and have even been able to forecast some extreme cases. Neural networks allow a better goodness of fit with the usual measures such as the determination coefficient or with error related statistics (*RMSE*, *MAE*, and so on). The ‘dark side’ of this methodology is the sampling effort needed. This can be realistically overcome, only with the collaboration of realtors with a broad presence in the markets because their internal databases contain the real data of the properties, where a random sample can be selected, and the uncertainty about the exact identification of each dwelling is eliminated, allowing the inclusion of the particular data of each building and its location.

Most papers include, as explanatory variables, the house size, its location, age and availability of garage⁶, and some additional data. Here, a large set of useful characteristics of each property are considered, summarising some of them in several specialized indices. Sensibility analysis confirms these assertions and, due to redundancy in the variables, a subset of explanatory variables are selected, and are confirmed to be stable over the period analyzed. The distance to the city center is useful in monocentric towns. Variability is present even in the same street or building. In clogged Spanish cities, the availability of a garage dramatically enhances the final price. Common expenses are related to the facilities provided by the building, so this variable is highly collinear with other used, and less restrictive in the transactions.

In the validation process, ANN presents more uncertainties, although in hedonic models, multicollinearities introduce a significant difficulty in the interpretation of hedonic prices. In the models proposed, these hedonic prices are obtained as marginal non-linear functions derived once the topology of the network is specified; it is a somewhat cumbersome process to obtain the corresponding derivatives, but the non-linearities of the marginal implicit prices conforms better to reality (for example, a decreasing implicit price with the property’s size).

⁵Allen and Zumwalt (1994) or Worzala, Lenk, and Silva (1995).

⁶Lara (2005); Do and Grudnitski (1992); García Rubio (2004); Lisombunchai (2004); Worzala *et al.* (1995).

The same network topology is used in different years, with determination coefficients lying between 0.81 and 0.91. The model obtained for 2006 is applied to new data from 2008 and 2010 to forecast the prices of properties. Due to the changing conditions of the market, the estimated prices are 12% to 20% higher than the real transaction data, showing the clear downturn of real estate prices in Spain.

These models could be useful not only to potential buyers/sellers and their agents, but also for foreclosure valuations, not uncommon in the actual bear market, and for fiscal purposes. Also in sectorial studies, to assess the importance of a structural change due to turning points in the cyclical evolution of the building industry.

REFERENCES

- Allen, W.C. and Zumwalt, J.K. (1994): *Neural Networks: a word of caution*. Working Paper. Colorado State University.
- Bonissone, P.P. and Cheetham, W. (1997): "Financial applications of fuzzy case-based reasoning to residential property valuation". *Fuzz- IEEE*, 1, pp. 37–44.
- Borst, R. (1991): "Artificial Neural Networks: The Next Modelling/ Calibration Technology for the Assessment Community?". *Property Tax Journal, IAAO*, 10(1), pp. 69–94.
- Caridad, J.M. and Ceular, N. (2001): "Un análisis del mercado de la vivienda a través de Sistemas de Redes Neuronales". *Revista de Estudios de Economía Aplicada*, 18, pp. 67–81.
- Cechin, A., Souto, A., and Aurelio, M. (2000): "Real estate value at Porto Alegre city using Artificial Neural Networks". *Sixth Brazilian Symposium on Neural Networks Proceedings*, 22-25 November, pp. 237–242.
- Collins, A. and Evans, A. (1994): "Artificial Neural Networks: an application to residential valuation in the U.K". *Journal of Property Valuation and Investment*, 11(2), pp. 195–204.
- Do, A. and Grudnitski, G. (1992): "A Neural Network Approach to Residential Property Appraisal". *The Real Estate Appraiser*, 58(3), pp. 38–45.
- Freeman, J. and Skapura, D.M. (1993): *Redes neuronales algoritmos, aplicaciones y técnicas de programación*. Ed. Wilmington Addison-Wesley.
- Gallego, J. (2004): "La inteligencia artificial aplicada a la valoración de inmuebles. Un ejemplo para valorar Madrid". *Revista CT/Catastro*, 50, pp. 51–67.
- García Rubio, N. (2004): *Desarrollo y aplicación de redes neuronales artificiales al mercado inmobiliario: aplicación a la ciudad de Albacete*. Tesis Doctoral. Universidad de Castilla-La Mancha (España).
- Hamzaoui, Y.E. and Hernández, J.A. (2011): "Application of Artificial Neural Networks to predict the selling Price in the real estate valuation". *10th Mexican International Conference on Artificial Intelligence*, November 26-December 04, pp. 175–181.
- Haykin, S. (1999): *Neural networks: A comprehensive foundation*. Ed. Prentice-Hall.
- Haynes, J.D. and Tan, C.N.W. (1993): *An Artificial Neuronal Network real estate price predictor*. IEEE Computer Society Press: USA.

- Jaén, M. and Molina, A. (1995): *Modelos econométricos de tenencia y demanda de vivienda*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería (España).
- Karakozova, O.A. (2000): *Comparison between neural network and multiple regression approaches: An application to residential valuation in Finland*. Swedish School of Economics and Business Administration.
- Kauko, T., Hooimajer, P., and Hakfoort, J. (2002): “Capturing housing market segmentation: An alternative approach based on neural network modeling”. *Housing Studies*, 17(6), pp. 875–894.
- Lara, J. (2005): “Aplicación de las redes neuronales artificiales al campo de la valoración inmobiliaria”. *Mapping*, 104, pp. 64–71.
- Lashley, K. (1929): *Brain mechanisms and intelligence*. University of Chicago Press.
- Limsombunchai, V., Gan, C., and Lee, M. (2004): “House price prediction: Hedonic Price Model vs. Artificial Neural Network”. *American Journal of Applied Sciences*, 1(3), pp. 193–201.
- Liu, J., Zhang, X., and Wu, W. (2006): “Application of fuzzy neural network for real estate prediction”. *LNCS*, 3973, pp. 1187–1191.
- McCluskey, W., Dyson, K., McFall, D., and Anand, S. (1996): “Mass appraisal for property taxation: an artificial intelligence approach”. *Land Economics Review*; 2(1), pp. 25–32.
- McCulloch, W.S. and Pitts, W. (1943): “A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity”. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5, pp. 115–133.
- National Statistics Institute (Instituto Nacional de Estadística –INE-): <http://www.ine.es>
- Nguyen, N. and Cripps A. (2001): “Predicting housing value: a comparison of multiple regression analysis and artificial neural networks”. *Journal of Real Estate Research*; 22(3), pp. 314–336.
- Richardson, H.W. (1973): *Economía Regional. Teoría de la localización, estructuras urbanas y crecimiento regional*. Ed. Vicens Vives. Barcelona.
- Rosen, S. (1974): “Hedonic Prices and Implicit Markets: Product Differentiation in Pure competition”. *Journal of Political Economy*, 82, pp. 34–55.
- Rossini, P. (1998): “Improving the results of artificial neural network models for residential valuation”. *Four Annual Pacific-Rim Real Estate Society Conference. Perth, Western Australia*, 19-21 January.
- Rumelhart, D. and McClelland, J. (1986): *Parallel distributed processing: Explorations in the microstructure of cognition*. Cambridge: MIT.
- Saura, P. (1995) *Demanda de características de la vivienda en Murcia*. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Murcia.
- Selim, H. (2009): “Determinants of house prices in Turkey: Hedonic regression versus artificial neural network”. *Expert Systems with Applications*, 36, pp. 2843–2852.
- Tay, D.P. and Ho, D.K. (1992): “Artificial intelligence and the mass appraisal of residential apartment”. *Journal of Property Valuation & Investment*, 10, pp. 525–540.
- Worzala, E., Lenk, M., and Silva, A. (1995): “An exploration of neural networks and its application to real estate valuation”. *Journal of Real Estate Research*, 10(2), pp. 185–201.



Selección y utilización de niveles de desagregación adecuados en pronósticos de series temporales: caso de estudio en una empresa de suscripción utilizando el proceso analítico jerárquico

ALVARADO VALENCIA, JORGE ANDRÉS

Departamento de Ingeniería Industrial

Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá (Colombia)

Correo electrónico: jorge.alvarado@javeriana.edu.co

GARCÍA BUITRAGO, JAVIER ALEXANDER

Departamento de Ingeniería Industrial

Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá (Colombia)

Correo electrónico: jgarcia.b@javeriana.edu.co

RESUMEN

El problema de la agregación o desagregación de series temporales para la realización de pronósticos se presenta frecuentemente en situaciones empresariales y econométricas. Este trabajo presenta una metodología novedosa para la selección de un nivel de desagregación adecuado de las series temporales a partir del cual realizar pronósticos. La metodología toma en cuenta criterios cualitativos –los recursos empresariales y el entorno de decisión– y cuantitativos –predictibilidad de las series y calidad de la información–, utilizando la metodología de toma de decisiones multicriterio conocida como el proceso analítico jerárquico (AHP) para llegar a una decisión final. Un caso de estudio en una empresa de suscripción muestra la utilidad de combinar AHP con técnicas de pronóstico de series de tiempo y la importancia de utilizar múltiples criterios en la selección de un nivel de desagregación adecuado.

Palabras clave: toma de decisiones multicriterio; análisis jerárquico; agregación de series temporales; pronósticos de series temporales; empresas de suscripción.

Clasificación JEL: C44; M11.

MSC2010: 90B50.

**Selecting and Using
an Adequate Disaggregation Level
in Time Series Forecasting:
A Study Case
in a Subscription Business Model Company
through the Analytic Hierarchy Process**

ABSTRACT

Hierarchical aggregation/disaggregation of time series in order to make forecasts is a frequent challenge in business and econometric scenarios. This work presents a novel approach for selecting an adequate time series disaggregation level as a starting point for making forecasts. The methodology combines qualitative criteria –such as business resources and decision environment– and quantitative criteria –such as information quality and forecastability– in a multicriteria decision making task which is addressed through the analytic hierarchy process (AHP) technique. Results from a study case in a subscription business model company show the usefulness of combining AHP and time series forecasting techniques and the importance of multicriteria decision-making in the task of selecting an adequate aggregation/disaggregation level.

Keywords: multicriteria decision making; analytical hierarchy process; time series aggregation; time series forecasting; subscription business model.

JEL classification: C44; M11.

MSC2010: 90B50.



1. INTRODUCCIÓN

El modelo de negocios por suscripción es aquel en el que se cobra un valor fijo por un periodo de tiempo para dar acceso a diferentes servicios que la empresa ofrece (Alt & Zimmermann, 2001). Una organización que posee un modelo de negocios por suscripción basa su negocio en un adecuado balance entre los costes de la suscripción y la utilización de los servicios que ofrece. Por ello, necesita destinar recursos importantes para la recopilación y análisis de la demanda de dichos servicios, los cuales son la fuente del costo de sus actividades. Pronosticar esta demanda es, por tanto, un elemento importante para la toma de decisiones.

Dependiendo del tipo y tamaño de la actividad de una organización, la elaboración y el análisis de sus costes y pronósticos se realiza a un nivel de agregación dado (Ewing, Sari & Soytaş, 2007; Man, 2004) y a este mismo nivel se realiza el proceso de toma de decisiones. Los niveles de agregación o desagregación pueden incluir diversos criterios tales como los geográficos (zonas de ventas), los organizacionales (áreas de la compañía, productos) y los temporales (trimestre, mes, año) o una combinación de estos. Generalmente se utilizan los criterios de clasificación contable establecidos por la contabilidad de costes (Oliver, 2006 p. 16) y a criterio del tomador de decisiones que define un determinado nivel de agregación o desagregación.

Determinar el nivel de detalle adecuado de desagregación de la demanda no es una decisión directa o fácil. La cantidad de series temporales a pronosticar no representa una limitante para el uso de métodos cuantitativos en los pronósticos, por tanto, la posibilidad de trabajar a múltiples niveles de desagregación para un mismo problema es operativa y técnicamente posible. Sin embargo, el proceso de interpretación y análisis de un gran número de series temporales resulta oneroso y poco productivo si el nivel de desagregación no es el adecuado para la toma de decisiones. Por lo menos tres elementos más son importantes para determinar cómo de adecuado es ese nivel: un análisis del entorno de la toma de decisiones, un análisis de los recursos disponibles y un análisis de la pronosticabilidad de la desagregación escogida.

Tras la selección del nivel adecuado de detalle, el análisis de series temporales permite la generación de pronósticos confiables para un fenómeno donde los datos históricos podrían explicar o influir sobre eventos futuros. Las técnicas de pronóstico de series temporales, siempre y cuando estén en un marco estable, son una excelente herramienta de predicción (Armstrong, 2006; Uddameri, 2007).

Los resultados de las predicciones hechas a partir del análisis de una serie de tiempo a un nivel de desagregación dado pueden utilizarse como criterio para la selección misma del nivel de desagregación que mejor se adecúe a las necesidades del tomador de decisiones, pues proporcionan información sobre la predictibilidad de las series, la estabilidad del entorno de predicción y la calidad de la información en cada nivel de detalle.

Dados estos antecedentes, la toma de decisiones multicriterio basada en una combinación de criterios cualitativos –basados en el entorno de decisión– con criterios cuantitativos –basados en la información de las series temporales– resulta clave para la selección del nivel adecuado de agregación o desagregación en la toma de decisiones requerida por una empresa. Posteriormente, el uso de las herramientas automatizadas para la generación de pronósticos en el nivel apropiado de toma de decisiones disminuye el trabajo sin perder precisión. La aplicación conjunta de las técnicas de toma de decisiones multicriterio y pronósticos de series temporales representa el aporte fundamental de este artículo, que consiste en la propuesta y desarrollo de una metodología de toma de decisiones multicriterio para determinar un nivel adecuado de desagregación de una variable de costo que posteriormente será pronosticada como entrada en el proceso de toma de decisiones de una organización que presta servicios a través de suscripción en Colombia.

En la revisión de literatura, se encontraron múltiples aplicaciones de técnicas multicriterio (Manfren, Caputo & Costa, 2011; Sporicic, Landekic, Lovric, Bogdan & Segotic, 2010) y metodologías de pronóstico de variables a partir de series temporales (Giot & Petitjean, 2011; Velásquez-Henao, Franco-Cardona, & Olaya-Morales, 2012); sin embargo, en ninguno de ellos se encuentra aplicación conjunta o en serie de estas técnicas. La gran oportunidad radica en que no se han aplicado metodologías para determinar qué nivel de desagregación resulta satisfactorio de entre el total de posibles niveles de desagregación en un problema de pronósticos para posteriormente realizar pronósticos que puedan ser útiles para la toma de decisiones a la luz de múltiples criterios organizacionales.

2. SITUACIÓN ACTUAL

El problema de la agregación y desagregación de series temporales ha sido ampliamente estudiado. Se han realizado aplicaciones prácticas tanto en empresas (Chen & Blue, 2010; Danese & Kalchschmidt, 2011) como en el análisis de información econométrica (Espasa, Senra & Albacet, 2002; Marcellino, Stock & Watson, 2003), así como desarrollos teóricos (R. J. Hyndman, Ahmed, Athanasopoulos & Shang, 2011). La necesidad de encontrar una metodología adecuada para realizar pronósticos a diferentes niveles partiendo de un nivel base para su agregación o desagregación ha sido una solicitud continua en el ámbito científico de la economía y los negocios (Fliedner, 2001; Kahn, 1998). Sin embargo, la forma de abordar el problema en la revisión de la literatura no ha tenido en cuenta la facilidad de uso del sistema de pronósticos, y los métodos propuestos están dirigidos básicamente a reconciliar pronósticos agregados y desagregados basados únicamente en criterios relativos a la predictibilidad de las series temporales.

Más allá de la predictibilidad, la facilidad de uso de un sistema de pronósticos depende de por lo menos tres grupos adicionales de factores: la disponibilidad y uso de los recursos para pronosticar, las características de la información disponible y el entorno de la decisión.

En relación con las características de la información disponible, y de acuerdo con encuestas a profesionales de los pronósticos, dos de los factores más importantes que llevan a la no realización de pronósticos por métodos cuantitativos son la escasez de información y la falta de precisión en los pronósticos (Sanders & Manrodt, 2003). De otra parte, las razones que conducen a las empresas al uso de métodos cuantitativos para sus pronósticos son la necesidad de pronosticar un gran número de productos, la disponibilidad de datos de calidad y la existencia de una demanda estable (Danese & Kalchschmidt, 2011; S. Makridakis, Wheelwright & Hyndman, 1997; Wright, Lawrence & Collopy, 1996). Entre los recursos necesarios que limitan el nivel de agregación a escoger están la oportunidad de la información y el costo. Estudios anteriores han evaluado la importancia de esos dos factores en la evaluación de un sistema de información de apoyo a los pronósticos (Winklhofer & Diamantopoulos, 2002).

El entorno de la decisión es un tercer factor de gran importancia al elegir un nivel de desagregación. Contar con poca o mucha información no necesariamente asegura que la salida del proceso resulte en la mejor decisión posible y puede ser que el tomador de decisiones no comprenda adecuadamente el entorno de la decisión por haber elegido un nivel de análisis inadecuado (Lederer & Smith, 1988). Diferentes roles dentro de la organización pueden requerir diferentes niveles de agregación de los pronósticos. Es por ello que se espera que los sistemas de soporte a la realización de pronósticos tengan diversos niveles de agregación (Smith & Mentzer, 2010). Asimismo, la capacidad para entender y valorar las situaciones de negocio y los posibles cursos de acción futuros a partir del nivel de agregación elegido para los pronósticos es quizás tan importante como la calidad misma de los pronósticos (Hogarth & Makridakis, 1981; Makridakis & Taleb, 2009; Tsoukiàs, 2008).

Dado que se presentan diferentes factores con diferentes posibles ponderaciones, analizar la selección del nivel de desagregación requiere una metodología de toma de decisiones multicriterio. La toma de decisiones multicriterio o análisis multicriterio es un conjunto de técnicas que contienen un conjunto de opciones de decisión que deben ser ponderadas, un conjunto de criterios típicamente medidos en diferentes unidades y un conjunto de medidas de desempeño para cada opción de decisión contra cada criterio. Existen múltiples técnicas para solucionar los problemas de toma de decisiones multicriterio (en adelante MCA). Entre las diversas técnicas MCA se escogió el proceso analítico jerárquico (en adelante AHP). El AHP es un procedimiento sistemático para la representación de los elementos de cualquier problema de forma jerárquica. Organiza la racionalidad descomponiendo un problema en sus partes constitutivas más pequeñas y luego guía a los tomadores de decisiones a través

de una serie de juicios de comparación por pares para expresar la fuerza relativa o la intensidad del impacto de los elementos dentro de la jerarquía. Estos juicios son convertidos a una escala numérica que facilita su interpretación (Saaty & Vargas, 2001). El AHP permite determinar una jerarquía entre los criterios adoptados por el tomador o tomadores de decisiones, permitiendo encontrar un balance entre los factores o variables que afectan el fenómeno a evaluar. Se ha probado que la técnica AHP es una técnica útil de toma de decisiones por encima de metodologías más simples de trabajo (Ishizaka, Balkenborg & Kaplan, 2011). De hecho, la técnica AHP es una de las más utilizadas en su aplicación práctica. Ha sido empleada en variedad de áreas, incluyendo planificación, asignación de recursos y resolución de conflictos, particularmente cuando se requiere combinar criterios cuantitativos y cualitativos en la toma de decisiones (Subramanian & Ramanathan, 2012). Esta metodología es suficientemente flexible para ser usada en combinación con otras herramientas de toma de decisiones (Vaidya & Kumar, 2006). Las principales herramientas con las que se la ha combinado incluyen programación matemática, QFD, metaheurísticas, análisis DOFA y DEA (Ho, 2008). Sin embargo, existe una escasez significativa en la investigación y aplicación de AHP en combinación con áreas de pronóstico (Subramanian & Ramanathan, 2012).

3. METODOLOGÍA

3.1. Metodología del proceso analítico jerárquico

Existen n criterios a comparar. Sea w_i =peso dado al criterio i . Entonces la matriz de comparación por pares es:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_1}{w_1} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \\ \frac{w_1}{w_1} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \quad (1)$$

En esta matriz se realiza una comparación relativa de los pesos de los diferentes criterios. La matriz solo admite valores positivos y satisface la propiedad de reciprocidad:

$$a_{ij} = 1/a_{ji} \quad (2)$$

Considérese el sistema de n ecuaciones:

$$Aw^T = \Delta w^T \quad (3)$$

donde Δ es un número desconocido y w^T es un vector columna n -dimensional. Para cualquier número Δ , (1) siempre tiene la solución trivial $w=[0, 0, \dots, 0]$. Si A es la matriz de comparación por pares de una persona consistente que toma decisiones, entonces la única solución no trivial para (3) es:

$$\Delta = n \text{ y } w = [w_1, w_2, \dots, w_n] \quad (4)$$

Esto muestra que para una persona consistente que toma decisiones, las ponderaciones w_i se pueden obtener de la única solución no trivial para (3). Ahora, si quien toma la decisión no es perfectamente consistente, resulta lo siguiente: sea Δ_{max} el número más grande para el cual (3) tiene una solución no trivial (llámese esta solución w_{max}); si las comparaciones de quien toma la decisión no se desvían mucho de la consistencia perfecta, se esperaría que Δ_{max} estuviera cerca de n y w_{max} estuviera cerca de w .

Entonces, para el grupo de expertos se realizan las comparaciones pareadas entre criterios y se procede a evaluar la consistencia del grupo experto con el fin de obtener una solución tan cercana como se pueda a w . Una vez obtenidas las comparaciones, el paso siguiente es encontrar un vector de normalización v a partir de la matriz de comparaciones pareadas A . Esto se realiza dividiendo la media geométrica de cada fila i de la matriz A entre la suma de todas las medias geométricas de las filas de la matriz A . Posteriormente, es necesario garantizar la consistencia de la solución. La consistencia es el grado de equilibrio resultante entre las comparaciones pareadas. No siempre puede existir una consistencia perfecta; por ello, el modelo AHP ofrece un método para medir el grado de consistencia de cada una de las matrices de comparaciones pareadas, mediante la razón de consistencia ($R.C$):

$$R.C. = \frac{I.C.}{I.A.} \quad (5)$$

donde $I.C.$ es el índice de consistencia de A e $I.A.$ es el índice de consistencia obtenido cuando las matrices son generadas de forma aleatoria. Para obtener $I.C.$ se calcula:

$$I.C. = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} \quad (6)$$

El valor de λ_{max} se calcula usando el vector de normalización v y haciendo

$$Av^T = \bar{\lambda}_i \quad (7)$$

Y luego se calcula a partir de (7):

$$\lambda_{max} = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right) \quad (8)$$

El Índice de Consistencia Aleatoria ($I.A.$) a utilizar en (5) depende del número de elementos a comparar. Los valores con los que se debe comparar se han encontrado de forma empírica y están basados en lo propuesto por Saaty & Kearns (1985) . La Tabla 1 presenta esos valores.

| | | | | | | | | | | |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Tamaño de la matriz | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| I.A. | 0,00 | 0,00 | 0,58 | 0,90 | 1,12 | 1,24 | 1,32 | 1,41 | 1,45 | 1,49 |

Tabla 1. Índice de consistencia aleatoria. Fuente: Saaty & Kearns (1985).

3.2. Desarrollo del caso de estudio

La metodología se basa en usar las características de las series temporales como *input* cuantitativo de la decisión, y posteriormente integrar la realización de pronósticos de las mismas. La empresa objeto de estudio en Colombia es una compañía con más de 25 años en el mercado, que presta servicios de forma directa y a través de una red de terceros en todo el territorio nacional y cuenta con más de 8.000 empleados. De los servicios que presta, posee el 60% del mercado y es reconocida como líder en la prestación de estos servicios en el país, ofreciéndolos con los más altos estándares de calidad. El servicio que presta es bajo el modelo de negocios de suscripción. El comportamiento del costo total presenta estacionalidad y su tendencia durante los últimos tres años ha tenido un comportamiento similar al de la inflación del país y la del sector al que pertenece. Actualmente se utiliza el pronóstico de series temporales del valor agregado (País) y luego, mediante criterios contables, se realiza la desagregación mediante ponderación de las participaciones de períodos contables anteriores a criterio de los expertos que toman decisiones, –quienes realizan cambios a las ponderaciones resultantes– para finalmente establecer el plan estratégico para el siguiente período. Como resultado de este ejercicio se obtiene el presupuesto de costo para el siguiente período.

El proceso de toma de decisiones a partir de la información de costes utilizado actualmente podría no ser satisfactorio, pues se tiene incertidumbre sobre el método de desagregación utilizado, dado que los diferentes niveles de detalle podrían tener dinámicas diferentes a las pronosticadas a partir de los datos agrupados.

Para desarrollar la metodología propuesta, se conformó un grupo de expertos que conocían el problema de estudio y que normalmente toman decisiones sobre el proceso a nivel estratégico y táctico. Las características de este grupo se aprecian en la Tabla 2.

| Cargo | Género | Edad | Rol |
|-------------|-----------|------|---|
| Subgerente | Femenino | 39 | Toma decisiones administrativas y de servicio sobre regionales, proveedores y ciudades. |
| Subgerente | Masculino | 34 | Tiene influencia y responsabilidad nacional sobre el costo de regionales, proveedores y ciudades. |
| Coordinador | Masculino | 38 | Realiza el presupuesto de costes a nivel nacional. |

Tabla 2. Características de los evaluadores.

Este grupo de expertos desarrolló la metodología como trabajo en equipo; es decir, las evaluaciones y análisis se lograron mediante lluvia de ideas (para las definiciones de criterios y alternativas) y mediante consenso (para las comparaciones pareadas de criterios, alternativas y análisis de resultados). Las capas de desagregación seleccionadas surgieron como resultado de la revisión de la forma como es analizada la información de costo tradicionalmente, de acuerdo a la empresa de estudio. La Tabla 3 presenta las posibles desagregaciones o niveles de detalle sobre los que se podía realizar la estimación o pronóstico de costes.

| Tipo | Combinación | Número de series temporales (k) |
|-----------|---------------------------------------|---------------------------------|
| Agregada | País | 1 |
| Pura | Regional | 5 |
| | Ciudad | 39 |
| | Proveedor | 6.000 |
| | Tipo | 10 |
| Combinada | Regional x Tipo de servicio | 58 |
| | Ciudad x Proveedor | 6.111 |
| | Ciudad x Tipo de servicio | 310 |
| | Ciudad x Proveedor x Tipo de servicio | 14.791 |

Tabla 3. Número de series temporales por capa de desagregación.

El modelo AHP requiere establecer la jerarquía de criterios y alternativas a utilizar para la selección de la mejor alternativa. Los criterios seleccionados son de dos tipos: cualitativos y cuantitativos. Los cualitativos serán evaluados por los tomadores de decisiones, mientras que los cuantitativos son parámetros que describen propiedades de los datos que surgirán de un análisis de las series temporales k , para cada nivel de agregación j y que son de interés dada la naturaleza del estudio. Una vez establecidos los criterios y las alternativas, se realizaron comparaciones pareadas entre criterios y alternativas para cada criterio por parte del grupo de expertos. Posteriormente se establecieron los pesos relativos teniendo en cuenta la normalización y consistencia explicadas anteriormente. Los índices de consistencia aleatorios a utilizar son el de seis elementos (1,24) para la evaluación de criterios y el de nueve elementos (1,45) para la evaluación de alternativas.

3.3. Desarrollo de los criterios de evaluación

El grupo de expertos definió seis criterios importantes para ser analizados:

1. Oportunidad. Corresponde al intervalo de tiempo existente entre el análisis de la información y el momento de materializar la decisión resultante del análisis de los datos a este nivel de desagregación.

2. Toma de decisiones. Determina si la gestión del proceso normalmente permite la intervención a este nivel de desagregación.

3. Claridad. Determina si a este nivel de desagregación se mantiene el entendimiento y la comprensión global de lo que está sucediendo en el entorno de la decisión.

4. Impacto. Determina si realizar el análisis a este nivel de desagregación para tomar decisiones implica una cantidad (monetaria, horas, recursos) que amerite realizar el análisis sin limitar la capacidad para tomar decisiones.

5. Calidad de la información. Se define como la proporción de datos nulos dado el nivel de desagregación de la alternativa k . Los datos pueden ser nulos porque en realidad no se presentó costo o por faltantes en la información, pero no se sabe cuál es la causa para cada dato nulo. La presencia de datos nulos o faltantes genera dificultades específicas para el pronósticos de series temporales (Syntetos, Nikolopoulos, Boylan, Fildes & Goodwin, 2009). Este valor de calidad de información se calcula como el complemento de la proporción de datos nulos (o faltantes) sobre el total de datos para cada serie de tiempo al nivel de agregación j :

$$\text{Calidad de información}_{kj} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^n \text{nulos}_{ktj}}{k * t} \quad (9)$$

donde:

nulos_{ktj} : 1 si el dato es nulo para la serie k en el momento t en el nivel de agregación j , o 0 si el dato es no nulo;

$k=1,2,\dots,K$ (Número total de series temporales para el nivel de desagregación);

$t=1,2,\dots,36$ (Número de datos por cada serie de tiempo, para el caso, 36 meses ($n=36$)).

6. Predictibilidad. Se define como la medida del error de un pronóstico de línea base al nivel de desagregación j de la alternativa k . Cada serie de tiempo cuenta con información de 36 meses (3 años). Para desarrollar la medida, se realizó división de cada una de estas series para obtener una serie de tiempo de entrenamiento y otra de validación. El tamaño de la serie de tiempo de entrenamiento es de 24 meses y la de validación de 12 meses.

La selección del parámetro de predictibilidad se basó en un análisis exploratorio de las series temporales, donde se detectaron altas asimetrías de los resultados de error de las series temporales. Para ello se tomaron los datos de los 36 meses para todos los niveles de desagregación y se realizaron predicciones con el modelador experto del paquete estadístico utilizado (SPSS), midiendo el MAPE (error porcentual promedio) de cada serie k para el nivel de agregación j dado, donde

$$\text{MAPE}_{KJ} = 100\% \sum_{t=1}^{n_{kj}} \left| \frac{(A_{t_{kj}} - F_{t_{kj}})}{A_{t_{kj}}} \right| \quad (10)$$

A es el valor actual para el período t de la serie k al nivel de desagregación j ;

F es el valor pronosticado para el período t de la serie k al nivel de desagregación j ;
 $t=1,2,\dots,N$ (número total de períodos de la serie de tiempo);
 $k=1,2,\dots,K$ (número de series temporales al nivel de desagregación);
 $j=1,2,\dots,M$ (número de niveles de desagregación posibles).

Para cada nivel se calcularon los coeficientes de asimetría y curtosis de los $MAPE_{kj}$. Estos resultados se aprecian en la Tabla 4.

| Nivel de desagregación | Nº de series temporales (k) | Coefficiente de asimetría | Curtosis |
|---------------------------------------|---------------------------------|---------------------------|----------|
| País | 1 | No disp. | No disp. |
| Regional | 5 | -1,52 | 2,01 |
| Ciudad | 39 | 5,66 | 33,64 |
| Proveedor | 6.000 | 18,44 | 533,34 |
| Tipo | 10 | 3,14 | 9,91 |
| Regional x Tipo de servicio | 58 | 3,71 | 12,91 |
| Ciudad x Proveedor | 6.111 | 4,55 | 20,77 |
| Ciudad x Tipo de servicio | 310 | 6,22 | 47,02 |
| Ciudad x Proveedor x Tipo de servicio | 14.791 | 33,03 | 1422,21 |

Tabla 4. Asimetría y curtosis de la base de datos de entrenamiento y validación de los $MAPE_{kj}$ (36 meses).

El coeficiente de asimetría indica que la distribución de los $MAPE_{kj}$ es asimétrica en todos los niveles desagregados, lo cual indica que algunas series temporales presentan valores extremadamente altos en sus $MAPE_{kj}$; lo mismo sucede con la curtosis, señal de una cola larga de frecuencias pequeñas debido a la amplia gama de resultados. Tras este análisis, se decide utilizar la mediana de los $MAPE_{kj}$ para cada nivel de agregación j ($MdMAPE_j$) como parte de la medida de predictibilidad para cada nivel de agregación por dos razones. Primero, expresa porcentualmente el error y, de ese modo, es posible comparar series temporales a diferentes niveles de desagregación; segundo, no se ve afectada por valores extremos, como si lo estaría el promedio de los errores porcentuales.

$$MdMAPE_j = Mediana(MAPE_{1j}, MAPE_{2j}, \dots, MAPE_{Kj}) \quad (11)$$

$j=1,2,\dots,m$

Las series temporales de las k alternativas fueron procesadas en el programa SPSS versión 20 y se utilizaron los siguientes criterios:

- Se utilizó el modelizador experto, que incluye modelos de suavización exponencial y modelos ARIMA.
- La identificación de puntos atípicos no se utiliza.
- No se realiza transformación de los datos.

d) El modelo se construye con los datos de entrenamiento (24) meses y se realiza la predicción para la base de datos de validación (12) meses.

Para la matriz de predictibilidad, se utilizó el $MdMAPE_j$ calculado con el conjunto de $MAPE_{kj}$ de las series temporales obtenidos a partir de la base de validación (12 meses) dado que resulta más exigente construir el modelo con la base de entrenamiento y probar el modelo con datos reales, de modo que se evite el sobre ajuste del modelo.

Al comparar los resultados del $MdMAPE_j$ de la base total (Entrenamiento + Validación) con los resultados del $MdMAPE_j$ de la base de solo validación se encuentra que un nivel de desagregación presenta un gran incremento (Ciudad por Proveedor), 6 niveles de desagregación presentan un incremento leve (País, Regional, Ciudad, Tipo de servicio, Regional por Tipo de servicio, Ciudad por Proveedor por Tipo de servicio). 1 nivel se mantiene estable (Proveedor) y 1 nivel disminuye (Regional por Tipo de servicio). Esto hace que los modelos de series temporales sean posiblemente buenos predictores y que los pronósticos sean útiles como información de entrada para el proceso de toma de decisiones. El resultado del $MdMAPE_j$ sobre la base de validación utilizada como criterio de predictibilidad para cada una de las series temporales k y los 12 meses de validación se presenta en la Tabla 5.

| Parámetro | País | Regional | Ciudad | Proveedor | Tipo | Regional x Tipo de servicio | Ciudad x Proveedor | Ciudad x Tipo de servicio | Ciudad x Proveedor x Tipo de servicio |
|-----------|-------|----------|--------|-----------|-------|-----------------------------------|-----------------------|---------------------------------|--|
| Mediana | 3,550 | 7,453 | 29,314 | 42,046 | 7,511 | 10,871 | 42,664 | 39,934 | 51,513 |

Tabla 5. $MdMAPE_j$ de la base de datos de validación (12 meses).

Finalmente, para que se premie un valor alto sobre uno bajo en los cálculos pareados de la metodología AHP, se define la predictibilidad como el complemento de la mediana de los $MAPE_{kj}$ para las k series en el nivel de desagregación j dado:

$$predictibilidad_j = 100 - MdMape_j \quad (12)$$

4. RESULTADOS

El vector de resultados para las alternativas planteadas, organizados por peso desde el mayor hasta el menor, se presenta en la Tabla 6. La mejor alternativa de desagregación es Tipo de servicio, la cual obtuvo una puntuación de 0,1639. Lo anterior indica que la diferenciación por naturaleza del servicio es la más importante para tomar decisiones. Esto es relevante porque para la empresa objeto de estudio,

el servicio en su gran mayoría tiene un comportamiento que es uniforme independientemente de los otros niveles de desagregación como la geografía o el Proveedor.

| Alternativa | Tipo desagregación | Cantidad de series | Puntuación | Jerarquía |
|---|--------------------|--------------------|------------|-----------|
| Tipo de servicio | Pura | 10 | 0,1639 | 1 |
| Regional | Pura | 5 | 0,1621 | 2 |
| País | No desagregada | 1 | 0,1374 | 3 |
| Ciudad | Pura | 39 | 0,1291 | 4 |
| Regional por Tipo de servicio | Combinada | 58 | 0,1116 | 5 |
| Ciudad por Tipo de servicio | Combinada | 310 | 0,0851 | 6 |
| Proveedor | Pura | 6.000 | 0,0754 | 7 |
| Ciudad por Proveedor | Combinada | 6.111 | 0,0684 | 8 |
| Ciudad por Tipo de servicio por Proveedor | Combinada | 14.791 | 0,0670 | 9 |

Tabla 6. Vector de resultados para las alternativas planteadas (organizado de mayor a menor).

La segunda mejor alternativa de desagregación es la regional, la cual obtuvo una puntuación de 0,1621, tan solo 1,1% por debajo de la primer alternativa, lo cual indica que también es interesante realizar la desagregación por regional. Adicionalmente, la empresa objeto de estudio define directrices nacionales con algunas variaciones por región e incluso por ciudad, sobre todo para las ciudades cabeceras de regional. La tercera mejor alternativa de desagregación es la no desagregación, es decir trabajar con los datos agregados de país, el cual representa el enfoque tradicionalmente utilizado. Sin embargo, la distancia frente a la primera alternativa es amplia, lo cual indica que efectivamente cualquiera de los dos primeros criterios resultaría más aconsejable que la situación actual.

Las cinco primeras alternativas obtuvieron una puntuación superior a 0,10. Entre ellas se encuentran tres alternativas de desagregación puras (Tipo de servicio, Regional y Ciudad), la alternativa de no desagregación (País) y solo una alternativa de desagregación combinada (Regional por Tipo de servicio). De lo anterior se puede observar que las alternativas más desagregadas (que cuentan con mayor cantidad de series temporales) obtuvieron en general bajas puntuaciones, y que la única alternativa de desagregación combinada con una puntuación mayor a 0,10 es precisamente la resultante de la interacción de las dos primeras alternativas con mayores puntuaciones (Regional por Tipo de servicio). En consecuencia, la alternativa Regional por Tipo de servicio (conformada por 58 series temporales) podría utilizarse como desagregación de soporte para ayudar a interpretar los resultados obtenidos por el nivel de desagregación preferido (Tipo de servicio) de modo que complemente el análisis.

Por otra parte, los resultados para los criterios, ordenados de mayor a menor, se aprecian en la Tabla 7.

| Criterio | Ponderación |
|---------------------------|-------------|
| Calidad de la información | 0,3716 |
| Predictibilidad | 0,1846 |
| Toma de decisiones | 0,1571 |
| Claridad | 0,1243 |
| Impacto | 0,1117 |
| Oportunidad | 0,0506 |

Tabla 7. Vector de resultados para los criterios.

Los criterios cuantitativos obtuvieron pesos mayores que los criterios cualitativos, siendo el criterio *Calidad de la información* el primero con un peso de 0,3716 (Casi dos veces el valor del segundo). Para el criterio *Calidad de la información*, la alternativa *Tipo de servicio* tiene un valor de 95,23% mientras que la alternativa *Regional* tiene un resultado de 100%; es decir que para este criterio la alternativa con mayor puntuación final (*Tipo de servicio*) tiene un menor resultado.

Para el criterio *Predictibilidad*, la alternativa *Tipo de servicio* tiene un resultado de 92,49 mientras que la alternativa *Regional* tiene un resultado de 92,55, lo que las hace casi iguales. Nótese entonces que a pesar de que la alternativa *Regional* tenía el mayor valor para el criterio de mayor peso (*Calidad de información*) y que estaba muy de cerca del primero en la matriz del segundo criterio (*Predictibilidad*) no resultó en primer lugar en la valoración final. Lo anterior es debido a que en la evaluación de los demás criterios siempre le fue mejor a la alternativa *Tipo de servicio*. De esto se puede concluir que el criterio de mayor ponderación es importante pero no necesariamente es el único relevante, porque la suma de los criterios con menor ponderación puede llegar a cambiar el análisis de resultados. La alternativa seleccionada –*Tipo de servicio*– consta de 10 series temporales y una vez seleccionada se realiza el pronóstico de línea base de acuerdo con las especificaciones establecidas. Los modelos seleccionados para las 10 series temporales se presentan en la Tabla 8.

| Tipo de servicio | Tipo de modelo |
|---------------------|---------------------------|
| Tipo de servicio 1 | Estacional simple |
| Tipo de servicio 2 | Multiplicativo de Winters |
| Tipo de servicio 3 | Aditivo de Winters |
| Tipo de servicio 4 | Aditivo de Winters |
| Tipo de servicio 5 | Aditivo de Winters |
| Tipo de servicio 6 | Aditivo de Winters |
| Tipo de servicio 7 | Aditivo de Winters |
| Tipo de servicio 8 | Estacional simple |
| Tipo de servicio 9 | Simple |
| Tipo de servicio 10 | Aditivo de Winters |

Tabla 8. Resultados del modelo de pronóstico de línea base para Tipo de servicio.

Todos los modelos de línea base son de tipo estacional, presentan buenos resultados de correlación (R corregida > 0,73) y, lo más importante, pueden ser mejorados a partir de este resultado mediante técnicas avanzadas de series temporales, antes de comenzar los procesos de agregación / desagregación necesarios.

La realización de un análisis de sensibilidad es importante en cualquier técnica de toma de decisiones multicriterio y el AHP no es la excepción. Por ello se realizaron dos tipos de análisis de sensibilidad. Primero, se revisó la sensibilidad del criterio de predictibilidad si se modificaba el parámetro utilizado para medir la misma y posteriormente se revisó la sensibilidad de la decisión a cambios en los pesos de los criterios.

En lo referente al cambio del parámetro de medición de la predictibilidad, se utilizaron como fuentes de posibles alternativas las propuestas por dos artículos específicos de la literatura (Hyndman & Anne, 2006; Temurshoev, Webb & Yamano, 2011). Entre las propuestas de estos autores, se seleccionaron tres posibles parámetros de interés. Primero, se seleccionó un parámetro que ponderara el MAPE de acuerdo al valor real que tuviera la serie. Esta ponderación se consideró puesto que la importancia de la precisión puede variar de acuerdo a la importancia misma de la serie en volumen. Por ello se escogió el $WAPE_j$, donde:

$$WAPE_j = \left(\frac{A_{tkj}}{\sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{n_{kj}} A_{tkj}} \right) * \left(\left| \frac{A_{tkj} - F_{tkj}}{A_{tkj}} \right| \right) \quad (13)$$

Y posteriormente se definió la predictibilidad para este parámetro como:

$$predictibilidad_{wapej} = 1 - WAPE_j \quad (14)$$

En segundo lugar se buscó un parámetro que fuese una medida de precisión relativa a un pronóstico ingenuo (MASE), porque de ese modo se compara la precisión con una línea ingenua, siendo:

$$MASE_k = \frac{1}{n_{kj}} * \sum_{t=1}^{n_{kj}} \left| \frac{(A_{tkj} - F_{tkj})}{\sum_{t=2}^{n_{kj}} (A_{tkj} - A_{(t-1)kj}) / (n-1)} \right| \quad (15)$$

Una vez obtenidos los $MASE_K$, se procedió a utilizar la mediana de los mismos para cada agregación j ($MdMASE_j$) y a restarla de 1 para usarla como medida de predictibilidad:

$$predictibilidad_{masej} = 1 - Mediana(MASE_{1j}, MASE_{2j}, \dots, MASE_{Kj}) \quad (16)$$

En tercer lugar se seleccionó un parámetro que utilizara criterios basados en información. El más conocido de ellos es el criterio de información de Aikake (AIC), el cual se obtuvo para cada serie k . Posteriormente se procedió a calcular la mediana de los AIC_K para el nivel de agregación j ($MdAIC_j$) y a usar el recíproco de la misma como medida de predictibilidad para premiar los valores más altos.

$$predictibilidad_{AICj} = \frac{1}{MdAIC_j} \quad (17)$$

La Tabla 9 presenta los valores de estos parámetros de predictibilidad para cada nivel de agregación j .

| Nivel de desagregación | Predictibilidad WAPE _j | Predictibilidad MASE _j | Predictibilidad AIC _j |
|---------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| País | 0,964 | 0,426 | 0,0020 |
| Regional | 0,960 | 0,471 | 0,0022 |
| Ciudad | 0,955 | 0,316 | 0,0025 |
| Proveedor | 0,786 | 0,241 | 0,0034 |
| Tipo | 0,945 | 0,326 | 0,0021 |
| Regional x Tipo de servicio | 0,938 | 0,370 | 0,0025 |
| Ciudad x Proveedor | 0,786 | 0,241 | 0,0036 |
| Ciudad x Tipo de servicio | 0,689 | 0,302 | 0,0030 |
| Ciudad x Proveedor x Tipo de servicio | 0,757 | 0,243 | 0,0037 |

Tabla 9. Parámetros de predictibilidad alternativos por nivel de desagregación (sin normalizar).

Al aplicar estos valores de predictibilidad normalizados para las alternativas planteadas, se encuentra que hay una cierta sensibilidad al parámetro de predictibilidad, si bien no es muy grande, es decir, hay robustez al cambio de parámetro de predictibilidad. En particular, el conjunto de cinco alternativas identificadas como superiores dentro de las alternativas planteadas siguen manteniéndose; y hay un único cambio posicional dentro de esas cinco alternativas para cada parámetro de predictibilidad. Al utilizar WAPE y MASE, las dos primeras posiciones se intercambian, pasando a ser preferida la alternativa *Regional* sobre la alternativa *Tipo de servicio*; y al utilizar AIC las posiciones tercera y cuarta se intercambian, pasando a ser preferida la alternativa *Ciudad* sobre la alternativa *País*.

Para evaluar la sensibilidad de la decisión a cambios en los pesos de los criterios se tomó como referencia la propuesta de análisis elaborada por Triantaphyllou & Sánchez (1997). En este estudio se propone un método para determinar los criterios y alternativas que son más sensibles a producir cambios en los resultados de los modelos de toma de decisiones multicriterio. Para el caso de análisis de esta sensibilidad para los criterios utilizados, se utilizaron los modelos de suma ponderada y de producto ponderado. En este caso se define un grado crítico del criterio, que es el mínimo cambio porcentual que debe sufrir la ponderación del criterio para generar cambios en el orden de preferencia de las alternativas. También se define un criterio de sensibilidad del coeficiente, que es el recíproco del grado crítico de criterio.

Los resultados obtenidos para el caso utilizando los dos métodos se pueden observar en las Tablas 10 y 11.

| Modelo de suma ponderada | | |
|------------------------------------|---|---|
| Sensibilidad | Grado crítico del criterio (Min δ) | Criterio de sensibilidad del coeficiente |
| Oportunidad | 15,67 | 6,38% |
| Toma de decisiones | 34,64 | 2,89% |
| Claridad | 36,65 | 2,73% |
| Impacto | 57,68 | 1,73% |
| Predictibilidad | 57,78 | 1,73% |
| Cantidad/Calidad de la información | 65,56 | 1,53% |

Tabla 10. Sensibilidad de los criterios por el método de suma ponderada.

| Modelo de producto ponderado | | |
|------------------------------------|---|---|
| Sensibilidad | Grado crítico del criterio (Min δ) | Criterio de sensibilidad del coeficiente |
| Oportunidad | 68,88 | 1,45% |
| Claridad | 78,74 | 1,27% |
| Cantidad/Calidad de la información | 104,24 | 0,96% |
| Toma de decisiones | 211,26 | 0,47% |
| Impacto | 252,63 | 0,40% |
| Predictibilidad | 303,87 | 0,33% |

Tabla 11. Sensibilidad de los criterios por el método de producto ponderado.

Los resultados obtenidos por el modelo inicial son más sensibles a variaciones en el peso del criterio *oportunidad*, sin embargo todos los criterios resultaron sensibles para algún porcentaje de cambio en sus ponderaciones. Una observación importante es que los criterios cuantitativos, a pesar de ser menos en cantidad que los criterios cualitativos, no son por completo irrelevantes ni podrían eliminarse del modelo sin afectarlo, si bien su sensibilidad es inferior a la de los criterios cualitativos.

5. CONCLUSIONES

La metodología presentada permite la selección de un nivel de desagregación de datos para efectuar predicciones para la organización que toma en cuenta no solo el criterio de predictibilidad usual en este tipo de trabajos sino también otros criterios cuantitativos –como la calidad de los datos– y los combina con criterios cualitativos relacionados con la naturaleza de la toma de decisiones en una empresa. En ese sentido, es una metodología más integral que las existentes hasta el momento, realiza un balance entre los diferentes criterios y genera nuevas miradas al uso y manejo de la información dentro de la empresa. Una extensión de esta metodología al problema de escoger un nivel de desagregación en la

predicción de variables econométricas es el siguiente paso de investigación, así como su utilización en más casos de estudio.

Los resultados obtenidos en el caso de estudio evidencian que la consideración de más de un criterio en la toma de decisiones respecto al nivel de desagregación de las series temporales es relevante; normalmente los tomadores de decisiones en el día a día solo consideran un criterio –el que es más importante para ellos–. Si bien los criterios cuantitativos resultaron ser los más importantes, el peso de los criterios cualitativos finalmente inclinó la balanza por una alternativa de desagregación diferente, enfatizando la conclusión relativa a la utilización de múltiples criterios en este problema de decisión.

El análisis de sensibilidad mostró que todos los criterios, tanto cuantitativos como cualitativos, son necesarios para el modelo y la eliminación o modificación de sus pesos podría llevar a cambios en la selección de alternativas. Asimismo, los resultados son robustos, aunque no completamente, al parámetro de predictibilidad escogido, lo que obliga a los tomadores de decisiones a revisar con cuidado la métrica que se utilizará para valorar la predictibilidad.

La utilización del modelador automático del paquete estadístico para obtener los pronósticos de series temporales origina una línea base de estas predicciones; es decir, al nivel de desagregación finalmente seleccionado es posible obtener una estimación suficientemente buena mediante un procesamiento estadístico riguroso de los datos que componen las series. Esto da libertad al tomador de decisiones para escoger el nivel de desagregación adecuada sin considerar el trabajo que se requeriría para generar las líneas bases en alternativas con gran cantidad de series temporales. Sin embargo, un paso recomendable a realizar una vez se ha hecho la selección es intentar mejorar esta línea base, es decir, reducir el $MdMAPE_j$ para los datos de validación de acuerdo con la naturaleza de los datos seleccionados en el nivel de agregación escogido.

BIBLIOGRAFÍA

- Alt, R. & Zimmermann, H.-D. (2001). Preface: Introduction to special Section- Business Models. *Electronic Markets*, 11(1), 3–9.
- Armstrong, J.S. (2006). Findings from evidence-based forecasting: Methods for reducing forecast error. *International Journal of Forecasting*, 22(3), 583–598.
- Chen, A. & Blue, J. (2010). Performance analysis of demand planning approaches for aggregating, forecasting and disaggregating interrelated demands. *International Journal of Production Economics*, 128(2), 586–602. doi: 10.1016/j.ijpe.2010.07.006
- Danese, P. & Kalchschmidt, M. (2011). The role of the forecasting process in improving forecast accuracy and operational performance. *International Journal of Production Economics*, 131(1), 204–214. doi: 10.1016/j.ijpe.2010.09.006

- Espasa, A., Senra, E. & Albacet, R. (2002). Forecasting inflation in the European Monetary Union. *European Journal of Finance*, 8(4), 402–421.
- Ewing, B.T., Sari, R. & Soytas, U. (2007). Disaggregate energy consumption and industrial output in the United States. *Energy Policy*, 35(2), 1274–1281. doi: 10.1016/j.enpol.2006.03.012
- Fliedner, G. (2001). Hierarchical forecasting: issues and use guidelines. *Industrial Management & Data Systems*, 101(1-2), 5–12. doi: 10.1108/02635570110365952
- Giot, P. & Petitjean, M. (2011). On the statistical and economic performance of stock return predictive regression models: an international perspective. *Quantitative Finance*, 11(2), 175–193. doi: 10.1080/14697680903468971
- Ho, W. (2008). Integrated analytic hierarchy process and its applications -A literature review. *European Journal of Operational Research*, 186(1), 211–228. doi: 10.1016/j.ejor.2007.01.004
- Hogarth, R.M. & Makridakis, S. (1981). Forecasting and Planning: An Evaluation. *Management Science*, 27(2), 115–138.
- Hyndman, R.J., Ahmed, R.A., Athanasopoulos, G. & Shang, H.L. (2011). Optimal combination forecasts for hierarchical time series. *Computational Statistics & Data Analysis*, 55(9), 2579–2589. doi: 10.1016/j.csda.2011.03.006
- Hyndman, R.K. & Anne, B. (2006). Another look at measures of forecast accuracy. *International Journal of Forecasting*, 22, 679–688.
- Ishizaka, A., Balkenborg, D. & Kaplan, T. (2011). Does AHP help us make a choice? An experimental evaluation. *Journal of the Operational Research Society*, 62(10), 1801–1812. doi: 10.1057/jors.2010.158
- Kahn, K.B. (1998). Revisiting top-down versus bottom-up forecasting. *The Journal of Business Forecasting*, 17(5), 14–19.
- Lederer, A.L. & Smith, G.L. (1988). Individual Differences and Decision-Making Using Various Levels of Aggregation of Information. *Journal of Management Information Systems*, 5(3), 53–69.
- Makridakis, S. & Taleb, N. (2009). Decision making and planning under low levels of predictability. *International Journal of Forecasting*, 25, 716–733.
- Makridakis, S., Wheelwright, S. & Hyndman, R. (1997). *Forecasting: methods and applications*: Wiley.
- Man, K.S. (2004). Linear prediction of temporal aggregates under model misspecification. *International Journal of Forecasting*, 20(4), 659–670. doi: 10.1016/j.ijforecast.2003.11.010
- Manfren, M., Caputo, P. & Costa, G. (2011). Paradigm shift in urban energy systems through distributed generation: Methods and models. *Applied Energy*, 88(4), 1032–1048. doi: 10.1016/j.apenergy.2010.10.018
- Marcellino, M., Stock, J.H. & Watson, M.W. (2003). Macroeconomic forecasting in the Euro area: Country specific versus area-wide information. *European Economic Review*, 47(1), 1–18. doi: 10.1016/s0014-2921(02)00206-4

- Oliver, L. (2006). *The cost management toolbox: A Manager's Guide to Controlling Costs and Boosting Profits*. USA: AMACOM.
- Saaty, T. & Kearns, K. (1985). *Analytical Planning. The Organization of Systems* (Vol. IV). Pittsburgh, PA, USA: RWS Publications.
- Saaty, T. & Vargas, L. (2001). *Models, Methods, Concepts & Applications of the Analytic Hierarchy Process*. Pittsburgh, PA, USA: Springer.
- Sanders, N. & Manrodt, K.B. (2003). The efficacy of using judgmental versus quantitative forecasting methods in practice. *Omega*, 31(6), 511–522.
- Smith, C.D. & Mentzer, J.T. (2010). Forecasting task-technology fit: The influence of individuals, systems and procedures on forecast performance. *International Journal of Forecasting*, 26(1), 144–161.
- Sporcic, M., Landekic, M., Lovric, M., Bogdan, S. & Segotic, K. (2010). Multiple criteria decision making in forestry -Methods and experiences. *Sumarski List*, 134(5-6), 275–286.
- Subramanian, N. & Ramanathan, R. (2012). A review of applications of Analytic Hierarchy Process in operations management. *International Journal of Production Economics*, 138(2), 215–241. doi: 10.1016/j.ijpe.2012.03.036
- Syntetos, A.A., Nikolopoulos, K., Boylan, J.E., Fildes, R. & Goodwin, P. (2009). The effects of integrating management judgement into intermittent demand forecasts. *International Journal of Production Economics*, 118(1), 72–81.
- Temurshoev, U., Webb, C. & Yamano, N. (2011). Projection of supply and use tables: methods and their empirical assessment. *Economic Systems Research*, 23(1), 91–123.
- Triantaphyllou, E. & Sánchez, A. (1997). A sensitivity analysis approach for some deterministic multi-criteria decision making methods. *Decision Sciences*, 28(1), 151–194.
- Tsoukiàs, A. (2008). From decision theory to decision aid methodology. *European Journal of Operational Research*, 187, 138–161.
- Uddameri, V. (2007). Using statistical and artificial neural network models to forecast potentiometric levels at a deep well in South Texas. *Environmental Geology*, 51(6), 885–895. doi: 10.1007/s00254-006-0452-5
- Vaidya, O.S. & Kumar, S. (2006). Analytic hierarchy process: An overview of applications. *European Journal of Operational Research*, 169(1), 1–29. doi: 10.1016/j.ejor.2004.04.028
- Velásquez-Henao, J.D., Franco-Cardona, C.J. & Olaya-Morales, Y. (2012). A Review of DAN2 (Dynamic architecture for artificial neural networks) model in time series forecasting. *Ingeniería y Universidad*, 16(1), 135–146.
- Winklhofer, H. & Diamantopoulos, A. (2002). Managerial evaluation of sales forecasting effectiveness: A MIMIC modeling approach. *International Journal of Research in Marketing*, 19(2), 151–166.
- Wright, G., Lawrence, M.J. & Collopy, F. (1996). The role and validity of judgment in forecasting. *International Journal of Forecasting*, 12(1), 1–8.



Asignación óptima de capital en base al perfil de riesgo de las instituciones de inversión colectiva: una aplicación de las medidas de riesgo distorsionadas

BELLES-SAMPERA, JAUME

Riskcenter-IREA, Universitat de Barcelona

Correo electrónico: jbelllesa8@alumnes.ub.edu

SANTOLINO, MIGUEL

Riskcenter-IREA, Universitat de Barcelona

Correo electrónico: msantolino@ub.edu

RESUMEN

Los recientes marcos regulatorios del sector financiero y asegurador otorgan una creciente importancia a la gestión de riesgos. El regulador exige a las entidades que dispongan de un capital reservado para hacer frente a posibles pérdidas derivadas de sus actividades; este capital se cuantifica habitualmente mediante la aplicación de medidas de riesgo. Es esencial para la toma de decisiones de los gestores de estas entidades conocer qué partes de su negocio contribuyen en mayor medida a los requerimientos de capital. Para este fin se aplican técnicas de asignación óptima de capital. En este artículo se utilizan criterios de asignación óptima de capital en el contexto de la gestión de activos con el objetivo de analizar los coeficientes de liquidez de un conjunto de Instituciones de Inversión Colectiva (IIC) gestionadas por una misma Sociedad Gestora de Instituciones de Inversión Colectiva (SGIIC). En este nuevo contexto, el riesgo en el que incurre cada IIC es evaluado a través de un conjunto de medidas de riesgo distorsionadas. Se desarrolla un caso práctico para el que los resultados sugieren que el perfil de riesgo de las inversiones de cada IIC es un criterio que debería ser determinante en el establecimiento de sus respectivos coeficientes de liquidez, evitando de este modo penalizar a las estrategias conservadoras.

Palabras clave: asignación de capital; medidas de riesgo distorsionadas; perfil de riesgo; riesgo agregado.

Clasificación JEL: G11; G23; G32.

MSC2010: 91B30; 62P05; 91B84; 91G70.

Optimal Capital Allocation Based on the Risk Profile of Collective Investment Schemes: An Application of Distortion Risk Measures

ABSTRACT

Increasing attention is paid to risk management under the recent regulatory frameworks of the insurance and financial sectors. It is required by the regulator that institutions have a capital to face potential losses from their activity. This capital is usually assessed by means of risk measures. To take adequate decisions, it is essential that managers know how individual risk contribute to the aggregated capital requirement. Techniques of optimal capital allocation are developed to deal with it. This article applies optimal capital allocation criteria in the context of asset management. Our goal is to analyze the liquidity coefficients of Collective Investment Schemes (IIC) belonging to a Management Company of Collective Investment Schemes. In this new context, the risk undertaken by each IIC is assessed with alternative distortion risk measures. We develop a fictitious case where results suggest that the risk profile of institutions should be a key factor to determine liquidity coefficients in order to not penalize conservative strategies.

Keywords: capital allocation; distortion risk measures; risk profile; aggregated risk.

JEL classification: G11; G23; G32.

MSC2010: 91B30; 62P05; 91B84; 91G70.



1. INTRODUCCIÓN

La identificación de los diferentes riesgos y una adecuada medición de cada uno de ellos son unos de los principales retos a los que se enfrentan los profesionales de los sectores financiero y asegurador. El eje vertebrador de los recientes marcos regulatorios de estos sectores (Basilea III, Solvencia II, Circular 6/2009 de la CNMV) es la gestión cuantitativa de los riesgos. Es en este contexto en el que los reguladores establecen unos requerimientos de capital a las entidades, cuyo propósito principal es asegurar la continuidad de la compañía ante posibles pérdidas derivadas de su actividad. Estos capitales requeridos se calculan, habitualmente, en base a alguna medida de riesgo determinada, con un nivel de confianza y un horizonte temporal fijados. Así, cualquier entidad con más de una unidad de negocio o expuesta a más de una categoría de riesgo está interesada en determinar cuál es la contribución de cada unidad (o categoría de riesgo) al capital total requerido por el regulador. La determinación de cómo contribuyen las unidades al capital total consiste en resolver un problema de asignación de capital (*capital allocation*). Cada una de las posibles soluciones a estos problemas recibe el nombre de criterio de asignación de capital.

En este trabajo nos centramos en aquellas entidades financieras cuyo objeto es la gestión de activos. En concreto, nos ponemos en el papel de una Sociedad Gestora de Instituciones de Inversión Colectiva (SGIIC) y nos planteamos aprovechar los criterios de asignación de capital como posibles herramientas para analizar si es necesario revisar los coeficientes de liquidez exigidos a las Instituciones de Inversión Colectiva (IIC) financieras¹ gestionadas por la SGIIC. En primer lugar, discutimos cómo pueden ser aplicados los criterios de asignación de capital en el análisis de los coeficientes de liquidez. En segundo lugar, nos centramos en un criterio de asignación específico (el de asignación proporcional) para llevar a cabo un ejercicio práctico de revisión de los coeficientes de liquidez en un entorno simulado de una SGIIC que gestiona un conjunto de IIC con diferentes estrategias de inversión. Para este ejemplo aplicamos distintas medidas de riesgo distorsionadas con el objetivo de explorar el impacto que puede tener en la determinación del coeficiente de liquidez *óptimo* de cada IIC la elección de la medida de riesgo. El capital total requerido para la SGIIC que tomamos como referencia se corresponde con la suma de los peores escenarios de capitales de liquidez de cada IIC según la normativa actual de la CNMV (es decir, el 10% del capital de cada una de las IIC gestionadas por la SGIIC).

Finalmente, dentro del ejercicio práctico, planteamos el escenario en el que existe subsidio cruzado entre las IIC y comparamos los resultados. En este escenario el capital total requerido se corresponde con el valor de las distintas medidas de riesgo distorsionadas para la suma de las inversiones de todas las IIC. De este modo, podemos analizar el comportamiento de las distintas medidas de riesgo utilizadas en un contexto de agregación de riesgos. Cada IIC se puede equiparar a una entidad aislada por lo que, *a priori*, considerar subsidio cruzado entre las IIC parece poco realista

¹ Los coeficientes de liquidez de las IIC de carácter financiero que la Comisión Nacional del Mercado de Valores (CNMV) debe supervisar son los expuestos en el artículo 40.1 del Real Decreto 1309/2005, de 4 de noviembre.

para la determinación de los requerimientos de capital. Sin embargo, este enfoque puede resultar de gran interés en la gestión interna de la SGIIC. Es habitual que la gestión de las IIC de una SGIIC no dependa de un único equipo sino que se trabaje la gestión por tipo de inversión (renta variable EUR, renta variable USD, renta fija no EUR, productos estructurados, etc.). Es decir, no hay subsidio cruzado en las inversiones pero sí lo hay en la gestión de las inversiones. En este entorno, el enfoque del subsidio cruzado puede servir como herramienta de evaluación de los equipos gestores de los diferentes tipos de inversión para, por ejemplo, definir las políticas de retribución variable dentro de la SGIIC.

La estructura del artículo es la que se detalla a continuación. En la sección 2 contextualizamos el marco teórico de las soluciones a un problema de asignación óptima de capital propuesto y su relación con las medidas de riesgo distorsionadas. En la sección 3 detallamos la metodología seguida para definir el caso ficticio que proponemos, en el cual la SGIIC se enfrenta a un problema de asignación de capital para un conjunto de IIC con perfiles de riesgo de inversión claramente diferenciados. En la siguiente sección describimos los resultados obtenidos para esta aplicación y, finalmente, en la sección 5 resumimos las principales conclusiones.

2. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE CAPITAL

Los campos en los que se presentan problemas de asignación de capital entre diferentes agentes son muy diversos, abarcando desde la investigación operativa hasta la economía y las finanzas. La literatura académica relacionada asignación de capital es numerosa y la solución a este tipo de problemas se ha abordado desde puntos de vista tan diversos como son el económico (Tasche, 2004; Buch *et al.*, 2011), de Teoría de Juegos (Denault, 2001) o el axiomático (Kalkbrenner, 2005), entre otros. Excelentes revisiones sobre los distintos criterios de asignación existentes en la literatura se pueden encontrar en Trigo *et al.* (2011), así como en la introducción de van Gulick *et al.* (2012). En este artículo abordamos todos los pasos para resolver un ejercicio de asignación de capital bajo un criterio de asignación proporcional para un conjunto de medidas de riesgo distorsionadas. Dhaene *et al.* (2012) proponen un marco teórico en el que se unifican gran parte de los criterios de asignación de capital existentes en la literatura. Nos basamos en el marco teórico diseñado por Dhaene *et al.* (2012) para describir cómo el criterio de asignación proporcional queda englobado dentro de este contexto así como la utilización de las medidas de riesgo distorsionadas en este entorno.

Criterios de asignación de capital en la revisión de los coeficientes de liquidez

Es posible interpretar el coeficiente de liquidez de una IIC como un colchón ante eventos adversos (tales como, por ejemplo, posibles pérdidas o solicitudes de reembolso por parte de los partícipes). En este sentido, una SGIIC podría querer determinar qué margen tiene cada IIC de flexibilidad para “infringir” el coeficiente de liquidez regulatorio, un margen que parece sensato pensar que debería

estar vinculado a los riesgos a los que está expuesta cada IIC. Para simplificar la exposición, supondremos únicamente relevante el riesgo de mercado. La SGIIC puede plantearse el análisis de los coeficientes de liquidez de la siguiente forma. En primer lugar, la SGIIC contempla el peor escenario de requerimiento de liquidez para el conjunto de las IIC que gestiona. A partir del capital que se deriva de este escenario, realiza una asignación de este capital entre las distintas IIC en base a la proporción de riesgo de cada una de ellas respecto al total.

En concreto, en este trabajo, para la resolución por parte de la SGIIC del proceso de asignación óptima de capital a las distintas IIC siguiendo el criterio proporcional indicado, abordamos las siguientes etapas:

- Selección de los modelos de valoración de todas las posiciones de las carteras.
- Determinación de los factores de riesgo necesarios para poder realizar un *mapping* de las funciones de pérdidas de las carteras.
- Modelización de la evolución (individual y conjunta) de los cambios en los factores de riesgo.
- Elección de un conjunto de medidas de riesgo de interés, así como su método de cálculo, nivel de confianza y horizonte temporal.
- Simulación de la evolución de los cambios en los factores de riesgo para los distintos escenarios.
- Obtención de las funciones de pérdidas simuladas en base a las simulaciones de los cambios en los factores de riesgo y al *mapping* realizado.
- Cuantificación del riesgo para las distintas funciones de pérdidas.
- Análisis de los resultados obtenidos desde un enfoque económico.
- Finalmente, asignación óptima de capital.

Aunque en este trabajo se contextualicen para el caso de la SGIIC que hemos descrito, cabe destacar que las etapas anteriores pueden ser fácilmente extendibles a otros ejemplos similares en el sector asegurador o financiero, aquellos en los que se desee atribuir a cada unidad una parte del riesgo total medido como una parte del capital agregado requerido.

Para la presente aplicación, el problema de asignación puede describirse de la siguiente forma. Se dispone de un capital K que hay que repartir entre un total de n Instituciones de Inversión Colectiva. Es frecuente requerir una asignación completa, tal que:

$$K = \sum_{k=1}^n K_k \quad (1)$$

donde K_k es el capital asignado a la k -ésima IIC. Esta asignación debe responder a algún criterio específico que dependerá del contexto y objetivos perseguidos. En nuestra aplicación, el capital asignado a las diferentes IIC debe reflejar el riesgo de sus inversiones, por tanto, debe ser determinado en base a su función de pérdidas. La función de pérdidas de la cartera de una IIC entre los instantes t y $t+d$ la definimos como $L_{t+d} = V_t - V_{t+d}$, donde V es el valor de la cartera en los instantes t y $t+d$, respectivamente. Debe entenderse que esta función representa las pérdidas de la cartera cuando toma

valores positivos pero que, además, permite representar sus ganancias cuando toma valores negativos.

El valor total de la cartera en el instante t podemos escribirlo como $V_t = \sum_{i=1}^I V_{i,t} = \sum_{i=1}^I \omega_{i,t} \cdot V_t$, donde

$V_{i,t}$ es el valor de la posición en el activo i de la IIC en el momento t y $\omega_{i,t}$ representan los pesos de la cartera en cada uno de los activos i , $i = 1, \dots, I$ en el momento t .

El valor de la cartera en cada instante de tiempo se define en base a una función f que depende del tiempo y de los factores de riesgo $Z_{m,t}$ $m = 1, \dots, M$. La función de pérdidas L_{t+d} puede entonces definirse de la siguiente forma:

$$L_{t+d} = f\left(t, \vec{Z}_t\right) - f\left(t+d, \vec{Z}_t + \sum_{s=1}^{d-1} \vec{X}_s\right)$$

donde \vec{X}_t es el vector de los cambios en los factores de riesgo $\vec{X}_t = \vec{Z}_{t+1} - \vec{Z}_t$, tal que $\vec{Z}_t = (Z_{1,t}, Z_{2,t}, \dots, Z_{M,t})^T$. Los factores de riesgo asumimos que son observables en el instante t . Por tanto, la aleatoriedad de la función de pérdidas depende únicamente de los cambios en los factores de riesgo. Dado que la función f puede ser de difícil evaluación, frecuentemente se utilizan aproximaciones a la función de pérdidas que facilitan el cálculo. En particular, si la función f es diferenciable, suele utilizarse la función de pérdidas linealizada L_{t+d}^Δ que se obtiene como la aproximación de primer orden de L_{t+d} a través de la expansión de Taylor².

Una vez definida la función de pérdidas, debemos determinar el criterio de asignación de capital. Consideremos el vector aleatorio de las n pérdidas individuales (L_1, L_2, \dots, L_n) que se pueden materializar en una fecha futura para el conjunto de las IIC. Asumimos que $E(L_k) < +\infty$ para $k = 1, \dots, n$. La pérdida agregada consiste, por tanto, en:

$$S = \sum_{k=1}^n L_k \quad (2)$$

De acuerdo con el marco teórico unificado propuesto por Dhaene *et al.* (2012), la resolución de un problema de asignación de capital consiste en obtener una solución a un problema de optimización en el que la suma ponderada de las medidas de desviación de las pérdidas de cada unidad de riesgo respecto del capital que se les asigna sea minimizada. En nuestro caso, el objetivo es minimizar la suma ponderada de las medidas de desviación de las pérdidas de cada IIC respecto su capital asignado. Este marco general permite englobar gran parte de las distintas propuestas de asignación de capital que pueden encontrarse en la literatura en base a:

² La utilización de la aproximación lineal debe tomarse con precaución para horizontes temporales largos y cuando la función de pérdidas se desvíe claramente de ser lineal respecto a los cambios en los factores de riesgo.

- la función que mide la desviación de las pérdidas respecto del capital asignado (D);
- las ponderaciones para las IIC (v_k);
- las ponderaciones de los eventos que generan las desviaciones de L_k respecto de K_k (ξ_k).

Formalmente, el problema de optimización es el siguiente. Dado un capital $K > 0$, determinar los capitales K_k , $k = 1, \dots, n$ a partir de la resolución de:

$$\min_{K_1, \dots, K_n} \sum_{k=1}^n v_k \cdot E \left[\xi_k \cdot D \left(\frac{L_k - K_k}{v_k} \right) \right], \text{ sujeto a que } \sum_{k=1}^n K_k = K \quad (3)$$

donde los v_k son valores reales no negativos tales que $\sum_{k=1}^n v_k = 1$ y ξ_k son variables aleatorias no negativas con esperanza finita. D es una función no negativa asociada normalmente a una distancia, y la inclusión de las ponderaciones de las IIC en el denominador de $\frac{L_k - K_k}{v_k}$ permite comparar las desviaciones entre las pérdidas y los capitales asignados corregidas por la importancia de cada activo. En concreto, si aplicamos el criterio de optimización cuadrático $D(x) = x^2$, el problema de optimización definido en (3) tiene la siguiente solución única³:

$$K_k = E(\xi_k \cdot L_k) + v_k \cdot \left[K - \sum_{j=1}^n E(\xi_j \cdot L_j) \right], \quad k = 1, \dots, n. \quad (4)$$

El reparto de capital establecido en (4) consiste en la esperanza de la pérdida L_k ponderada por ξ_k más un término adicional que es proporcional al peso v_k que se haya asignado a la k -ésima IIC. Este término adicional es un reparto proporcional de la diferencia entre el capital total K y la suma de las esperanzas ponderadas $\sum_{j=1}^n E(\xi_j \cdot L_j)$. Si, además, definimos las ponderaciones (v_k) en base al peso de cada una de las esperanzas ponderadas sobre la suma del conjunto:

$$v_k = \frac{E(\xi_k \cdot L_k)}{\sum_{j=1}^n E(\xi_j \cdot L_j)},$$

el reparto de capital óptimo definido en (4) puede expresarse de la siguiente forma:

$$K_k = \frac{K}{\sum_{j=1}^n E(\xi_j \cdot L_j)} \cdot E(\xi_k \cdot L_k), \quad k = 1, \dots, n. \quad (5)$$

³ Consideramos en este trabajo el criterio de optimización cuadrática puesto que de él se derivan los criterios de asignación proporcionales al riesgo, que son los de nuestro interés en este artículo. Para otras funciones de medida de desviación, véase Dhaene *et al.* (2012).

Relación entre medidas de riesgo de distorsión y asignación óptima de capital

Por último, analizaremos la aplicación de las medidas de riesgo distorsionadas en el contexto de un problema de asignación de capital. Una medida de riesgo ρ asigna a cada función de pérdidas L un valor $\rho(L)$ que representa el capital en riesgo para cada IIC. Formalmente, ρ puede definirse de la siguiente forma. Sea Γ el conjunto de todas las variables aleatorias L definidas en un determinado espacio de probabilidad. Una medida de riesgo es una función ρ que a cada elemento de Γ le asigna un valor numérico real⁴; es decir:

$$\begin{aligned} \rho : \Gamma &\longrightarrow \mathfrak{R} \\ L &\mapsto \rho(L) \end{aligned}$$

Existen numerosas tipologías de medidas de riesgo en base a las propiedades que satisfacen (véase, por ejemplo, Denuit *et al.*, 2005). En este artículo nos centramos en las medidas de riesgo de distorsión (*distortion risk measures*) introducidas por Wang (1995, 1996). Consideremos la función de distorsión $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, no decreciente, tal que $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$. La medida de riesgo

$$\rho_g : \Gamma \longrightarrow \mathfrak{R}, \text{ definida como } \rho_g(L) = - \int_{-\infty}^0 [1 - g(S_L(u))] du + \int_0^{+\infty} g(S_L(u)) du,$$

recibe el nombre de medida de riesgo de distorsión, donde $S_L(\cdot)$ es la función de supervivencia de L . Este tipo de medidas de riesgo cumplen las propiedades de translación, aditividad comonotónica, homogeneidad positiva y monotonicidad. En el caso en que la función de distorsión sea cóncava, la medida de riesgo asociada también satisface la propiedad de subaditividad y, por tanto, es una medida de riesgo coherente en el sentido de Artzner *et al.* (1999). Algunas medidas de riesgo de distorsión y su función de distorsión se presentan en la Tabla 1. Para más detalles sobre este tipo de medidas de riesgo, véase Wang (1995, 1996), Denuit *et al.* (2005), Hardy (2006) y Belles-Sampera *et al.* (2013), entre otros.

Tabla 1. Medidas de riesgo de distorsión para un nivel de confianza (α) y la función de distorsión asociada

| Medida de riesgo | Función de distorsión |
|---|---|
| VaR (<i>Value at Risk</i>) | $g(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 1 - \alpha \\ 1 & \text{si } u \geq 1 - \alpha \end{cases}$ |
| TVaR (<i>Tail Value at Risk</i>) | $g(u) = \min \left\{ \frac{u}{1 - \alpha}, 1 \right\} = \begin{cases} \frac{u}{1 - \alpha} & \text{si } u < 1 - \alpha \\ 1 & \text{si } u \geq 1 - \alpha \end{cases}$ |
| <i>Denneberg's absolute deviation principle</i> | $g(u) = \begin{cases} u \cdot (1 + \alpha) & \text{si } u < 0.5 \\ \alpha + (1 - \alpha) \cdot u & \text{si } u \geq 0.5 \end{cases}$ |
| <i>Dual Power Transform</i> * | $g(u; \delta) = 1 - (1 - u)^\delta, \delta \geq 1$ |

*Este medida no depende del nivel de confianza.

Si asumimos $\rho_g(L_k) = E(\xi_k \cdot L_k)$, la expresión (5) puede reescribirse como:

⁴Nótese que, en base a esta definición, la esperanza matemática de una variable aleatoria es una medida de riesgo.

$$K_k = \frac{K}{\sum_{j=1}^n \rho_g(L_j)} \cdot \rho_g(L_k) \quad , k = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Así, la asignación de capital definida en (6) puede interpretarse como la asignación proporcional en función del riesgo de cada IIC cuantificado por medio de la medida de riesgo distorsionada ρ_g . Cabe mencionar que esta solución al problema de asignación guarda una estrecha relación con las asignaciones basadas en las unidades de negocio (*business unit driven allocations*)⁵.

3. APLICACIÓN

Analizamos por medio de un escenario ficticio si una SGIIC debe revisar la asignación de capital mensual por riesgo de mercado que tiene establecida, entendiendo por capital asignado a cada IIC el valor de las inversiones que dicha IIC tiene en activos líquidos para satisfacer su coeficiente de liquidez normativo. Simplificaremos la asignación actual de capital a un caso de máximos⁶ (es decir, situaciones en las que para todas las IIC de carácter financiero se requiera un coeficiente de liquidez del 10% de sus patrimonios). Si denotamos por $V_{k,t}$ el valor de mercado de la k -ésima IIC en el mes t ,

el regulador establece como capital $K = 10\% \cdot \sum_{k=1}^n V_{k,t}$ (el 10% del valor de mercado de todas las IIC),

y como capital requerido a cada IIC, $K_k = 10\% \cdot V_{k,t}$ (el 10% de su valor de mercado). Así pues, estamos suponiendo que esta asignación no tiene en consideración el perfil de riesgo de cada IIC. Es decir, dos IIC con el mismo valor de mercado en un momento t pero con estrategias de inversión totalmente dispares tienen el mismo requerimiento de capital.

3.1 Caracterización de las IIC según su perfil de inversión

Para llevar a cabo el caso práctico debemos definir las estrategias de inversión de las IIC y cuantificar el riesgo en que incurre cada una de ellas. En concreto, planteamos tácticas de inversión basadas en instrumentos financieros sencillos. Obviamente, en situaciones reales la cartera de activos de una IIC está constituida por multitud de instrumentos, cuya complejidad y características de exposición a riesgo varían tanto en función de las políticas de inversión expuestas en sus folletos como en función de las estrategias implementadas por los equipos de gestión. Nuestra intención aquí es representar distintos perfiles de riesgo de inversión, unos más conservadores y otros más arriesgados, a partir de lo que puede entenderse como un *benchmark* de gestión de cada IIC. La manera de conseguir este propósito es asignar diferentes pesos para los siguientes productos financieros⁷:

⁵ Pueden determinarse variables aleatorias ξ_k ligadas a las medidas de riesgo ρ_g que satisfacen que $\rho_g(L_k) = E(\xi_k \cdot L_k)$.

⁶ Actualmente, el coeficiente de liquidez oscila entre un mínimo del 3% y un máximo del 10% del patrimonio de la IIC.

⁷ No son propiamente productos puesto que, por ejemplo, no se pueden adquirir participaciones en un índice. Sin embargo, permitimos esta simplificación para facilitar la exposición.

- Bonos gubernamentales alemanes con vencimiento 10 años (representando inversiones en renta fija con riesgo de crédito prácticamente inexistente).
- Renta variable denominada en EUR (representada por el índice Eurostoxx 50).
- Renta variable denominada en USD contravalorada a EUR (representada por el índice S&P500).
- Cobertura del riesgo de divisa USD/EUR mediante un *forward* a 1 año (empleados para cubrir el riesgo de divisa subyacente en posiciones en renta variable denominada en USD). En este ejercicio el *forward* se valora mediante:
 - Posición corta en renta fija gubernamental estadounidense a un año.
 - Posición larga en renta fija gubernamental alemana a un año.
- Cuenta de efectivo denominada en EUR (que nos servirá para igualar el valor de las inversiones entre las IIC).

En la Tabla 2 se muestran los pesos otorgados a cada uno de estos productos para un conjunto de siete IIC, que pretenden reflejar diferentes perfiles de riesgo de inversión. En concreto, los diferentes perfiles de las IIC pueden interpretarse de la siguiente forma. En primer lugar, existen tres grandes grupos de estrategias en función de la exposición relativa a renta fija (RF) y a renta variable (RV): 15%-85%, 50%-50%, 85%-15%. *A priori* estos grupos están en orden decreciente de riesgo de mercado. Es decir, a mayor inversión en RF menos riesgo de mercado. Dentro de los dos primeros grupos tenemos otros dos subgrupos, en función de la exposición relativa a RV EUR y a RV USD: 25%-75% y 75%-25%. Estos subgrupos estarían ordenados en orden creciente de riesgo, puesto que un índice con 50 componentes (Eurostoxx 50) debe ser más volátil que uno con 500 (S&P500). Finalmente, las IIC con inversión en RV USD, pueden elegir cubrir el riesgo de divisa totalmente o no cubrirlo. En principio, la IIC₁ y la IIC₄ deberían ser menos arriesgadas que la IIC₂ y la IIC₅, puesto que estas últimas están expuestas al riesgo de divisa.

Tabla 2. Perfiles de inversión de las Insituciones de Inversión Colectiva

| | Renta Fija | Renta Variable | RV EUR | RV USD | Cobertura riesgo de divisa (<i>forward</i> 1Y) | | Total |
|------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|----------------|-------|
| | Bono 10Y EUR | Total | Eurostoxx 50 | S&P 500 | Bono 1Y USD | Bono 1Y EUR | |
| | $\omega_{k,1}$ | | $\omega_{k,2}$ | $\omega_{k,3}$ | $\omega_{k,4}$ | $\omega_{k,5}$ | |
| IIC ₁ | 15% | 85% | 25% | 75% | -63,75% | 63,75% | 100% |
| IIC ₂ | 15% | 85% | 25% | 75% | 0% | | 100% |
| IIC ₃ | 15% | 85% | 75% | 25% | 0% | | 100% |
| IIC ₄ | 50% | 50% | 25% | 75% | -37,5% | 37,5% | 100% |
| IIC ₅ | 50% | 50% | 25% | 75% | 0% | | 100% |
| IIC ₆ | 50% | 50% | 75% | 25% | 0% | | 100% |
| IIC ₇ | 85% | 15% | 100% | 0% | 0% | | 100% |

Nota: La columna en fondo gris indica el porcentaje total invertido en renta variable. Este porcentaje total se reparte entre un porcentaje en Euros (RV EUR) y uno en dólares (RV USD). Por ejemplo, el porcentaje invertido en RV EUR y en RV USD para la IIC₁ es $85\% \cdot 25\% = 21,25\%$ y $85\% \cdot 75\% = 63,75\%$, respectivamente. Cuando la IIC no cubre el riesgo de divisa, en la columna de cobertura aparece un 0%. En caso contrario, la cobertura se realiza mediante una posición larga en un bono EUR y una corta en uno USD, en los porcentajes de inversión en RV USD.

Supongamos un valor inicial para cada una de las IIC de 2.500.000 EUR a cierre de 31-dic-2010, que corresponderá a $t = 0$. Supongamos $p_{i,t}$ como el valor en t de un bono gubernamental alemán con vencimiento diez años ($i=1$); el nivel del índice Eurostoxx 50 ($i=2$); el nivel del índice S&P 500 contravalorado a EUR ($i=3$); un bono gubernamental estadounidense con vencimiento 1 año, contravalorado a EUR ($i=4$); un bono gubernamental alemán con vencimiento 1 año ($i=5$); la cuenta de efectivo denominada en EUR ($i=6$). Si asumimos que las ponderaciones de inversión en los diferentes mercados ($\omega_{k,i}$), así como las cantidades expuestas⁸ ($n_{k,i}$) se mantienen constantes en el periodo de análisis, el valor en el instante t de la inversión i para la IIC_k lo podemos definir como $V_{k,i,t} = \omega_{k,i} \cdot V_{k,t} = n_{k,i} \cdot p_{i,t}$, donde $V_{k,t} = \sum_{i=1}^6 V_{k,i,t}$. En la Tabla 3 se presentan los valores de mercado en el momento inicial de cada uno de los productos y las cantidades expuestas para cada una de las IIC. Cabe señalar que consideramos únicamente valores enteros para las cantidades expuestas en los tres primeros mercados, por lo que los ponderadores los ajustamos a estos valores enteros.

Tabla 3. Valores de mercado y cantidades expuestas para cada IIC en el momento inicial

| | Renta Fija | RV EUR | RV USD | Cobertura riesgo de divisa (forward 1Y) | | |
|------------------------|---------------------|---------------------|--------------------|--|--------------------|-----------------|
| | Bono 10Y EUR | Eurostoxx 50 | S&P 500 | Bono 1Y USD | Bono 1Y EUR | Efectivo |
| | $n_{k,1}$ | $n_{k,2}$ | $n_{k,3}$ | $n_{k,4}$ | $n_{k,5}$ | $n_{k,6}$ |
| IIC₁ | 510.109 | 190 | 1.696 | -2.138.745,59 | 1.600.719,69 | 3.157,02 |
| IIC₂ | 510.109 | 190 | 1.696 | | 0,00 | 702,64 |
| IIC₃ | 510.109 | 570 | 565 | | 0,00 | 2.185,70 |
| IIC₄ | 1.700.366 | 111 | 997 | -1.257.269,67 | 940.989,11 | 4.599,52 |
| IIC₅ | 1.700.366 | 111 | 997 | | 0,00 | 3.156,70 |
| IIC₆ | 1.700.366 | 335 | 332 | | 0,00 | 2.438,45 |
| IIC₇ | 2.890.622 | 134 | 0 | | 0,00 | 762,33 |
| | $V_{k,1,0}$ | $V_{k,2,0}$ | $V_{k,3,0}$ | $V_{k,4,0}$ | $V_{k,5,0}$ | $V_{k,6,0}$ |
| IIC₁ | 374.999,40 | 530.635,80 | 1.593.662,16 | -1.593.662,16 | 1.591.207,78 | 3.157,02 |
| IIC₂ | 374.999,40 | 530.635,80 | 1.593.662,16 | | 0,00 | 702,64 |
| IIC₃ | 374.999,40 | 1.591.907,40 | 530.907,50 | | 0,00 | 2.185,70 |
| IIC₄ | 1.249.999,96 | 310.003,02 | 936.840,32 | -936.840,32 | 935.397,50 | 4.599,52 |
| IIC₅ | 1.249.999,96 | 310.003,02 | 936.840,32 | | 0,00 | 3.156,70 |
| IIC₆ | 1.249.999,96 | 935.594,70 | 311.966,89 | | 0,00 | 2.438,45 |
| IIC₇ | 2.124.999,79 | 374.237,88 | 0,00 | | 0,00 | 762,33 |

Fuente: Información del valor de los productos financieros a 31/12/2010 obtenida en Bloomberg.

En relación a los activos de renta fija, se valoran a descuento según el valor a 31-dic-2010. En el caso de los bonos gubernamentales alemanes a 10 años, $p_{1,t} = \exp\left[-\frac{1}{100} \cdot y\left(\frac{t}{12}, 10\right) \cdot \left(10 - \frac{t}{12}\right)\right]$, donde $y\left(\frac{t}{12}, 10\right)$ es el tipo cupón cero gubernamental alemán a $10 - \frac{t}{12}$ años. Para valorarlo

⁸ Este es un valor nocional, no quiere decir, por poner un ejemplo, que la IIC_k disponga de $n_{k,2}$ índices Eurostoxx 50.

correctamente deberíamos disponer, en cada momento t , de toda la curva cupón cero alemana⁹. Puesto que únicamente disponemos en t de los tipos cupón cero a 10 años $y_t = y\left(\frac{t}{12}, 10 + \frac{t}{12}\right)$, y puesto que el análisis lo realizaremos a un horizonte de 1 mes, realizamos la siguiente aproximación $y\left(\frac{t}{12}, 10\right) \approx y_t$. Para el resto de activos de renta fija utilizamos un criterio similar. Los valores iniciales que aparecen en la Tabla 3 se corresponden con $p_{1,0} = \exp(-3,077\% \times 10)$, $p_{4,0} = \exp(-0,271\%) \times 0,747$ (valor contravalorado a euros) y $p_{5,0} = \exp(-0,596\%)$. En cuanto a los activos de renta variable, cabe mencionar que los índices bursátiles no están expresados en unidades monetarias. No obstante, los niveles de los índices pueden interpretarse igual a cualquier número arbitrario de unidades monetarias tomado como valor de referencia. En este sentido, para este ejercicio, fijamos que el número de referencia de unidades monetarias consista en el nivel del índice bursátil a 31-dic-2010. En la parte de renta variable, en vez de índices bursátiles hubiéramos podido considerar un conjunto de valores representativos de los mismos, los cuales podrían ser directamente valorados en unidades monetarias. Consideramos que esta última opción hubiera significado ampliar el número de factores de riesgo sin contribuir significativamente al objetivo principal del trabajo, consistente en mostrar de forma sintetizada las técnicas a aplicar en un ejercicio de asignación de capital.

Función de pérdidas linealizada

Una vez definido el perfil de riesgo de cada IIC, debemos analizar su función de pérdidas. La función de pérdidas mensual linealizada para el bono gubernamental alemán a vencimiento 10 años es igual a

$$L_{k,1,t+1}^{\Delta}(X_{1,t}) = \omega_{k,1} \cdot V_{k,t} \cdot \left[1 - e^{-c_1/100} \cdot \left(1 - \frac{X_{1,t}}{100} + \frac{c_1}{100} \right) \right]$$

donde c_1 es el valor medio de la serie de cambios en el factor de riesgo, siendo $X_{1,t} = Z_{1,t+1} - Z_{1,t}$ con factor de riesgo $Z_{1,t} = 10 \cdot y_t$, donde y_t es el tipo cupón cero gubernamental alemán a 10 años.

En el caso de la renta variable denominada en EUR, consideramos la variación del factor de riesgo como $X_{2,t} = Z_{2,t+1} - Z_{2,t} = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$, donde S_t es el nivel del índice Eurostoxx 50 a cierre de

sesión. La función de pérdidas mensual linealizada se define como

$$L_{k,2,t+1}^{\Delta}(X_{2,t}) = \omega_{k,2} \cdot V_{k,t} \cdot \left[1 - e^{c_2} \cdot (1 + X_{2,t} - c_2) \right]$$

⁹ Hemos optado por esta simplificación en el cálculo del tipo cupón cero, sin embargo, podríamos haber utilizado métodos de estimación de la curva cupón cero de tipos de interés. Existen múltiples metodologías para estimar la curva cupón cero de tipos de interés que pueden agruparse en métodos no econométricos (recursivos; partiendo de forwards; mediante TIR; etc.) y métodos econométricos (aproximaciones funcionales; método de Nelson y Siegel; método de Svensson; aproximaciones por splines; etc.). El lector interesado en la estimación de la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) puede consultar, por ejemplo, Filipovic (2009) y James y Webber (2001).

donde c_2 es el valor medio de la serie de cambios en el factor de riesgo.

Cuando valoramos la renta variable denominada en USD y contravalorada a EUR, la situación difiere un poco de la anterior. En este caso el valor de mercado es igual a $p_{3,t} = \tilde{S}_t / u_t$, siendo \tilde{S}_t el nivel del índice S&P500 a cierre de sesión en USD y u_t el tipo de cambio *spot* USD/EUR. La función de pérdidas linealizada consiste en

$$L_{k,3,t+1}^{\Delta}(X_{3,t}, X_{4,t}) = \omega_{k,3} \cdot V_{k,t} \cdot \left[1 - e^{c_3 - c_4} \cdot (1 + X_{3,t} - c_3 - X_{4,t} + c_4) \right]$$

donde las variaciones de los factores de riesgo son $X_{3,t} = \ln(\tilde{S}_{t+1}/\tilde{S}_t)$ y $X_{4,t} = \ln(u_{t+1}/u_t)$, con c_3 y c_4 los valores medios de la serie de cambios en los factores de riesgo.

Finalmente, tenemos que definir la función de pérdidas linealizada del *forward*. Cuando se adquiere un *forward* se fija una cantidad N en USD que el tomador del contrato se compromete a pagar dentro de 1 año a cambio de recibir de la contraparte $N \cdot f_T$ EUR, siendo f_T el tipo de cambio EUR/USD (*forward*) establecido en el contrato. Por tanto, teniendo en cuenta que la cartera consistente en una posición larga de nominal $N \cdot f_T$ en bonos gubernamentales alemanes a 1 año y en una posición corta de nominal N en bonos gubernamentales estadounidenses a 1 año replica el *payoff* del *forward* de divisa, entonces la función de pérdidas mensuales linealizada para la cobertura del riesgo de divisa USD/EUR mediante un *forward* a 1 año puede representarse como:

$$L_{k,4,t+1}^{\Delta}(X_{5,t}, X_{4,t}) = \omega_{k,4} \cdot V_{k,t} \cdot \left[1 - e^{-c_5/100 - c_4} \cdot \left(1 - \frac{X_{5,t}}{100} + \frac{c_5}{100} - X_{4,t} + c_4 \right) \right]$$

$$L_{k,5,t+1}^{\Delta}(X_{6,t}) = \omega_{k,5} \cdot V_{k,t} \cdot \left[1 - e^{-c_6/100} \cdot \left(1 - \frac{X_{6,t}}{100} + \frac{c_6}{100} \right) \right]$$

donde $X_{5,t}$ y $X_{6,t}$ son los cambios entre t y $t+1$ de los factores de riesgo del tipo cupón cero gubernamental a un año americano y alemán, respectivamente. Los valores medios de la serie de cambios en los factores de riesgo son c_5 y c_6 .

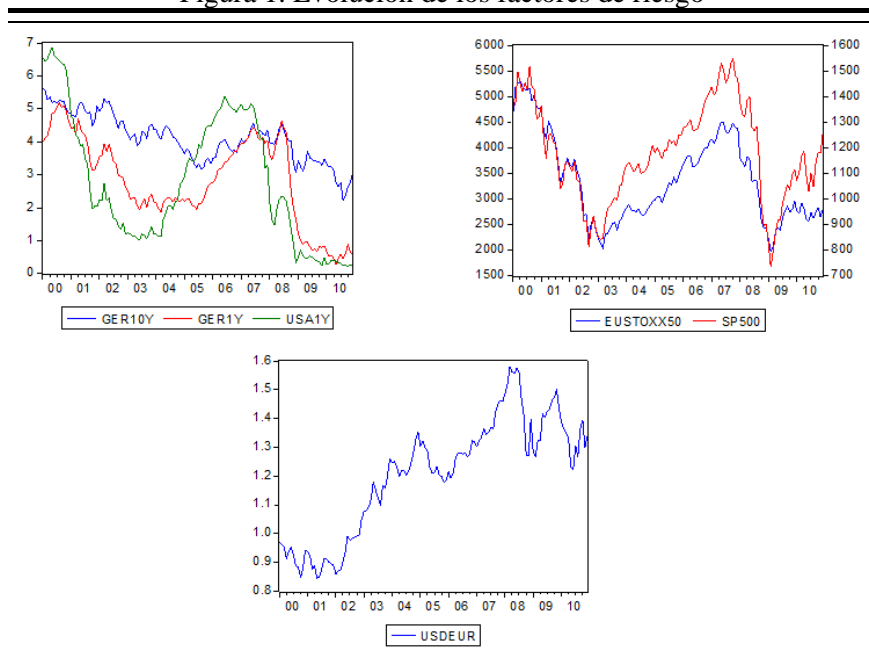
El último caso es el de la posición en efectivo. Para simplificar consideramos que es una posición sin riesgo y de la que ninguna IIC obtiene rendimiento, $L_{k,6,t+1} = V_{k,6,t} - V_{k,6,t+1} = 0$.

3.2. Análisis de los cambios en los factores de riesgo: determinación de la distribución individual y conjunta

Determinada la función de pérdidas linealizada, el paso siguiente consiste en modelizar los cambios en los factores de riesgo para poder realizar predicciones de su evolución. Gráficamente, la evolución mensual de los factores de riesgo para el periodo comprendido entre el 31-ene-2000 y el 31-dic-2010 es la presentada en la Figura 1. En la modelización de los cambios en los factores de riesgo, ajustamos

para cada proceso estocástico $\{X_{m,t}\}_t$, $m=1,\dots,6$, un modelo de serie temporal con estructura AR-GARCH (modelo con estructura auto-regresiva en la media y con estructura heterocedástica condicional auto-regresiva generalizada en la varianza, GARCH por sus siglas en inglés¹⁰). En concreto, para cada cambio de factor de riesgo realizamos cuatro ajustes: modelo GARCH(1,1) con residuos normales; modelo GARCH(1,1) con residuos t -Student; modelo AR(1)-GARCH(1,1) con residuos normales; y modelo AR(1)-GARCH(1,1) con residuos t -Student. En la Tabla 4 mostramos la selección definitiva de los procesos de cada $\{X_{m,t}\}_t$, los valores de los parámetros asociados y las predicciones del cambio en el factor de riesgo $\hat{X}_{m,0}$ y de la varianza condicional $\hat{\sigma}_{m,0}^2$ para 31-ene-2011. El criterio seguido en la selección del modelo ha sido elegir aquel con mayor valor del logaritmo de la función de verosimilitud maximizada.

Figura 1. Evolución de los factores de riesgo



Nota: Arriba a la izquierda, evolución mensual de las series $Z_{1,t}/10$ (en azul), $Z_{5,t}$ (en verde) y $Z_{6,t}$ (en rojo). Arriba a la derecha: evolución mensual de las series $Z_{2,t}$ (en azul) y $Z_{3,t}$ (en rojo). Abajo, evolución mensual de la serie $Z_{4,t}$.

Simulación de la función de pérdidas linealizada

Aparte del comportamiento individual, también necesitamos analizar la evolución conjunta de los cambios en los factores de riesgo. Para modelizar el comportamiento conjunto debemos preguntarnos por la función de distribución multivariante del vector \vec{X}_t . Es muy habitual suponer que los cambios en los factores de riesgo se distribuyen conjuntamente como una normal multivariante. Esta aproximación tiene algunas ventajas analíticas para el cálculo de medidas como el VaR y el TVaR. Sin embargo, los cambios en los factores de riesgo raramente se distribuyen normalmente en la práctica,

¹⁰ Para detalles en los modelos con estructura AR-GARCH, véase McNeil *et al.* (2005).

como mostramos en la Tabla 4¹¹. Por tanto, para nuestra aplicación no es una modelización adecuada. Adicionalmente, el test de Mardia rechaza la hipótesis de normalidad multivariante de los cambios en los factores de riesgo con un nivel de significación del 1%. Por este motivo, planteamos una estructura de dependencia entre los cambios en los factores de riesgo definida a través de una cópula.

Tabla 4. Selección del proceso AR-GARCH para los cambios en los factores de riesgo

| <i>m</i> | Factor de riesgo | Proceso AR-GARCH y predicción a 31/1/11 |
|----------|------------------------|--|
| 1 | Bono 10Y EUR | $X_{1,t} = \varepsilon_{1,t}, \quad \varepsilon_{1,t} \sim t_{14,65} \left(0, \frac{12,65}{14,65} \sigma_{1,t}^2 \right)$ $\sigma_{1,t}^2 = 0,2400 + 0,0216 \cdot \varepsilon_{1,t-1}^2 + 0,9184 \cdot \sigma_{1,t-1}^2$ $\hat{X}_{1,0} = 0, \quad \hat{\sigma}_{1,0}^2 = 4,5243$ |
| 2 | Eurostoxx 50 | $X_{2,t} = \varepsilon_{2,t}, \quad \varepsilon_{2,t} \sim t_{7,61} \left(0, \frac{5,61}{7,61} \sigma_{2,t}^2 \right)$ $\sigma_{2,t}^2 = 0,0002 + 0,1994 \cdot \varepsilon_{2,t-1}^2 + 0,7555 \cdot \sigma_{2,t-1}^2$ $\hat{X}_{2,0} = 0, \quad \hat{\sigma}_{2,0}^2 = 0,0032$ |
| 3 | S&P500 | $X_{3,t} = \varepsilon_{3,t}, \quad \varepsilon_{3,t} \sim N(0, \sigma_{3,t}^2)$ $\sigma_{3,t}^2 = 0,0001 + 0,2292 \cdot \varepsilon_{3,t-1}^2 + 0,7733 \cdot \sigma_{3,t-1}^2$ $\hat{X}_{3,0} = 0, \quad \hat{\sigma}_{3,0}^2 = 0,0032$ |
| 4 | Tipo de cambio EUR/USD | $X_{4,t} = \varepsilon_{4,t}, \quad \varepsilon_{4,t} \sim t_{10,93} \left(0, \frac{8,93}{10,93} \sigma_{4,t}^2 \right)$ $\sigma_{4,t}^2 = 0,0001 + 0,1324 \cdot \varepsilon_{4,t-1}^2 + 0,7589 \cdot \sigma_{4,t-1}^2$ $\hat{X}_{4,0} = 0, \quad \hat{\sigma}_{4,0}^2 = 0,0018$ |
| 5 | Bono 1Y USD | $X_{5,t} = 0,2361 \cdot X_{5,t-1} + \varepsilon_{5,t}, \quad \varepsilon_{5,t} \sim t_{3,29} \left(0, \frac{1,29}{3,29} \sigma_{5,t}^2 \right)$ $\sigma_{5,t}^2 = 0,0109 + 0,3851 \cdot \varepsilon_{5,t-1}^2 + 0,5880 \cdot \sigma_{5,t-1}^2$ $\hat{X}_{5,0} = -0,0005, \quad \hat{\sigma}_{5,0}^2 = 0,0284$ |
| 6 | Bono 1Y EUR | $X_{6,t} = 0,3036 \cdot X_{6,t-1} + \varepsilon_{6,t}, \quad \varepsilon_{6,t} \sim t_{9,57} \left(0, \frac{7,57}{9,57} \sigma_{6,t}^2 \right)$ $\sigma_{6,t}^2 = 0,0043 + 0,2182 \cdot \varepsilon_{6,t-1}^2 + 0,6958 \cdot \sigma_{6,t-1}^2$ $\hat{X}_{6,0} = -0,0182, \quad \hat{\sigma}_{6,0}^2 = 0,0426$ |

Nota: Para $m=1,2,3,4$ los procesos son sin estructura dinámica en la media. El único caso en el que es apropiado aceptar residuos normales (aunque con varianza no constante) es para $m=3$ (S&P500).

¹¹ Normalidad multivariante implica que las distribuciones marginales (las de los cambios en los factores de riesgo) se distribuyen normalmente.

De la gran variedad de cópulas existentes, nos centramos en las cópulas meta Gaussiana y meta t -Student. Ambas familias de cópulas precisan definir la matriz de coeficientes de correlación. En la Tabla 5 presentamos la matriz de correlaciones de Pearson para los cambios en los factores de riesgo, donde los coeficientes estadísticamente no significativos los hemos igualado a cero. Entre ambas familias, seleccionamos la cópula meta t -student con 10,05 grados de libertad de acuerdo con el criterio de selección de Akaike. Para la estimación se han generado 243.825 simulaciones, usando 25 semillas aleatorias y ejecutando 9.753 simulaciones para cada una de ellas.

Tabla 5. Matriz de correlaciones para los cambios en los factores de riesgo

| | $X_{1,t}$ | $X_{2,t}$ | $X_{3,t}$ | $X_{4,t}$ | $X_{5,t}$ | $X_{6,t}$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $X_{1,t}$ | 1 | 0,3777 | 0,3382 | 0 | 0,4270 | 0,5000 |
| $X_{2,t}$ | - | 1 | 0,8548 | 0 | 0,3632 | 0,5228 |
| $X_{3,t}$ | - | - | 1 | 0,2979 | 0,3181 | 0,4640 |
| $X_{4,t}$ | - | - | - | 1 | 0 | 0 |
| $X_{5,t}$ | - | - | - | - | 1 | 0,6273 |
| $X_{6,t}$ | - | - | - | - | - | 1 |

4. RESULTADOS

El valor esperado de la función de pérdidas linealizada de las IIC se presenta en la Tabla 6. De entre las siete IIC, cabe señalar que únicamente dos de ellas tienen beneficios esperados. Para el resto, el valor esperado es nulo. Un primer resultado es, por tanto, que las pérdidas esperadas no difieren para las distintas IIC. Únicamente podemos identificar que las IIC que cubren el riesgo de divisa (IIC₁ e IIC₄) tienen asociado un beneficio esperado ligeramente positivo, debido a que el USD ha mostrado una clara tendencia de devaluación respecto al EUR para el periodo analizado. Por tanto, considerando a la esperanza matemática como una medida de riesgo de distorsión¹², a partir de ella no podemos distinguir qué perfiles de inversión son más arriesgados. Por otro lado, el capital que cada IIC tendrá que considerar para hacer frente al riesgo de mercado será directamente el valor de la medida de riesgo, sin necesidad de descontar la pérdida esperada puesto que los valores son nulos o prácticamente nulos.

Tabla 6. Pérdidas esperadas de las IIC

| | En euros* | En % del $V_{k,0}$ |
|------------------|-----------|--------------------|
| IIC ₁ | -282,41 | -0,01% |
| IIC ₂ | 0,00 | 0,00% |
| IIC ₃ | 0,00 | 0,00% |
| IIC ₄ | -166,03 | -0,01% |
| IIC ₅ | 0,00 | 0,00% |
| IIC ₆ | 0,00 | 0,00% |
| IIC ₇ | 0,00 | 0,00% |
| Total | -448,44 | 0,00% |

* Pérdidas negativas equivalen a beneficios.

¹² La esperanza matemática es una medida de riesgo de distorsión cuya función de distorsión es $g(x) = x$, puesto que mediante el

teorema de Fubini podemos expresar la esperanza matemática como
$$E(L) = - \int_{-\infty}^0 [1 - S_L(u)] du + \int_0^{+\infty} S_L(u) du .$$

Estos resultados nos plantean la necesidad de utilizar medidas de riesgo alternativas para capturar el perfil de riesgo de las IIC. En la Tabla 7 se muestra el valor estimado de las medidas de riesgo distorsionadas introducidas en la sección 2 para cada una de las IIC. El nivel de confianza considerado ha sido del 99%. En primer lugar, conviene destacar que todas las medidas muestran un comportamiento similar relativo entre las distintas IIC, aunque existen algunas pequeñas variaciones en la ordenación entre las distintas IIC dependiendo de la medida de riesgo considerada. En segundo lugar, cabe señalar que se aprecia un orden entre las distintas medidas de riesgo de distorsión analizadas en nuestra aplicación. En concreto, se observa que $\text{Denneberg's} < \text{Dual Power}$ (con parámetro $\delta = 3$) $< \text{VaR} < \text{TVaR}$. Este resultado no es generalizable a otras situaciones, excepto entre el VaR y TVaR. En concreto, se observan diferencias importantes en los porcentajes para las medidas consideradas. En este sentido, el bajo valor en riesgo estimado por las medidas de Denneberg y Dual Power para nuestra aplicación, nos hace pensar que estas medidas deben ser utilizadas con precaución en la gestión de activos.¹³

Un resultado esperado *a priori* es que todas las medidas de riesgo analizadas reflejan que a mayor inversión en renta variable más arriesgado es el perfil inversor de la IIC, como muestra el valor creciente en las medidas. Otro resultado a destacar es que el efecto sobre el riesgo de tener inversiones en índices volátiles (como el Eurostoxx50 respecto del S&P500) es mayor cuanto más conservadora sea la medida de riesgo, siendo la IIC₃ la que requiere un mayor capital según el TVaR. En definitiva, a partir de los resultados obtenidos podemos concluir que requerir a todas las IIC un 10% de su valor de mercado inicial para cubrir el riesgo de mercado penaliza a las estrategias de inversión más conservadoras, incentivando por tanto estrategias arriesgadas de inversión de las IIC.

Tabla 7. Valores de las medidas de riesgo para cada IIC
(en porcentaje respecto al $V_{k,0}$, nivel de confianza del 99%)

| | Denneberg's | Dual Power* | VaR | TVaR |
|------------------------|--------------------|--------------------|------------|-------------|
| IIC₁ | 3,53% | 3,79% | 10,71% | 12,52% |
| IIC₂ | 3,65% | 3,95% | 11,47% | 13,69% |
| IIC₃ | 3,49% | 3,79% | 11,33% | 13,87% |
| IIC₄ | 1,98% | 2,13% | 6,02% | 7,11% |
| IIC₅ | 2,05% | 2,22% | 6,47% | 7,73% |
| IIC₆ | 1,95% | 2,12% | 6,28% | 7,70% |
| IIC₇ | 1,30% | 1,41% | 4,11% | 4,93% |
| Total | 2,32% | 2,50% | 7,23% | 8,70% |

* Parámetro $\delta=3$.

Como hemos señalado anteriormente, es habitual trabajar bajo la hipótesis de normalidad en la distribución conjunta de los cambios en los factores de riesgo, así como basar la medición del riesgo en el VaR y en el TVaR en la industria de gestión de activos. Por este motivo, en la Tabla 8 presentamos los valores obtenidos para estas medidas de riesgo para cada una de las IIC si

¹³ En este ejercicio práctico, el valor alfa de la medida de Denneberg corresponde al nivel de confianza. La elección del parámetro $\delta = 3$ en la medida Dual Power es arbitrario. La elección del parámetro, aunque muy importante, queda fuera del alcance de este estudio. El objetivo del estudio es mostrar los diferentes pasos seguidos para la resolución del problema de asignación de capital que hemos expuesto, aunque en un caso real debería justificarse la elección de los niveles de confianza y de los parámetros.

consideramos normalidad multivariante en los cambios en los factores de riesgo. Como era de esperar, la hipótesis de normalidad multivariante subestima el riesgo de las IIC en todos los casos. Además, se producen pequeñas variaciones en la ordenación de las IIC de acuerdo con su perfil de riesgo. Las diferencias relativas cuando asumimos normalidad multivariante son más acentuadas para el TVaR que para el VaR. Ahora bien, las pequeñas diferencias obtenidas nos hacen pensar que en determinadas ocasiones el asumir normalidad multivariante puede quedar justificado por conveniencia.

Tabla 8. Comparación con el VaR y el TVaR si se asume normalidad multivariante (nivel de confianza 99%)

| | VaR | VaR Normal | TVaR | TVaR Normal |
|------------------------|------------|-------------------|-------------|--------------------|
| IIC₁ | 10,71% | 10,50% | 12,52% | 12,03% |
| IIC₂ | 11,47% | 10,98% | 13,69% | 12,57% |
| IIC₃ | 11,33% | 10,63% | 13,87% | 12,18% |
| IIC₄ | 6,02% | 5,91% | 7,11% | 6,77% |
| IIC₅ | 6,47% | 6,18% | 7,73% | 7,09% |
| IIC₆ | 6,28% | 5,94% | 7,70% | 6,80% |
| IIC₇ | 4,11% | 3,92% | 4,93% | 4,49% |
| Total | 7,23% | 6,97% | 8,70% | 7,99% |

Capital Allocation

Una vez analizado el perfil de riesgo de las distintas IIC en base a diferentes medidas de riesgo distorsionadas, a continuación nos centramos en analizar cómo pueden influir estos resultados en la resolución del problema de asignación de capital que afronta la SGIIC de nuestro caso ficticio. En primer lugar debemos calcular los ponderadores obtenidos en (6), puesto que determinan el porcentaje del capital K que le corresponde a cada una de las IIC. En la Tabla 9 se muestran los ponderadores para las distintas medidas de riesgo. Como se aprecia en la tabla, las ponderaciones son estables entre las distintas medidas de riesgo consideradas. Es decir, en este caso la elección de la medida de riesgo no incide de una forma importante sobre los porcentajes de asignación de capital para las distintas IIC.

Tabla 9. Ponderadores de las IIC_k en base a las distintas medidas de riesgo

| | | Denneberg's | Dual Power | VaR | TVaR |
|------------------------|-------|--------------------|-------------------|------------|-------------|
| IIC₁ | v_1 | 19,65% | 19,54% | 19% | 18,54% |
| IIC₂ | v_2 | 20,34% | 20,33% | 20,33% | 20,27% |
| IIC₃ | v_3 | 19,43% | 19,53% | 20,09% | 20,53% |
| IIC₄ | v_4 | 11,02% | 10,98% | 10,68% | 10,52% |
| IIC₅ | v_5 | 11,45% | 11,45% | 11,48% | 11,44% |
| IIC₆ | v_6 | 10,86% | 10,91% | 11,13% | 11,40% |
| IIC₇ | v_7 | 7,26% | 7,27% | 7,28% | 7,30% |

Una vez calculados los ponderadores, debemos determinar el capital asignado a cada una de las IIC. Una primera opción consiste en mantener fijo el capital agregado K variando la distribución del capital individual entre las diferentes IIC en base a las medidas de riesgo distorsionadas. Bajo este

enfoque, el capital agregado a repartir entre las IIC es igual a $K= 1.750.000$ EUR. En la Tabla 10, se presenta la distribución de capital entre las IIC en base a las distintas medidas de riesgo estimadas.

Tabla 10. Asignación de capital entre las IIC para un capital agregado fijo

| | | Denneberg's | Dual Power | VaR | TVaR |
|------------------------|----------------------|--------------------|-------------------|------------|-------------|
| IIC₁ | K₁ | 343.823,60 | 341.973,75 | 332.450,11 | 324.392,99 |
| IIC₂ | K₂ | 355.952,59 | 355.781,03 | 355.833,54 | 354.672,48 |
| IIC₃ | K₃ | 340.108,77 | 341.725,26 | 351.639,02 | 359.240,62 |
| IIC₄ | K₄ | 192.879,66 | 192.126,22 | 186.952,83 | 184.169,69 |
| IIC₅ | K₅ | 200.300,69 | 200.321,92 | 200.819,27 | 200.268,04 |
| IIC₆ | K₆ | 189.966,64 | 190.933,44 | 194.822,21 | 199.470,79 |
| IIC₇ | K₇ | 126.968,04 | 127.138,37 | 127.483,00 | 127.785,37 |
| | K | 1.750.000 | 1.750.000 | 1.750.000 | 1.750.000 |

Una segunda opción de reparto consistiría en determinar el capital agregado como el valor de la medida de riesgo para el conjunto de las funciones de pérdidas linealizadas de las IIC, es decir,

$$K = \rho_g \left[\sum_{j=1}^7 (L_{j,1}^\Delta) \right].$$

En este caso, el valor del capital K dependerá de la medida de riesgo utilizada.

En la Tabla 11 se presenta la asignación de capital para cada una de las IIC cuando el capital total a repartir se ha calculado en base a las diferentes medidas de riesgo. Como ya se ha comentado con anterioridad, aunque no exista subsidio cruzado entre las IIC y, por tanto, el capital regulatorio no pueda ser calculado en este modo, el repetir el ejercicio de asignación con este nuevo capital nos permite analizar el posible comportamiento subaditivo de las distintas medidas de riesgo consideradas.

En nuestro caso particular, de la Tabla 7 se deducen los valores $\sum_{j=1}^7 \rho_g (L_{j,1}^\Delta)$, 506.750 EUR, 547.750 EUR, 1.590.500 EUR y 1.906.250 EUR, respectivamente. En consecuencia, fijar un capital de 1.750.000 EUR para el conjunto puede considerarse un criterio conservador (el capital se situaría entre la suma de VaR al 99% y la suma de TVaR al 99%). Comparando estos valores con la última fila de la Tabla 11 puede observarse que, en nuestro ejemplo y siempre sujetos al pertinente riesgo de modelo, las medidas de riesgo consideradas tienen un comportamiento subaditivo. Por lo tanto, independientemente de la elección de la medida de riesgo, el análisis en el que se permite trasvase de capital entre IIC ayuda a la sociedad gestora a identificar cuál es el “efecto diversificación” que están generando sus equipos de gestión y, por tanto, un mayor conocimiento de los riesgos. Por ejemplo, la sociedad gestora puede fijar parte de la retribución variable de los gestores de la SGIIC a este “efecto diversificación”, entendiéndolo que diversificarse es una opción deseable que garantiza una mayor estabilidad. Una conclusión que se puede extraer es que, si existe subsidio cruzado entre IIC, se puede considerar que fijar 1.750.000 EUR para el conjunto sería un criterio muy conservador mientras que si se consideran las IIC como unidades independientes el capital requerido es ligeramente inferior a la suma de TVaR al 99%. Otra conclusión que se deriva de la Tabla 11 es que el capital que actualmente se exige a las distintas IIC (y, por consiguiente, también al conjunto del sistema) no parece estar

relacionado con ninguna de las medidas de riesgo analizadas (a un nivel de confianza del 99%). Obviamente estas reflexiones están sujetas al riesgo de modelo, es decir, a que la modelización planteada sea adecuada.

Tabla 11. Asignación de capital entre las IIC para un capital agregado en función de la medida de riesgo

| | | Denneberg's | Dual Power | VaR | TVaR |
|------------------------|----------------------|--------------------|-------------------|------------|-------------|
| IIC₁ | K₁ | 79.641,73 | 85.631,48 | 240.359,34 | 282.178,16 |
| IIC₂ | K₂ | 82.451,23 | 89.088,87 | 257.265,41 | 308.517,23 |
| IIC₃ | K₃ | 78.781,24 | 85.569,26 | 254.232,80 | 312.490,89 |
| IIC₄ | K₄ | 44.677,76 | 48.109,11 | 135.165,72 | 160.202,80 |
| IIC₅ | K₅ | 46.396,74 | 50.161,34 | 145.191,07 | 174.206,19 |
| IIC₆ | K₆ | 44.003,01 | 47.810,43 | 140.855,23 | 173.512,69 |
| IIC₇ | K₇ | 29.410,30 | 31.835,91 | 92.169,41 | 111.156,04 |
| | K | 405.362 | 438.206,40 | 1.265.239 | 1.522.264 |

Finalmente, conviene señalar que, como hemos comentado anteriormente, el capital requerido actualmente a las IIC penaliza a las estrategias de inversión menos arriesgadas, puesto que dichas entidades pueden tener que llegar a disponer del mismo capital que las que son mucho menos conservadoras. Esta situación se podría corregir haciendo depender el capital requerido a las entidades de alguna de las medidas de riesgo planteadas. Como mostramos en la Tabla 10 y la Tabla 11, las IIC con estrategias de inversión más arriesgadas han de disponer de un capital superior que las entidades que asumen menos riesgos cuando el capital se calcula en base a las medidas de riesgo. Para concluir, la Tabla 12 presenta un resumen que muestra el capital asignado actualmente a las IIC y lo compara con el capital que se le asignaría en función de las medidas de riesgo consideradas. En concreto, mostramos el capital que le correspondería a cada IIC si la asignación de capital se realizase en base al valor medio de las medidas de riesgo distorsionadas que hemos presentado en este artículo. Antes de finalizar, enfatizamos que los resultados obtenidos en este ejercicio están sujetos a las hipótesis consideradas y los parámetros utilizados para esta simulación y, por tanto, no son extensibles a otros contextos.

Tabla 12. Alternativa de asignación de capital en base al perfil de riesgo de las IIC

| | Asignación de capital actual | | Asignación de capital propuesta | | | En € |
|------------------------|-------------------------------------|-------------|--|-----------------|-------------------|-------------|
| | En € | En % | % mínimo | % máximo | % promedio | |
| IIC₁ | 250.000 | 14,29% | 18,54% | 19,65% | 19,09% | 334.095,68 |
| IIC₂ | 250.000 | 14,29% | 20,27% | 20,34% | 20,30% | 355.266,45 |
| IIC₃ | 250.000 | 14,29% | 19,43% | 20,53% | 19,98% | 349.580,08 |
| IIC₄ | 250.000 | 14,29% | 10,52% | 11,02% | 10,77% | 188.437,31 |
| IIC₅ | 250.000 | 14,29% | 11,44% | 11,48% | 11,46% | 200.509,90 |
| IIC₆ | 250.000 | 14,29% | 10,86% | 11,40% | 11,13% | 194.736,05 |
| IIC₇ | 250.000 | 14,29% | 7,26% | 7,30% | 7,28% | 127.374,53 |

Nota: Los porcentajes promedio respecto a K para cada IIC están calculados como el promedio entre los % mínimo y % máximo divididos entre la suma de estos promedios para todas las IIC.

5. CONCLUSIONES

En este artículo, mediante el análisis de un caso ficticio, pretendemos ayudar a la reflexión sobre posibles metodologías de revisión de los coeficientes de liquidez requeridos a las Instituciones de

Inversión Colectiva (IIC), desde la perspectiva de la resolución de problemas de asignación óptima de capital y considerando estos coeficientes de liquidez como colchones ante adversidades derivadas de las inversiones. En esta primera aproximación nos centramos en la aplicación del principio de asignación proporcional al riesgo mediante un conjunto de medidas de riesgo de distorsión. Advertimos que el actual criterio de asignación, que fija el coeficiente de liquidez como un porcentaje fijo sobre el capital inicial, penaliza a las entidades con estrategias de inversión menos arriesgadas. Asimismo mostramos que una asignación de capital proporcional basada en un conjunto de medidas de riesgo distorsionadas parece un criterio más adecuado de reparto, puesto que refleja el perfil de riesgo de las instituciones en los requerimientos de liquidez. Es más, en base a nuestros resultados, el porcentaje de capital asignado a cada una de las IIC mediante esta metodología permanece muy estable para todas las medidas de riesgo consideradas.

En cuanto a la cuantificación del riesgo, como era de esperar, asumir normalidad multivariante en los cambios en los factores de riesgo subestima el riesgo de las IIC en todos los escenarios investigados. No obstante, en nuestra aplicación, el error de estimación cuando se considera normalidad multivariante no es muy elevado. En relación a qué medida de riesgo refleja mejor el perfil de riesgo de las IIC, todas las medidas analizadas reflejan que a mayor inversión en renta variable más arriesgada debe considerarse la IIC. Además, señalar que las medidas de riesgo conservadoras, como el *Tail Value at Risk*, son más sensibles a inversiones en índices volátiles. Cabe destacar que las medidas de riesgo de Denneberg y Dual Power parecen menos adecuadas para ser usadas por la industria de gestión de activos, puesto que el valor en riesgo de las pérdidas que se obtiene mediante estas medidas es claramente inferior al obtenido con otras medidas de riesgo más utilizadas como son el *Value at Risk* o el *Tail Value at Risk*.

Antes de finalizar, queremos señalar que este trabajo presenta algunas limitaciones. Realizar un ejercicio real de asignación de capital comprende múltiples etapas y contemplar todas las alternativas para cada una de ellas se presenta como una tarea inabarcable, fuera del objetivo del presente artículo. El análisis realizado en este trabajo se apoya en numerosas simplificaciones que se deben destacar. En primer lugar, hemos analizado un número reducido de factores de riesgo. Las carteras de las IIC están compuestas por multitud de instrumentos financieros cuya valoración puede resultar compleja: instrumentos derivados cotizados u OTC (sobre acciones, *commodities*, eventos de crédito, etc), otras IIC (incluidos *hedge funds* o fondos inmobiliarios) o compañías de capital-riesgo, entre otros. Además, la gestión de riesgos en una SGIIC debe contemplar también otro tipo de riesgos aparte del riesgo de mercado, como son el riesgo de crédito, de liquidez, de suscripción y de reembolso. En cuanto a la modelización considerada en la evolución de los cambios en los factores de riesgo, nos hemos limitado a los modelos univariantes con errores normales o *t*-Student. La aplicación de modelos ARMA-GARCH con errores generalizados, modelos VAR, modelos GARCH multivariantes (con o sin estructura dinámica en la matriz de correlaciones) para realizar predicciones del comportamiento futuro de los cambios en los factores de riesgo, así como la utilización de copulas

alternativas a la meta Gaussiana y la meta t -Student para la estructura de dependencia, son líneas de investigación a tener en cuenta en el futuro.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer al editor y a los revisores anónimos sus valiosos comentarios que, sin duda, han contribuido positivamente en el artículo. Miguel Santolino agradece la ayuda recibida por el Ministerio de Economía y Competividad (ECO2012-35584).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artzner P., Delbaen J., Eber M., Heath D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9, 203–228.
- Belles-Sampera, J., Guillén, M., Santolino, M. (2013). Beyond Value-at-Risk: GlueVaR distortion risk measures, *Risk Analysis*, en prensa.
- Buch, A., Dorfleitner, G., Wimmer, M. (2011). Risk capital allocation for RORAC optimization. *Journal of Banking and Finance*, 35, 3001–3009.
- Denault, M. (2001). Coherent allocation of risk capital. *Journal of Risk*, 4, 7–21.
- Denuit, M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas, R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks. Measures, Orders and Models*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
- Dhaene, J., Tsanakas, A., Valdez, E., Vanduffel, S. (2012). Optimal Capital Allocation Principles. *Journal of Risk and Insurance*, 79, 1–28.
- Filipovic, D. (2009). *Term-Structure Models. A Graduate Course*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Hardy, M.R. (2006). *An Introduction to Risk Measures for Actuarial Applications*. Education and Examination Committee of the Society of Actuaries, C-25-07.
- James, J., Webber, N. (2000). *Interest Rate Modelling: Financial Engineering*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Kalkbrener, M. (2005). An axiomatic approach to capital allocation. *Mathematical Finance*, 15, 425–437.
- McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools*. Princeton: Princeton University Press.
- Tasche, D. (2004). Allocating portfolio economic capital to sub-portfolios, in: A. Dev (ed.), *Economic Capital: A Practitioner's Guide*. London: Risk Books, 275–302.
- Trigo, E., Moreno, R., de la Peña, J.I., Iturricastillo, I. (2011). Principios de asignación de capital en el ámbito de las entidades bancarias, in: J.M. Fera, E. J. Jiménez and M. Guillén (ed.), *Investigaciones en Seguros y Gestión del Riesgo: Riesgo 2011*. Madrid: Fundación Mapfre.
- van Gulick, G., de Waegenaere, A., Norde, H. (2012). Excess based allocation of risk capital. *Insurance: Mathematics and Economics*, 50, 26–42.
- Wang, S., (1995). Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazard transforms. *Insurance: Mathematics & Economics*, 17, 43–54.
- Wang, S., (1996). Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*, 26, 71–92.



UNIVERSIDAD
PABLO DE
OLAVIDE
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (15). Páginas 87–100.
Junio de 2013. ISSN: 1886-516X. D.L.: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=70>

The Accuracy of Forecasts Made for the Structure of Consumer Basket: A Comparative Analysis between Euro Area and Romania

BRATU (SIMIONESCU), MIHAELA
Academy of Economic Studies, Bucharest (Romania)
Correo electrónico: mihaela.mb1@yahoo.com

ABSTRACT

In this study, the Markov chain method was used to predict the structure of consumer basket for euro zone and Romania, a country that tries to fulfill the entrance conditions in euro area, by using the same methodology for the determination of harmonized index of consumer prices (HICP). The *ex-post* assessment of forecasts for 2010-2012 evidences the superiority of forecasts accuracy for euro area based on this method. The highest degree of accuracy in each territorial unit is registered for services weights, according to *U* Theil's statistic, even if the absolute indicators for accuracy are lower for other weights predictions. It is anticipated that for 2013 the Markov chain method will predict the best for each consumer basket the food weights forecasts for euro area and the services weights predictions for Romania.

Keywords: forecasts; Markov chains; accuracy indicators; consumer basket; harmonized index of consumer prices.

JEL classification: E31; E37.

MSC2010: 62M05.

La exactitud de las predicciones para la estructura de cesta del consumo: un análisis comparativo entre la zona euro y Rumanía

RESUMEN

En este estudio se aplica el método de las cadenas de Markov para predecir la estructura de la cesta de consumo para la zona euro y para Rumanía, un país que trata de cumplir las condiciones de entrada en la zona euro. En ambos casos, se sigue la misma metodología para la determinación del índice armonizado de precios al consumo (IPCA). La evaluación *ex-post* de las previsiones para el período 2010-2012 pone de manifiesto la mejora de la precisión de las previsiones para la zona euro al usar este método. El mayor grado de precisión en cada unidad territorial se ha registrado para los pesos de los servicios, de acuerdo con el estadístico U de Theil, aunque los indicadores absolutos de precisión son más bajos para otras predicciones de pesos. Se considera que las predicciones para el año 2013 por el método de las cadenas de Markov serán más precisas para cada cesta de consumo en las previsiones de los pesos para los alimentos para la zona euro y para las de los pesos de los servicios para Rumanía.

Palabras clave: previsiones; cadenas de Markov; indicadores de precisión; cesta del consumo; índice de precios al consumo armonizado (IPCA).

Clasificación JEL: E31; E37.

MSC2010: 62M05.



1. INTRODUCTION

The harmonized index of consumer prices (HICP) is one of the macroeconomic indicators whose evolution presents a considerable interest, especially from the point of the calculation of inflation rate and from that of the realisation of stability of prices. The inflation rate forecasting is presented in many studies, without any methodological details regarding its computation. Moreover, other indicators that are used in calculating the HICP (the weights of the consumer basket components and the individual indexes of prices for the components) can be separately predicted.

Markov chain method is one of the quantitative methods used when forecasting economic variables. It is also used in the prediction of the structure of consumer basket that is considered for the calculation of HICP. The objective of this study is to make predictions using this quantitative method and to compare the forecasts accuracy for two regions: the euro area and Romania, a country not still in the euro zone that wants to become a part of the area. In our research, the structure of consumer basket was predicted using Markov chains for both the euro area and Romania, and comparisons of accuracy were respectively made. Actually, we have to see why the forecasts of one region are better and consequently we have to adopt the strategy to make predictions.

The comparison between the euro zone and Romania is relevant, because the two regions use the same methodology, although they are not part of the same economy yet. On the other hand, the Markov chain method gives better results for the forecasts related to the structure of consumer basket, because this structure changes each two years. It gives better results in forecasting process because the classical econometric models need large data sets, while the Markow chain require fewer data.

2. FORECAST ACCURACY

Meese and Rogoff (1983) established the fundamentals for the improvement of the quality of economic predictions. The random walk process used by them, even if it is a simple one, succeeded in outperforming the forecasts based on complex and structural models. There, the error is computed as the difference between the registered value and the forecasted one, and obviously a negative error shows that the prediction is higher than registered value.

In literature there are many measures for assessing the accuracy; Hyndman and Koehler (2005) provided a rather detailed classification. Some of these measures were selected to be used in this study:

a. Root Mean Squared Error (RMSE):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_t^2(T_0 + j, k)}$$

where t represents the time, e_t stands for the error, n is the number of periods, T_0 is the origin of the prediction, k count the horizon length and j is the index for moving the origin.

b. Mean error (ME):

$$ME = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_t(T_0 + j, k)$$

c. Mean absolute error (MAE):

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |e_t(T_0 + j, k)|$$

d. U Theil's statistics (U_1 and U_2):

$$U_1 = \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^n (a_t - p_t)^2}}{\sqrt{\sum_{t=1}^n a_t^2} + \sqrt{\sum_{t=1}^n p_t^2}}$$

where a stand for the actual values and p for the predicted values.

As in the previous measures, a value of U_1 that is closer to zero indicates a better accuracy.

$$U_2 = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n-1} \left(\frac{p_{t+1} - a_{t+1}}{a_t}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n-1} \left(\frac{a_{t+1} - a_t}{a_t}\right)^2}}$$

The values less than 1 for U_2 show that the forecast is better than the benchmark.

Spircu and Ciumara (2007) offer details regarding other formulae for the computation of Theil's statistics, when the prediction is based on an econometric model denoted by "mod":

$$U = \sqrt{\frac{MSE(\text{mod.})}{MSE(\text{random_walk})}} = \frac{RMSE(\text{mod.})}{RMSE(\text{random_walk})}$$

Instead of a random walk, we can choose a model with good results in a certain phase of the research. In general, a value less than or equal to 0.55 for U coefficient shows a good choice of the model.

Many articles refer to the comparison of accuracy measures: Leitch and Tanner (1991), Martin and Witt (2002), Hyndman (2006), Makridakis and Hibon (1979), Koehler (2001); some others to the comparison of different prediction methods: Makridakis (1993), Yokum and Armstrong (1995), Tashman (2000), D'Agostino, Gambetti, and Giannone (2010), Dovern and Weisser (2011), Abreu (2011), Kocięcki, Kolasa, and Rubaszek (2012), Österholm (2012), for example.

In recent literature, the preferences are distributed in two directions: comparative analysis of the accuracy for predictions based on different methods or the comparative study of forecasts performance for the same variable, but registered in more countries. Allan (2012) obtained a good accuracy for the OECD forecasts combined with outturn values of GDP growth for G7 countries between 1984 and 2010. The same author mentioned two groups of accuracy techniques used when assessing the predictions: quantitative forecasts accuracy statistics and qualitative accuracy methods. In our study, we are interested in the first category of techniques that is used to evaluate the accuracy of an institution or to compare the accuracy of different predictions.

Franses, McAleer, and Legerstee (2012) evaluated two forecasts based on different econometric models: the one is based on an econometric model and the other uses a model and also the intuition; indeed, both forecasts are the result of econometric models and intuition. Deschamps and Bianchi (2012) concluded that there are large differences between macroeconomic forecasts for China regarding the accuracy measures for consumption and investment, GDP, and inflation. The slow adjustment to structural shocks generated biased predictions, the information being utilized relatively inefficient. And Bratu (2012) assessed the accuracy of more macroeconomic forecasts for the USA, proposing some empirical strategies to improve the accuracy. These papers used some of the accuracy measures utilized by us in this research.

Heilemann and Stekler (2010), studying the inflation and GDP rate forecasts in 1967-2008 for Germany, concluded that the values of errors are similar with those of the USA and England, the absolute errors being in decrease. On the other hand, Strauch (2009) assessed the accuracy of SGP forecasts for budget balance and GDP rate on the forecasting horizon 1991-2004. In our research, we used a different forecasting method: Markov chains, that is specific for small sets of data that reflect the structure of an indicator.

3. PREDICTIONS BASED ON MARKOV CHAINS

Markov chains were introduced by Andrei Andreevich Markov who showed that, for a Markov chain with numerical states and positive transition probabilities, the outcomes' average converges to the expected value of the limiting repartition. The methodology of constructing predictions using Markov chains is presented by many researchers, like Kemeny and Snell (1976), which utilized the Theory of Finite Markov Chains, while Jerrum and Sinclair (1989) used the Markov Chain Monte Carlo Method as an approach to approximate counting and integration. The Markov chains method is used in predicting structural changes of macroeconomic indicators (the structure of an indicator for financial performance, the structure of employed people according to branches, the structure of branches for the GDP

formation, etc.). The Markov methods may use two types of information: complete information (for proper Markov chains) or partial information (hidden Markov chains). An introduction on Markov chains methodology is made by Meyn and Tweedie (1993), while the general presentation of the technique is attributed to authors like Doob (1953), Chung (1960), Feller (1970, 1971), Billingsley (1995), and others. However, a more detailed description is made by Nummelin (1984), Revuz (1984), Resnick (1994), Norris (1997), Robert and Casella (2000), Lee and Shin (2009), and others.

The application of Markov chains is useful when data regarding the causes of the phenomenon are not known. The probability of a phenomenon to pass from state i to state j is usually denoted by p_{ij} . The Markov chain is a combination composed by the initial state and the stochastic matrix of passing probabilities. After n successive steps we have the probability known as Chapman-Kolmogorow relation, which is equal to the passing matrix after n steps:

$$p_{ij}^{(n+m)} = p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}^{(m)}$$

If $m=1$, the relationship becomes:

$$p_{ij}^{(n+1)} = p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}^{(1)}$$

The stochastic matrix is finite and countable, with non-negative elements and the sum of values on each row is 1.

Let us see some specific applications. Hsu and Chiao (2012) started from predictions based on Markov chain for firms' earnings and they evaluated the evolution in time of the relative accuracy established by experts. Sakamoto (2012) used the Markov chain method to predict indicators for the Japanese industry, showing the equivalence of the method with a VAR(1) method. Lee and Shin (2009) showed that a double hidden Markov chain generated better predictions than a simple one for reserves of stock market. Zhang D. and Zhang X. (2009) obtained a better accuracy for forecasts of stock market trend by using Markov chain. Leslie (2008) showed that Markov chains method improved the forecasts accuracy in certain conditions unlike other forecasting methods. In general, Markov chains, after Avery and Henderson (1999), can be successfully used to model the space discrete series in the context of log-linear models.

Starting from the consumer basket structure (foods, non-foods, and services) considered when computing the harmonized index of consumer prices (HICP) from 2006, 2008, and 2010 for euro area and Romania, we made predictions by using Markov chains for the structure in 2012. The data are available on the web-site that contains the Central European Bank data base (<http://sdw.ecb.europa.eu/>).

In the following Table 1, the weights of foods, non-foods, and services are presented for the euro area. We can see an increase of non-services weights in 2008 with respect to 2006 (by 1.808%), while in the following years successive decreases of services weights can be observed.

Table 1. Structure of consumer basket utilized in computing HICP in euro area

| Years | Foods (%) (A) | Non-foods products (%) (B) | Services (%) (C) |
|-------|---------------|----------------------------|------------------|
| 2006 | 19.275 | 39.941 | 40.784 |
| 2008 | 19.501 | 39.602 | 40.897 |
| 2010 | 19.167 | 38.854 | 41.979 |
| 2012 | 19.071 | 39.459 | 41.47 |

Source: <http://sdw.ecb.europa.eu/>

The application of this method implies several steps. Firstly, these will be presented for euro area:

1. The transition matrix presentation (this type of matrix shows the changes in the consumer basket structure in 2008 in comparison with 2006 and then in 2010 with respect to 2008). Actually, we compute how many times the values in a specific year changed compared to a previous year. The next table is obtained by putting the structural indicators in each column and then the rest of the cells are completed as to have the sum of elements on each line equalled to 100 and the sum of elements on each column equalled to 100.

| | A | B | C | 2006 |
|------|---------|--------|--------|---------|
| A | 19.501 | | | 19.501 |
| B | 0.8487 | 39.602 | | 40.4507 |
| C | 0.277 | | 40.897 | 41.174 |
| 2008 | 20.6267 | 39.602 | 40.897 | 100 |

The foods weight grew in 2008 in comparison with 2006 (by 1.1725%), while non-food products decreased by 0.8487% and services by 0.277%.

| | A | B | C | 2008 |
|------|--------|--------|---------|---------|
| A | 19.167 | | 1.7127 | 20.8797 |
| B | | 38.854 | 1.8887 | 40.7427 |
| C | | | 41.979 | 41.979 |
| 2010 | 19.167 | 38.854 | 45.5804 | 100 |

The weight of foods decreased in 2010 with respect to 2008 (by 1.7127%), the weight of non-food product by 1.8887%, while services weight increased by 2.6456%.

2. The presentation of total transition matrix obtained by summing up the values from the two above matrices.

| | | | | |
|---|--------|--------|--------|---------|
| | A | B | C | |
| A | 38.668 | 0.000 | 1.713 | 40.381 |
| B | 0.849 | 78.456 | 0.000 | 81.193 |
| C | 0.277 | 0.000 | 82.876 | 83.153 |
| | 39.794 | 78.456 | 86.477 | 200.000 |

3. The presentation of the matrix of transition probabilities (each value of total transition matrix is divided by the total on its corresponding row).

$$\begin{pmatrix} 0.958 & 0 & 0.042 \\ 0.021 & 1.943 & 0 \\ 0.007 & 0 & 0.997 \end{pmatrix}$$

4. The computation of predicted weights for 2012 (multiplying the vector that contains the structure of last known year by the transposed matrix of transition probabilities).

$$\begin{pmatrix} 0.958 & 0 & 0.042 \\ 0.021 & 1.943 & 0 \\ 0.007 & 0 & 0.997 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19.071 \\ 39.459 \\ 41.47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.1345 \\ 37.8948 \\ 41.9706 \end{pmatrix}$$

For 2012 the Markov chain method anticipates a growth of foods weight and a slow decrease of non-foods products and services weights. In reality, the weights of foods and services decreased, but that of non-foods products grew.

In this present research, the data were processed using MARKOV program and forecasts were made for 2010, 2011, and 2013 (see Table 2).

Table 2. Predicted structure of consumer basket in euro area (forecasting method: Markov chains; forecasting horizon: 2010-2013)

| Years | Foods (%) (A) | Non-foods products (%) (B) | Services (%) (C) |
|-------|---------------|----------------------------|------------------|
| 2010 | 19.285 | 37.568 | 43.147 |
| 2011 | 19.654 | 37.765 | 42.581 |
| 2012 | 20.134 | 37.894 | 41.97 |
| 2013 | 20.637 | 38.023 | 41.34 |

Source: own calculations by using MARKOV program.

On the other hand, the evaluation of forecasts accuracy for consumer basket components weights of HICP is made on the forecasting horizon 2010-2012 (see Table 3).

Table 3. Accuracy of predictions for the structure of consumer basket in euro zone on the forecasting horizon 2010-2012

| Accuracy indicator | Forecasts for foods weights (A) | Forecasts for non-foods products weights (B) | Forecasts for services weights (C) |
|--------------------|---------------------------------|--|------------------------------------|
| <i>ME</i> | -0.5123 | 1.4523 | -0.9393 |
| <i>MAE</i> | 0.5123 | 1.4523 | 0.9393 |
| <i>RMSE</i> | 0.6508 | 1.4573 | 0.9894 |
| U_1 | 0.0167 | 0.0189 | 0.0118 |
| U_2 | 0.3742 | 0.2519 | 0.4774 |

Source: own calculations by using Excel.

According to U_1 statistic values, the highest accuracy of predictions based on Markov chains was registered for services weights. But, in absolute terms of accuracy, some indicators (*ME*, *MAE*, and *RMSE*) indicate the presence of lower errors. Anyway, all predictions are superior to those based on random walk.

Considering that the values of weights registered in 2012 are constant in 2013, the accuracy of predictions was assessed in *ex-ante* variant for 2013 (see Table 4).

Table 4. Accuracy of forecasts for the structure of consumer basket in euro area in 2013

| Accuracy indicator | Forecasts of foods weight (A) | Forecasts of non-food products weight (B) | Forecasts of services weight (C) |
|--------------------|-------------------------------|---|----------------------------------|
| Error | -1.566 | 1.436 | 0.13 |
| U_1 | 2.0719 | 3.8059 | 4.1343 |

Source: own calculations by using Excel.

The *ex-ante* accuracy of forecasts for 2013 is rather low, anticipating an overestimation of foods weight. The overestimation is explained by the fact that the predicted value is higher than the one registered in 2012.

This quantitative method is applied also when forecasting the structure of consumer basket of HICP for Romania. By comparison with euro area, in Romania the weight of merchandise is higher, but in decrease from one year to another (see Table 5).

Table 5. Predicted structure of consumer basket in Romania (forecasting method: Markov chains; forecasting horizon: 2010-2013)

| Years | Foods (%) (A) | Non-foods products (%) (B) | Services (%) (C) |
|-------|---------------|----------------------------|------------------|
| 2006 | 38.472 | 45.082 | 16.446 |
| 2008 | 36.899 | 46.068 | 17.033 |
| 2010 | 34.956 | 47.943 | 17.101 |
| 2012 | 31.012 | 45.77 | 23.218 |

Source: <http://sdw.ecb.europa.eu/>

The Markov chains method is applied now for the Romanian case.

1. Transition matrices:

| | A | B | C | 2006 |
|------|--------|---------|---------|---------|
| A | 36.899 | 2.1871 | 3.5692 | 42.6553 |
| B | | 46.068 | | 46.068 |
| C | | | 17.033 | 17.033 |
| 2008 | 36.899 | 48.2551 | 20.6022 | 100 |

The weight of foods decreased in 2008 in comparison with 2006 (by 4.0886%), while the non-food products ones increased by 2.1871%, and that of services increased by 3.5692%.

| | A | B | C | 2008 |
|------|--------|--------|---------|---------|
| A | 34.956 | 4.07 | 0.3992 | 39.4252 |
| B | | 47.943 | | 47.943 |
| C | | | 17.101 | 17.101 |
| 2010 | 34.956 | 52.013 | 17.5002 | 100 |

The weight of foods decreased by 5.2657% in 2010 compared to 2008, the weight of non-foods grew by 4.07%, while the services one increased by 0.3992%.

2. Total transition matrix:

| | A | B | C | |
|---|--------|----------|---------|---------|
| A | 71.855 | 6.2571 | 3.9684 | 82.0805 |
| B | 0 | 94.011 | 0 | 94.011 |
| C | 0 | 0 | 34.134 | 34.134 |
| | 71.855 | 100.2681 | 38.1024 | 200 |

3. Matrix of transition probabilities:

$$\begin{pmatrix} 0.8754 & 0.0762 & 0.0483 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Computation of predicted weights for 2012:

$$\begin{pmatrix} 0.8754 & 0.0762 & 0.0483 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 34.956 \\ 47.943 \\ 17.101 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35.0827 \\ 47.943 \\ 17.101 \end{pmatrix}$$

The predicted weights for 2012 by using the Markov chain method are the same as those for 2010 (see Table 6).

Table 6. Predicted structure of consumer basket in Romania (forecasting method: Markov chains; horizon: 2010-2012)

| Years | Foods (%) (A) | Non-foods products (%) (B) | Services (%) (C) |
|-------|---------------|----------------------------|------------------|
| 2010 | 19.022 | 36.899 | 44.079 |
| 2011 | 19.392 | 37.253 | 43.355 |
| 2012 | 20.134 | 37.894 | 41.97 |
| 2013 | 20.468 | 37.945 | 41.587 |

Source: own calculations by using MARKOV program.

For 2010-2012 the forecasts accuracy is evaluated in *ex-post* variant, then separately in *ex-ante* technique the prediction for 2013, when the real value to be registered is not known.

The U_1 statistic of Theil identifies the forecasts for services weights as the ones with highest accuracy on the horizon 2010-2012. However, the *ME*, *MAE*, and *RMSE* have the lowest values for foods weights. The predictions for the euro area are more accurate than those for Romania, when Markov chains method is used. For both regions, the forecasts are overestimated, because of the negative values for mean absolute error. The cause of these values too large in average is related to the fact that different shocks were not taken into consideration.

Table 7. Accuracy of forecasts for weights of HICP consumer basket components from Romania for 2010-2012

| Accuracy indicator | Forecasts for foods weights (A) | Forecasts for non-foods products weights (B) | Forecasts for services weights (C) |
|--------------------|---------------------------------|--|------------------------------------|
| <i>ME</i> | -0.4503 | -3.5440 | 3.9950 |
| <i>MAE</i> | 2.506333 | 3.5440 | 3.9950 |
| <i>RMSE</i> | 2.5509 | 4.2584 | 4.0017 |
| U_1 | 0.0657 | 0.0598 | 0.0443 |
| U_2 | 1.4476 | 0.6752 | 0.4530 |

Source: own calculations by using Excel.

Table 8. Accuracy of forecasts for the structure of consumer basket in Romania in 2013

| Accuracy indicator | Forecasts for foods weights (A) | Forecasts for non-foods products weights (B) | Forecasts for services weights (C) |
|--------------------|---------------------------------|--|------------------------------------|
| Error | 2.75 | -6.933 | 4.183 |
| U_1 | 0.0629 | 0.1005 | 0.0479 |

Source: own calculations by using Excel.

The prediction for services weight from 2013 will be more accurate, being underestimated, than that of foods. The value is underestimated because the error has a positive value, the prediction being greater than the actual value.

4. CONCLUSION

The Markov chains method was used for the realisation of forecasts regarding the forecasts of consumer basket structure utilized in calculating the HICP. The accuracy was assessed for the predictions realized on the horizon 2010-2013 for euro area and Romania. Although the indicators for evaluating the accuracy, in absolute terms, registered lower values for other weights, for euro zone and Romania on the forecasting horizon, the services weights have more accurate forecasts, these being better for euro area. The predictions for all weights of Romania consumer basket are less accurate than predicted for euro area. So, the Markov chains method provided better results for euro area compared to Romanian case. For 2013, and for the prediction based on the same method, a higher accuracy is anticipated for the expectations of foods from euro area and services in Romania.

The methodology could be applied to other countries included in euro zone or not. Actually, the Markov chain method is relevant for any country that uses a similar methodology as that of euro area. The comparison was made with Romania as a candidate for euro zone. The differences in accuracy are not significant, so the Markov chain is a good forecast method for both regions. The predictions do not always underestimate or overestimate the real value. It depends on the type of data series. The identified tendency could change in time. In fact, a rule regarding the tendency could not be established.

REFERENCES

- Abreu, I. (2011) "International organizations' vs. private analysts' forecasts: an evaluation", *Banco de Portugal*, available at: <http://www.bportugal.pt/en-US/BdP%20Publications%20Research/wp201120.pdf>
- Allan, G. (2012) "Evaluating the usefulness of forecasts of relative growth", *Strathclyde, Discussion Papers in Economics*, No. 12-14.
- Avery, P.J. and Henderson, D.A. (1999) "Fitting Markov chain models to discrete state series such as DNA sequences", *Journal of the Royal Statistical Society*, 48 (1), pp. 53–61.
- Billingsley, P. (1995) "Probability and Measure", 3rd edition, Wiley, New York, ISBN: 0-471-0071-02.
- Bratu, M. (2012) "Strategies to Improve the Accuracy of Macroeconomic Forecasts in USA", *LAP LAMBERT Academic Publishing*, ISBN-13: 978-3848403196.
- Chung, K.L. (1960) "Markov Chains with Stationary Transition Probabilities", *Springer-Verlag*, Berlin.
- D'Agostino, A., Gambetti, L., and Giannone, D. (2010) "Macroeconomic forecasting and structural change", *European Central Bank*, Working Paper Series 1167.

- Deschamps, B. and Bianchi, P. (2012) “An evaluation of Chinese macroeconomic forecasts”, *Journal of Chinese Economics and Business Studies*, Volume 10, Number 3, August 2012, pp. 229–246.
- Doob, J.L. (1953) “Stochastic Processes”, Wiley, New York.
- Dovern, J. and Weisser, J. (2011) “Accuracy, unbiasedness and efficiency of professional macroeconomic forecasts: An empirical comparison for the G7”, *International Journal of Forecasting*, 27 (2), pp. 452–465.
- Feller, W. (1970) “An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1, 3rd edition, Wiley.
- Feller, W. (1971) “An Introduction to Probability Theory and Its Applications”, Vol. 2, Wiley, ISBN: 0-471-25709-5.
- Franses, P.H., McAleer, M., and Legerstee, R. (2012) “Evaluating macroeconomic forecasts: a concise review of some recent developments”, Working Paper, available at: <http://eprints.ucm.es/15603/>
- Heilemann, U. and Stekler, H. (2010) “Introduction to ‘The future of macroeconomic forecasting’”, *International Journal of Forecasting*, 23(2), pp. 159–165.
- Hsu, D. and Chiao, C.H. (2012) “Relative accuracy of analysts’ earnings forecasts over time: a Markov chain analysis”, *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 04/2012, 37(4), pp. 477–507. DOI: 10.1007/s11156-010-0214-z.
- Hyndman, R.J. (2006) “The Times: a chronology of the Bible”, 3rd edition, *Christadelphian Scripture Study Service*, Adelaide.
- Hyndman, R.J. and Koehler, A.B. (2006) “Another look at measures of forecast accuracy”, *International Journal of Forecasting*, 22 (4), pp. 679–688.
- Jerrum, M. and Sinclair, A. (1989) “Approximating the permanent”, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 18, pp. 1149–1178.
- Kemeny, J.G. and Snell, J.L. (1976) “Finite Markov chains”, *Springer*, Jul. 1976.
- Kocięcki, A., Kolasa, M., and Rubaszek, M. (2012) “A Bayesian method of combining judgmental and model-based density forecasts”, *Economic Modelling*, Vol. 29 (4), pp. 1349–1355.
- Koehler, A.B. (2001) “The asymmetry of the sAPE measure and other comments on the M3-competition”, *International Journal of Forecasting*, Vol. 17, pp. 570–574.
- Lee, J. and Shin, M. (2009) “Stock forecasting using hidden Markov process”, available at: <http://cs229.stanford.edu/proj2009/ShinLee.pdf>
- Leitch, G. and Tanner, J.E. (1991) “Economic Forecast Evaluation: Profits Versus the Conventional Error Measures”, *The American Economic Review*, 81/3, 580.
- Leslie, B. (2008) “A Markov chains based transition matrices approach to forecasting airline seat demand”, City University of New York, *ProQuest*.
- Makridakis, S. (1993) “Accuracy measures: Theoretical and practical concerns,” *International Journal of Forecasting*, 9, pp. 527–529.
- Makridakis, S. and Hibon, M. (1979) “Accuracy of forecast-an empirical investigation (with discussion)”, *Journal of the Royal Statistical Society*, 142, pp. 97–145.

- Martin, C.A. and Witt, S.F. (2002) “Accuracy of econometric forecasts of tourism”, *Annals of Tourism Research*, 16, pp. 407–428.
- Meese, R.A. and Rogoff, K. (1983) “Empirical exchange rate models of the seventies: Do they fit out of sample?”, *Journal of International Economics*, Vol. 14, Issue 1-2 (February), pp. 3–24.
- Meyn, S.P. and Tweedie, R.L. (1993) “Markov Chains and Stochastic Stability”, *Springer-Verlag*, London.
- Norris, J.R. (1997) “Markov Chains, No. 2”, *Cambridge University Press*, Series in Statistical and Probabilistic Mathematics.
- Nummelin, E. (1984) “General Irreducible Markov Chains and Non-negative Operators”, *Cambridge University Press*, Cambridge.
- Österholm, P. (2012) “The limited usefulness of macroeconomic Bayesian VARs when estimating the probability of a US recession”, *Journal of Macroeconomics*, Vol. 34 (1), pp. 76–86.
- Resnick, S.I. (1994) “Limit distributions for linear programming time series estimators”, *Stoch. Processes Appl.*, 51, pp. 135–165.
- Revuz, D. (1984) “Markov chains”, 2nd edition, *North-Holland Mathematical Library*, 11, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.
- Robert, C.P. and Casella, G. (2000) “Monte Carlo Statistical Methods”, 2nd edition, *Springer*, New York.
- Sakamoto, H. (2012) “Forecasting model of structural change in Japan using Markov chain”, available at: http://management.kochi-tech.ac.jp/ssms_papers/sms11-5261_f68ec19efdfcc47201eb045266e9d4b3.pdf
- Spircu, L. and Ciumara, R. (2007) “Econometrics”, *Editura Pro Universitaria*, Bucharest.
- Strauch, R. (2009) “Fiscal Governance in Europe”, *Cambridge University Press*, Cambridge.
- Tashman, L. (2000) “An Evaluation of Forecasting Software: Do the Programs Implement Basic Principles and Best Practices”, in: *Principles of Forecasting: A Handbook for Researchers and Practitioners*.
- Yokum, J., and Armstrong, J.S. (1995) “Beyond Accuracy: Comparison of Criteria Used to Select Forecasting Methods”, *International Journal of Forecasting*, 11, pp. 591–597.
- Zhang, D. and Zhang, X. (2009) “Study on forecasting the stock market trend based on stochastic analysis method”, *International Journal of Business and Management*, Vol. 4, Nr. 6.



UNIVERSIDAD
PABLO DE OLAVIDE
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (15). Páginas 101–116.
Junio de 2013. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=71>

Factores explicativos de las diferencias de eficiencia en el sector de la distribución en España: una aproximación paramétrica

DE JORGE MORENO, JUSTO

Departamento de Economía y Dirección de Empresas

Universidad de Alcalá (España)

Correo electrónico: justo.dejorge@uah.es

RESUMEN

Este trabajo se plantea como objetivo el análisis de la influencia que los recursos y capacidades de las empresas del sector de la distribución en España tienen para explicar la eficiencia productiva como medida de desempeño en el período 1997-2006 para un total de 42 sectores de actividad a 4 dígitos CNAE. Asimismo se ha prestado especial atención al sector de actividad y la localización de la empresa como factores de control del entorno. Los principales resultados alcanzados revelan que los recursos disponibles por las empresas del sector de la distribución son explicativos de los mayores niveles de eficiencia productiva en términos de *performance* alcanzados por estas. En particular, las diferencias de eficiencia se relacionan con mayores niveles de integración vertical, una mayor dotación de recursos materiales en términos de intensidad de capital y humanos medidos a través de una mayor retribución salarial. Finalmente, la localización de la empresa según la comunidad autónoma donde está ubicada es un factor a considerar como explicativo de las diferencias de eficiencia.

Palabras clave: eficiencia técnica; distribución comercial; integración vertical; intensidad tecnológica; retribución salarial.

Clasificación JEL: M11; L81.

MSC2010: 60H30.

Influence of Company Resources in Productive Efficiency: A Parametric Approach in the Distribution Sector in Spain

ABSTRACT

The objective of this work is the analysis of the influence that the resources and capabilities of companies in the distribution sector in Spain has to explain productive efficiency as a performance measure (in the period 1997-2006, for a total of 42 sectors of activity a 4-digit NACE). It also pays special attention to the sector and the location of the company as environmental control factors. The main results show that the resources made available by companies in the distribution sector explain the higher levels of production efficiency in terms of performance achieved by them. In particular, differences in efficiency are related to greater levels of vertical integration, greater provision of material resources in terms of intensity, and human capital as measured by higher salaries. Finally, the regional location of the company is a factor while explaining the differences in efficiency.

Keywords: technical efficiency; commercial distribution; vertical integration; technological intensity; compensating wage.

JEL classification: M11; L81.

MSC2010: 60H30.



1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha producido un importante interés y evolución de trabajos dentro del campo del *management* basados en la teoría de los recursos y capacidades (TRC) de la empresa (Lieberman y Dhawan, 2005). El núcleo central de esta teoría descansa en el hecho de que los factores con mayor poder explicativo de la competitividad empresarial son los relativos a la propia organización. En particular, las decisiones estratégicas se asocian al control y posesión de los recursos y capacidades de la empresa, así como a la heterogeneidad de estos en relación con la competencia. Esta teoría surge a partir del trabajo seminal de Penrose (1959), cuyo desarrollo posterior se debe a Wernerfelt (1984); posteriormente seguirán Barney (1986, 1991), Dierickx y Cool (1989), Mahoney y Pandian (1992), Hall (1992), Peteraf (1993), Hult *et al.* (2005) y Baker *et al.* (2009), entre otros. A pesar del interesante marco teórico que ofrece la TRC, ha recibido críticas debido a cierta ausencia de contrastación empírica que la sustente. Como consecuencia de ello, algunos autores han intentado desarrollar medidas de recursos y capacidades para identificar su importancia en un contexto sectorial determinado y vincular la posición de los recursos de la empresa en relación con su desempeño. En este sentido, dado que la visión de esta teoría se circunscribe a los límites de la empresa individual, es quizás probable que imponga ciertas restricciones a su capacidad explicativa, dado que la posición competitiva de la empresa no depende exclusivamente de la capacidad de generar recursos, sino también de la posibilidad que la empresa tiene de obtener recursos alternativos o complementarios de su entorno. Con las consideraciones mencionadas, este trabajo se plantea el análisis de la influencia que los recursos de las empresas del sector de la distribución tienen para explicar la eficiencia productiva como medida de desempeño en el período 1997-2006. Así mismo, se prestará especial atención al sector de actividad y localización de la empresa como factores de control del entorno. Para abordar este estudio, se implementará la línea seguida por Lieberman y Dhawa (2005), basada en la función de producción estocástica (FPE) propuesta por Battese y Coelli (1995). Con esta metodología es posible establecer un marco de comparación de las empresas para identificar las causas de las diferencias de eficiencia productiva entre ellas a partir de los recursos de los que disponen.

La estructura del trabajo es la siguiente: en la sección 2 se presentan los datos y variables; en la sección 3 la metodología utilizada; en la sección 4 los resultados alcanzados; la sección 5 cierra este trabajo con el apartado de conclusiones.

2. DATOS Y VARIABLES UTILIZADAS

La base de datos utilizada en este trabajo ha sido SABI (Sistema de Análisis de Balances Ibéricos). Esta base de datos recoge una muestra representativa de empresas inscritas en el Registro Mercantil de toda España. Los sectores analizados se refieren a la distribución comercial con la clasificación CNAE-93 a 4 dígitos (25 sectores de comercio minorista y 17

sectores de comercio mayorista) en el período 1997-2006. La muestra utilizada está formada por un panel de datos completo que contiene 4.973 empresas del sector de la distribución comercial minorista y 515 del mayorista que están presentes en la muestra durante todo el período (1997-2006) y para las que se tiene información sobre las variables relevantes. Las variables utilizadas son: las ventas, como medida de la producción; el inmovilizado material, como medida del capital; los consumos intermedios; y el número de empleados.

A los efectos del análisis de eficiencia que más adelante se expondrá, hubiese sido deseable que tanto el consumo de materiales como el flujo de servicios se expresasen en unidades físicas; sin embargo, las limitaciones de la información disponible obligan a tomar directamente las variables contables, expresadas en unidades monetarias constantes. Las variables utilizadas en *input* y *output* siguen las recomendaciones de la literatura (Donthu y Yoo, 1998). Dado el ámbito temporal del estudio, todas las variables se deflactan y se expresan en miles de euros. La conversión a euros constantes se ha realizado utilizando el deflactor implícito del PIB.

2.1. Factores explicativos de la eficiencia productiva

Paralelo al desarrollo de las funciones de producción por parte de los economistas, ha tenido lugar la evolución de la teoría de recursos y capacidades (TRC) por los investigadores en dirección estratégica (Lieberman y Dhawan, 2005), que como fue mencionado supone un marco conceptual para evaluar las diferencias de *performance* entre las empresas. El debate sobre si la TRC es un teoría que necesita consolidación y métrica para su medición continúa abierto (Hoopes *et al.*, 2003). Incluso, algunos autores indican problemas tautológicos, debido a dificultades inherentes en relación con la causalidad, si son los recursos y capacidades los que explican las diferencias de *performance* o viceversa (Priem y Butler, 2001). Autores como Lees y Worthington (1989) mencionan la escasa atención prestada a explicar las diferencias de *performance* de las empresas en relación con sus recursos en el sector de la distribución comercial, siendo el análisis del entorno y la estructura competitiva o la identificación de tipologías estratégicas los campos de mayor interés. En este sentido, Conant *et al.* (1992) señalan la necesidad de realizar estudios que enfatizen la importancia de los recursos y capacidades de la empresa para explicar las diferencias de los resultados de las empresas.

Las variables elegidas para capturar los recursos físicos (RF) y humanos (RH) de la empresa “que suponemos tendrán una relación positiva sobre la *performance* de la empresa en términos de eficiencia técnica” han sido: i) La integración vertical (IV); con ello las empresas buscan un mayor poder de mercado, así como un mayor poder de negociación. También podrían conseguirse mayores economías de escala y alcance debido a la coordinación de funciones de distribución al mismo tiempo que mayores barreras de entrada en el sector de actividad (Casares y Rebollo, 1996a). Para medir el grado de IV se utilizará la relación del valor añadido generado

por la empresa sobre las ventas. ii) El nivel de intensidad en capital de su tecnología productiva (ICT), utilizando como variable *proxy* la relación entre la dotación del inmovilizado material sobre el empleo (Merino y Salas, 1995; Gumbau, 1997). iii) La edad de la empresa (EE), pues una mayor antigüedad de la empresa en el mercado donde opera se relaciona con una mayor experiencia, conocimiento del mercado y reputación (Thomas *et al.*, 1998). iv) El nivel de salarios de la empresa (SAL), considerada como una *proxy* del grado de cualificación empresarial; mayor nivel de salario permite a la empresa atraer una mano de obra más cualificada (Lusch y Moon, 1984), lo cual implica una disminución de la rotación de la misma. La Tabla 1, muestra estadísticos descriptivos de las variables utilizadas².

Tabla 1. Estadística descriptiva de las variables utilizadas (unidades monetarias en miles de €)

| Variables | Sector minorista | | Sector mayorista | |
|---------------|------------------|------------|------------------|------------|
| | Media | Desv. est. | Media | Desv. est. |
| Ventas | 5834.47 | 182349.10 | 4028.85 | 13032.30 |
| I.Material | 37.92 | 1064.98 | 17.54 | 53.53 |
| Consumos Int. | 3786.01 | 116006.80 | 2915.99 | 10920.23 |
| Empleo | 1866.78 | 81691.57 | 452.28 | 1918.64 |
| Gastos Pnal. | 802.53 | 27941.69 | 357.22 | 918.89 |
| I.Mat./Empleo | 0.35 | 1.12 | 0.27 | 0.66 |
| Edad | 21.73 | 8.36 | 21.44 | 7.73 |

Fuente: SABI y elaboración propia.

3. METODOLOGÍA

Desde la perspectiva del *managament*, la eficiencia técnica (ET) para el gerente es entendida como una medida de la habilidad de la empresa para producir la mayor cantidad de *output* posible dados unos determinados niveles de *input* para una tecnología productiva específica, bajo unas determinadas condiciones del entorno, en términos de oportunidades en la actividad que desarrolla la empresa. En este sentido, la ET es un concepto relativo, con el cual es posible observar a cada empresa en su nivel de producción comparando con la mejor práctica (*best-practice*) en la relación *input-output* y la desviación individual que pueda producirse en esta comparación sobre la frontera de producción $Y=F(K,L)$, donde Y denota el *output* de la empresa y K, L los *inputs* capital y trabajo, respectivamente. En particular, la teórica frontera estocástica está basada en la estimación de:

$$\text{Ln } y_i = \beta_0 + \sum_{i=1}^N \beta_n \text{Ln } (x_{n,i}) + v_{it} - u_{it} \quad [1]$$

donde y_i es el *output* de la unidad productiva i , x es el vector de los *inputs* $x = x_1, \dots, x_n$, y β es un vector de parámetros desconocido, a estimar. En este análisis, el termino de error se

² Al objeto de ahorrar espacio, no se muestra la estadística descriptiva a nivel intrasectorial. En el Anexo I se encuentran las Tablas A1 y A2, relativas a la identificación de los sectores con relación al código CNAE.

descompone en una variable v_{is} distribuida como iid $v_{is} \sim N(0, \sigma_{vi}^2)$, la cual captura el ruido aleatorio, y una variable no negativa u_{it} , distribuida como una semi-normal iid $u_{it} \sim N^+(0, \sigma_{ui}^2)$, la cual captura la medida de ineficiencia en la producción. Ambos términos son independientemente distribuidos, con $\sigma_{uv}=0$. Esta especificación es debida a Coelli (1993), propuesta por Aigner Lovell y Smith (1977) y Meesusen y Van der Broeck (1977). En el caso general, la eficiencia técnica, estimando la Ecuación 1 por máxima verosimilitud, puede reescribirse de la forma siguiente:

$$ET_{it} = \frac{E[\exp(y_i)/u_i, x_i]}{E[\exp(y_i)/u_i = 0, x_i]} = \exp(-u_i) \quad [2]$$

El modelo para el análisis de la eficiencia y sus factores determinantes para el conjunto del sector de la distribución en España 1997-2006 que se utiliza en este trabajo es el propuesto por Battese y Coelli (1995), el cual permite la estimación de la eficiencia técnica de cada empresa como un factor que varía en el tiempo. Consideramos una función de producción de la forma siguiente:

$$Y_{it} = F(K_{it}, L_{it})ET(Z_{it}),$$

donde Y_{it} denota el *output* de la empresa i en el período t y K_{it} y L_{it} son el capital y el trabajo considerados como *inputs*. El *output* está determinado por el producto de $F(\bullet)$ y $ET(\bullet)$. Desde el punto de vista paramétrico, el modelo a estimar es de una sola etapa, siendo una extensión de modelo descrito en la Ecuación 1, de forma que podemos considerar:

$$Y_{it} = \exp(x_{it}\beta + v_{it} - u_{it}), \quad [3]$$

donde Y_{it} denota la producción de la observación en t ($t=1,2,\dots,T$), x_{it} es un vector ($k \times 1$) de valores desconocidos, función de los *inputs* y de otras variables explicativas asociadas con la empresa i en observación en t , β es una matriz ($k \times 1$) de parámetros desconocidos a ser estimados, como fue comentado v_{is} distribuida como iid $v_{is} \sim N(0, \sigma_{vi}^2)$, el cual captura el ruido aleatorio, y una variable no negativa u_{it} , distribuida como una semi-normal iid $u_{it} \sim N^+(0, \sigma_{ui}^2)$, la cual captura la medida de ineficiencia en la producción. Ambos términos son independientemente distribuidos, y consecuentemente $\sigma_{uv}=0$, con media 0 y varianza σ^2 , Z_{it} es un vector ($1 \times m$) de variables explicativas asociadas con la ineficiencia técnica de la función de producción de las empresas sobre el tiempo, y δ es un vector ($m \times 1$) de coeficientes desconocidos. La Ecuación 3 especifica una frontera de producción estocástica en términos de los valores de producción originales. Consecuentemente, los efectos de la eficiencia técnica a partir del término u_{it} son asumidos como una función de variables explicativas, de la forma siguiente:

$$u_{it} = Z_{it} \delta + W_{it}; \quad [4]$$

donde W_{it} es una variable aleatoria definida por el truncamiento de la distribución con media 0 y varianza σ^2 , siendo el punto de truncamiento $-z_{it} \delta$, $W_{it} \geq 0$. Finalmente, hay que considerar que el método de máxima verosimilitud propuesto estima simultáneamente los parámetros de la frontera estocástica y el modelo perteneciente a la estimación de la ineficiencia técnica. La función *likelihood* y sus derivadas parciales con respecto a los parámetros del modelo son los propuestos por Battese y Coelli (1995). La función *likelihood* es una función de la varianza de los parámetros $\sigma_s^2 = \sigma_v^2 + \sigma^2$ y $\gamma \equiv \frac{\sigma^2}{\sigma_s^2}$.

La eficiencia técnica ET de la empresa i en el año t se define como:

$$ET_{it} = \exp(-U_{it}) = \exp(-z_{it} \delta - W_{it}), \quad [5]$$

donde $0 \leq ET_{it} \leq 1$. Una empresa alcanzaría un nivel de ET igual a 1 cuando su nivel de ineficiencia es igual a 0; en otro caso los valores serán inferiores a la unidad. En relación con la forma funcional adoptada en este trabajo, se asume la función de producción Cobb-Douglas³.

$$\ln(V) = \beta_0 + \beta_1 \ln I_{it} + \beta_2 \ln C_{it} + \beta_3 \ln E_{it} + \sum_1^{42} \beta_4 \text{sector} + \beta_5 t_{it} + v_{it} - u_{it} \quad [6]$$

$$u_{it} = \delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 IV + \delta_3 SAL + \delta_4 ITC + \delta_5 ITC^2 + \sum_1^{17} \delta_6 \text{region}(CA_{it}) + \delta_7 E + W_{it} \quad [7]$$

donde:

- el subíndice i , denota la i -ésima empresa de la muestra $i=1, 2, \dots, 5488$;
- los β son parámetros desconocidos de la función de producción a estimar;
- los δ son parámetros desconocidos de las variables explicativas en el término de ineficiencia;
- V = ventas de la empresa (*output*), I = inmovilizado material (*input*); C = consumos intermedios (*input*); E = empleo (*input*);
- ITC = intensidad del capital; SAL = gastos de personal; IV = integración vertical (valor añadido/ventas); CA = variable *dummy* de comunidad autónoma.

Un valor negativo y significativo del parámetro estimado δ en cualquiera de las variables del término de ineficiencia indicaría una disminución de la misma y viceversa. Al objeto de conseguir la mejor especificación posible que se adapte a la estructura productiva, se realizan una serie de contrastes de hipótesis, así como la significación de los parámetros que

³ Dos son los motivos para la elección de la función de producción Cobb-Douglas. Por un lado, su simplicidad y validez (Zellner *et al.*, 1966) y su aceptación en la literatura en la industria de la distribución (Arndt y Olsen, 1975; Ingene, 1984; Trurik y Kooiman, 1986; Ratchford, 2003; De Jorge, 2008). Por otro lado, el elevado grado de multicolinealidad que existe entre los regresores de la función translogarítmica, siendo este un problema inherente a la especificación translog. En este sentido, para una mayor profundidad relativa a los problemas de la modelización y la especificación de la forma de la frontera de producción, véase Giannakas, Tran y Tzouvelekas (2003).

definen la estructura del error compuesto del modelo. Para ello, se emplea el contraste de la razón de verosimilitud generalizado, lo que implica el cálculo del estadístico $\lambda = -2[\ln(H_0) - \ln(H_1)]$, donde $\ln(H_0)$ y $\ln(H_1)$ son los valores que toma la función de verosimilitud bajo las hipótesis nula y alternativa, respectivamente. El estadístico λ se distribuye asintóticamente como una χ_p^2 con p (número de restricciones impuestas por la hipótesis nula) grados de libertad. Asimismo, se analizará la estructura del término de ineficiencia técnica, contrastando la hipótesis de si la participación de la ineficiencia en el error compuesto es adecuada ($\delta = 0$). En este sentido, si se acepta esta hipótesis, el término de ineficiencia u_i se podría eliminar del modelo de frontera estocástica, dando lugar a un modelo de función de producción media que asume que todas las empresas son completamente eficientes y que se puede estimar por mínimos cuadrados. Por último, una vez estimada la especificación que determina la frontera de producción, se calculan los índices de eficiencia para cada empresa a través de la Ecuación 5.

4. RESULTADOS

En las Tablas 2 y 3 se muestran los resultados de la estimación de la frontera estocástica de producción en su especificación Cobb-Douglas. La primera comprobación a realizar sería contrastes por máxima verosimilitud de la existencia del término de ineficiencia en la Ecuación 6. Si se acepta la hipótesis, el término de ineficiencia u_{it} se eliminaría del modelo (Ecuación 7), pudiéndose estimar el mismo por MCO. La omisión de u_{it} es equivalente a la hipótesis $H_0: \gamma = 0$. El estadístico λ resulta 8,78 (Tabla 3), mayor que el valor crítico 5,13, por lo que se rechaza la hipótesis nula y el modelo está correctamente especificado con un término de ineficiencia técnica. Al objeto de considerar el tipo de especificación elegida de normal truncada o seminormal, se contrasta la hipótesis nula $H_0: \mu = 0$, de acuerdo al valor del estadístico t se rechaza la hipótesis, aceptándose la normal truncada $\mu = 0,15$.

Los coeficientes β de todos los inputs son positivos y estadísticamente significativos, mostrando por tanto el signo adecuado: mayores valores de *output* se relacionan con mayores incrementos de sus *inputs*. Dado que se trata de una función Cobb-Douglas, los valores estimados de los coeficientes de los inputs coinciden con las elasticidades de producción de los distintos factores. En este sentido, el mayor de dichos coeficientes es el correspondiente al inmovilizado material (0,538), que parece determinar en mayor medida las variaciones de la producción. El factor consumos intermedios ocuparía el segundo lugar (0,392) y, finalmente, queda el empleo (0,075). El signo positivo y estadísticamente significativo del coeficiente de la variable temporal t muestra la existencia de progreso tecnológico, indicando que se ha producido la incorporación de las tecnologías productivas que pueden contribuir a mejoras en el sistema productivo, el coeficiente de la variable indica que la tasa de crecimiento de la producción de las empresas de la muestra es del 3,1 % anual.

Tabla 2. Estimación de la función de producción

| variable | Modelo Cobb-Douglas | | | |
|--|---------------------|------------|-----|-----------|
| | Parametros | Coef. est. | | Des. est. |
| <i>Función de producción estocástica</i> | | | | |
| Constante | β_0 | -61,323 | *** | 1,5611 |
| Ln Inmovilizado | β_1 | 0,538 | *** | 0,0027 |
| Ln Consumos | β_2 | 0,392 | *** | 0,0021 |
| Ln Empleo | β_3 | 0,075 | *** | 0,0013 |
| Tiempo (t) | β_4 | 0,031 | *** | 7,0E-04 |
| Dummies_sectores mayoristas | β_{5-21} | | | |
| Dummies_sectores minoristas | β_{22-41} | | | |
| <i>Modelo de efectos sobre la ineficiencia</i> | | | | |
| Constante (Insig2v) | δ | -2,237 | *** | 0,007 |
| Constante (Insig2u) | δ_0 | -77,804 | *** | 11,87 |
| Tiempo (t) | δ_1 | 0,039 | *** | 0,005 |
| Integración vertical (IV) | δ_2 | -23,742 | *** | 0,296 |
| Intensidad capital (NIC) | δ_3 | -0,048 | ** | 0,024 |
| Intensidad capital (NIC)^2 | δ_4 | 0,001 | *** | 4,0E-04 |
| Gastos de personal (SAL) | δ_5 | -1,48E-05 | *** | 5,38E-06 |
| Edad de la empresa (EE) | δ_6 | 0,001 | | 0,001 |
| Aragón | δ_7 | 0,147 | *** | 0,057 |
| C. Valenciana | δ_8 | 0,326 | *** | 0,056 |
| Murcia | δ_9 | 0,337 | *** | 0,079 |
| Andalucía | δ_{10} | 0,510 | *** | 0,040 |
| Castilla La Mancha | δ_{11} | 0,403 | *** | 0,063 |
| Extremadura | δ_{12} | 0,352 | *** | 0,129 |
| Castilla-León | δ_{13} | 0,224 | *** | 0,561 |
| C. Madrid | δ_{14} | 0,204 | *** | 0,042 |
| Galicia | δ_{15} | 0,460 | *** | 0,073 |
| Asturias | δ_{16} | 0,386 | *** | 0,077 |
| Cantabria | δ_{17} | 0,363 | | 0,232 |
| País Vasco | δ_{18} | -0,266 | *** | 0,078 |
| Navarra | δ_{19} | -0,311 | *** | 0,117 |
| La Rioja | δ_{20} | 0,173 | | 0,135 |
| Baleares | δ_{21} | -0,065 | | 0,076 |
| Canarias | δ_{22} | 0,125 | *** | 0,105 |
| Observations | | 52575 | | |
| Wald-test | | 401067,9 | | |
| Prob chi2 | | 0,0000 | | |
| Log Likelihood | | -21598,068 | | |
| Eficiencia (ET) media global | | 0.931 | | |

***, **, *: estadísticamente significativo al nivel del 1%, 5% y 10%, respectivamente
Sector y comunidad autónoma de referencias: 5115 y Cataluña, respectivamente.

Tabla 3. Contraste de hipótesis del modelo de frontera estocástica

| Información sobre los contrastes de hipótesis | | | | |
|--|-----------------------|--------------|---------------|----------|
| Hipótesis nula | F. máx. verosimilitud | λ | valor crítico | Decisión |
| $H_0: \gamma = 0$ | 61,34 | 8,78 | 5,13 | Rechazo |
| $H_0: \mu = 0$ | 62,15 | 7,43 | 3,92 | Rechazo |
| Contraste de rendimientos de escala: $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$ | | | | |
| Coeficiente | | Probabilidad | | |
| Estadístico t | 16,11 | 0,0001 | | |

Los rendimientos a escala de la función frontera estocástica de producción vienen dados por la suma de elasticidades de producción respecto a los factores, que en nuestro caso es de 1,005. Para determinar si existen rendimientos de escala constantes, se contrasta si este valor es significativamente igual a uno (hipótesis nula) mediante una prueba de t , ya que solo existe una restricción al modelo. Tanto el estadístico t como el valor crítico aparecen al final de la Tabla 3, rechazándose la hipótesis nula, aceptando rendimientos crecientes de escala. Este resultado está en la línea de los trabajos de Cotterill (1986), Aalto-Sctälä (2000, 2002), Barros y Alves (2004, 2005) y Sellers y Mas (2009).

3.1 Análisis de la relación entre la eficiencia y sus variables explicativas

Una vez analizado el modelo de la especificación frontera (parte determinística) se calcula el índice de eficiencia según la Ecuación 5. En la Figura 1, se muestra el histograma junto con un gráfico *box-plot* de la eficiencia global obtenida después de controlar por las variables explicativas de la misma. Como puede apreciarse, la distribución de la eficiencia se concentra en el rango entre los valores 0,900-0,995 (percentiles 25%-75%), siendo el valor medio de 0,931; por tanto, en conjunto el nivel de eficiencia de la distribución comercial de la muestra analizada es del 93,1%.

Por grupos de sectores, la eficiencia correspondiente a los sectores mayoristas y minoristas es del 94,0% y 93,0%, respectivamente. Considerando el término estocástico de la frontera estimada donde se encuentran los factores explicativos de la ineficiencia, podemos observar que el parámetro (δ_1) de la tendencia (t) de la ineficiencia es positivo y estadísticamente significativo, lo que implica que la ineficiencia aumenta a lo largo del tiempo (decrece la eficiencia). En la Figura 2 se muestran los gráficos *box-plot* por años (en la parte superior) y la evolución de la eficiencia de los sectores mayoristas y minoristas (en la parte inferior). Como se aprecia en los gráficos *box-plot*, la dispersión de la eficiencia aumenta para la muestra global en ambos grupos de sectores. En la evolución individualizada por grupos, la totalidad de sectores de cada grupo de la distribución analizados muestra una tendencia decreciente, más acusada en el caso del grupo minorista.

Figura 1. Histograma y gráfico *box-plot* de la eficiencia técnica

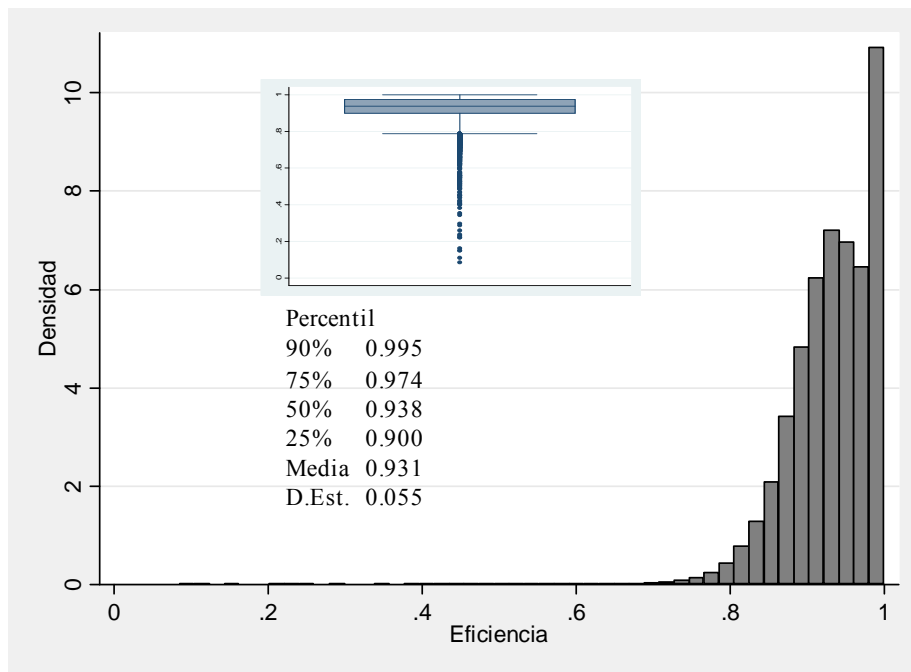
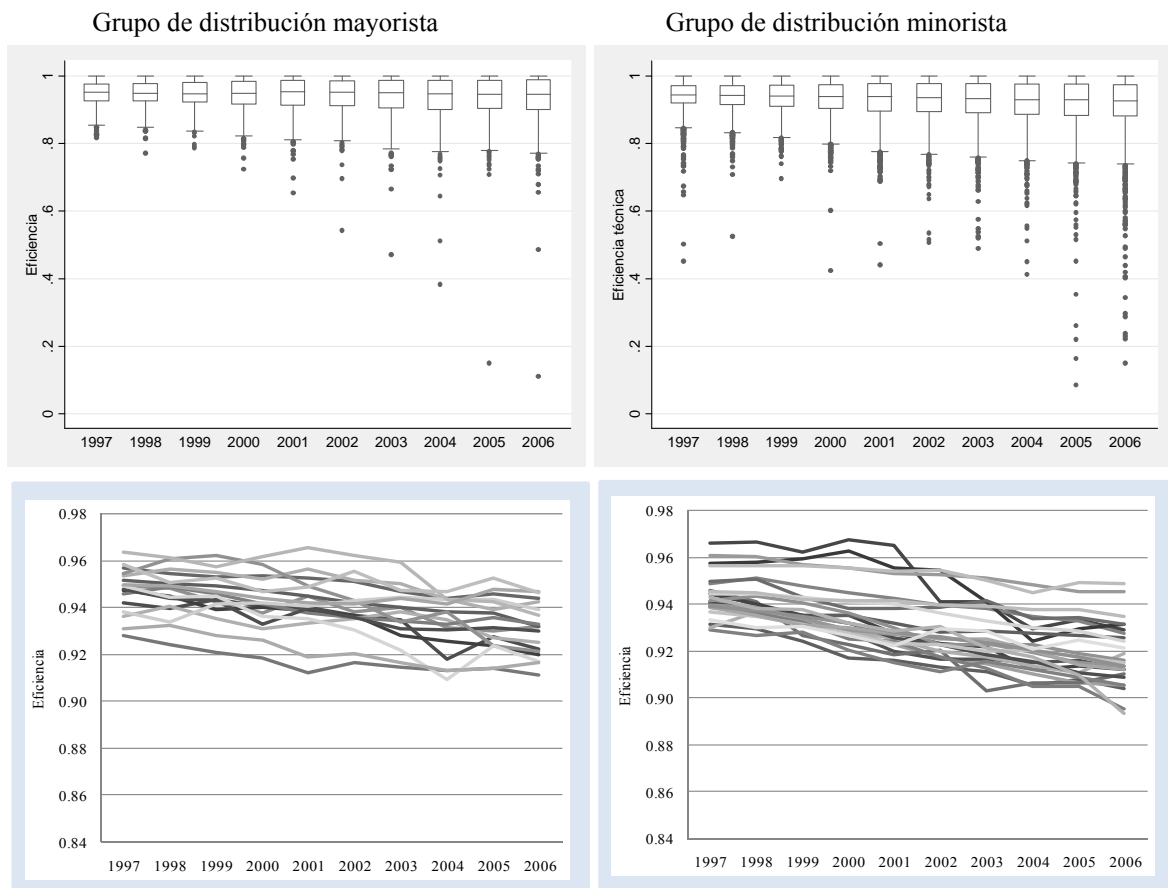


Figura 2. Evolución de la eficiencia por años y sectores



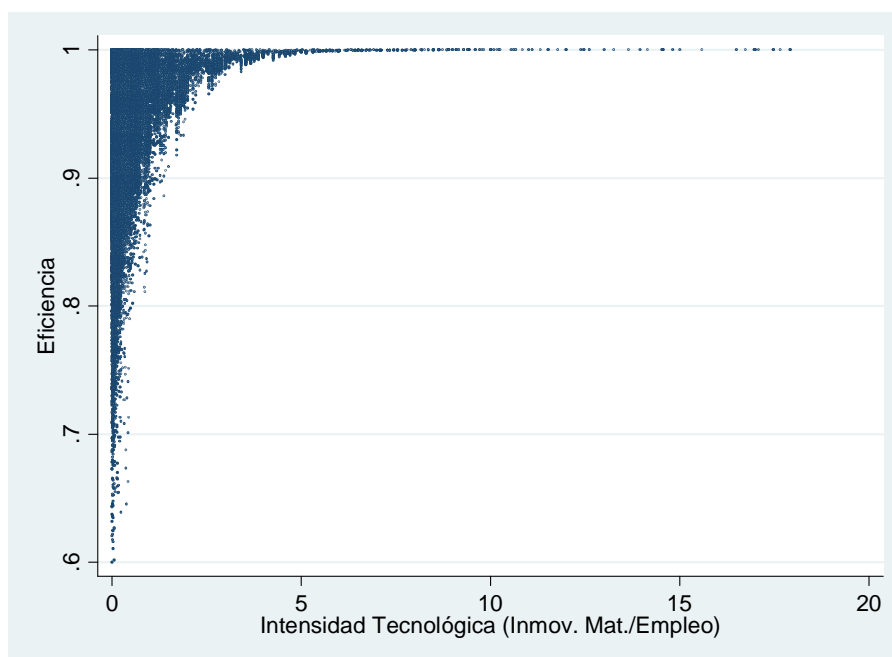
En la Tabla 4, se muestra el *ranking* de los sectores de la eficiencia media del período analizado por grupos. Los sectores de mayores niveles de eficiencia son 5224 y 5232, con un 95,3% del grupo minorista, y 5170, con un 95,1% del grupo mayorista. Así mismo, los de menores niveles de eficiencia serían 5231, con un 91,6%, y el 5115, con un 93,4% de los grupos minoristas y mayoristas, respectivamente.

Tabla 4. Eficiencia media por sectores y grupos de la distribución comercial

| Sector | Media | Desv. est. | Sector | Media | Desv. est. |
|--------|-------|------------|--------|-------|------------|
| 5224 | 0.953 | 0.046 | 5170 | 0.951 | 0.057 |
| 5232 | 0.953 | 0.049 | 5165 | 0.945 | 0.050 |
| 5210 | 0.951 | 0.047 | 5164 | 0.956 | 0.048 |
| 5220 | 0.947 | 0.043 | 5154 | 0.941 | 0.040 |
| 5211 | 0.941 | 0.051 | 5153 | 0.922 | 0.057 |
| 5274 | 0.940 | 0.057 | 5147 | 0.931 | 0.075 |
| 5221 | 0.940 | 0.052 | 5146 | 0.944 | 0.111 |
| 5244 | 0.936 | 0.050 | 5145 | 0.937 | 0.049 |
| 5233 | 0.931 | 0.054 | 5143 | 0.939 | 0.044 |
| 5243 | 0.929 | 0.060 | 5142 | 0.950 | 0.035 |
| 5248 | 0.927 | 0.058 | 5139 | 0.943 | 0.047 |
| 5272 | 0.927 | 0.072 | 5138 | 0.934 | 0.059 |
| 5227 | 0.927 | 0.056 | 5134 | 0.917 | 0.047 |
| 5245 | 0.926 | 0.051 | 5132 | 0.934 | 0.047 |
| 5247 | 0.926 | 0.056 | 5130 | 0.950 | 0.041 |
| 5263 | 0.925 | 0.081 | 5117 | 0.940 | 0.043 |
| 5246 | 0.925 | 0.055 | 5115 | 0.934 | 0.047 |
| 5242 | 0.925 | 0.058 | | | |
| 5223 | 0.924 | 0.054 | | | |
| 5240 | 0.923 | 0.064 | | | |
| 5222 | 0.922 | 0.045 | | | |
| 5225 | 0.920 | 0.051 | | | |
| 5241 | 0.919 | 0.058 | | | |
| 5231 | 0.917 | 0.045 | | | |
| 5212 | 0.916 | 0.057 | | | |

En relación con los factores explicativos de la ineficiencia, el parámetro de la variable que captura la integración vertical (IV) tiene signo negativo y estadísticamente significativo, indicando que mayores niveles de integración vertical en el canal de la distribución disminuye la ineficiencia. La influencia de la intensidad de capital tecnológico sobre la ineficiencia tiene “forma de U”, ya que los parámetros lineal y cuadrático son significativos negativo y positivo, respectivamente. Analizando la zona relevante de la curva, el 90% de las observaciones se encuentra en la zona decreciente (parte izquierda del mínimo). Al objeto de visualizar este efecto, la Figura 3 muestra el gráfico de dispersión considerando la eficiencia y el nivel de intensidad tecnológica.

Figura 3. Gráfico de dispersión de la eficiencia y la intensidad tecnológica



El coeficiente de la variable “gastos de personal” es estadísticamente significativo y negativo; por tanto, mayores niveles salariales disminuyen la ineficiencia. La variable “edad” no ha resultado ser significativa. Finalmente, existen diferencias estadísticamente significativas según la comunidad autónoma donde opera la empresa.

5. CONCLUSIONES

Este trabajo plantea el análisis de la influencia que los recursos y capacidades de las empresas del sector de la distribución en España tienen para explicar la eficiencia productiva como medida de desempeño en el período 1997-2006. Asimismo, se ha prestado especial atención al sector de actividad y localización de la empresa como factores de control del entorno. Para abordar este estudio, se ha implementado la línea seguida por Lieberman y Dhawa (2005), basada en la función de producción estocástica (FPE) propuesta por Battese y Coelli (1995). Con esta metodología ha sido posible trazar una frontera de referencia (*best-practice*) e identificar a partir de las empresas que la componen el comportamiento y evolución del conjunto de empresas integrantes según grupos de la distribución y sectores pertenecientes a cada grupo.

Los principales resultados alcanzados revelan que los recursos disponibles por las empresas del sector de la distribución son explicativos de los niveles de eficiencia productiva en términos de *performance* alcanzados por estas. En particular, las diferencias de eficiencia se relacionan con mayores niveles de integración vertical y, por lo tanto, con un mayor poder de

mercado y de negociación. En este sentido, mayores economías de escala, como las encontradas en las empresas analizadas junto a mayores economías de alcance debido a la coordinación de funciones de distribución, suponen recursos relevantes para mejorar la posición competitiva a la vez que implican barreras de entrada para los competidores potenciales. La mayor dotación de recursos materiales en términos de intensidad de capital y humanos medidos a través de una mayor retribución salarial contribuye a mayores niveles de eficiencia productiva. En el primer caso, la relación es curvilínea, siendo la zona relevante la que establece una relación causal positiva. La incorporación de mayores niveles de intensidad tecnológica en términos de sistemas de *scanner*, intercambio electrónico de datos (EDI), entre otros, favorece la mejor prestación del servicio y mejoras organizativas que aumentan la eficiencia productiva.

Mayores niveles de retribución se asocian con mejor cualificación del personal empleado. Además, la localización de la empresa según la comunidad autónoma donde está localizada es un factor a considerar como explicativo de las diferencias de eficiencia. Este resultado es el esperado, ya que existe una importante influencia de la regulación del comercio sobre la eficiencia de las empresas. Finalmente, existen diferencias significativas en los niveles de eficiencia intrasectorial.

A pesar de la amplitud sectorial analizada y el nivel de desagregación a cuatro dígitos llevado a cabo, la imposibilidad de identificar el formato comercial en el caso del sector minorista impone ciertas restricciones al análisis realizado. La utilización de variables monetarias en lugar de físicas es otro de los inconvenientes a considerar. Por el momento, estas restricciones siguen siendo una asignatura pendiente cuando se aborda el análisis del sector de la distribución comercial. El criterio de selección muestral se ha basado en el panel completo, lo que podría introducir algún tipo de sesgo a los resultados obtenidos. Futuras líneas de extensión de este trabajo podrían ir encaminadas a determinar la influencia de los recursos y capacidades sobre el desempeño de las empresas, a partir de variables de carácter más cualitativo, como los estilos de dirección o las prácticas de recursos humanos.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece los comentarios y sugerencias realizadas por el editor y los evaluadores anónimos, que han contribuido a mejorar este trabajo. Cualquier error en el mismo es responsabilidad exclusiva del autor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aalto-Setälä, V. (2000) “Economies of scale in grocery retailing in Finland”, *Journal of Retailing and Consumer Services*, nº 7, pp. 207–213.
- Aalto-Setälä, V. (2002) “The effect of concentration and market power on food: evidence from Finland”, *Journal of Retailing*, nº 78, pp. 207–213.
- Aigner, D.C.; Lovell, K.; Schmidt, P. (1977) “Formulation and estimation of stochastic frontier production function models”, *Journal of Econometrics*, nº 6, pp. 21–37.

- Baker, W.E.; Sinkula, J.M. (2009) "The Complementary Effects of Market Orientation and Entrepreneurial Orientation on Profitability in Small Businesses", *Journal of Small Business Management*, 47 (4), pp. 443–464.
- Barney, J.B. (1986) "Strategic factor markets: Expectations, luck and business strategy", *Management Science*, vol. 32, pp. 1231–1241.
- Barney, J.B. (1991) "Firm resources and sustained competitive advantage", *Journal of Management*, n° 17, pp. 99–120.
- Barros, C.P.; Alves, C.A. (2003) "Hypermarket retail efficiency in Portugal", *International Journal of Retail and Distribution Management*, n° 31, pp. 549–560.
- Barros, C.P.; Alves, C.A. (2004) "An empirical analysis of productivity in a Portuguese retail chain using Malmquist Index", *Journal of Retailing and Consumer Services*, n° 11, pp. 269–278.
- Barros, C.P.; Alves, C.A. (2005) "Efficiency in hypermarket retailing: A stochastic frontier model", *International Journal of Retail and Consumer Research*, n° 15, pp. 171–189.
- Battese, G.E.; Coelli, T. (1995) "A model of technical inefficiency effects in stochastic frontier production functions for panel data", *Empirical Economics*, n° 20, pp. 325–332.
- Conant, J.S.; Smart, D.T.; Solano Méndez, R. (1993) "Generic retailing type, distinctive marketing competencies, and competitive advantage", *Journal of Retailing*, vol. 69, n° 3, pp. 254–279.
- Cotterill, R. (1986) "Market power in the retail food industry: evidence from Vermont", *Review of Economics Statistics*, n° 68, pp. 379–386.
- Dierickx, I.; Cool, K. (1989) "Asset stock accumulation and sustainability of competitive advantage", *Management Science*, vol. 35, n° 12, pp. 1504–1511.
- Donthu, N.; Yoo, B. (1998) "Retail productivity assessment using data envelopment analysis", *Journal of Retailing*, vol. 74, n°1, pp. 89–105.
- Giannakas, K.; Tran, K.; Tzouvelekas, V. (2003) "On the Choice of Functional Form in Stochastic Frontier Modeling", *Empirical Economics*, n° 28, pp. 75–100.
- Hall, R. (1992) "The strategic analysis of intangible Resources", *Strategic Management Journal*, vol.13, pp. 135–144.
- Hoopes, D.G.; Madsen, T.L.; Walker, G. (2003) "Why is there a resource-based view? Toward a theory of competitive heterogeneity", *Strategic Management Journal*, n° 24, pp. 889–902.
- Hult, G.T.M.; Ketchen, J.R.; Slater, S.F. (2005) "Market Orientation and Performance: an integration of disparate approaches", *Strategic Management Journal*, 26, pp. 1173–1181.
- Lees, R.; Worthington, S. (1989) "Achieving above-average profitability in retailing", *International Journal of Retailing*, vol. 4, n° 2, pp. 17–34.
- Lieberman, M.; Dhawan, R. (2005) "Assessing the resource base of Japanese and U.S auto producers: A stochastic frontier production function approach", *Management Science*, n° 7, pp. 1060–1075.
- Lusch, R.F.; Moon, S.Y. (1984) "An exploratory analysis of the correlates of labor productivity in retailing", *Journal of Retailing*, vol. 60, n° 3, pp. 37–61.
- Mahoney, J.T.; Pandian, J.R. (1992) "The resource-based view within the conversation of strategic management", *Strategic Management Journal*, n° 13, pp. 363–380.
- Meeusen, W.J.; Van der Broeck, J. (1977) "Efficient estimation from Cobb-Douglas productions functions with composed error", *International Economics Review*, n° 18, pp. 435–444.
- Merino, F.; Salas, V. (1995) "Empresa extranjera y manufacturera española: Efectos directos e indirectos", *Revista de Economía Aplicada*, n° 9, pp. 105–131.
- Penrose, E.G. (1959) "The Theory of the Growth of the Firm", *Wiley*, New York.

- Peteraf, M.A. (1993) “The cornerstones of competitive advantage: A resource-based view”, *Strategic Management Journal*, nº 14, pp. 179–191.
- Priem, R.L.; Butler, J.E. (2001) “Is the resource-based view a useful perspective for strategic management research?”, *Academy Management Review*, nº 26, pp. 22–40.
- Sellers, R.; Mas, F. (2009) “Determinantes de la eficiencia en el canal de la distribución: análisis en agencia de viajes”, *Revista Española de Investigación de Marketing ESIC*, vol. 13, nº 1, pp. 97–115.
- Thomas, R.R.; Barr, R.S.; Cron, W.L.; Slocum Jr., J.W. (1998) “A process for evaluating retail store efficiency: A restricted DEA approach”, *International Journal of Research in Marketing*, 15 (5), pp. 487–503.
- Wernerfelt, B. (1984) “A resource-based view of the firm”, *Strategic Management Journal*, nº 5, pp. 171–180.
- Zellner, A.; Kmenta, J; Dréze, J. (1966) “Specification and estimation of Cobb-Douglas production function models”, *Econometrica*, nº 34, pp. 784–795.

ANEXO I

Tablas A1 y A2. Análisis descriptivos 1997-2006

| Tabla A1. Sectores minoristas | | | Tabla A2. Sectores mayoristas | | |
|--|--------|---------|--|--------|---------|
| Descripción | Sector | nº obs. | Descripción | Sector | nº obs. |
| CMr. en establecimientos no especializados | 5210 | 140 | IC. de muebles, artículos para el hogar y ferretería | 5115 | 230 |
| CMr. predominio de alimentos, estab. no espec. | 5211 | 3780 | IC. de productos alimenticios, bebidas y tabaco | 5117 | 140 |
| CMr. otros produc. en establec., no espec. | 5212 | 870 | CM. de productos alimenticios, bebidas y tabaco | 5130 | 600 |
| CMr. alimentos, bebidas y tabaco, est. espec. | 5220 | 160 | CM. de carne y productos cárnicos | 5132 | 250 |
| CMr. de frutas y verduras | 5221 | 240 | CM. de bebidas | 5134 | 140 |
| CMr. de carne y productos cárnicos | 5222 | 1210 | CM. de pescados y mariscos y otros productos | 5138 | 220 |
| CMr. de pescados y mariscos | 5223 | 460 | CM. no especializado, de productos alimenticios | 5139 | 790 |
| CMr. de pan y productos de panadería, etc. | 5224 | 1090 | CM. de prendas de vestir y calzado | 5142 | 290 |
| CMr. de bebidas | 5225 | 170 | CM. de aparatos electrodomésticos y radio y TV | 5143 | 150 |
| CMr. en establec. especializ. en alimentación | 5227 | 1490 | CM. de perfumería y productos de belleza | 5145 | 170 |
| CMr. de productos farmacéuticos | 5231 | 250 | CM. de productos farmacéuticos | 5146 | 210 |
| CMr. de artículos médicos y ortopédicos | 5232 | 1050 | CM. de otros bienes de consumo a los alimenticios | 5147 | 400 |
| CMr. de cosméticos y artículos de tocador | 5233 | 700 | CM. de madera, materiales de construcción | 5153 | 350 |
| CMr. de artículos nuevos en establec. espec. | 5240 | 320 | CM. de ferretería, fontanería y calefacción | 5154 | 220 |
| CMr. de textiles | 5241 | 1180 | CM. de máquinas y equipo de oficina | 5164 | 320 |
| CMr. de prendas de vestir | 5242 | 4700 | CM. de otra maquinaria para la industria | 5165 | 470 |
| CMr. de calzado y artículos de cuero | 5243 | 1310 | Otro comercio al por mayor | 5170 | 200 |
| CMr. de muebles; aparatos de iluminación | 5244 | 6370 | Notas: IC = intermediario de comercio; CM = comercio al por mayor. | | |
| CMr. de electrodomésticos, aparatos de radio | 5245 | 4160 | | | |
| CMr. de ferretería, pinturas y vidrio | 5246 | 4410 | | | |
| CMr. de libros, periódicos y papelería | 5247 | 1570 | | | |
| Otro comercio al por menor establec. espec. | 5248 | 10930 | | | |
| Otro comercio al por menor no realizado, est. | 5263 | 640 | | | |
| Reparación de aparatos domésticos eléctricos | 5272 | 450 | | | |
| Otra reparación | 5274 | 2080 | | | |

Nota: CMr = comercio al por menor.



UNIVERSIDAD
PABLO
OLAVIDE
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (15). Páginas 117–132.
Junio de 2013. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=72>

Eficiencia de las sociedades musicales de la Comunidad Valenciana

RAUSELL KOSTER, PAU

Instituto de Desarrollo Local, Universidad de Valencia
Correo electrónico: Pau.Rausell@uv.es

COLL-SERRANO, VICENTE

Métodos Cuantitativos para la Medición de la Cultura, Universidad de Valencia
Correo electrónico: Vicente.Coll@uv.es

ABELED0 SANCHIS, RAÚL

Economía de la Cultura, Universidad de Valencia
Correo electrónico: Raul.Abeledo@uv.es

MARCO-SERRANO, FRANCISCO

Key Productivity Consulting y Department of Economics, GSM London
Correo electrónico: fmarco@kpkonline.com

RESUMEN

Las aplicaciones empíricas basadas en los análisis de eficiencia resultan todavía muy escasas dentro del campo de las organizaciones culturales. En este trabajo se analiza la eficiencia mediante un modelo DEA output orientado no radial que se aplica a una muestra de 292 sociedades musicales de la Comunidad Valenciana. El interés en este tipo de asociación cultural radica tanto en su relevancia socio-económica como en su grado de territorialidad. Los resultados obtenidos indican que la eficiencia media de las sociedades musicales de la Comunidad Valenciana se sitúa en el 72,66% y apuntan hacia la existencia de determinadas especificidades en la oferta y la demanda de los mercados provinciales en que operan.

Palabras clave: eficiencia; Análisis Envolvente de Datos (DEA); sociedades musicales.

Clasificación JEL: C14; D24; L82; Z10.

MSC2010: 62D05; 90C05; 90C90.

Efficiency of Musical Societies in the Valencian Community

ABSTRACT

Empirical applications for assessing the efficiency in cultural organizations are still scarce. In this paper, we use a non-radial, output-oriented, DEA model for assessing the efficiency of a sample of 292 Musical Societies in the Valencian Community. The interest in this type of cultural organization lies in both its socio-economic relevance and its degree of territoriality. The achieved results show that the average efficiency of the Musical Societies stands at 72.66% and points out to the existence of certain specificities in the supply and demand for provincial markets in which they operate.

Keywords: efficiency; DEA; musical societies.

JEL classification: C14; D24; L82; Z10.

MSC2010: 62D05; 90C05; 90C90.



1. INTRODUCCIÓN

La existencia de las sociedades musicales es uno de los rasgos más peculiares y diferenciadores de la Comunidad Valenciana (Rausell y Estrems, 1999) y, contrariamente a lo que se cree, no es solo un fenómeno de características pre-modernas y circunscrito a ámbitos territorialmente determinados y rurales. La principal consecuencia actual de este fenómeno histórico, que se organiza federativamente a finales de la década de 1960, es la consolidación de una densa red de práctica y aprendizaje musical, que convierte a la música en el hecho cultural con mayor grado de territorialidad de la Comunidad Valenciana; en prácticamente todas las localidades valencianas existen una o varias sociedades musicales, aunque hay comarcas con una mayor implantación. Más de la mitad de las sociedades musicales de España se localizan en la Comunidad Valenciana, cubriendo el 97% de su territorio. Según un reciente estudio (Rausell *et al.*, 2013), las sociedades musicales representan un caso de estudio de singular interés para la Comunidad Valenciana, dada la relevancia en términos socio-culturales de una institución que integra a 529 sociedades, 138.753 socios y 39.015 músicos federados. El conjunto de las sociedades musicales imparte semanalmente un total de 37.643 horas de formación (incluyendo los ensayos); el 87,5% de las sociedades ofrecen formación de iniciación a la música; el 82,7% imparte cursos de grado elemental y el 17,5% de grado superior. Además, debe tenerse presente que la realidad de las sociedades musicales implica una dimensión en términos económicos y de empleo de grado relevante para el conjunto de la cultura en la Comunidad Valenciana. Rausell *et al.* (2013) estiman que el valor de la producción del conjunto de las sociedades musicales de la Comunidad Valenciana asciende a 60.236.360 euros; generando una riqueza, expresada en términos de valor añadido, de 31.889.546 euros y ocupando a un total de aproximadamente 2.200 personas.

Sin embargo, el crecimiento que durante los últimos años han experimentado las sociedades musicales ha supuesto, desde el punto de vista interno, un notable incremento de su complejidad a nivel organizativo, convirtiéndose en unidades multiproducto y multiservicio (Rausell y Estrems, 1999). Por tanto, el modelo de gestión tradicional de este tipo de organización, fundamentalmente basado en la participación amateur y voluntarista, muestra sus limitaciones para gestionar realidades más complejas en entornos cambiantes y explica por qué las sociedades musicales están perdiendo competitividad social. En estas circunstancias, evaluar la eficiencia se revela como una información estratégica (Esteban y Coll, 2003) para articular medidas de intervención sobre el sector y optimizar el diseño y la coordinación de las políticas públicas en sus diferentes niveles administrativos (local, provincial, regional). Por esta razón, el objetivo del trabajo que se presenta es medir la eficiencia de una muestra de 292 sociedades musicales. Para ello se aplicará la técnica del Análisis Envolvente de Datos (DEA). Aunque las aplicaciones empíricas basadas en los análisis de eficiencia son un tema recurrente en la literatura, resultan todavía muy escasas las aportaciones realizadas dentro del campo de las

organizaciones culturales (Luksetich y Nold, 1997; Rausell y Carrasco, 1999; Pignataro, 2001; Mairese y Vande Eeckaut, 2002; Basso y Funari, 2004; Marco-Serrano, 2006; Del Barrio *et al.*, 2009) y casi con toda certeza son inexistentes en el ámbito de las sociedades musicales.

Con tal finalidad, el trabajo se estructura como sigue. En la segunda sección se abordan las cuestiones metodológicas de la técnica DEA. En la tercera sección se describe el diseño de la investigación y las principales características del estudio de campo. En la cuarta sección se presentan y discuten los principales resultados obtenidos. La última sección se dedica a establecer las conclusiones que pueden extraerse del estudio presentado.

2. METODOLOGÍA PARA LA EVALUACIÓN DE LA EFICIENCIA RELATIVA DE LAS SOCIEDADES MUSICALES

Desde un punto de vista económico, el término eficiencia se asocia con un uso racional de los recursos disponibles. Para evaluar la eficiencia relativa de las sociedades musicales se recurre al Análisis Envolvente de Datos (DEA), una técnica de programación lineal que permite la construcción de una superficie envolvente, frontera eficiente o función de producción empírica, a partir de los datos observados para el conjunto de unidades objeto de estudio –sociedades musicales–. Aquellas sociedades musicales que determinan la envolvente son calificadas como eficientes y las que no permanecen sobre la misma son consideradas ineficientes; en consecuencia, el DEA permite la evaluación de la eficiencia relativa de cada una de las sociedades.

La técnica DEA presenta una serie de ventajas (Stolp, 1990; Charnes *et al.*, 1994) frente a otras metodologías como SFA (*Stochastic Frontier Analysis*), entre las que cabe destacar: (i) su capacidad de manejar situaciones de múltiples *inputs* y *outputs* (Restzloff-Roberts y Morey, 1993) expresados en distintas unidades de medida (Charnes, *et al.*, 1994), (ii) que no es necesario imponer una determinada forma funcional que relacione *inputs* y *outputs* y (iii) que tampoco es necesario establecer supuestos distribucionales del término ineficiencia (Banker *et al.*, 1993). Ahora bien, esta metodología no está exenta de inconvenientes; sobre todo debe tenerse presente que el DEA es sensible a la existencia de observaciones extremas y toda desviación respecto de la frontera es tratada como ineficiencia, lo que puede derivar en una sobreestimación de la misma (Doménech, 1992).

Considérese un conjunto de sociedades musicales ($j=1,2,\dots,n$), cada una de las cuales utiliza m *inputs* x_{ij} ($i=1,2,\dots,m$) para producir s *outputs* y_{rj} ($r=1,2,\dots,s$). El modelo DEA-CCR (Charnes *et al.*, 1978) *output orientado*¹ en forma envolvente, que permite evaluar la eficiencia relativa de una determinada sociedad musical, puede expresarse como:

¹ Buscan, dado el nivel de *inputs*, el máximo incremento proporcional de los *outputs* permaneciendo dentro de la frontera de posibilidades de producción. En este sentido una sociedad no puede ser caracterizada como eficiente si es posible incrementar cualquier *output* sin incrementar ningún *input* y sin disminuir ningún otro *output*.

$$\begin{aligned}
& \text{Max } \phi \\
& \text{sujeto a:} \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \phi y_{r0} \quad (r=1,2,\dots,s) \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{i0} \quad (i=1,2,\dots,m) \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n)
\end{aligned} \tag{DEA-1}$$

donde, y_{r0} y x_{i0} representan el r -ésimo *output* y el i -ésimo *input*, respectivamente, de la sociedad musical evaluada, ϕ denota el tanto por uno de incremento de *output* (cuando mayor sea ϕ menos eficiente será la sociedad musical) y λ_j son los pesos o intensidades asociados con cada una de las sociedades musicales que configurarían el conjunto de referencia de la sociedad musical evaluada en caso de ser calificada como ineficiente. La puntuación de eficiencia (técnica relativa) *output* de la sociedad musical evaluada, que se representa por θ , se calculará a partir de la expresión: $\theta=1/\phi$.

Al resolver el modelo DEA-1, la sociedad musical evaluada será eficiente en relación con las otras si no es posible encontrar ninguna sociedad o combinación lineal de sociedades que produzcan una mayor cantidad de *output* que la sociedad musical evaluada utilizando los mismos factores productivos. En caso contrario, la sociedad musical será ineficiente, pues será posible obtener, a partir de los valores λ_j^* , una combinación de sociedades que funcione mejor que aquella objeto de evaluación.

El modelo DEA-CCR es formulado suponiendo que la tecnología satisface, entre otras, la propiedad de rendimientos constantes a escala, obteniéndose una medida de eficiencia técnica global (ETG). Sin embargo, como apuntan Hernández y Soler (2003), uno de los principales inconvenientes de la técnica descrita es que la medida de eficiencia obtenida es de tipo radial, esto es, se optimizan todos los *inputs* u *outputs* de una sociedad en determinada proporción. Para salvar esta limitación, Färe y Lovell (1978) introducen una medida no radial (conocida como medida de eficiencia de Russell), que permite una reducción o incremento no proporcional, según el tipo de orientación del modelo. El modelo no radial orientado al *output* puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned}
& \text{Max } \frac{1}{S} \sum_{r=1}^s \phi_r \\
& \text{s.a.} \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{ij} \geq \phi_r y_{r0} \quad (r=1,2,\dots,s) \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{i0} \quad (i=1,2,\dots,m) \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
& \lambda_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n) \\
& \phi_r \geq 1
\end{aligned} \tag{DEA-2}$$

donde ϕ_r representa el máximo tanto por uno en que la sociedad musical evaluada puede incrementar cada uno de los r *outputs* ($r=1,2,\dots,s$) dados sus niveles de *inputs*. En la solución óptima del modelo DEA-2 se tendrá que $\phi_r^* \geq 1$ y, por tanto, $\frac{1}{S} \sum_{r=1}^s \phi_r \geq 1$.

Solo si la sociedad musical evaluada es eficiente en todos los *outputs* ($\phi_r^* = 1 \quad r=1,2,\dots,s$) se tendrá que $\frac{1}{S} \sum_{r=1}^s \phi_r = 1$, medida que puede interpretarse como un índice de eficiencia (Zhu,

2003). En definitiva, de la ejecución del modelo no radial DEA-2 se obtendrá una medida de eficiencia para cada uno de los *outputs* implicados ($\theta_r = 1/\phi_r$, $r=1,2,\dots,s$) y una medida de eficiencia global, que será la media de las eficiencias *outputs*. Se supera así otra limitación de las medidas radiales, aquella que “otorga la misma consideración al conjunto de *inputs/outputs* utilizados/producidos en el proceso cuando resulta lógico afirmar que el nivel de eficiencia asociado al uso de cada uno de los *inputs/outputs* puede ser muy distinto” (Hernández y Soler, 2003). La medida no radial de eficiencia obtenida con el modelo DEA-2 es una medida de eficiencia técnica pura (ETP), netas de cualquier efecto escala, puesto que se ha añadido en la especificación del modelo la restricción de convexidad $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, relajando de esta forma el

supuesto de rendimientos constantes a escala y permitiendo que la frontera muestre rendimientos variables. En nuestro estudio esta hipótesis ha sido incluida puesto que las sociedades musicales analizadas difieren de manera significativa en cuanto a su tamaño.

Adicionalmente, si se considera que determinados *outputs* pueden ser relativamente más importantes que otros –como se presupone en este trabajo (ver Sección 4)–, es posible asignarles pesos distintos ($w_r \quad r=1,2,\dots,s$). Estos pesos son valores fijados por los expertos en base, por ejemplo, a la experiencia, como resultado de un proceso Delphi o de aplicar componentes principales. Así, al introducir en el modelo DEA-2 la posibilidad de considerar

distintos pesos para los *outputs*, el modelo que finalmente será aplicado para evaluar la eficiencia de las sociedades musicales será el siguiente (Zhu, 2003):

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \frac{\sum_{r=1}^s w_r \phi_r}{\sum_{r=1}^s w_r} \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{ij} \geq \phi_r y_{r0} \quad (r=1,2,\dots,s) \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{i0} \quad (i=1,2,\dots,m) \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n) \\
 & \phi_r \geq 1
 \end{aligned} \tag{DEA-3}$$

donde, como es conocido, ϕ_r representa el máximo tanto por uno en que la sociedad musical evaluada puede incrementar cada uno de los r *outputs* ($r=1,2,\dots,s$), de manera que cuanto mayor sea ϕ_r menor será la eficiencia de dicha sociedad musical en el r -ésimo *output* considerado. En el modelo DEA-3, la medida de eficiencia global será la media ponderada de las eficiencias *output* obtenidas.

3. DATOS Y VARIABLES

Para la realización del estudio empírico se ha utilizado como fuente de información primaria una encuesta personal, realizada al presidente, tesorero o gestor de la sociedad musical. La recogida de la información se desarrolló durante los meses de mayo a julio de 2011. Durante este periodo se entrevistó un total de 296 representantes de sociedades musicales, lo que supone el 55,95% del total de la población objeto de análisis. Las preguntas del cuestionario se encontraban agrupadas en diversos bloques temáticos, los cuales hacían referencia a: datos identificativos, ingresos, gastos, recursos de personal, recursos de capital físico y productos o servicios realizados. En la Tabla 1 se muestra la distribución de sociedades musicales encuestadas por provincia y para el conjunto de la Comunidad Valenciana.

Tabla 1. Distribución de sociedades musicales encuestadas.

| | Alicante | Castellón | Valencia | Comunidad Valenciana |
|----------------------|----------|-----------|----------|----------------------|
| Sociedades musicales | 136 | 76 | 317 | 529 |
| Nº encuestas | 69 | 59 | 168 | 296 |
| % sobre el total | 50,74% | 53% | 77,63% | 55,95% |

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 2 puede consultarse, por provincia y para el global de la Comunidad Valenciana, la distribución de número de socios y músicos del total de las sociedades musicales y la distribución de estas mismas variables y el número de educandos para las sociedades encuestadas. Para las variables “número de socios” y “número de músicos” se ha procedido a contrastar si las medias muestrales difieren de las poblacionales. En todos los casos no se observan diferencias estadísticamente significativas, salvo en lo que respecta al número de músicos en la provincia de Alicante. Con esta salvedad, la muestra de sociedades musicales que se analiza en este trabajo puede considerarse representativa de la población.

Tabla 2. Distribución del nº de socios, músicos y educandos de las sociedades musicales por provincia.

| | Provincia | | | | | | Comunidad Valenciana | |
|-------------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|----------|-------------------|----------------------|-------------------|
| | Alicante | | Castellón | | Valencia | | Total | Promedio sociedad |
| | Total | Promedio sociedad | Total | Promedio sociedad | Total | Promedio sociedad | | |
| Socios* | 29.610 | 218 | 14.749 | 194 | 94.394 | 298 | 138.753 | 263 |
| Músicos* | 8.435 | 62 | 4.467 | 59 | 26.113 | 82 | 39.015 | 74 |
| Socios** | 15.769 | 236 | 12.400 | 210 | 49.596 | 299 | 77.765 | 266 |
| Músicos** | 4.740 | 71 | 3.467 | 59 | 14.578 | 88 | 22.785 | 78 |
| Educandos** | 5.548 | 83 | 3.640 | 62 | 14.844 | 89 | 24.032 | 82 |

* Dato relativo al total de sociedades musicales (N=529).

** Dato relativo a las sociedades musicales analizadas (n=292); por provincias: Alicante (n=67), Castellón (n=59), Valencia (n=166). Fuente: Federación de Sociedades Musicales de la Comunidad Valenciana y elaboración propia.

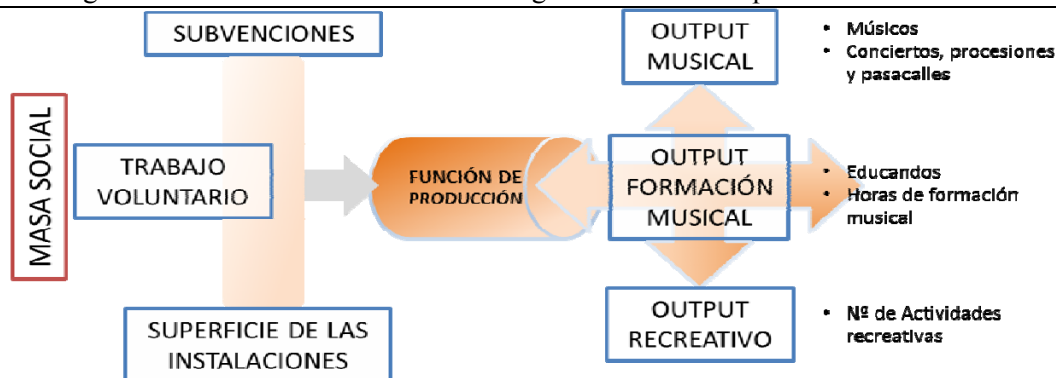
Respecto a la estructura económico-financiera de las sociedades musicales, de acuerdo con la información muestral disponible, los ingresos totales ascienden a 25.780.453 euros. La distribución de las fuentes de ingresos resulta de especial interés a la hora de considerar el análisis de la eficiencia desde la perspectiva de los *outputs*, tal y como veremos a continuación. La principal fuente de ingresos de este tipo de asociación es la proveniente de las matrículas, con unos ingresos de 7.177.118 euros, lo que representa un 27,84% del total. Los ingresos recibidos por subvenciones de distintos organismos públicos, principalmente Generalitat Valenciana, Diputación y Ayuntamientos, equivalen a 5.057.185 euros, representando el 19,62% del total de los ingresos de las sociedades musicales. Cabe destacar los ingresos derivados de las actividades realizadas (actuaciones, pasacalles, etc.), cuyo importe aproximado ronda la cantidad de 3.525.515 euros, lo que supone en torno al 13,68% de los ingresos totales. Las cuotas de los socios ascienden a 1.399.710 euros, el 5,43% del total.

En cuanto a la partida de gastos, los gastos totales de las sociedades musicales se cuantifican en 25.305.194 euros. Sin duda, la partida de gasto más relevante es la constituida por los sueldos y salarios, tanto de profesores como del resto de empleados, y de seguridad social, que ascienden a un total de 12.362.288 euros, un 48,85% del total.

La misión de las organizaciones culturales abarca otro tipo de valores distintos de los puramente económicos (Throsby y Withers, 1979). En este sentido, y tal y como apuntan Basso y Funari (2004:195), la medición del rendimiento de organizaciones sin ánimo de lucro es complicada por la presencia de diversos objetivos de naturaleza múltiple (excelencia artística,

investigación, experimentación, educación, etc.), alguno de los cuales resulta difícil medir. No cabe duda que este mismo pensamiento podemos trasladarlo al ámbito de las organizaciones culturales de interés en nuestro estudio, las sociedades musicales. Por este motivo, para definir la eficiencia, hemos interpretado el proceso de producción de este tipo de organización, tal y como se ilustra en la Figura 1.

Figura 1. Sociedades musicales como organizaciones multiproducto/multiservicio.



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con esta Figura 1, para definir la eficiencia se considerarán cuatro factores productivos principales (*inputs*), que representan el capital y el trabajo: (i) subvenciones, (ii) número de socios, (iii) horas de trabajo voluntario y (iv) metros cuadrados de superficie. Por lo que respecta a los principales *outputs* generados por la actividad de las sociedades musicales, éstos se han agrupado en tres dimensiones: producción musical, formación musical y *output* recreativo. Concretamente, la producción musical se aproximará a través: (i) del número de músicos que integran la sociedad musical y (ii) del número de conciertos, procesiones y pasacalles realizados. La formación musical se medirá a partir (iii) del número de educandos y (iv) el número de horas dedicadas por la sociedad musical a la formación musical. Por último, el *output* recreativo se referirá (v) al número de actividades recreativas de distinta naturaleza que son realizadas por las sociedades musicales como, por ejemplo, la edición de libros, revistas, discos, la organización de conferencias, etc.

Dado que para un total de cuatro sociedades musicales no se disponía de información completa relativa a las variables *input* y *output* utilizadas en este estudio para definir la eficiencia, la muestra final objeto de estudio estuvo constituida por un total de 292 sociedades musicales. En la Tabla 3 se facilitan los valores medios de los *inputs* y *outputs* utilizados para definir la eficiencia de una sociedad musical.

4. RESULTADOS EMPÍRICOS

Para cada una de las sociedades musicales de las que se dispone de información muestral, se ejecutó el modelo DEA-3, atribuyendo un peso igual a los *outputs*: número de músicos, número

de conciertos, procesiones y pasacalles, número de educandos y horas de formación; y de la mitad al *output* relativo al número de actividades recreativas. La razón de asignar un menor peso a las actividades recreativas se fundamenta en que los principales resultados de la actividad de una sociedad musical son, sin duda, la producción y la formación musical, quedando en un segundo plano las actividades de diferente naturaleza que se recogen en el *output* recreativo. Se obtuvo así una medida de eficiencia para cada uno de los cinco *outputs* implicados en el análisis y una medida de eficiencia global que, recuérdese, será la media ponderada de las anteriores. Adicionalmente, a partir de la eficiencia en el número de músicos y el número de conciertos, procesiones y pasacalles se obtuvo, como media aritmética, una medida de eficiencia de producción musical; y a partir de los resultados de eficiencia del número de educandos y del número de horas de formación musical se calculó, también como media, una medida de eficiencia de formación musical. En la Tabla 4 se resumen los resultados obtenidos.

Tabla 3. Valores medios de las variables *inputs* y *outputs*.

| | | Provincia | | | Comunidad Valenciana |
|----------------|--|-----------|-----------|-----------|----------------------|
| | | Alicante | Castellón | Valencia | |
| <i>Inputs</i> | Subvenciones (euros) | 32.707,39 | 26.785,69 | 34.821,38 | 32.705,42 |
| | Número de socios | 236,09 | 210,17 | 299,27 | 266,77 |
| | Horas trabajo voluntario | 1502,00 | 966,81 | 1.481,45 | 1.381,43 |
| | m ² de superficie | 393,77 | 323,42 | 603,57 | 498,83 |
| <i>Outputs</i> | Número de músicos | 70,61 | 58,76 | 87,64 | 77,89 |
| | Número de conciertos, procesiones y pasacalles | 16,45 | 11,98 | 16,83 | 15,76 |
| | Número de educandos | 82,09 | 61,69 | 89,31 | 82,05 |
| | Horas de formación | 64,75 | 54,36 | 83,35 | 73,22 |
| | Actividades recreativas | 2,42 | 2,02 | 2,70 | 2,50 |

Tabla 4. Eficiencia *output* y global.

| Medida de eficiencia | Provincia | | | Comunidad Valenciana |
|--|---------------|---------------|---------------|----------------------|
| | Alicante | Castellón | Valencia | |
| Número de músicos | 82,85% | 85,47% | 84,80% | 84,49% |
| Número de conciertos, procesiones y pasacalles | 68,90% | 62,41% | 63,21% | 64,35% |
| Producción musical | 75,88% | 73,94% | 74,00% | 74,42% |
| Número de educandos | 62,36% | 71,05% | 70,61% | 68,81% |
| Horas de formación | 56,38% | 62,68% | 75,95% | 68,78% |
| Formación musical | 59,37% | 66,87% | 73,28% | 68,79% |
| Actividades recreativas | 77,22% | 82,89% | 82,02% | 81,10% |
| Eficiencia global | 68,69% | 71,79% | 74,57% | 72,66% |

La eficiencia media de las sociedades musicales de la Comunidad Valenciana analizadas (muestra compuesta por 292 sociedades) se sitúa en el 72,66%. Dado que la orientación empleada en el análisis es de naturaleza *output*, el resultado obtenido puede

interpretarse en el sentido que las sociedades musicales podrían, en media y atendiendo a los factores productivos considerados, incrementar o expandir los resultados de su actividad en aproximadamente un 37,63%.

Anteriormente hemos señalado cómo los ingresos por subvenciones públicas regionales y locales determinan la segunda fuente de financiación de las sociedades musicales en la Comunidad Valenciana, concretamente el 19,62% (es decir, 5.057.185 €). En el actual contexto de recorte presupuestario, fruto de la crisis económica, la competencia por los recursos públicos se agudiza. Justificar y legitimar las ayudas recibidas se convierte en una estrategia de posicionamiento imprescindible para estas y otras organizaciones culturales, siendo el análisis de eficiencia una herramienta de gran interés a tal fin. Los favorables valores de eficiencia anteriores respaldan este comentario, si bien existe margen para la mejora progresiva. Se trata también de visibilizar y comunicar el valor social y económico de las sociedades musicales, en un contexto de cambio de paradigma de desarrollo, donde las organizaciones culturales resultan fundamentales para la competitividad y la innovación de las regiones europeas, a través del despliegue de toda una serie de potencialidades emergentes en materias tan decisivas como la innovación económica y social, la identidad y cohesión colectiva, la creatividad, el emprendizaje, etc. (Rausell y Abeledo, 2007). Conectando con esto, y dada la trascendencia del fenómeno de territorialidad de las sociedades musicales, resulta de interés proceder al desglose de los valores de análisis a nivel provincial. En este sentido, la eficiencia global media de las sociedades musicales de Alicante es del 68,89%, las de Castellón del 71,79% y las de Valencia, en promedio las más eficientes, del 74,57%. Los valores de eficiencia obtenidos implican que para alcanzar la frontera de mejor práctica y así ser consideradas eficientes, por término medio las sociedades musicales alicantinas deberían incrementar sus *outputs* en torno al 45,58%, las castellonenses el 39,29% y las valencianas el 34,09%.

En cuanto a la eficiencia asociada con cada uno de los *outputs*, a nivel de la Comunidad Valenciana ésta va desde el 64,35% del *output* relativo al número de conciertos, procesiones y pasacalles al 81,10% de la actividad recreativa. Como puede verse en la Tabla 4, ninguna provincia domina a las restantes en la totalidad de las dimensiones *output* consideradas, en el sentido de que las sociedades musicales más eficientes en formación musical son las de la provincia de Valencia (73,28%), en tanto que en producción musical son las de Alicante (75,88%) y en las actividades recreativas destacan las de Castellón (82,89%).

Recordemos cómo la eficiencia en el *output* formación musical se asocia a las matrículas, que suponen la principal fuente de ingresos de las sociedades musicales de la Comunidad Valenciana. Las matrículas generan un total de 7.177.118 €, representando el 27,84% de los ingresos generales. En este sentido, resultaría conveniente investigar si el mejor comportamiento en términos de eficiencia en este *output* de las sociedades musicales de la

provincia de Valencia (73,28%) se debe a las buenas prácticas o, si por el contrario, junto con éstas también deben ser considerados aspectos históricos y socio-económicos del entorno.

Los valores de eficiencia relacionados con la producción musical también resultan relevantes desde la perspectiva económica, ya que este *output* determina la tercera fuente genérica de ingresos, aproximadamente el 13,68% para el conjunto de sociedades musicales de la Comunidad Valenciana. En este caso, las sociedades musicales alicantinas son las que, en media, presentan mejores valores (75,88%), aunque solo ligeramente más altos que las sociedades musicales de Valencia (74,00%) y Castellón (73,94%). Probablemente este resultado tenga que ver con la mayor demanda de música festera por la extensión en Alicante de fiestas como, por ejemplo, “Moros y Cristianos”. En cuanto a las actividades recreativas, las sociedades musicales de las tres provincias presentan valores medios de eficiencia bastante similares.

Al analizar cómo se distribuye las puntuaciones de eficiencia para el conjunto de las sociedades musicales que constituyen la muestra objeto de estudio (Tabla 5), cabe destacar que el 33,56% de las sociedades musicales analizadas, esto es un total de 98, son calificadas como eficientes en el ámbito de la producción musical y, por tanto, son eficientes tanto en número de músicos como en número de conciertos, procesiones y pasacalles. Sin embargo, como puede comprobarse, considerando estos mismos *outputs* de forma individual, los porcentajes de sociedades eficientes son ligeramente superiores, poniéndose de manifiesto que sociedades eficientes en uno de ellos son, sin embargo, calificadas como ineficientes en el otro. De manera similar, el 35,27% de las sociedades, lo que equivale a un total de 103, son eficientes en formación musical, si bien el comportamiento es sensiblemente mejor en el *output* que se refiere a las horas de formación; y el 46,23%, un total de 135 sociedades, en actividades recreativas. En general, la frontera de mejor práctica de las sociedades musicales está integrada por 94 sociedades (32,19%), al ser evaluadas como eficientes en la totalidad de los cinco *outputs* considerados en el estudio.

Tabla 5. Distribución de eficiencia de las sociedades musicales de la Comunidad Valenciana (n=292).

| Medida de eficiencia | Rango de eficiencia (en tanto por ciento) | | | Eficientes 100 |
|--|--|----------------|-----------------|---------------------------|
| | [0-50[| [50-75[| [75-100[| |
| Número de músicos | 6,85% | 23,97% | 20,89% | 48,29% |
| Número de concierto, procesiones y pasacalles | 41,44% | 8,56% | 8,90% | 41,10% |
| Producción musical | 18,15% | 31,51% | 16,78% | 33,56% |
| Número de educandos | 33,22% | 16,44% | 11,30% | 39,04% |
| Horas de Formación | 33,22% | 13,36% | 7,53% | 45,89% |
| Formación musical | 31,85% | 18,15% | 14,73% | 35,27% |
| Actividades recreativas | 11,99% | 25,34% | 16,44% | 46,23% |
| Eficiencia global | 16,44% | 41,10% | 10,27% | 32,19% |

Desde nuestro punto de vista, los resultados obtenidos –en torno al 42% de las sociedades musicales evaluadas presentan puntuaciones de eficiencia superiores al 75%, superando un mayor porcentaje de sociedades esta cota cuando se analiza la eficiencia por tipo de *output*– deberían interpretarse como una oportunidad para la mejora de la producción, a todos los niveles, de este tipo de organización cultural. Es más, el hecho de que un porcentaje importante de sociedades musicales aparezcan con niveles de ineficiencia significativos son un indicador de que la actividad cultural representada por este tipo de asociación es, en términos generales, activa y dinámica. Conviene aclarar que la eficiencia de una sociedad musical se ha medido en términos relativos (y en comparación con las más eficientes); por tanto, la existencia de sociedades musicales que destacan (sociedades “líderes”) “coloca” a otras (sociedades “seguidoras”) en situación de desventaja (Coll-Serrano y Blasco-Blasco, 2011). El análisis caso por caso de las referencias permitirá establecer las líneas de acción para la mejora de la eficiencia de una sociedad musical dada.

En general, los resultados obtenidos apuntan hacia la existencia de determinadas especificidades en la oferta y la demanda de los mercados provinciales en que operan las sociedades musicales. Dicha diferencia tendría su origen en las características relacionadas con diversos aspectos de naturaleza tanto festiva y cultural como demográfica. Estas especificidades provinciales conllevan una determinada especialización productiva que define dos grandes modelos de sociedades musicales en la Comunidad Valenciana. El primero es el que caracteriza a las sociedades musicales que operan en la provincia de Valencia. La mayor densidad demográfica de esta provincia determina un mercado musical que podemos definir como tradicional, donde la excelencia artística es el criterio dominante a la hora de regular las condiciones de competencia y el funcionamiento del mercado. En este sentido, recordemos cómo los valores de distribución de las sociedades musicales a nivel territorial era de un 59% en la provincia de Valencia, seguida por un 25,7% en Alicante y un 14,3% en Castellón. Un segundo modelo sería el representado por las sociedades musicales de la provincia de Alicante, mucho más activas a la hora de captar recursos, dada la relativamente mayor escasez que presenta su mercado musical provincial como resultado de una menor densidad poblacional. Esto conlleva sociedades musicales orientadas a la diversificación de su oferta musical. En este sentido, el componente festivo de la oferta prima mucho más que la excelencia artística, tal y como observábamos en el caso más tradicional de la provincia de Valencia. Finalmente, en la provincia de Castellón encontramos sociedades musicales que se caracterizan por su reducido tamaño y, por tanto, débiles a la hora de articular economías de escalas. Este factor determina una dificultad extra y condiciona su comportamiento frente a Valencia y Alicante. Por causa de esto, las sociedades musicales castellanenses potencian su oferta de servicios recreativos, dado que al encontrarse dichos servicios fundamentalmente asociados a la dotación de infraestructuras (como son los espacios de formación y ensayo), y al no depender éstas del

tamaño de la sociedad, permite un margen de utilización (y, por tanto, de ingresos) de interés. Se observa así cierta lógica de especialización productiva por provincias que determina los diferentes comportamientos en materia de eficiencia por tipo de *output*.

5. CONCLUSIONES

Las aplicaciones empíricas basadas en los análisis de eficiencia resultan todavía muy escasas dentro del campo de las organizaciones culturales. Sin embargo, la centralidad de la cultura en las nuevas estrategias de desarrollo regional, fundamentadas en la sociedad del conocimiento, y donde la competitividad territorial pasa por el despliegue de las potencialidades de las sociedades en materias como la innovación o la creatividad, determinan un escenario de creciente relevancia de este tipo de instrumental analítico, tanto desde la perspectiva de la gestión de los agentes culturales como de la planificación de políticas públicas.

En este trabajo se ha analizado la eficiencia de una muestra compuesta por 292 sociedades musicales de la Comunidad Valenciana. Las razones para estudiar este tipo de organización cultural se encuentran tanto en su relevancia socio-económica e impacto sobre el desarrollo regional (valor de producción de 60.236.360 euros y generación de 2.200 empleos) como en la dimensión territorial del fenómeno (529 sociedades musicales, 38.753 socios y 39.015 músicos). Para evaluar la eficiencia, se ha recurrido a un modelo DEA *output* orientado no radial que ha permitido obtener una medida de eficiencia para cada uno de los cinco *outputs* implicados en el análisis (número de músicos; número de conciertos, procesiones y pasacalles; número de educandos; horas de formación y número de actividades recreativas), así como una medida de eficiencia global.

En términos generales, los resultados obtenidos reflejan cómo la frontera de mejor práctica de las sociedades musicales está integrada por 94 sociedades (32,19% del total de la Comunidad Valenciana), al ser evaluadas como eficientes en la totalidad de los cinco *outputs* considerados en el estudio. Considerando que en torno al 42% de las sociedades musicales evaluadas presentan puntuaciones de eficiencia superiores al 75%, podemos señalar que existe oportunidad para la mejora del rendimiento, a todos los niveles, de este tipo de organización cultural.

Por otra parte, se ha observado cómo los resultados obtenidos reflejan cierta especialización productiva a nivel regional en los principales *outputs*: formación musical, producción musical y *output* recreativo. Las diferencias socio-demográficas existentes en los mercados provinciales parecen encontrarse detrás de esta cuestión. Dicha especialización resulta de interés en términos de identificación de buenas prácticas de gestión, debido a la trascendencia que la misma tiene en términos de generación de ingresos para las sociedades musicales.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto de investigación sobre las características específicas de los impactos que la dimensión cultural aporta al desarrollo, financiado con ayudas CAP 2011 de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (registro 11-CAP2-1480). Los autores también desean agradecer la colaboración y financiación recibida de la Federación de Sociedades Musicales de la Comunidad Valenciana y los valiosos comentarios realizados por los dos evaluadores de este artículo.

REFERENCIAS

- Banker, R.D.; Gadh, V.M.; Gorr, W.L. (1993) *A Monte Carlo Comparison of Two Production Frontier Estimation Methods: Corrected Ordinary Least Squares and Data Envelopment Analysis*. European Journal of Operational Research, Vol. 67, nº 3, pp. 332–343.
- Basso, A.; Funari, S. (2004) *A quantitative approach to evaluate the relative efficiency of museums*. Journal of Cultural Economics, Vol. 28, pp. 195–216.
- Charnes, A.; Cooper, W.W.; Lewin, A.Y.; Seiford, L.M. (1994) *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*. (1ª ed.) Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Charnes, A.; Cooper, W.W.; Rhodes, E. (1978) *Measuring the Efficiency of Decision Making Units*. European Journal of Operational Research, Vol. 2, pp. 429–444.
- Coll-Serrano, V.; Blasco-Blasco, O. (2011) *Análisis comparativo de la eficiencia de la PYME textil española: Una aproximación al efecto de la liberalización en el periodo 2004-2006*. Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. Rect@, Vol. 12, pp. 33–52.
- Del Barrio, M.J.; Herrero, L.C.; Sanz, J.A. (2009) *Measuring the efficiency of heritage institutions: A case study of a regional system of museums in Spain*. Journal of Cultural Heritage. Vol. 12, nº 2, pp. 258–268.
- Doménech, R. (1992). *Medidas no Paramétricas de Eficiencia en el Sector Bancario Español*. Revista Española de Economía. Vol. 9, nº 2, pp. 171–196.
- Esteban, J.; Coll-Serrano, V. (2003) *Competitividad y eficiencia*. Revista de Estudios de Economía Aplicada, Vol. 21, nº 3, pp. 423–450.
- Färe, R.; Lovell, C.A.K. (1978) *Measuring the Technical Efficiency of Production*. Journal of Economic Theory. Vol. 19, pp. 150–162.
- Hernández, F.; Soler, V. (2003) *Cuantificación del efecto distrito a través de medidas no radiales de eficiencia técnica*. Investigaciones Regionales. Vol. 3, pp. 25–39.
- Luksetich, W.; Nold, P. (1997) *Efficiency of Fund-Raising Activities: An Application of Data Envelopment Analysis*. Non-profit and Voluntary Sector Quarterly, Vol. 26, pp. 73–84.

- Mairesse, F.; Vanden Eeckaut, P. (2002) *Museum Assessment and FDH Technology: Towards a Global Approach*. Journal of Cultural Economics, Vol. 26, pp. 261–286.
- Marco-Serrano, F. (2006) *Monitoring managerial efficiency in the performing arts: A regional theatres network perspective*. Annals of Operations Research. Vol. 145, nº 1, pp. 167–181.
- Pignataro, G.; Zangola, R. (2001) *Analisi dell'efficienza dei musei*, en P.A. Valentino and G. Mossetto (eds.), Museo contro museo: Le strategie, gli strumenti, i risultati. Giunti, Florence.
- Rausell, P; Abeledo, R. (2007) *Cultura*. Estrategia para el desarrollo Local. Madrid: AECID.
- Rausell, P.; Carrasco, S. (1999) *Analysis of the Relative Efficiencies of the Theatres of the "Circuit Teatral Valencià". A political Economy Approach*. Proceedings of the 5th International Conference on Arts & Cultural Management (AIMAC), Helsinki, June 13-17.
- Rausell, P; Coll-Serrano, V.; Marco-Serrano, F.; Abeledo, R. (2013) *Dimensión económica del sector no lucrativo cultural: las Sociedades Musicales de la Comunidad Valenciana*. Revista de Economía Pública, Social y Cooperativa (CIRIEC), nº 77, pp. 213–236.
- Rausell, P.; Estrems, J.A. (1999) *Una aproximación económica a las sociedades musicales*. CIRIEC-España, Revista de Economía Pública, Social y Cooperativa, nº 31, pp. 149–186.
- Restzlaff-Roberts, D.L.; Morey, R.C. (1993) *A goal-programming method of stochastic allocative data envelopment analysis*. European Journal of Operational Research. Vol. 71, nº 3, pp. 379–397.
- Stolp, C. (1990) *Strengths and Weaknesses of Data Envelopment Analysis. An Urban and Regional Perspective*. Computers, Environment and Urban Systems. Vol. 14, nº 2, pp. 103–116.
- Throsby, C.D.; Withers, G.A. (1979) *The Economics of the Performing Arts*. St. Martins Press.
- Zhu, J. (2003) *Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking: DEA with Spreadsheets and DEA Excel Solver*. Kluwer Academic Publishers, Boston.



La muestra de empresas en los modelos de predicción del fracaso: influencia en los resultados de clasificación

GARCÍA-GALLEGO, ANA

Departamento de Economía y Estadística, Universidad de León (España)

Correo electrónico: ana.gallego@unileon.es

MURES-QUINTANA, MARÍA-JESÚS

Departamento de Economía y Estadística, Universidad de León (España)

Correo electrónico: mj.mures@unileon.es

RESUMEN

El objetivo de este artículo es la obtención de sendos modelos de predicción del fracaso empresarial en una muestra emparejada y otra aleatoria de pequeñas y medianas empresas con domicilio en Castilla y León (España), a fin de determinar si el poder predictivo de los modelos elaborados está afectado por el método utilizado para seleccionar la muestra objeto de cada estudio. Para ello, consideramos como variables independientes un conjunto de ratios financieros, que reducimos a partir de la aplicación previa de un análisis de componentes principales. Mediante regresión logística, identificamos los factores que mejor predicen el fracaso en ambas muestras, observándose diferencias no solo en las variables significativas, sino también en los resultados de clasificación, lo que confirma la influencia del método de muestreo en los modelos.

Palabras clave: fracaso empresarial; ratios financieros; muestreo; regresión logística; predicción.

Clasificación JEL: C35; C53; C83; G33.

MSC2010: 62D05; 62H25; 62J12; 91G50.

The Sample of Firms in Business Failure Prediction Models: Influence on Classification Results

ABSTRACT

This paper focuses on the development of both failure prediction models on a paired sample and a random sample of small and medium-sized firms with head offices located in the region of Castilla y León (Spain), in order to prove if the predictive power of the developed models is affected by the method used to derive the sample aim of each study. To estimate both models, we consider a set of financial ratios as independent variables in each one, which is first reduced by the application of a principal components analysis. Next, a logistic regression analysis is applied to identify those variables that best explain and predict failure in the two samples, where differences in the significant variables and the classification results are observed, which confirms the influence of the sampling method on the business failure prediction results.

Keywords: business failure; financial ratios; sampling; logistic regression; prediction.

JEL classification: C35; C53; C83; G33.

MSC2010: 62D05; 62H25; 62J12; 91G50.



1. INTRODUCCIÓN

La elaboración de modelos de predicción del fracaso empresarial constituye un importante campo de investigación dentro de la literatura contable y financiera, que ha pasado a ser de máxima actualidad en los últimos tiempos, debido a la importante crisis económica y financiera que afecta a muchos países en Europa y el resto del mundo. El origen de esta línea de investigación se sitúa en los trabajos de Beaver (1966) y Altman (1968), que se consideran como pioneros en este campo (Altman, 1984). Partiendo de ambos estudios como base, un gran número de investigadores han desarrollado sus propios modelos, utilizando un amplio conjunto de ratios financieros como variables independientes en modelos estadísticos obtenidos aplicando una variedad de métodos, con el fin de predecir el fracaso empresarial. Beaver (1966) desarrolló su estudio desde un punto de vista univariante lo que, a pesar de su importancia como punto de partida de esta línea de investigación, presenta el inconveniente de no tener en cuenta las posibles relaciones entre variables. Por este motivo, Altman (1968) complementó su trabajo, mediante la aplicación de análisis multivariante, en concreto, del análisis discriminante.

Esta metodología ha sido utilizada en una considerable relación de estudios publicados durante la década de los setenta y ochenta del s. XX, no solo en los Estados Unidos (Deakin, 1972; Edmister, 1972; Blum, 1975; Elam, 1975), sino también en otros países en Europa. Fue precisamente a finales de los setenta y principios de los ochenta cuando la investigación sobre fracaso empresarial comenzó en el Reino Unido, que fue el primer país europeo en desarrollar esta línea y cuyo máximo exponente es Taffler (1982). Otros países donde se desarrolló una importante corriente de investigación en la década de los ochenta y a principios de los noventa son España (Laffarga *et al.*, 1985) y Finlandia (Laitinen, 1991).

A pesar de su extensa utilización, el análisis discriminante presenta algunos inconvenientes relativos a las hipótesis exigidas para su aplicación, por lo que la investigación sobre fracaso empresarial evolucionó hacia otras técnicas estadísticas menos exigentes (Jones, 1987; Hossari, 2007). Así, en los ochenta Ohlson (1980) y Zmijewski (1984) fueron los pioneros en la aplicación del análisis *logit* y *probit*, respectivamente, en la predicción del fracaso empresarial. No obstante, la utilización de estos modelos de probabilidad condicional no se limitó a trabajos estadounidenses, sino que los estudios fueron ampliados por investigadores británicos (Peel *et al.*, 1986), fineses (Laitinen y Laitinen, 1998) y españoles (Pina, 1989), como había ocurrido con la aplicación del análisis discriminante. Junto a estos países, Grecia, a principios de la década de los noventa, asistió al nacimiento de una importante escuela de investigación sobre fracaso empresarial (Theodossiou, 1991). Durante los noventa y la primera década del siglo XXI, los métodos estadísticos, en especial el análisis discriminante y la regresión logística, han continuado aplicándose en la predicción del fracaso empresarial (Dimitras *et al.*, 1996; Balcaen y Ooghe, 2006). Sin embargo, debido a los avances en la informática, se han introducido en este campo nuevas técnicas procedentes de la inteligencia artificial, como las redes neuronales (Odom y Sharda, 1992) y la metodología *rough set* (Slowinski y Zopounidis, 1995). Además, como estas técnicas carecen de una base estadística, también se ha

desarrollado una línea de investigación que compara dichas metodologías con los métodos estadísticos tradicionales (Cybinski, 2001) en cuanto a su capacidad para predecir el fracaso empresarial (Altman *et al.*, 1994; Dimitras *et al.*, 1999; Charitou *et al.*, 2004).

Al mismo tiempo que se ha producido una evolución en la metodología estadística utilizada para estimar los diferentes modelos sobre fracaso empresarial, también se ha observado una tendencia similar en cuanto a las variables explicativas del fracaso. Así, los primeros modelos utilizaban solo información contable en forma de ratios financieros correspondientes a un cierto número de años (Keasey y Watson, 1991; Dimitras *et al.*, 1996; Balcaen y Ooghe, 2006). Sin embargo, debido a que el fracaso es un proceso continuo, algunos investigadores incluyeron entre las variables explicativas del fracaso medidas de estabilidad o variación en el tiempo de los ratios financieros (Keasey y Watson, 1991; Dimitras *et al.*, 1996), entre los que podemos citar a Blum (1974) o Betts y Belhoul (1987). Por otro lado, además de los ratios financieros, que son variables propias de la empresa, también es necesario incluir en los modelos factores que reflejan las condiciones macroeconómicas en que las empresas desarrollan su actividad (Keasey y Watson, 1991; Dimitras *et al.*, 1996; Cybinski, 2001), aunque son relativamente pocos los estudios que han incorporado información sobre el entorno externo (Cybinski, 2001), como el de Laitinen y Laitinen (1998). A este respecto, Trujillo-Ponce *et al.* (2013) señalan que la información contable y la basada en el mercado son complementarias en cuanto a la explicación del riesgo de crédito. Respecto a la predicción del fracaso empresarial, Altman (1968) consideró en su modelo datos de mercado mediante la inclusión del valor de mercado de las acciones. En el mismo sentido, Mures-Quintana y García-Gallego (2012) indican que la información externa a la empresa contribuye a mejorar la capacidad predictiva de los modelos de fracaso empresarial sobre los que incluyen solo ratios financieros.

Un rasgo común a la mayoría de estudios previos es la utilización de una muestra emparejada formada por el mismo número de empresas fracasadas y no fracasadas (Keasey y Watson, 1991; O'Leary, 1998; Laffarga y Mora, 1998; Balcaen y Ooghe, 2006; Gómez *et al.*, 2008). No obstante, este tipo de muestra tiene el inconveniente de no ser representativa de la población de la que es seleccionada, puesto que este método de muestreo no respeta las verdaderas proporciones poblacionales en la muestra, en la que el grupo de empresas fracasadas está sobredimensionado (Dietrich, 1984). Por este motivo, los buenos resultados de clasificación obtenidos por tales modelos han sido objeto de ciertas críticas (Palepu, 1986; Keasey y Watson, 1991; Balcaen y Ooghe, 2006).

Con este trabajo se pretende comprobar si el poder predictivo de los modelos desarrollados con carácter previo es debido al tipo de muestra que han utilizado. Para ello, seleccionamos una muestra emparejada y otra aleatoria de empresas de pequeño y mediano tamaño con domicilio social en la Comunidad Autónoma de Castilla y León (España) con las que desarrollamos sendos modelos logísticos, a fin de identificar las variables que mejor explican y predicen el fracaso empresarial en las dos muestras. Para alcanzar nuestro objetivo, el presente trabajo se organiza del siguiente modo: en el siguiente epígrafe se realiza una descripción del diseño muestral realizado, lo que exige la previa

definición de lo que se entiende por fracaso empresarial. En el tercer apartado hacemos referencia a los ratios financieros que contribuyen a explicar y predecir, en su caso, el evento de interés, así como a la selección de las variables más importantes mediante la aplicación de un Análisis de Componentes Principales (ACP). La sección cuatro incluye la presentación e interpretación de los resultados de la predicción en ambas muestras. El trabajo finaliza con las principales conclusiones extraídas.

2. MUESTRA DE EMPRESAS

El primer paso en la elaboración de un modelo de predicción del fracaso empresarial es la selección de la muestra de empresas objeto del estudio. Puesto que el principal objetivo de estos modelos es determinar las variables que mejor discriminan entre empresas fracasadas y no fracasadas, es necesario incluir ambos grupos de empresas en la muestra elegida. Por tanto, la primera decisión a tomar es respecto a lo que se entiende por fracaso empresarial. Una vez decidido el criterio considerado como subrogado del fracaso empresarial, es posible identificar las empresas fracasadas y no fracasadas en la población, al objeto de seleccionar algunas para formar parte de cada uno de los dos tipos de muestra considerados, según el diseño muestral que describimos a continuación.

2.1 Definición de fracaso empresarial

Una de las dificultades que se plantean al elaborar modelos de predicción del fracaso empresarial es dar una definición de lo que se entiende por una situación de fracaso. Esto es así en la medida en que el fracaso empresarial incluye una variedad de estados con una influencia negativa en la actividad de las empresas que pueden llevar a su desaparición final (Calvo-Flores y García, 2002). Por otro lado, también hay una diversidad de agentes implicados en una empresa, tales como inversores, acreedores, clientes, empleados, gestores o auditores, para los que son asimismo diferentes las consecuencias de la desaparición de la empresa.

Todos los grupos mencionados son potenciales usuarios de un modelo predictivo del fracaso empresarial y, debido a que éste puede tener diferentes efectos sobre ellos, también buscan una aplicación distinta cuando utilizan el modelo para predecir el fracaso de una empresa (Keasey y Watson, 1991). Por tanto, el acontecimiento utilizado como definición de fracaso también debería ser distinto, atendiendo al objetivo del modelo respectivo y, por tanto, del investigador (Mora, 1995). De hecho, una revisión de la literatura previa en este campo, comenzando con los trabajos mencionados en el epígrafe introductorio, pone de manifiesto la utilización de diferentes definiciones de fracaso empresarial, según su objetivo:

- La declaración formal de quiebra de una empresa o cualquier otro procedimiento legal, atendiendo a la legislación vigente en cada país (Altman, 1968; Taffler, 1982; Laffarga *et al.*, 1985; Ohlson, 1980; Zmijewski, 1984; Peel *et al.*, 1986; Pina, 1989; Theodossiou, 1991; Odom & Sharda, 1992; Dimitras *et al.*, 1994; Charitou *et al.*, 2004).
- Fracaso en sentido de insolvencia, entendida como la incapacidad de la empresa para atender a sus obligaciones a su vencimiento (Edmister, 1972; Laitinen, 1991).

- Una combinación de diferentes situaciones, además de las dos anteriores (Altman *et al.*, 1994; Laitinen y Laitinen, 1998), tales como el descubierto bancario y la falta de pago a accionistas preferentes (Beaver, 1966; Deakin, 1972) o un acuerdo explícito con acreedores para reducir deudas (Blum, 1974; Elam, 1975).

Como puede observarse, la mayoría de modelos previos ha utilizado una definición jurídica de fracaso, bien quiebra o liquidación o cualesquiera otros conceptos aparecidos en las diferentes legislaciones concursales. Aunque cada una de las definiciones señaladas pueden presentar ciertos inconvenientes, ya que dependen de los intereses del usuario del modelo, la quiebra como subrogado del fracaso empresarial tiene la ventaja de que es un acontecimiento legal sumamente visible que puede, por consiguiente, ser fechado de forma objetiva (Keasey y Watson, 1991). En el mismo sentido, Gómez *et al.* (2008: 91) señalan que se trata de “un hecho incuestionable y evita la dificultad de establecer un indicador del riesgo de insolvencia aplicable a la generalidad de las empresas”. Por otro lado, la mayoría de modelos desarrollados contiene como variables independientes para predecir el fracaso un conjunto de ratios financieros, por lo que esta definición jurídica evitaría los problemas planteados por el hecho de que tanto las variables predictoras como el fenómeno que tratan de predecir estarían basados en los mismos estados financieros si se utilizara, como definición de fracaso, un criterio más económico como el nivel de ingresos o posición de liquidez (Jones, 1987; Mora, 1994).

Por todas las razones indicadas, en nuestro estudio también consideramos una definición legal de fracaso, como la declaración formal de uno de los tres procedimientos concursales que recoge la legislación española: suspensión de pagos, quiebra y concurso de acreedores.

2.2 Diseño muestral

Como ya hemos mencionado, el método de muestreo más utilizado ha sido el de seleccionar la muestra de empresas fracasadas y, a continuación, elegir el mismo número de empresas no fracasadas, mediante su emparejamiento con las empresas fracasadas según sector económico y tamaño. Este tipo de muestra, que Zmijewski (1984) denomina basada en el estado (*state-based sample*), presenta la ventaja de asegurar un número suficientemente grande de empresas fracasadas en la muestra, ya que hay una baja tasa de empresas que fracasan en la economía en general, en comparación con las empresas no fracasadas. Este hecho podría implicar que una muestra seleccionada de forma aleatoria incluyera un número muy pequeño de empresas fracasadas y una gran mayoría de empresas sanas, con el consiguiente escaso contenido informativo de dicha muestra a efectos de estimación del modelo (Palepu, 1986; Alfaro *et al.*, 2008). Sin embargo, una de las críticas vertidas sobre este método de muestreo no aleatorio es, precisamente, que no respeta las proporciones poblacionales en la muestra, ya que el grupo de empresas fracasadas está “sobremuestreado” (Dietrich, 1984). Además, los métodos estadísticos clásicos que utilizan los modelos de predicción del fracaso están basados en el supuesto de un diseño muestral aleatorio (Mora, 1994; Balcaen y Ooghe, 2006). Por consiguiente, las estimaciones de los parámetros son inconsistentes y sesgadas (Dietrich, 1984), lo que lleva a una

sobrestimación de la capacidad del modelo para predecir (Palepu, 1986), puesto que la tasa de error de clasificación para las empresas fracasadas está subestimada (Balcaen y Ooghe, 2006). Por este motivo, la muestra de empresas, al menos en una situación ideal, debería seleccionarse de forma aleatoria (Mora, 1994; Laffarga y Mora, 1998; Gómez *et al.*, 2008). Asimismo, la aplicación de métodos de inferencia estadística exige que la muestra elegida sea representativa de la población de la que se extrae. Para asegurar la representatividad de la muestra no solo es preciso aplicar un procedimiento de muestreo aleatorio, sino que también es importante determinar el tamaño muestral adecuado (Pulido, 1992; Scheaffer *et al.*, 2007). Cuando las estimaciones se realizan a partir de una muestra, en lugar de la población, se comete un error llamado de muestreo o de estimación. A este respecto, puede obtenerse el tamaño necesario para que las estimaciones que se realicen a partir de la muestra tengan un error máximo (Pulido, 1992), teniendo en cuenta también el tamaño de la población y el nivel de confianza fijado (Rodríguez Osuna, 1991).

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y con el objetivo de comprobar empíricamente si el ratio entre empresas fracasadas y no fracasadas en la muestra tiene impacto en la capacidad predictiva de los modelos de predicción del fracaso empresarial, como indica O'Leary (1998), estimamos sendos modelos predictivos en dos muestras de empresas obtenidas mediante la aplicación de un muestreo aleatorio y por emparejamiento. Para seleccionar la muestra de empresas objeto de nuestro estudio aplicamos un procedimiento que podríamos denominar "mixto": mientras que seleccionamos la totalidad de empresas fracasadas, a fin de asegurar un número suficiente de este tipo de empresas en la muestra, en el caso de las empresas no fracasadas o sanas aplicamos un muestreo aleatorio, determinando asimismo su tamaño en proporción al tamaño de la población total de estas empresas, según el procedimiento que describimos a continuación. Como hemos señalado, tomamos como ámbito geográfico del estudio la Comunidad Autónoma de Castilla y León (España), utilizando para la recogida de información la base de datos SABI (Sistema de Análisis de Balances Ibéricos), elaborada por la empresa INFORMA D&B en colaboración con Bureau Van Dijk. A este respecto, es preciso indicar que en esta base de datos se incluyen aquellas empresas que depositan sus cuentas en el Registro Mercantil y en ningún caso se consideran empresarios individuales. Por tanto, las empresas que, según la normativa específica, no están obligadas a presentar sus cuentas en un registro público no estarán incluidas en la base de datos, en especial aquéllas que se encuentran en una situación próxima al fracaso que, por consiguiente, no querrán hacer pública si no existe la obligación de registrar sus cuentas, con las limitaciones que esta situación puede provocar respecto a la población de empresas incluidas en la base de datos utilizada como fuente de información.

El primer paso en la selección de la muestra consistió, precisamente, en la identificación de la población total de empresas en la base, para lo cual se fijó, como requisito previo, la disponibilidad en la misma de estados financieros para tres ejercicios consecutivos. En concreto, para las empresas fracasadas, se consideraron los inmediatamente anteriores a la fecha del fracaso, que es el estado en que se encuentran este grupo de empresas. En cuanto a las empresas sanas, por razones de coherencia

temporal, consideramos los tres ejercicios más recientes (Betts y Belhoul, 1987; Mar-Molinero y Ezzamel, 1991), por coincidir con los últimos anteriores a la situación en que se encuentra la empresa, en este caso en funcionamiento o situación activa. Dada la demora que se produce desde la finalización de un ejercicio contable hasta que se realiza la presentación y publicación de las cuentas anuales correspondientes a ese ejercicio y con el fin de no trabajar con un periodo que incluyera ejercicios anteriores y posteriores a la crisis financiera, lo que podría distorsionar los resultados, fijamos como criterio temporal del estudio los ejercicios anteriores al año 2007. De este modo, consideramos como ejercicios económicos para las empresas sanas los cerrados a 31 de diciembre de 2004, 2005 y 2006, que coincidían también para la mayoría de empresas fracasadas, aunque en el caso de algunas el periodo analizado correspondía a ejercicios cerrados con anterioridad, que eran los últimos que habían sido publicados, ya que es práctica común de las empresas con problemas financieros que no presenten sus cuentas en los registros oficiales a medida que ven acercarse el fracaso.

Teniendo en cuenta los criterios señalados, la población total de empresas en la base de datos resultó en 41.584 compañías. Considerando la definición legal de fracaso empresarial, 59 del total de empresas aparecían en la base de datos como quebradas, en suspensión de pagos o en estado de concurso. Todas fueron seleccionadas para formar el grupo de empresas fracasadas en ambas muestras, dado la baja tasa de fracaso en la población (un 0,14%), a fin de asegurar un número suficiente de empresas fracasadas en relación con las sanas (Gómez *et al.*, 2008) y de superar, por tanto, el inconveniente señalado por Palepu (1986) respecto al contenido informativo de la muestra objeto de estudio. En el mismo sentido, Keasey y Watson (1991) señalan la idoneidad de utilizar un procedimiento aleatorio cuando se trata de seleccionar la muestra control de empresas sanas, propuesta que también recogen Gómez *et al.* (2008).

Para formar la muestra aleatoria de empresas no fracasadas, partimos de la población de este tipo de empresas en la base de datos, que resultó en 41.525 compañías. Para determinar el tamaño muestral correspondiente a este grupo, aplicamos la fórmula adecuada teniendo en cuenta el número de individuos en la población, N , y el error máximo que se desea cometer, ε :

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 N p q}{(N - 1) \varepsilon^2 + z_{\alpha/2}^2 N p q}$$

siendo p la proporción poblacional que presenta el fenómeno en estudio y q la complementaria y siendo $z_{\alpha/2}$ el valor crítico de la distribución normal estándar a un nivel de significación igual a α , que con carácter habitual suele tomarse igual al 5%, lo que lleva a un valor crítico de la distribución normal estándar de 1,96. Por otro lado, dado que, por lo general, se desconoce el valor de p , suele fijarse el supuesto de que las proporciones poblacionales son iguales, es decir, $p=q=0,5$, lo que implica la determinación de un tamaño muestral conservador, por lo que la fórmula anterior se reduce a la siguiente:

$$n = \frac{N}{(N - 1) \varepsilon^2 + 1}$$

Tabla 1. Muestra aleatoria de empresas

| SECTOR | | EMPRESAS FRACASADAS | | EMPRESAS NO FRACASADAS | |
|--------------|----------------|---------------------|------------|------------------------|------------|
| Actividad | Código CNAE-93 | Número | Porcentaje | Número | Porcentaje |
| Agricultura | 01 | 5 | 8,5 | 14 | 3,55 |
| Industria | 14 | 2 | 3,4 | 4 | 1 |
| | 15 | 6 | 10 | 16 | 4 |
| | 17 | 1 | 1,7 | 1 | 0,25 |
| | 18 | 1 | 1,7 | 3 | 0,75 |
| | 20 | 2 | 3,4 | 8 | 2 |
| | 22 | 1 | 1,7 | 5 | 1,25 |
| | 24 | 2 | 3,4 | 2 | 0,5 |
| | 26 | 2 | 3,4 | 5 | 1,25 |
| | 28 | 1 | 1,7 | 9 | 2,3 |
| | 30 | 1 | 1,7 | 1 | 0,25 |
| | 34 | 1 | 1,7 | 1 | 0,25 |
| | 36 | 2 | 3,4 | 4 | 1 |
| Construcción | 45 | 12 | 20,3 | 85 | 21,5 |
| Servicios | 50 | 1 | 1,7 | 24 | 6,1 |
| | 51 | 4 | 6,8 | 50 | 12,6 |
| | 52 | 7 | 11,9 | 40 | 10,1 |
| | 55 | 1 | 1,7 | 28 | 7,1 |
| | 63 | 1 | 1,7 | 6 | 1,5 |
| | 70 | 2 | 3,4 | 48 | 12,1 |
| | 74 | 2 | 3,4 | 30 | 7,6 |
| | 80 | 1 | 1,7 | 5 | 1,25 |
| | 85 | 1 | 1,7 | 7 | 1,8 |
| Total | | 59 | 100 | 396 | 100 |

Fuente: elaboración propia

Para un error máximo de estimación del 5% y considerando la población de 41.525 empresas sanas, el tamaño muestral resultante aplicando dicha fórmula fue de 396 empresas. Con el fin de tener en cuenta las características y peculiaridades de los diferentes sectores económicos identificados en la población, según el código establecido por la Clasificación Nacional de Actividades Económicas (CNAE-93), estas compañías fueron seleccionadas dentro de los mismos sectores en que operaban las empresas fracasadas previamente identificadas, atendiendo al tamaño poblacional en cada sector, mediante la aplicación de un muestreo estratificado aleatorio (Bell, 1997). Un resumen de la muestra aleatoria de empresas seleccionada para nuestro estudio se recoge en la Tabla 1.

Por último, para obtener la muestra por emparejamiento, cada una de las empresas fracasadas fue emparejada con una empresa sana seleccionada al azar entre las elegidas para la muestra aleatoria dentro de cada sector, resultando una muestra total de 108 compañías, la mitad perteneciente a cada grupo.

3. VARIABLES EXPLICATIVAS DEL FRACASO EMPRESARIAL

Para obtener un modelo de predicción del fracaso empresarial, es necesario considerar un conjunto de variables que expliquen tal evento y, por consiguiente, contribuyan a predecir el posible fracaso de una empresa. El fracaso empresarial, obviamente, depende en mayor medida de la actividad que desarrollan las empresas, que a su vez aparece reflejada en la información publicada en sus respectivos

estados financieros. Una forma más fácil de tratar toda la información contenida en dichos estados consiste en calcular ratios financieros que relacionan diferentes partidas contables (Laffarga y Mora, 1998), por lo que la mayoría de modelos han incluido como variables independientes para predecir el fracaso una variedad de ratios financieros que describen la actividad desarrollada por las empresas. Tal como señalan Trujillo-Ponce *et al.* (2013), las variables contables siguen jugando un papel más importante que otras variables de mercado. Sin embargo, debido a la ausencia de una teoría sobre fracaso empresarial (Scott, 1981; Jones, 1987; Balcaen y Ooghe, 2006; Gómez *et al.*, 2008; Labatut *et al.*, 2009), la selección de ratios financieros por parte de los investigadores ha sido eminentemente empírica, lo que ha supuesto un amplio listado de ratios potencialmente explicativos del fracaso empresarial (Gómez *et al.*, 2008; Labatut *et al.*, 2009). Por este motivo y a fin de reducir su número, antes de estimar los modelos predictivos en las dos muestras seleccionadas, aplicamos un Análisis de Componentes Principales (ACP) sobre el listado inicial de ratios, con el que tratamos de seleccionar aquellos con mayor poder explicativo respecto al fenómeno en estudio.

3.1 Ratios financieros

Partiendo del hecho de que la información extraída de los estados financieros refleja la actividad de la empresa y que dicha información es el principal factor que influye en su posible fracaso en el futuro, las variables independientes incluidas en los modelos de predicción desarrollados han consistido en ratios financieros que miden diferentes aspectos de la actividad empresarial. Como hemos indicado, si bien la elección de ratios debería basarse en una teoría económica de las relaciones entre el proceso de fracaso y las variables potencialmente explicativas, la selección ha sido básicamente empírica. Es decir, los investigadores han elegido los ratios para sus respectivos estudios sobre la base de su popularidad en la literatura y su frecuencia y nivel de significación en los estudios previos sobre fracaso empresarial, en la línea iniciada por Beaver (1966). En el mismo sentido (Laffarga y Pina, 1995; Alfaro *et al.*, 2008), para la selección de los ratios financieros a incluir en nuestro estudio hemos considerado aquellos ratios que han sido utilizados (y además resultaron significativos) en varios de los modelos desarrollados con anterioridad, con especial consideración a los de Beaver (1966) y Altman (1968). De este modo, reducimos en cierta medida el amplio listado de potenciales ratios financieros a considerar. Un último criterio tenido en consideración para la selección final de ratios ha sido la disponibilidad de información para las empresas de la muestra (Alfaro *et al.*, 2008), puesto que los ratios se calculan para el periodo de tres años que comprende el estudio. En concreto, la información correspondiente a los ratios financieros se recogió para el periodo de tres ejercicios anteriores al momento del fracaso, en el caso de las empresas fracasadas, y los tres últimos ejercicios de actividad a la fecha de la recogida de información, para las empresas sanas.

El listado final está compuesto por 27 ratios financieros, clasificados en los tradicionales grupos de liquidez, rentabilidad, endeudamiento y solvencia, rotación y actividad, recursos generados y estructura, tal como se puede observar en la Tabla 2, donde aparece la codificación utilizada para los

diferentes ratios, junto con su respectiva definición. A su vez, hemos añadido una columna con la influencia de cada ratio en el fenómeno del fracaso empresarial, indicando el signo esperado del coeficiente estimado para cada variable significativa en los modelos obtenidos mediante regresión logística, que es la metodología aplicada en el trabajo.

Tabla 2. Ratios financieros utilizados como variables independientes

| Grupo | Etiqueta | Definición | Signo esperado |
|---------------------------|-----------|---|----------------|
| Liquidez | RCI | Ratio de circulante o liquidez general: Activo circulante / Pasivo circulante | - |
| | PAC | Prueba ácida: (Activo circulante - Existencias) / Pasivo circulante | - |
| | LIQ | Liquidez inmediata: Disponible (Tesorería) / Pasivo circulante | - |
| | CCA | Capital circulante: Capital circulante / Activo total | - |
| | CCFO | Capital circulante: Capital circulante / Fondos propios | - |
| Rentabilidad | ROA | Rentabilidad económica: Resultado del ejercicio / Activo total | +/- |
| | ROE | Rentabilidad financiera: Resultado del ejercicio / Fondos propios | +/- |
| | REAC | Rentabilidad sobre fondos de accionistas: Resultado antes de impuestos / Fondos propios | +/- |
| | ROAII | Rentabilidad económica: Resultado antes de impuestos / Activo total | +/- |
| Endeudamiento y solvencia | REP | Nivel de endeudamiento: Pasivo exigible / Activo total | + |
| | RECP | Endeudamiento a corto plazo: Pasivo circulante / Activo total | + |
| | RELP | Endeudamiento a largo plazo: Pasivo fijo / Activo total | + |
| | NPA | Autonomía financiera (solvencia): Fondos propios / Activo total | - |
| | FPPC | Fondos propios / Pasivo circulante | - |
| | EQUI | Cobertura de inmovilizado o equilibrio: (Fondos propios + Pasivo fijo) / Activo fijo | - |
| | CCF | Cobertura de cargas financieras: Resultado de explotación / Gastos financieros | + |
| | GFV | Cobertura de cargas financieras: Gastos financieros / Importe neto cifra de ventas | + |
| Rotación y actividad | RAC | Rotación de activo: Importe neto de la cifra de ventas (INCV) / Activo total | - |
| | Var(INCV) | Crecimiento de la cifra de ventas: $INCV_t / INCV_{t-1}$ | - |
| | CCV | Capital circulante / Importe neto de la cifra de ventas | - |
| | PPAG | Rotación de activo circulante: Activo circulante / Ingresos de explotación | + |
| Recursos generados | CFAT | Recursos generados sobre estructura económica: Cash-flow / Activo total | - |
| | CFDT | Capacidad de devolución de la deuda: <i>Cash-flow</i> / Pasivo exigible | - |
| | CFPC | Capacidad de devolución de la deuda a corto plazo: <i>Cash-flow</i> / Pasivo circulante | - |
| Estructura | AC | Activo circulante / Activo total | + |
| | AF | Activo fijo / Activo total | - |
| | TES | Tesorería / Activo total | - |

Fuente: elaboración propia

3.2 Selección de variables: Análisis de Componentes Principales (ACP)

Una última etapa con respecto a la selección de las variables a incluir en los modelos predictivos consiste en la aplicación de un ACP, cuyo objetivo es la reducción del amplio listado de ratios financieros a un número más reducido de factores con un alto poder explicativo del fracaso empresarial. Con ello se consigue, además, evitar la redundancia de la información utilizada en los modelos, así como los problemas de multicolinealidad que pueden presentarse (Lizarraga, 2002).

En cada una de las dos muestras, el ACP se aplicó sobre los 27 ratios iniciales, referidos al último año del periodo en estudio. Una vez comprobado el cumplimiento de las hipótesis del ACP, el procedimiento se desarrolló en varios pasos, en los que aquellos ratios poco correlacionados con los

factores extraídos se fueron eliminando de manera sucesiva. Además, con el fin de incrementar el porcentaje de varianza explicada por los factores, los ratios que contienen información redundante también fueron eliminados del análisis. Todo el procedimiento se realizó con el *software* estadístico SPAD 6.0.

En ambas muestras, seis factores fueron finalmente retenidos. En la muestra aleatoria, los seis factores explican el 85,02% de la información original proporcionada por los 27 ratios financieros, mientras que en la emparejada, el porcentaje de varianza explicada es del 73,36%. De los 27 ratios financieros, 15 ratios en la muestra aleatoria y 20 en la emparejada están fuertemente correlacionados con los factores extraídos. Estas correlaciones entre factores y ratios financieros nos permiten dar una descripción a los diferentes factores, tal como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Factores extraídos por el ACP y ratios que los caracterizan

| MUESTRA | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| Aleatoria | Emparejada |
| Liquidez (RCI LIQ PAC) | |
| Estructura de pasivo (NPA CFAT RECP) | |
| Rentabilidad económica (ROA) | |
| <i>Cash-Flow</i> (CFDT CFPC) | |
| Posición de circulante (AC) | |
| Rotación (GFV CCV) | Fondos propios (ROE CCFO) |
| | Capital circulante (CCA CCV CCFO) |

Fuente: elaboración propia

Varios factores son comunes a ambas muestras. Se trata de los factores que describen aspectos como liquidez, estructura del pasivo, rentabilidad económica, *cash-flow* y posición de circulante de las empresas en cada muestra. Sin embargo, también se observan algunas diferencias. En la muestra aleatoria, identificamos un factor específico que describe la rotación, en cuanto que se correlaciona con los ratios de gastos financieros (GFV) y capital circulante (CCV) sobre ventas. En la muestra emparejada, se extraen dos factores importantes que miden aspectos relacionados con fondos propios y capital circulante, como indican los ratios correlacionados con dichos factores.

4. RESULTADOS DE LA PREDICCIÓN

Con el fin de predecir el fracaso empresarial de las empresas en las dos muestras seleccionadas, aplicamos el análisis de regresión logística, puesto que se trata de uno de los métodos estadísticos más utilizados en este campo y presenta la ventaja de ser menos exigente respecto a las hipótesis requeridas para su aplicación, como ocurre con el análisis discriminante (Keasey y Watson, 1991). En concreto, se evita el problema relativo a las propiedades distributivas de las variables predictoras (Hossari, 2007), cuyo efecto puede evaluarse de forma individual a través de los coeficientes estimados (Zavgren, 1983). Por otro lado, permite obtener la probabilidad de ocurrencia de un suceso, cuya interpretación es más intuitiva que la puntuación resultante del análisis discriminante (Hossari, 2007).

Para estimar los modelos, consideramos como variables independientes para entrar en los mismos los ratios correlacionados con los seis factores extraídos por el ACP. Además, para evitar el inconveniente de estimar un modelo para cada uno de los tres ejercicios del periodo en estudio, decidimos incluir las variables medidas en los tres años. En este caso, utilizamos el *software* estadístico SPSS 19 para obtener los diferentes modelos. Los resultados obtenidos para la muestra aleatoria se muestran en la Tabla 4. Considerando el test de razón de verosimilitud, utilizado para la selección de variables, ocho ratios financieros entraron en el modelo, aunque el estadístico de Wald correspondiente a ROA no es significativo. Las otras variables significativas son la proporción de activo circulante (AC) y de capital circulante (CCA) sobre activo total y el porcentaje de *cash-flow* sobre deuda total (CFDT), referidos al último año previo al fracaso, junto con dos ratios obtenidos dos años antes: la proporción de fondos propios (NPA_1) y de *cash-flow* (CFAT_1) sobre activo total. El modelo se completa con el ratio de liquidez medido el primer (LIQ) y el tercer (LIQ_2) ejercicios anteriores al momento del fracaso.

Tabla 4. Modelo de regresión logística (muestra aleatoria)

| Variable | Coeficiente | Test de Wald | p-valor | Odds ratio | Intervalo de confianza para odds ratio (95%) | |
|-----------|-------------|--------------|---------|------------|--|----------|
| | | | | | Inferior | Superior |
| LIQ_2 | -5,162 | 7,403 | 0,007 | 0,006 | 0,000 | 0,236 |
| ROA | 0,003 | 0,476 | 0,490 | 1,003 | 0,995 | 1,010 |
| LIQ | -5,658 | 5,302 | 0,021 | 0,003 | 0,000 | 0,431 |
| AC | 0,093 | 14,131 | 0,000 | 1,097 | 1,045 | 1,152 |
| NPA_1 | 0,029 | 7,963 | 0,005 | 1,029 | 1,009 | 1,050 |
| CCA | -10,380 | 17,209 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,004 |
| CFAT_1 | -8,830 | 8,473 | 0,004 | 0,000 | 0,000 | 0,056 |
| CFDT | -7,995 | 12,668 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,028 |
| Constante | -1,065 | 2,783 | 0,095 | 0,345 | - | - |

Fuente: elaboración propia

Como puede observarse, las variables que han resultado significativas en el modelo estimado sobre la muestra aleatoria de empresas miden fundamentalmente diferentes aspectos de liquidez y circulante, así como la capacidad de la empresa para generar recursos de forma interna. Además, todas las variables, excepto AC y NPA_1, tienen una influencia positiva sobre el fracaso empresarial, ya que las *odds ratio* correspondientes a estas variables son inferiores a uno, lo que significa que un incremento en el valor de cada variable implica una reducción en la *odds ratio* de la probabilidad de fracaso. Si comparamos estos resultados con la influencia que a priori se esperaba de cada uno de los ratios financieros sobre el fenómeno del fracaso empresarial que se muestra en la Tabla 2, se observa que hay una divergencia en el signo del coeficiente asociado a NPA_1. Puesto que el ratio mide la proporción de fondos propios sobre activo total, se espera que cuanto mayor sea este ratio, menor será la probabilidad de fracaso, al disponer de mayores recursos propios con los que responder a las deudas. Sin embargo, en este caso la *odds ratio* correspondiente a esta variable es mayor que uno, indicando una mayor probabilidad de fracaso, lo que podría explicarse por el hecho de que los

recursos propios obtenidos de los accionistas en un determinado ejercicio tienen que devolverse en el siguiente en forma de dividendos, influyendo negativamente en la probabilidad de que la empresa fracase.

Por su parte, en la muestra emparejada el número de variables que entran en el modelo estimado es seis, por resultar significativas en la explicación y predicción del fracaso empresarial, como indica el *p*-valor asociado a cada ratio financiero que se muestra en la Tabla 5. No obstante, la rotación de gastos financieros sobre ventas (GFV) es sólo significativa a un nivel del 10%. De hecho, el intervalo de confianza obtenido para la *odds ratio* a un nivel del 95% incluye el valor nulo igual a uno, que indica que la variable en cuestión no tiene influencia en la probabilidad de fracaso.

Tabla 5. Modelo de regresión logística (muestra emparejada)

| Variable | Coeficiente | Test de Wald | <i>p</i> -valor | <i>Odds ratio</i> | Intervalo de confianza para <i>odds ratio</i> (95%) | |
|-----------|-------------|--------------|-----------------|-------------------|---|----------|
| | | | | | Inferior | Superior |
| NPA | -0,042 | 5,117 | 0,024 | 0,959 | 0,925 | 0,994 |
| TES_2 | -15,915 | 8,729 | 0,003 | 0,000 | 0,000 | 0,005 |
| CCFO | -0,223 | 6,190 | 0,013 | 0,800 | 0,671 | 0,954 |
| ROE | -0,011 | 7,274 | 0,007 | 0,989 | 0,981 | 0,997 |
| CFDT_1 | -12,082 | 5,128 | 0,024 | 0,000 | 0,000 | 0,197 |
| GFV | 0,157 | 3,499 | 0,061 | 1,170 | 0,993 | 1,379 |
| Constante | 3,377 | 10,997 | 0,001 | 29,280 | - | - |

Fuente: elaboración propia

El resto de variables son la proporción de fondos propios sobre activo total (NPA), el porcentaje de capital circulante sobre fondos propios (CCFO) y la rentabilidad financiera (ROE), medidos el último año anterior al fracaso, además de la proporción de *cash-flow* sobre deuda total (CFDT_1) el segundo ejercicio previo y el ratio de disponible sobre activo total (TES_2) referido al tercer año anterior al momento del fracaso. Aunque estas dos variables son significativas en el modelo, puede observarse que algunos aspectos relacionados con los fondos propios son importantes en esta muestra a efectos de evitar el fracaso. En todo caso, para todas las variables incluidas en el modelo las *odds ratio* (y los intervalos de confianza estimados para cada ratio financiero) son inferiores a uno, lo que muestra su influencia positiva en el fenómeno del fracaso empresarial, tal como se esperaba a priori.

Teniendo en cuenta los ratios significativos en los dos modelos logísticos estimados, cada empresa, en las dos muestras consideradas, fue clasificada en uno de los dos grupos de empresas atendiendo a su probabilidad de fracaso. Los resultados de clasificación obtenidos se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6. Resultados de clasificación

| Empresas | Muestra | |
|---------------|---------------|---------------|
| | Aleatoria | Emparejada |
| Fracasadas | 43,48% | 91,11% |
| No fracasadas | 99,59% | 75% |
| Total | 90,69% | 83,95% |

Fuente: elaboración propia

El porcentaje total de clasificación correcta es similar en ambas muestras, aunque ligeramente superior en la muestra aleatoria, puesto que casi el 91% de las empresas en esta muestra son correctamente clasificadas, frente al 84% de empresas en la muestra emparejada. Por consiguiente, podemos indicar que la diferente composición de empresas pertenecientes a cada grupo en las dos muestras no tiene una gran influencia en la tasa total de aciertos. Sin embargo, podemos observar ciertas diferencias en cuanto a la clasificación dentro de cada grupo. Por un lado, el porcentaje de clasificación correcta para el grupo de empresas no fracasadas, cuando se considera una empresa emparejada, ha descendido, aunque continúa siendo bastante alto. Por otro lado, el porcentaje correspondiente a las empresas fracasadas en esta muestra se ha duplicado respecto al alcanzado en la muestra aleatoria. Esta gran mejora en la tasa de aciertos para el grupo de empresas fracasadas se debe al incremento en la proporción de este tipo de empresas en la muestra (50%), que implica que sea más fácil obtener una mejor clasificación para este grupo que en la muestra aleatoria, en la que solo hay un 13% de empresas fracasadas.

En conclusión, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en las dos muestras, puede deducirse que la utilización de una muestra elegida mediante emparejamiento, en comparación con una muestra seleccionada aleatoriamente, tiende a sobrestimar la capacidad predictiva de los modelos sobre fracaso empresarial.

5. CONCLUSIONES

Desde los trabajos pioneros de Beaver y Altman, diferentes métodos estadísticos, como el análisis de regresión logística, han mostrado su capacidad para predecir el fracaso empresarial en muestras de empresas correspondientes a diferentes periodos y países. Sin embargo, algunos de los estudios publicados, que han utilizado una muestral emparejada de empresas fracasadas y no fracasadas para obtener los respectivos modelos, han suscitado ciertas críticas por el hecho de basar sus resultados de clasificación en una muestra que no es representativa de la población de la que es extraída, lo que puede provocar resultados no válidos. En un intento por comprobar empíricamente este hecho y con una finalidad comparativa, elegimos una muestra aleatoria y otra emparejada de empresas pertenecientes al sector de pequeñas y medianas empresas con domicilio en la Comunidad Autónoma de Castilla y León (España), sobre las que estimamos sendos modelos de predicción del fracaso empresarial utilizando como variables independientes un conjunto de ratios financieros.

Con carácter previo a la estimación de los modelos mediante regresión logística, aplicamos un análisis de componentes principales, para reducir el número de ratios financieros potencialmente susceptibles de ser incluidos como variables independientes en cada modelo. En las dos muestras se extrajeron seis factores, algunos de los cuales eran comunes a ambas, como los que describen aspectos relacionados con liquidez, estructura de pasivo, rentabilidad económica, *cash-flow* y circulante. Además, se obtuvieron factores específicos para cada muestra: uno de rotación, en la muestra aleatoria, y dos relativos a fondos propios y capital circulante, en la emparejada.

Los ratios financieros correlacionados con los factores retenidos en cada muestra se consideraron como variables independientes a incluir en los modelos logísticos, observándose algunas

diferencias. En la muestra aleatoria, los aspectos más importantes de cara a evitar el fracaso de una empresa son la liquidez y la generación de recursos internos, rasgos que también resultan significativos en la muestra emparejada, si bien en ésta también juegan un papel importante aspectos relacionados con los fondos propios.

Además de las diferencias en las variables que definen los modelos predictivos y teniendo en cuenta el objetivo de este trabajo, las diferencias más destacadas se observan respecto a los resultados de clasificación. Como se había supuesto, la composición de la muestra tiene influencia en el porcentaje de empresas correctamente clasificadas en cada una. La tasa de aciertos para las empresas fracasadas es más alta cuando se utiliza una muestra emparejada, puesto que se incrementa la proporción de este grupo de empresas en la muestra, mientras que el porcentaje de clasificación correcta correspondiente a las empresas no fracasadas, si bien se ha reducido ligeramente, sigue siendo bastante alto.

REFERENCIAS

- Alfaro, E., Gámez, M. y García, N. (2008) "Linear discriminant analysis versus adaboost for failure forecasting". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, XXXVII (137), pp. 13–32.
- Altman, E.I. (1968) "Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy". *The Journal of Finance*, XXIII (4), pp. 589–609.
- Altman, E.I. (1984) "The success of business failure models: An international survey". *Journal of Banking & Finance*, 8, pp. 171–198.
- Altman, E.I., Marco, G. y Varetto, F. (1994) "Corporate distress diagnosis: Comparisons using linear discriminant analysis and neural networks (the Italian experience)". *Journal of Banking & Finance*, 18, pp. 505–529.
- Balcaen, S. y Ooghe, H. (2006) "35 years of studies on business failure: an overview of the classical statistical methodologies and their related problems". *The British Accounting Review*, 38 (1), pp. 63–93.
- Beaver, W.H. (1966) "Financial Ratios as Predictors of Failure". *Journal of Accounting Research*, Supplement to Vol. 4: Empirical Research in Accounting: Selected Studies, pp. 71–111.
- Bell, T.B. (1997) "Neural Nets or the Logit Model? A Comparison of Each Model's Ability to Predict Commercial Bank Failures", *Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management*, 6, pp. 249-264.
- Betts, J. y Belhoul, D. (1987) "The effectiveness of incorporating stability measures in company failure models", *Journal of Business Finance & Accounting*, 14 (3), pp. 323-333.
- Blum, M. (1974) "Failing Company Discriminant Analysis". *Journal of Accounting Research*, Spring, pp. 1–25.
- Calvo-Flores, A. y García, D. (2002) "Relación entre la posición económica y financiera de la empresa y los estados de fracaso empresarial". Doldán, F. y Rodríguez, M. (Coords.) *La Gestión del Riesgo de Crédito. Métodos y Modelos de Predicción de la Insolvencia Empresarial*. Madrid: Ed. AECA Monografías, pp. 47–71.
- Charitou, A., Neophytou, E. y Charalambous, C. (2004) "Predicting Corporate Failure: Empirical Evidence for the UK". *European Accounting Review*, 13 (3), pp. 465–497.
- Cybinski, P. (2001) "Description, Explanation, Prediction –the Evolution of Bankruptcy Studies?". *Managerial Finance*, 27 (4), pp. 29–44.

- Deakin, E.B. (1972) "A Discriminant Analysis of Predictors of Business Failure". *Journal of Accounting Research*, Spring, pp. 161–179.
- Dietrich, J.R. (1984) "Discussion of Methodological Issues Related to the Estimation of Financial Distress Prediction Models". *Journal of Accounting Review*, 22, Studies on Current Econometric Issues in Accounting Research, pp. 83–86.
- Dimitras, A.I., Slowinski, R., Susmaga, R. y Zopounidis, C. (1999) "Business failure prediction using rough sets". *European Journal of Operational Research*, 114 (2), pp. 263–280.
- Dimitras, A.I., Zanakis, S.H. y Zopounidis, C. (1996) "A survey of business failures with an emphasis on prediction methods and industrial applications". *European Journal of Operational Research*, 90 (3), pp. 487–513.
- Edmister, R.O. (1972) "An empirical test of financial ratio analysis for small business failure prediction". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7, pp. 1477–1493.
- Elam, R. (1975) "The Effect of Lease Data on the Predictive Ability of Financial Ratios". *The Accounting Review*, 50 (1), pp. 25–43.
- Gómez, M.E., de la Torre, J.M. y Román, I. (2008) "Análisis de sensibilidad temporal en los modelos de predicción de insolvencia: una aplicación a las PYMES industriales". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, XXXVII (137), pp. 85–111.
- Hossari, G. (2007) "Benchmarking New Statistical Techniques in Ratio-Based Modelling of Corporate Collapse", *International Review of Business Research Papers*, 3 (3), pp. 141–161.
- Jones, F.L. (1987) "Current Techniques in Bankruptcy Prediction". *Journal of Accounting Literature*, 6, pp. 131–164.
- Keasey, K. y Watson, R. (1991) "Financial Distress Prediction Models: A Review of Their Usefulness". *British Journal of Management*, 2 (2), pp. 89–102.
- Labatut, G., Pozuelo, J. y Veres, E.J. (2009) "Modelización temporal de los ratios contables en la detección del fracaso empresarial de la PYME española". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, XXXVIII (143), pp. 423–447.
- Laffarga, J., Martín, J.L. y Vázquez, M.J. (1985) "El análisis de la solvencia en las instituciones bancarias: Propuesta de una metodología y aplicaciones a la Banca española". *ESIC-MARKET*, 48, pp. 51–73.
- Laffarga, J. y Mora, A. (1998) "Los modelos de predicción de la insolvencia empresarial: un análisis crítico". Calvo-Flores, A. y García, D. (Coords.) *El riesgo financiero de la empresa*. Madrid: Ed. AECA Monografías, pp. 11–58.
- Laffarga, J. y Pina, V. (1995) "La utilidad del análisis multivariante para evaluar la gestión continuada de empresas". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, XXIV (84), pp. 727–748.
- Laitinen, E.K. (1991) "Financial ratios and different failure processes". *Journal of Business, Finance & Accounting*, 18 (5), pp. 649–673.
- Laitinen, E.K. y Laitinen, T. (1998) "Misclassification in bankruptcy prediction in Finland: human information processing approach". *Accounting, Auditing & Accountability Journal*, 11 (2), pp. 216–244.
- Lizarraga, F. (2002) "La utilidad de los modelos de predicción de fracaso en la empresa española a lo largo de la última década". Doldán, F. y Rodríguez, M. (Coords.) *La Gestión del Riesgo de Crédito. Métodos y Modelos de Predicción de la Insolvencia Empresarial*. Madrid: Ed. AECA Monografías, pp. 219–252.

- Mar-Molinero, C. y Ezzamel, M. (1991) "Multidimensional Scaling Applied to Corporate Failure", *Omega*, 19 (4), pp. 259-274.
- Mora, A. (1994) "Limitaciones metodológicas de los trabajos empíricos sobre la predicción del fracaso empresarial". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, XXIII (80), pp. 709-732.
- Mora, A. (1995) "Utilidad de los modelos de predicción de la crisis empresarial". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, XXIV (83), pp. 281-300.
- Mures-Quintana, M.J. y García-Gallego, A. (2012) "On the non-financial information's significance in the business failure models: A Spanish case study". *International Journal of Organizational Analysis*, 20 (4), pp. 423-434.
- O'Leary, D.E. (1998) "Using Neural Networks to Predict Corporate Failure". *International Journal of Intelligent Systems in Accounting, Finance & Management*, 7, pp. 187-197.
- Odom, M.D. y Sharda, R. (1992) "A Neural Network Model for Bankruptcy Prediction". Trippi, R. R. & Turban, E. (Eds.) *Neural Networks in Finance and Investing. Using Artificial Intelligence to Improve Real-World Performance*. Cambridge: Probus Publishing Company, pp. 177-185.
- Ohlson, J.A. (1980) "Financial Ratios and the Probabilistic Prediction of Bankruptcy". *Journal of Accounting Research*, 18 (1), pp. 109-131.
- Palepu, K.G. (1986) "Predicting takeover targets. A Methodological and Empirical Analysis". *Journal of Accounting and Economics*, 8, pp. 3-35.
- Peel, M.J., Peel, D.A. y Pope, P.F. (1986). "Predicting Corporate Failure – Some Results for the UK Corporate Sector". *Omega*, 14 (1), pp. 5-12.
- Pina, V. (1989) "La información contable en la predicción de la crisis bancaria 1977-1985". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, XVIII (58), pp. 309-338.
- Pulido, A. (1992) *Estadística y técnicas de investigación social*, 9ª edición. Madrid: Pirámide, D.L.
- Rodríguez Osuna, J. (1991) *Métodos de muestreo*. Madrid: Centro de Investigaciones Sociológicas.
- Scheaffer, R.L., Mendenhall, W. y Ott, R.L. (2007) *Elementos de muestreo*, 6ª edición. Madrid: International Thomson Editores Spain Paraninfo.
- Scott, E. (1981) "The Probability of Bankruptcy. A Comparison of Empirical Predictions and Theoretical Models". *Journal of Banking & Finance*, 5, pp. 317-344.
- Slowinski, R. y Zopounidis, C. (1995) "Application of the rough set approach to evaluation of bankruptcy risk". Cited in Zopounidis, C. & Dimitras, A. I. (1998). *Multicriteria Decision Aid Methods for the Prediction of Business Failure*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Taffler, R.J. (1982) "Forecasting Company Failure in the UK using Discriminant Analysis and Financial Ratio Data". *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 145 (3), pp. 342-358.
- Theodossiou, P.T. (1991) "Alternative models for assessing the financial condition of business in Greece". *Journal of Business, Finance & Accounting*, 18 (5), pp. 697-720.
- Trujillo-Ponce, A., Samaniego-Medina, R. y Cardone-Riportella, C. (2013) "Examining what best explains corporate credit risk: accounting-based versus market-based models". *Journal of Business Economics and Management*, iFirst: pp. 1-24.
- Zavgren, C.V. (1983) "The prediction of corporate failure: The state of the art". *Journal of Accounting Literature*, 2, pp. 1-35.
- Zmijewski, M.E. (1984) "Methodological Issues Related to the Estimation of Financial Distress Prediction Models". *Journal of Accounting Research*, 22, pp. 59-82.



UNIVERSIDAD
PABLO DE
OLAVIDE
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (15). Páginas 151–167.
Junio de 2013. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=74>

La prima de riesgo recargada en un seguro de rentas: tarificación mediante el uso de una medida de riesgo coherente

HERNÁNDEZ SOLÍS, MONTSERRAT

Dpto. de Economía de la Empresa y Contabilidad, UNED

Correo electrónico: montserrath@cee.uned.es

LOZANO COLOMER, CRISTINA

Dpto. de Métodos Cuantitativos, Universidad Pontificia de Comillas (ICADE)

Correo electrónico: clozano@upcomillas.es

VILAR ZANÓN, JOSÉ LUIS

Dpto. de Economía Financiera y Actuarial, Universidad Complutense de Madrid

Correo electrónico: jlvilarz@ccee.ucm.es

RESUMEN

En este estudio se obtiene un principio de cálculo de primas, para el ramo de vida, basado en una medida de riesgo coherente, la esperanza distorsionada transformada proporcional del tanto instantáneo (Wang, 1995), que justifique la recomendación de Solvencia II de reducir, para un seguro de rentas, el efecto del tanto instantáneo de mortalidad y conseguir de este modo una prima recargada implícitamente para hacer frente a las desviaciones desfavorables de la siniestralidad real. La modalidad de seguro seleccionada para el estudio ha sido el de rentas, seguro con cobertura de supervivencia, calculándose la prima única de riesgo para las cuatro leyes de supervivencia más aceptadas, como son la primera y segunda de Dormoy, la ley de Gompertz y la ley de Makeham. La selección de estas leyes ha sido por ser las que mejor se ajustan al modelo mediante el empleo de las tablas de mortalidad elaboradas por Pérez (2000). En los seguros de vida con cobertura de supervivencia, una experiencia de siniestralidad negativa para la compañía significa que los asegurados son más longevos de lo esperado. Así, cuando se calculan las primas, es una práctica común añadir un margen de seguridad implícito, en forma de porcentaje, a las probabilidades de fallecimiento q_x , o bien emplear una tabla de mortalidad cuyas probabilidades de fallecimiento sean inferiores a las del grupo humano considerado. Esto se puede interpretar como un decremento del tanto instantáneo con un múltiplo. En este artículo se demuestra que el empleo de la función de distorsión, hasta ahora empleada en el ramo de no vida y siendo la novedad su aplicación al ramo de vida asegurador, produce este mismo efecto, pero mediante el cálculo de una prima recargada de manera implícita.

Palabras clave: seguro de rentas; recargo; medida de riesgo coherente; función de distorsión.

Clasificación JEL: M20; C00.

MSC2010: 97M10; 97M30.

Artículo recibido el 27 de febrero de 2013 y aceptado el 31 de mayo de 2013.

The Risk Recharged Premium for a Survival Life Insurance: Recharged Premium through the Use of a Coherent Risk Measure

ABSTRACT

The goal of this study is to get a premium calculation principle, for the life insurance business, based on a coherent risk measure (Wang, 1995) in the form of power, called “Proportional Hazards (PH) Transforms” to justify the recommendation of Solvency II to reduce the effect of the mortality instantaneous rate and thus get an implicitly surcharged premium to deal deviations of actual claims regarding expected. Survival life insurance has been selected for this research, and the premium risk has been calculated for the four accepted laws of survival, such as the first and second Dormoy, Gompertz law, and Makeham law. The selection of these laws has been taken because they best fit the model based on the numerical values assigned to the parameters by using mortality tables developed by Pérez (2000), Projected Table 2000 Spanish Mortality from 1950-1990. In the life insurance, coverage claims survival negative experience for the company means that the insured survive longer than expected (live longer). Thus, when calculating premiums, it is common practice to add a safety margin implied, as a percentage, the odds of death q_x , or use a mortality table whose chances of passing are lower than those of the human being taken into account. This can be interpreted as a decrease of the mortality instantaneous rate. In this paper we show that the use of the distortion power function, so far uses in the non-life branch and being the new application to the life insurance, produces the same effect, but calculating a implicitly surcharged premium.

Keywords: survival life insurance (annuities); surcharge; coherent risk measure; distortion function.

JEL classification: M20; C00.

MSC2010: 97M10; 97M30.



1. INTRODUCCIÓN

El riesgo asociado a sucesos aleatorios representa el factor más importante dentro del entorno asegurador. En la vida no siempre se pueden evitar los riesgos, de modo que si se llegan a producir, suelen conllevar una disminución de los ingresos. Por este motivo es preciso llevar a cabo procesos de medición del mismo y su aseguramiento, siendo ambos prioritarios para las entidades aseguradoras, así como análisis periódicos de su capacidad financiera en términos de solvencia para poder hacer frente a los riesgos. En esta idea se basa la directiva Solvencia II, cuyo objetivo es lograr una mejor defensa de los asegurados europeos a través de una correcta evaluación del riesgo, para de este modo poder reconocer las causas que pueden ocasionar pérdidas a las entidades aseguradoras, así como la correcta cuantificación del mismo.

Las cuestiones básicas en las que se sustenta Solvencia II son la fijación de los tres pilares básicos de la directiva, la especificación de los problemas de solvencia a los que se tendrán que enfrentar las entidades aseguradoras, así como el establecimiento de los requerimientos cuantitativos de capital necesarios para hacer frente a las desviaciones desfavorables de la siniestralidad. El conjunto de los informes técnicos desarrollados hasta la fecha, que son el desarrollo de Solvencia II, se denomina QIS. Éste cuenta con diferentes capítulos (QIS1, QIS2, QIS3, QIS4 y QIS5), siendo el sexto el que actualmente está en proceso de elaboración. Uno de los aspectos clave a desarrollar por Solvencia II son los tres pilares en los que se sustenta y que se muestran en la Figura 1.

Figura 1. Pilares de Solvencia II

| Primer Pilar | Segundo Pilar | Tercer Pilar |
|--|---------------------|--|
| Mecanismos de control y cálculo de nivel de fondos propios | Entidad supervisora | Imagen de transparencia por las entidades aseguradoras |



| TRIPLE OBJETIVO |
|---|
| Fomento y mejora de la integración del mercado único europeo de seguros |
| Consecución de un sector de seguros competitivo |
| Obtención de la convergencia y supervisión entre los supervisores |

Fuente: elaboración propia.

Una entidad aseguradora no tendría problemas de solvencia para hacer frente a las prestaciones cubiertas en las pólizas ni tendría pérdidas si las desviaciones entre la siniestralidad real y la esperada fueran mínimas. El problema es que en la realidad dichas desviaciones se producen y es por esto por lo que Solvencia II, en el informe técnico QIS5, establece y fija determinados niveles de capital exigibles a las aseguradoras para el ramo de vida, así como el decremento que ha de experimentar el tanto instantáneo de mortalidad en el ramo de vida para, de este modo, evitar dichas desviaciones, en concreto para el seguro con

cobertura de supervivencia. De hecho, en las compañías de seguro del ramo de vida, es una práctica común fijar un recargo de seguridad de manera implícita para protegerse del riesgo que se origina como consecuencia de dichas desviaciones, intentando de este modo proporcionar estabilidad a la empresa aseguradora.

En el informe QIS5 *Technical Specifications* (Working Document of the Commission Services, European Commission, 2010) se indica cómo ha de formularse el recargo de seguridad para el ramo de vida, en lo que se refiere a los seguros de supervivencia, cuando las probabilidades de supervivencia estimadas con la tabla de mortalidad empleada son superiores a las reales del colectivo considerado. Se origina, pues, un decremento del tanto instantáneo de mortalidad. Solvencia II recomienda un capital a la compañía aseguradora, para hacer frente a las desviaciones desfavorables que puedan surgir, que se obtenga de decrementar dicho tanto en un 20%, de un modo permanente y para todas las edades y pólizas que comprenden la cartera. Con este procedimiento, la entidad estaría garantizando los niveles de liquidez y solvencia necesarios.

Wang (1995) propone un principio de cálculo de prima recargada para seguros del ramo no vida, a partir de la medida de riesgo coherente (Artzner, 1999), la llamada esperanza distorsionada con la función de distorsión de Wang en su forma de potencia (transformada proporcional del tanto instantáneo, también llamada *Proportional Hazards Transforms* (PH)), teniendo la función de distorsión la forma $g(u) = u^{\frac{1}{\rho}}$, siendo condición necesaria para que dicha medida de riesgo sea coherente que el parámetro $\rho \geq 1$.

En este artículo se sigue la línea de trabajo abierta por Wang, pero aplicada al ramo de vida, proponiendo un principio de cálculo de prima, la esperanza distorsionada con la función de distorsión transformada proporcional del tanto instantáneo. Se demuestra que el empleo de este principio de cálculo de primas produce el mismo efecto de disminución del tanto instantáneo que utilizar una tabla de mortalidad con probabilidades de fallecimiento inferiores, para la modalidad de seguro de rentas. De esta manera, se consigue una justificación teórica, a partir de una medida de riesgo coherente, a una práctica habitual existente en el ramo de vida asegurador. El objetivo que se pretende es obtener una expresión para la prima de riesgo recargada que esté basada en la esperanza distorsionada en forma de potencia para la modalidad de seguro de rentas. Para este seguro es necesario que el valor del parámetro sea $\rho \geq 1$. Se demuestra que la medida de riesgo definida para calcular la prima verifica los axiomas de medida de riesgo coherente, por lo que este estudio supone una extensión de Wang (1995).

Solvencia II recomienda un valor del parámetro de $\rho = 1,20 > 1$, para la modalidad de seguro elegida. En este artículo se ha ampliado el campo de variación numérico de dicho parámetro para poder llevar a cabo el estudio de la tarificación en el seguro de rentas y aplicado a las cuatro leyes de supervivencia anteriormente descritas.

2. MEDIDAS DE RIESGO

En toda empresa aseguradora es necesario cuantificar el riesgo y llevar a cabo su posterior aseguramiento, tal como se ha comentado con anterioridad. Por este motivo, se hace imprescindible poder analizar los riesgos que afectan a las aseguradoras en el ramo de vida, con el fin de realizar una buena gestión de los mismos, ya que el estudio de los riesgos no se limita a cuantificarlos (medirlos) sino también a lograr una óptima cobertura protectora frente a los mismos e intentar, de este modo, prevenirlos. En este artículo se va a centrar la atención en el riesgo biométrico de longevidad, siendo el riesgo biométrico el que se estudia a partir de las desviaciones que surgen entre las tasas de mortalidad que se asumen (en base a las hipótesis actuariales) y las tasas de mortalidad reales. Según Vegas (2000), el riesgo por longevidad, a partir de una tabla actuarial correctamente estimada, se define como el riesgo asociado a que el valor actual actuarial de las prestaciones a favor de una cabeza sea inferior al valor actual necesario para poder pagar dichas prestaciones, definición que es aplicable a todas las modalidades de seguros de vida con cobertura de supervivencia, así como a la constitución de los planes de pensiones. Este riesgo afecta a las pólizas en las que está contratada la cobertura de supervivencia (en forma de capital o en forma de renta, ya sea vitalicia o temporal).

Ante la situación demográfica actual, lo que cabe preguntarse es cómo pueden las personas protegerse del riesgo de ser cada vez más longevas. La respuesta está en la contratación de pólizas de vida con cobertura de supervivencia con prestación en forma de rentas, los llamados “seguros de rentas”. Estos seguros se caracterizan por la protección que ofrecen frente al riesgo de longevidad, ya que al contratar un seguro de este tipo el asegurado recibirá de manera periódica una serie de ingresos, bien sea vitalicios o temporales, que le protegerán ante el caso de que se quede sin ahorros. El inicio de la cobertura de un seguro de rentas puede ser inmediato (seguro de rentas inmediato) o puede estar diferido en el tiempo (un asegurado que contrate esta cobertura con 50 años pero no comiencen a devengarse los flujos hasta que no se alcance los 65 años). El riesgo de longevidad individualmente considerado es compensatorio: los asegurados con cobertura de supervivencia en forma de renta que son menos longevos financian a los que lo son más.

Tabla 1. Riesgos biométricos actuariales

| RIESGO DE MORTALIDAD | RIESGO LONGEVIDAD | RIESGO INCAPACIDAD |
|--|---|--|
| Se trata de un riesgo que consiste en el aumento de la mortalidad de la cartera de la aseguradora por las pólizas contratadas. | El riesgo de longevidad es el que se origina por una reducción en la tasa de mortalidad. Comprende el aumento paulatino de la esperanza de vida de las personas, debido a una mejora en la calidad de vida. A este proceso se le conoce con el nombre de envejecimiento poblacional (Sandell, 2003). Las personas cada vez viven más años y se siguen jubilando a la misma edad, luego se está produciendo un aumento en el período en el que las personas están jubiladas. | Se trata de un riesgo producido por el efecto de algún tipo de incapacidad, temporal o permanente, en la figura del asegurado. |

Fuente: elaboración propia.

La gestión del riesgo, orientado al ramo de vida, se considera que es la coordinación perfecta entre el riesgo asegurable de sobrevivir y una reducción correcta de los costes del seguro. Dicha gestión del riesgo es un objetivo a alcanzar por todas las empresas, ya que tal como dice el Teorema de Modigliani-Miller (1958),

una gestión eficiente del riesgo puede tener efectos positivos, tales como una reducción de los impuestos, un mejor acceso al mercado de capitales, un incremento del valor de la empresa en caso de quiebra, así como una mejora a la hora de obtener inversiones óptimas.

Para poder gestionar adecuadamente los riesgos, es necesario cuantificarlos a través de un instrumento matemático, la llamada medida de riesgo. Para poder aplicar dicha medida es preciso que se produzca la supervivencia del asegurado (el daño económico potencialmente medible), así como la medición de la probabilidad de que acaezca ese evento de supervivencia. Una medida de riesgo se define como un funcional $M : X \rightarrow [0, \infty)$ que hace corresponder a un riesgo X un número real no negativo $M(X)$ (que puede ser infinito), el cual representa la cantidad adicional que se debe añadir a X (pérdida) para hacerlo aceptable (Gómez y Sarabia, 2008). Cuantificar el riesgo a través de este funcional (función de funciones) permite, entre otras bondades, determinar la prima del seguro (Tse, 2009), siendo éste el objetivo del presente artículo.

La medición del riesgo ha originado múltiples publicaciones (Artzner, 1999; Denuit *et al.*, 2005; Landsman y Sherris, 2001; Wang, 2000). Una medida de riesgo ha de permitir llevar a cabo una asignación correcta a la variable aleatoria (pérdida) del número real no negativo que es la prima, y evitar así inconsistencias en dicha asignación. De este modo la medida de riesgo proporcionará una gestión óptima y eficiente del mismo. Una variedad de autores (Gerber, 1979; Heilmann, 1989; Hurlimann, 1994; Young, 2004) han seleccionado una serie de propiedades que debe de satisfacer una medida de riesgo (ver la Tabla 2), a pesar de la inexistencia de un criterio unificado sobre que propiedades son las que debe de cumplir dicha medida. No obstante, se van a enunciar las propiedades más comúnmente aceptadas (Artzner *et al.*, 1999) para luego establecer las que se han de cumplir para que la medida de riesgo sea considerada coherente. Quedan reflejadas en la Tabla 3.

Tabla 2. Propiedades de las medidas de riesgo

| PROPIEDADES DE LAS MEDIDAS DE RIESGO | |
|--|--|
| Margen seguridad acotado por la esperanza | $M(X) \geq E(X)$ |
| Riesgo constante | $M(c) = c \quad c \geq 0$ |
| No exceso | $M(X) \leq \text{Max.}(X)$ |
| Monotonía | $X_1(\omega), X_2(\omega), \omega \in \Omega$ tal que $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$ entonces $M(X_1) \leq M(X_2)$. |
| Invarianza por traslaciones | $M(X + a) = M(X) + a$ |
| Homogeneidad positiva | $M(aX) = aM(X) \quad a \geq 0$ |
| Aditividad de riesgos comonótonos | $M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2)$ |
| Subaditividad | $M(X_1 + X_2) \leq M(X_1) + M(X_2)$ |

Fuente: elaboración propia.

Por criterio de coherencia se entiende aquél que proporciona contribuciones al riesgo económicamente racionales (Tasche, 2000). Y como lo que hace una medida de riesgo es asignar a una variable aleatoria pérdida la prima, para evitar inconsistencias en dicha asignación y que dicha medida de riesgo lleve a cabo una gestión óptima y eficiente del mismo, es preciso que cumpla cuatro propiedades, de las anteriormente enumeradas.

Tabla 3. Medidas de riesgo coherentes

| MEDIDAS DE RIESGO COHERENTES |
|-------------------------------|
| Homogeneidad positiva |
| Invarianza a las traslaciones |
| Monotonía |
| Subaditividad |

Fuente: elaboración propia.

Estas cuatro propiedades de la Tabla 3 son aceptadas de manera universal en el ámbito financiero, aunque no ocurre lo mismo en el ámbito actuarial (Heras, 2010). En particular, la no aceptación se produce con la propiedad de homogeneidad positiva y la de subaditividad. Con respecto a la primera de ellas, los actuarios aceptan sin restricciones que la medida de riesgo se ha de mantener inalterable al cambiar, por ejemplo, la unidad monetaria. Pero cuando se argumenta que un incremento en el tamaño de la cartera va a originar un incremento directamente proporcional en la medida de riesgo, esto es discutido. Así, si se tiene en cuenta una medida de riesgo para medir, por ejemplo el riesgo de liquidez en una entidad aseguradora, muchos actuarios sostienen que un incremento en el tamaño de la cartera puede ocasionar un incremento más que proporcional en el riesgo de liquidez y, por lo tanto, hacer que las pérdidas de la cartera sean muy elevadas y la compañía no disponga de suficiente dinero para hacer frente a dichas pérdidas. En este caso se verificaría que $M(aX) > aM(X)$ a $a \geq 0$. En lo que se refiere a la propiedad de subaditividad, determinados autores la defienden sin restricciones (Wang *et al.*, 1997). En cambio, otros autores (Denuit *et al.*, 2005) establecen que cuando en una cartera se mezclan riesgos que dependen positivamente los unos de los otros, el riesgo global es mayor que la suma de los riesgos individualmente considerados. Estos autores aprueban esta propiedad de subaditividad aplicada al ámbito actuarial para riesgos que no presentan una dependencia lineal, aprueban la de aditividad para riesgos independientes así como aprueban la de superaditividad para los riesgos positivamente dependientes en general y comonótonos en particular.

Existen dos tipos de medidas de riesgo, reflejados en la Tabla 4: las que se basan en los principios de cálculo de primas así como las que se basan en el capital. En este artículo se centra la atención en el principio de la función de distorsión de Wang en forma de potencia. Todo principio de cálculo de primas es una medida de riesgo, pero no viceversa. Por definición, un principio de cálculo de primas es una función $H(X)$ que asigna a un riesgo X un número real. Dicho número real es la prima. En la práctica el principio de cálculo de prima dependerá de la función de distribución $F(X)$ que sigue la variable aleatoria X , de modo que en vez de hablar de una función $H(X)$ se debe de hablar de funcional $H[F(X)]$ (Gerber, 1979). Un principio de cálculo de prima es una medida de riesgo, dado que permite obtener una prima que es la cantidad de dinero mínima que una compañía de seguros debe de cobrar a sus tomadores para que a dicha compañía le

interese firmar el contrato de seguro. Por lo tanto, los principios de cálculo de primas son ejemplos claros de medidas de riesgo. La característica clara de éstos es que el número real que resulta de su aplicación a la variable aleatoria del riesgo es el candidato para ser la prima asociada a la cobertura de la prestación de dicho riesgo aleatorio.

Tabla 4. Tipos de medidas de riesgo

| Basadas en los principios de cálculo de primas | Tipo de prima que proporciona | Verifica 4 axiomas coherencia |
|--|-----------------------------------|-------------------------------|
| Principio de Prima neta | No proporciona prima recargada | SÍ |
| Principio del Valor esperado | Prima recargada de modo explícito | NO |
| Principio de la Varianza | Prima recargada de modo explícito | NO |
| Principio de la Desviación típica | Prima recargada de modo explícito | NO |
| Principio Exponencial | Prima recargada de modo implícito | NO |
| Principio de Prima Esscher | Prima recargada de modo implícito | NO |
| Principio de la Función Distorsión Wang | Prima recargada de modo implícito | SÍ |

| Basadas en el capital | Verifica 4 axiomas coherencia |
|-----------------------|-------------------------------|
| VAR | NO |
| TVAR | SÍ |

Fuente: elaboración propia.

De los principios de cálculo de primas que se muestran en la Tabla 4, el de la prima neta es el que se aplica en el ramo de vida en la actualidad. El inconveniente que plantea es que no proporciona una prima recargada, ni implícita ni explícitamente, a pesar de ser medida de riesgo coherente. Es por esto por lo que las entidades han de modificar las probabilidades de supervivencia para obtener las primas recargadas y hacer frente de este modo a las desviaciones de la siniestralidad real. El resto de los principios, a excepción del último, no constituyen medida de riesgo coherente, a pesar de proporcionar primas recargadas, ya sean implícitas o explícitas y tengan su habitual aplicación en el ramo de los seguros no vida. El último de los principios, el de la función de distorsión de Wang, proporciona una prima de riesgo recargada de manera implícita y además constituye medida de riesgo coherente. Se aplica en el ramo de los seguros generales y la novedad de este artículo es su aplicación en el ramo de vida asegurador, en concreto a un seguro de rentas.

3. FUNCIÓN DE DISTORSIÓN DE WANG: TRANSFORMADA PROPORCIONAL DEL TANTO INSTANTÁNEO

3.1 Función de distorsión

Dado un riesgo, representado por la variable aleatoria pérdida $X \geq 0$, con función de distribución y función de supervivencia respectivamente:

$$F(x) = P_r(X \leq x) \tag{1}$$

$$S(x) = 1 - F(x)$$

la pérdida esperada de dicha variable, expresada a partir de la función de supervivencia, tiene la expresión:

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} S_x(x)dx \tag{2}$$

Se trata ahora de obtener una prima recargada más ajustada al riesgo basada en la denominada función de distorsión. Dada una función g no decreciente (Wang, 1995), definida por $g: [0,1] \rightarrow [0,1]$, con $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$, llamada función de distorsión, se define la prima de riesgo ajustada a la medida de riesgo esperanza distorsionada como: $E_g[X] = H(X) = \int_0^\infty g(S_X(x)) dx$, para un riesgo X con función de supervivencia $S_X(x)$. A esta función de supervivencia se la conoce como función de supervivencia ajustada al riesgo (Wang, 1995). Por este motivo, esta función g no puede ser cualquier función, dado que ha de verificar las propiedades necesarias para que $g(S_X(x))$ sea considerada función de supervivencia, ya que lo que hace dicha función g es transformar la función de supervivencia $S_X(x)$. Dichas propiedades son las siguientes (Wang, 1996), supuesto que estas funciones g y $S_X(x)$ son derivables:

1. La función $g(S_X(x))$ es una función no creciente con respecto a x . Para ello, siendo g y S derivables, su primera derivada ha de ser menor o igual que 0.

$$\frac{dg(S_X(x))}{dx} = g'(S_X(x)) S'_X(x) \leq 0 \quad (3)$$

2. La función $g(S_X(x))$ está comprendida entre 0 y 1 cuando $x \in [0; +\infty]$.
 - $S_X(0) = 1$, luego $g(S_X(0)) = g(1) = 1$.
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} S_X(x) = 0$, luego $g(\lim_{x \rightarrow \infty} S_X(x)) = g(0) = 0$.
3. Siendo g y $S_X(x)$ funciones continuas, se puede considerar a la función de supervivencia ajustada al riesgo como la función de supervivencia de otra variable aleatoria denotada por Y , con la siguiente función de densidad:

$$f_Y(x) = f_X(x) = -\frac{dg(S_X(x))}{dx} = -g'(S_X(x)) S'_X(x) = g'(S_X(x)) f_X(x).$$

Y se tiene que $g'(S_X(x))$ es una función de ponderación de la función de densidad $f_X(x)$.

Además, si $g(x)$ es una función cóncava: $\frac{dg'(S_X(x))}{dx} = g''(S_X(x)) S'_X(x) \geq 0$.

La función de distorsión permite definir una nueva variable aleatoria Y , ya que la función $g(S_X(x))$ tiene las propiedades de función de supervivencia explicadas anteriormente.

3.2 Transformada proporcional del tanto instantáneo

Este principio de cálculo de primas tiene una forma de función de distorsión con la siguiente expresión (Tse, 2009):

$$g(u) = u^{\frac{1}{\rho}} \quad \rho > 0 \quad (4)$$

$H(X) = \int_0^{\infty} g(S_X(x)) dx = \int_0^{\infty} (S_X(x))^{\frac{1}{\rho}} dx$. Esta forma de función de distorsión es la que se emplea en esta investigación. Esta expresión es a nivel general, definiéndose una nueva variable aleatoria Y , a partir del riesgo inicial denotado por X , con función de densidad y prima ajustada al riesgo dadas por:

$$\begin{aligned} S_Y(x) &= (S_X(x))^{\frac{1}{\rho}} \quad \rho > 0 \\ \Pi_{\rho}(X) = E(Y) &= \int_0^{\infty} (S_X(x))^{\frac{1}{\rho}} dx \end{aligned} \quad (5)$$

De la definición establecida en la ecuación (5) se extraen las siguientes consecuencias:

1. La $E(Y)$ es una función creciente con respecto a ρ .

$$\frac{dE(Y)}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2} \int_0^{\infty} \left(S_X(x)^{\frac{1}{\rho}} \text{Log}(S_X(x)) \right) dx > 0.$$

Dado que la expresión $\text{Log}(S_X(x)) < 0$, a mayor ρ mayor prima ajustada al riesgo, justificándose de este modo la interpretación de dicho parámetro como un índice de aversión al riesgo, tal como indica Tse (2009).

2. Los tantos instantáneos de las variables aleatorias X e Y son proporcionales. En seguros no vida (Wang, 1995), dada la variable aleatoria no negativa X con función de distribución $F_X(x)$ y función de supervivencia $S_X(x)$, dado que:

$$S_Y(t) = S(t)^{\frac{1}{\rho}} = \left[e^{-\int_0^t \mu_X(u) du} \right]^{\frac{1}{\rho}} = e^{-\int_0^t \frac{1}{\rho} \mu_X(u) du}$$

Por tanto, se verifica que:

$$\mu_Y(t) = \frac{1}{\rho} \mu_X(t) \quad \rho > 0 \quad t \geq 0 \quad (6)$$

Los tantos de las variables X e Y son proporcionales, y es por esto por lo que la nueva variable aleatoria Y se denomina transformada proporcional del tanto instantáneo de la variable X , con parámetro ρ (Wang, 1996). En general, esta transformada solo necesita que el parámetro sea mayor que cero, pero en el contexto de los seguros generales se considera que el parámetro sea $\rho \geq 1$, para así proporcionar más peso a la cola de la distribución del riesgo.

3.3 Cálculo de la prima neta y la prima recargada implícitamente para la modalidad de seguro de rentas, aplicando las cuatro leyes de supervivencia

Se procede a calcular la prima neta y la prima recargada de manera implícita para esta modalidad de seguro con cobertura de supervivencia, en tiempo continuo, con capital asegurado unitario, para una cabeza de edad x . En este caso, el riesgo está representado por la variable aleatoria $T(x)$, vida residual o tiempo de vida desde la contratación de la póliza hasta el fallecimiento del asegurado, siendo la edad de contratación la edad actuarial x . Las premisas de partida son que se abona una u.m. mientras el asegurado esté con vida, el tipo de interés técnico es i y la variable aleatoria vida residual $T(x)$ tiene una función de distribución denominada $G_x(t)$ y una función de supervivencia $S_x(t)$. Aplicando el principio de equivalencia actuarial para obtener la prima pura única (neta), se obtiene la expresión (Bowers *et al.*, 1997):

$$P = \int_0^{\infty} v^t (1 - G_x(t)) dt \quad (7)$$

Para adaptar este principio de equivalencia actuarial al cálculo de primas basado en la función de distorsión, se expresa esta integral en función de $S_x(t)$:

$$P = \int_0^{\infty} v^t (1 - G_x(t)) dt = \int_0^{\infty} v^t p_x dt = \int_0^{\infty} v^t S_x(t) dt \quad (8)$$

Haciendo el cambio de variable:

$$v^t = z;$$

$$t \ln v = \ln z$$

$$t = \frac{\ln z}{\ln v}$$

Si $t = 0$, entonces $v^0 = 1$. La variable z tomará el valor 1. Si $\lim_{t \rightarrow \infty} v^t = 0$, la variable z tomará el valor 0 puesto que el factor v es menor que la unidad. Por tanto, se tiene:

$$P = \int_0^{\infty} v^t dS_x(t) = \int_1^0 z dS_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right) = -\int_0^1 z dS_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right)$$

Integrando por partes:

$$z = u \quad dz = du$$

$$dS_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right) = dv \quad v = S_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right)$$

Se llega a la expresión de la prima única de riesgo en términos de la función de supervivencia de la variable aleatoria vida residual:

$$P = -\frac{1}{\ln v} \int_0^1 S_x\left(\frac{\ln z}{\ln v}\right) dz \quad (9)$$

Lo que se trata de hacer a continuación es obtener una prima recargada transformando la función de supervivencia por medio de una función de distorsión en forma de potencia:

$$P_{\text{rec}} = \int_0^{\infty} g(S_X(x)) dx = \int_0^{\infty} g(S_X(x))^{\frac{1}{\rho}} dx \quad (10)$$

$$P_{\text{rec}} = -\frac{1}{Lnv} \int_0^1 \left(S_X \left(\frac{Lnz}{Lnv} \right) \right)^{\frac{1}{\rho}} dz, \quad \rho \geq 1$$

Para que la prima recargada sea mayor que la prima pura, el exponente deberá ser $\frac{1}{\rho} \leq 1 \Rightarrow \rho \geq 1$.

En un seguro con cobertura de supervivencia, a la compañía aseguradora le interesa que el riesgo de longevidad del asegurado sea lo más bajo posible, para así no tener que hacer frente a la cobertura económica de la prestación cubierta en la póliza. Luego interesa que el valor del tanto instantáneo de mortalidad sea lo más elevado posible. Si se considera un tanto menor se recarga la prima ($\rho > 1$), luego la prima recargada será mayor, puesto que la compañía cobrará más dinero a los asegurados al presentar estos un tanto instantáneo de mortalidad inferior. De este modo, la función de distorsión da más peso a la cola de la variable vida residual, obteniéndose a partir de ella una prima recargada. Al ser el parámetro $\rho \geq 1$, esta esperanza distorsionada cumple las propiedades de una medida de riesgo coherente (Wang, 1995), inclusive la de subaditividad¹.

La prima recargada obtenida en (10) coincide con la prima pura de otra variable Y, con el mismo modelo de supervivencia que el de la variable inicial X, pero con un tanto instantáneo de mortalidad proporcional al tanto instantáneo de dicha variable X. Demostración de esta afirmación:

Se parte de la expresión siguiente:

$$P_{\text{rec}} = -\frac{1}{Lnv} \int_0^1 \left(S_X \left(\frac{Lnz}{Lnv} \right) \right)^{\frac{1}{\rho}} dz$$

Llamando $r = \frac{1}{\rho}$, siendo $v^t = z$ e integrando por partes:

$$P_{\text{rec}} = -\frac{1}{Lnv} \int_{\infty}^0 (S_X(t))^{\frac{1}{\rho}} v^t Lnv dt = \int_0^{\infty} v^t (S_X(t))^{\frac{1}{\rho}} dt \quad (11)$$

Si se llama $S_Y(t) = (S_X(t))^{\frac{1}{\rho}}$, entonces la expresión final de la prima recargada es:

$$P_{\text{rec}} = \int_0^{\infty} v^t (S_Y(t)) dt \quad (12)$$

La nueva expresión de prima obtenida se corresponde a la prima única de un seguro de la misma modalidad (seguro de vida entera) pero para una nueva variable aleatoria llamada Y, cuya función de supervivencia tiene la expresión $S_Y(t) = (S_X(t))^{\frac{1}{\rho}}$.

La expresión del tanto instantáneo de la variable Y es la siguiente:

¹ La propiedad de subaditividad ha sido demostrada por Wang mediante el método de la inducción matemática.

$$\mu_Y(t) = -\frac{S'_Y(t)}{S_Y(t)} = -\frac{\frac{1}{\rho} S'_X(t) (S_X(t))^{\frac{1}{\rho}-1}}{(S_X(t))^{\frac{1}{\rho}}} = -\frac{1}{\rho} \frac{S'_X(t)}{S_X(t)} = \frac{1}{\rho} \mu_X(t) \quad (13)$$

siendo $\mu_X(t)$ el tanto instantáneo de la variable inicial X. Por tanto, se llega al final de la demostración concluyendo que la prima recargada obtenida a partir de la medida de riesgo esperanza distorsionada coincide con la prima pura obtenida para la misma ley de supervivencia, pero con un tanto proporcional, con factor de proporcionalidad $\frac{1}{\rho}$.

En la Tabla 5 se muestran las primas únicas de riesgo netas y recargadas calculadas para las cuatro leyes de supervivencia, mediante el empleo de la función de distorsión de Wang en forma de potencia. El desarrollo matemático completo se encuentra en Hernández (2013).

Tabla 5. Primas únicas de riesgo netas y recargadas

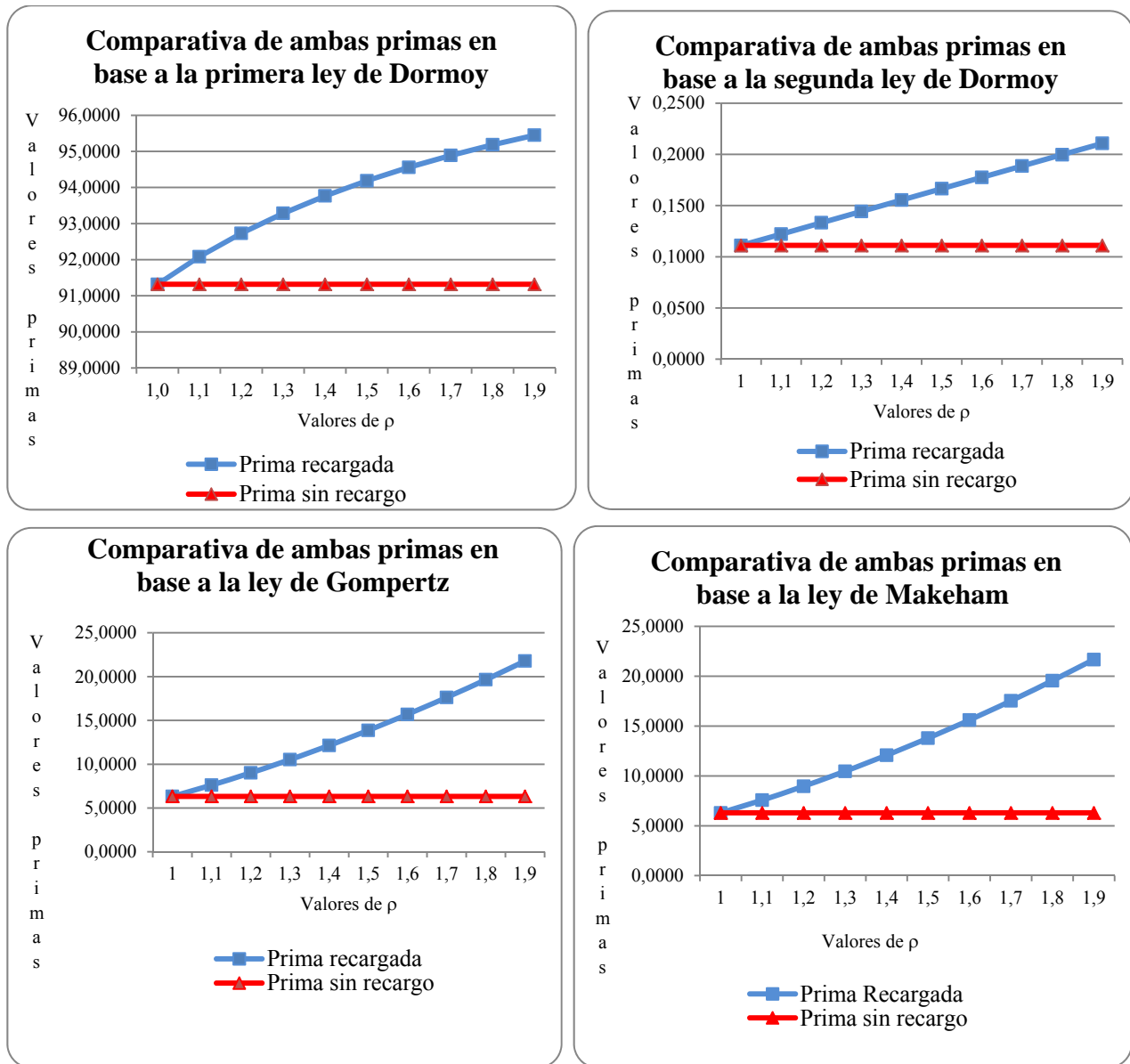
| Leyes de supervivencia | Prima neta | Prima única riesgo recargada |
|-------------------------------|---|--|
| Primera ley de Dormoy | $P = -\frac{1}{\text{Ln}S + \text{Lnv}}$ | $P_{\text{rec}} = \frac{-1}{\frac{1}{\text{Ln}S^{\rho} + \text{Lnv}}}$ |
| Segunda ley de Dormoy | $P = \frac{-1}{\text{Ln}S_1 + (2x+2)\text{Ln}S_2 + \text{Lnv}}$ | $P_{\text{rec}} = \frac{-1}{\text{Ln}S_1^{\frac{1}{\rho}} + \text{Lnv} + \text{Ln}S_2^{\frac{2^{1-(x+1)}}{\rho}}}$ |
| Ley de Gompertz | $P = \frac{-1}{g^{C^x} (C^{x+1} \text{Lng} + \text{Lnv})}$ | $P_{\text{rec}} = \frac{-1}{g^{\frac{C^x}{\rho}} \left(C^{x+1} \frac{1}{\rho} \text{Lng} + \text{Lnv} \right)}$ |
| Primera ley de Makeham | $P = \frac{-1}{g^{C^x} (\text{Ln}S + C^{x+1} \text{Lng} + \text{Lnv})}$ | $P_{\text{rec}} = \frac{-1}{g^{\frac{C^x}{\rho}} \left(\frac{1}{\rho} \text{Ln}S + C^{x+1} \frac{1}{\rho} \text{Lng} + \text{Lnv} \right)}$ |

Fuente: elaboración propia. Esta Tabla relaciona las primas únicas de riesgo netas y recargadas implícitamente, a través de la función de distorsión de Wang en forma de potencia, con cada una de las leyes de supervivencia.

Con el objetivo de mostrar gráficamente cómo evoluciona la prima de riesgo recargada mediante esta medida de riesgo coherente, la transformada proporcional del tanto instantáneo, y de este modo proporcionar una justificación teórica a la práctica habitual que llevan a cabo las entidades aseguradoras de modificar las probabilidades de supervivencia y evitar así las desviaciones desfavorables de la siniestralidad real con respecto a la esperada, se detallan unos gráficos para los valores que toma el parámetro $\rho \geq 1$. Se ha considerado la recomendación realizada por Solvencia II en el documento QIS5, donde se indica que el valor del parámetro se recomienda sea de 1,20 para esta modalidad de seguro. Para este seguro con cobertura de supervivencia se han tomado valores del parámetro ρ que oscilan desde 1 hasta 1,9, con incrementos de valor 0,1. Los valores numéricos asignados a los parámetros de las cuatro leyes de supervivencia se han

tomado de las tablas de mortalidad empleadas (Prieto, 2000), por ser éstas las que mejor se ajustan al modelo con el que se está trabajando en el artículo, que es el de la función de distorsión de Wang en forma de potencia, la llamada transformada proporcional del tanto instantáneo.

Figura 2. Evolución de la prima neta y la prima de riesgo recargada



Fuente: elaboración propia. En los gráficos se observa el impacto del recargo implícito sobre la prima única de riesgo según aumenta el parámetro ρ , en base a cada una de las cuatro leyes con las que se trabaja en el artículo. Los valores numéricos de ambas primas se han obtenido a partir de los valores asignados a los parámetros: edad actuarial 40 años, tipo interés técnico del 1%, $S_1 = 0,7$, $S_2 = 0,9$, $S = 0,999$, $g = 0,9969$ y $C = 1,1034$. Datos extraídos de las tablas de mortalidad elaboradas por Prieto Pérez (Prieto y Fernández, 2000): tabla proyectada del año 2000 de mortalidad española de 1950 a 1990.

4. CONCLUSIONES

En este artículo se refleja cómo se ha obtenido un principio de cálculo de prima para seguros de vida, basado en la función de distorsión de Wang en su forma de potencia y aplicado a la modalidad de seguro de supervivencia (rentas). El objetivo perseguido ha sido obtener un método alternativo de tarificación, diferente del principio basado en las esperanzas matemáticas, para calcular la prima única de riesgo recargada que refleje una siniestralidad superior a la esperada. Dicha prima está basada en una medida de riesgo coherente, la llamada esperanza distorsionada transformada proporcional del tanto instantáneo. El resultado obtenido permite justificar la práctica habitual que realizan las compañías aseguradoras, en el área de vida, de manipular el tanto instantáneo de mortalidad con el fin de obtener una prima recargada a través de un recargo implícito. La recomendación que realiza Solvencia II en lo que respecta al importe que tome dicho recargo se encuentra especificado en el informe técnico QIS5.

La función de distorsión de Wang en su forma de potencia es una medida de riesgo coherente. Para los valores que toma el parámetro $\rho \geq 1$, ya fue demostrado (Wang, 1995) que esta medida de riesgo es coherente, por verificar la propiedad de subaditividad, ya que el resto de las mismas solo precisan del valor del parámetro mayor que 0. De este modo se consigue obtener una prima de riesgo recargada mayor que la prima neta. Por tanto, una de las principales aportaciones de este artículo es que la función de distorsión seleccionada en este trabajo, la llamada esperanza distorsionada, es apta para tarificar en vida, haciendo lo análogo a lo que ya hizo Wang en 1995, pero aplicado a la rama de los seguros generales. Otro resultado logrado es que la prima recargada, calculada para todas y cada una de las leyes empleadas y para la modalidad de seguro elegida, con la función de distorsión de Wang en forma de potencia, es la misma a la que se obtendría (prima neta) a partir de otra variable aleatoria que sigue la misma ley de supervivencia, modificándose exclusivamente el valor de los parámetros. Esto significa que las leyes empleadas son invariantes ante el empleo de dicha función, tal como puede observarse en la Tabla 5.

Para la modalidad del seguro de rentas, la modificación que sufren los parámetros origina el mismo efecto en la probabilidad de fallecimiento en las cuatro leyes de supervivencia: dicha probabilidad disminuye, lo que hace que la prima recargada sea superior a la prima neta. Así se ha logrado el objetivo propuesto de recargar la prima única de riesgo de manera implícita, con el único efecto sobre las leyes de cambiar sus parámetros. Justamente la modificación que experimentan estos es que los nuevos parámetros son proporcionales a los parámetros de las leyes aplicadas para calcular la prima neta, siendo el factor de proporcionalidad el exponente de la función de distorsión transformada proporcional, $\frac{1}{\rho}$. Además, el efecto que produce la función de distorsión sobre las leyes de mortalidad utilizadas es que las nuevas leyes presentan un tanto instantáneo de mortalidad proporcional al de la ley original.

Al trabajar con la modalidad de seguro con cobertura de supervivencia, el exponente de la función de distorsión, que es el factor de proporcionalidad ya definido, ha de ser menor que uno, para que de este modo la medida de riesgo esperanza distorsionada sea una medida de riesgo coherente por verificarse así los

axiomas de coherencia, y conseguir que el riesgo de longevidad sea mayor mediante el empleo de dicha función de distorsión. Con este parámetro ρ se justifica, a través de una medida de riesgo coherente, la práctica habitual en el ramo de vida de recargar el tanto instantáneo, y así poder hacer frente a las desviaciones desfavorables de la siniestralidad real con respecto a la esperada.

En esta modalidad de seguro, al ser el cociente $\frac{1}{\rho}$ proporcional al tanto instantáneo de mortalidad, conforme aumenta ρ disminuye la probabilidad de fallecimiento, luego esto implica un mayor riesgo para la compañía aseguradora. Es por esta razón por la que la entidad cobrará primas recargadas de manera implícita cada vez mayores ante incrementos en el valor de dicho parámetro. Por ello, la relación entre la prima única de riesgo recargada y el parámetro ρ será creciente.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de investigación ha sido financiado por el MICIN, nº de proyecto ECON-2010-22065-C03-01.

REFERENCIAS

- Artzner, P. (1999) “Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance”, *North American Actuarial Journal*, 3 (2), pp.11–15.
- Aartzner, P.; Delbaen, F.; Eber, J.M.; Heath, D. (1999) “Coherent measures of risk”, *Mathematical Finance*, 9, pp. 203–228.
- Bowers, J.R.; Newton, L.; Gerber, H.; Jones, D. (1997) *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Illinois.
- Denuit, D.; Dhaene, J.; Goovaerts, M.; Kaas, R. (2005) *Actuarial Theory for Dependent risks: measures, orders and model*, John Wiley & Sons.
- European Commission (2010) *Internal Market and Services DG. Insurance and pensions, QIS5 Technical Specifications (Working Document of the Commission services)*. Disponible en: <https://www.ceiops.eu>.
- Gerber, H. (1979) *An introduction to mathematical risk theory*, Huebner Foundation.
- Gómez, E.; Sarabia, J.M. (2008) *Teoría de la Credibilidad. Desarrollo y aplicaciones en primas de seguros y riesgos operacionales*, Fundación MAPFRE.
- Heilmann, W. (1989) “Decision theoretic foundations of credibility theory”, *Insurance: Mathematics & Economics*, 8, pp. 77–95.
- Heras, A. (2010) “Medidas del riesgo y sus aplicaciones actuariales y financieras”, *Economía Española y protección social*, II, pp. 69–103.
- Hernández Solís, M. (2013) “Tarificación en seguros de vida con la medida de riesgo esperanza distorsionada”, *Tesis Doctoral*, Universidad Complutense, Madrid.
- Hurlimann, W. (2008) “Distortion Risk measures and Economic capital”, *North American Actuarial Journal*, 8, pp. 86–95.
- Landsman, Z.; Sherris, M. (2001) “Risk measures and insurance premium principles”, *Insurance: Mathematics & Economics*, 29, pp. 103–115.

- Modigliani, M.; Miller, M. (1958) “The cost of capital, Corporate Finance and the Theory of Investment”, *The American Economic Review*, 48, pp. 261–297.
- Prieto, E.; Fernández, J. (2000) *Tablas de Mortalidad de la Población Española de 1950 a 1990*, Editorial Aseguradora.
- Sandell, R. (2003) *El envejecimiento de la población*, Real Instituto Elcano, WP 20.
- Tasche, D. (2000) *Risk contributions and performance measurement*, Technische Universität München, Munich.
- Tse, Y-K. (2009) *Nonlife Actuarial Models. Theory, methods and evaluation*, Cambridge University Press.
- Vegas, J. (2000) “El riesgo de longevidad en los planes de pensiones”, *Anales Instituto Actuarios Españoles*, 6, pp. 119–157.
- Wang, S. (1995) “Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms”, *Insurance Mathematics and Economic*, 17, pp. 43–54.
- Wang, S. (1996) “Premium calculation by transforming the layer premium density”, *Astin Bulletin*, 26.
- Wang, S. (2000) “A class of distortion operators for pricing financial and insurance risk”, *Journal of Risk and Insurance*, 67, pp. 15–37.
- Wang, S.; Young, V.; Panjer, H. (1997) “Axiomatic characterization of insurance prices”, *Insurance Mathematics and Economics*, 21, pp.173–183.
- Young, V. (2004) *Premium Principles*, Encyclopedia of actuarial Science, Wiley, New York.



UNIVERSIDAD
PABLO
OLAVIDE
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (15). Páginas 168–187.
Junio de 2013. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=75>

Análisis de la estabilidad de una economía con desequilibrios sectoriales

PEREIRA LÓPEZ, XESÚS

Departamento de Economía Cuantitativa
Universidade de Santiago de Compostela (España)
Correo electrónico: xesus.pereira@usc.es

QUIÑOÁ LÓPEZ, JOSÉ LUIS

Departamento de Economía Cuantitativa
Universidade de Santiago de Compostela (España)
Correo electrónico: joseluis.quinoa@usc.es

FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ, MELCHOR

Departamento de Fundamentos del Análisis Económico
Universidade de Santiago de Compostela (España)
Correo electrónico: melchor.fernandez@usc.es

RESUMEN

La presencia de elementos negativos en el vector de *inputs* primarios en el contexto del marco input-output ha sido considerada un impedimento para la formulación de modelos lineales multisectoriales. Lo cierto es que si se da esta circunstancia, las correspondientes ramas productivas presentan un desequilibrio, aunque la economía en su conjunto puede ser estable a corto plazo. En este artículo se demuestra que este hecho no implica obligatoriamente un error en la elaboración de las tablas input-output ni conlleva forzosas modificaciones de las mismas para facilitar su utilización en la modelización. En efecto, se verá cómo pueden existir soluciones no negativas, sin necesidad de acudir a la clásica condición de Hawkins-Simon. Dicho de otra forma, se estudia hasta qué punto los desequilibrios sectoriales no ponen en riesgo la viabilidad del sistema económico objeto de estudio. En esa línea, se introducen varias herramientas, a modo de teoremas, para averiguar si en determinados casos existen inversas de Leontief no negativas que permitan el desarrollo y solución de los conocidos modelos de oferta y demanda input-output. También se abordan las interpretaciones económicas de las distintas matrices instrumentales utilizadas en el análisis descrito.

Palabras clave: input-output; valores negativos; estabilidad económica.

Clasificación JEL: C67; D57.

MSC2010: 93D25.

Artículo recibido el 21 de diciembre de 2012 y aceptado el 31 de mayo de 2013.

Analysis of the Stability in an Economy with Sectoral Imbalances

ABSTRACT

The presence of negative values in the primary inputs vector in the input output framework has been considered as a limitation to the development of multi-sectoral linear models. It is true that, when this circumstance happens, the industries that are related appear unbalanced, however, the whole economic system could be stable within a short time. In this paper we demonstrate that this fact does not imply an error in the construction of the input-output tables nor involves unavoidable modifications to facilitate its use in modeling. It will be shown how non-negatives solutions can appear without taking into account the classic Hawkins-Simon condition. In other words, in this paper we examine until which extent sectoral imbalances do not put in danger the viability of the whole economic system under study. In line with this, we introduce several tools, as theorems, in order to see in which cases non-negatives Leontief's inverses can exist that enable the development and solution of supply and demand input-output models. It is also considered the possible economic interpretations of the different instrumental matrices used in the described analysis.

Keywords: input-output; negative values; economic stability.

JEL classification: C67; D57.

MSC2010: 93D25.



1. INTRODUCCIÓN

La metodología input-output se utiliza en distintos campos de conocimiento y tiene bastante presencia en el ámbito del análisis económico. Las tablas input-output (TIOs) recogen los flujos de transacciones productivas de un determinado territorio, así como una desagregación sectorial de la demanda final e *inputs* primarios del mismo. La obtención de matrices como la de coeficientes técnicos o la inversa de Leontief permiten cuantificar determinados multiplicadores que facilitan la interpretación de la estructura productiva del territorio objeto de estudio. En concreto, permiten calcular el impacto de interdependencia, directo e indirecto, realizado sobre todos los sectores en función de un cambio en la demanda final. Las ventajas y dificultades de dicha metodología, así como sus múltiples aplicaciones, son suficientemente conocidas.¹

El marco input-output, como así lo denomina el Sistema Europeo de Cuentas vigente (SEC-95), engloba distintos tipos de tablas: bien con formato simétrico o bien rectangulares; consúltese Eurostat (1996) o Naciones Unidas (1999), que tienen como objetivo describir el flujo de bienes y servicios entre los distintos sectores de la economía de referencia durante un periodo de tiempo fijado. Aunque el objetivo de este artículo no es efectuar un repaso demorado de estos esquemas contables, por lo menos se cree oportuno señalar que, en las TIOs simétricas, la demanda intermedia de cada uno de los bienes y servicios que realizan los diferentes sectores homogéneos y la correspondiente demanda final figuran por filas; y los bienes, los servicios y los factores primarios adquiridos por cada uno de los sectores figuran por columnas; de tal forma que aportan una información estadística acerca de los flujos intersectoriales, de la demanda final y del valor añadido por sectores.²

En las TIOs, los elementos de la matriz de consumos intermedios son no negativos y lo más frecuente es que los elementos del vector de *inputs* primarios (la agregación de Sueldos y Salarios, Excedente Bruto de Explotación/Rentas Mixtas e Impuestos netos sobre la producción³) por industria también lo sean. Sin embargo, es posible que algunas actividades en años concretos puedan obtener beneficios negativos, lo cual se traduciría en las estadísticas oficiales en una entrada negativa en la fila donde se representa el vector de coste del capital (véase por ejemplo, en los marcos input-output recientemente publicados con referencia 2008, la rama de Fabricación de otro material de transporte en Galicia o la rama de Actividades postales y de correos en Andalucía). Por supuesto, este beneficio negativo podría llegar a superar el valor del resto de componentes del valor añadido por sectores y, por lo tanto, suponer que el total de *input* primarios fuese una cifra negativa. La agregación de industrias evita en algunas ocasiones

¹ Para mayor detalle véase Pulido y Fontela (1993).

² En el formato rectangular, las filas se corresponden con productos y las columnas con ramas de actividad no homogéneas. Pero en este caso no se trata dicho formato.

³ Los impuestos netos sobre la producción pueden tener un valor agregado negativo cuando las subvenciones a la producción superan a los impuestos sobre la misma.

esta circunstancia al compensar las pérdidas entre sectores.⁴ Por lo tanto, si las sumas de los distintos componentes del valor añadido son no negativas todas las ramas productivas del sistema económico están en equilibrio y, en consecuencia, la economía en su conjunto también está en equilibrio. En este sentido, se considera que una economía tiene todos sus sectores en equilibrio si se cumple la condición de Brauer-Solow. En efecto, si se acude al modelo de demanda input-output se asegura una producción no negativa para todo vector de demanda final (neta de importaciones) no negativo.

Esta condición suficiente es bastante restrictiva porque se exige que todos los sectores ofrezcan un beneficio positivo o nulo en todo momento cuando es perfectamente plausible que sean relativamente numerosas las industrias que generen pérdidas en un año concreto. Sin embargo, las TIOs publicadas por los institutos oficiales de estadística cumplen casi siempre este requisito, cuestión que puede ser debida a la propia realidad económica o al nivel de desagregación sectorial elegido.⁵ Si esos valores fuesen negativos, las ramas de actividad vinculadas a los mismos consumirían una mayor cantidad de *inputs* intermedios que sus propios niveles de producción. En ese caso, las sumas de las correspondientes columnas de los coeficientes técnicos serían mayores que uno. A pesar de ello, si aparecen cifras negativas hay que averiguar si existen soluciones no negativas, o sea, hay que analizar si esos desequilibrios sectoriales pueden ser soportados por el conjunto del sistema económico y obtener soluciones donde algunas actividades observen pérdidas. En principio, no resultaría extraño encontrarse con un escenario como el ahora señalado, sobre todo si se trabaja con una desagregación considerable.⁶ Es probable que en un momento puntual existan pérdidas sectoriales (o sub-sectoriales) y, a pesar de ello, una economía sea capaz de ofrecer una elevada estabilidad económica. En este sentido, es factible que haya sub-sectores con un valor añadido negativo, en algunos casos como resultado de un *shock* negativo en precios o productividad y otros por una decisión consciente (subvenciones de explotación) justificada por la cohesión territorial, por el freno del despoblamiento rural, por la conservación del patrimonio rural o por la sostenibilidad del entorno ambiental. No obstante, como todos estos factores benefician al conjunto de la sociedad es lógico que sectores excedentarios –que, en general, son más propensos al deterioro medioambiental– contribuyan de algún modo a la conservación del medio y faciliten la

⁴ En las cuentas satélites es necesario recurrir a un mayor grado de desagregación en aquellos sectores encuadrados en el ámbito de estudio, por lo tanto es más probable que aparezcan valores añadidos negativos para los sub-sectores.

⁵ Aquí no se considera el trato dado en su momento a los Servicios de Intermediación Financiera Medidos Indirectamente (SIFMI). En efecto, antes de la entrada en vigor del Reglamento de la Comisión Europea Nº 1889/2002, de 23 de octubre de 2002 (sobre la medición de la producción de los intermediarios financieros y la asignación de esa producción entre las unidades que las utilizan) en las TIOs aparecían valores añadidos negativos en relación a los SIFMI.

⁶ Este resultado es común en los procesos de actualización de matrices input-output o en desagregaciones territoriales. Si el precio de los *inputs* sufrió mayores variaciones que los precios del *output* durante el periodo de análisis, es factible que el valor añadido estimado sea negativo.

existencia y mantenimiento de estas actividades que difícilmente pueden ser rentables en una economía plenamente competitiva.⁷

Con relación a los modelos input-output dinámicos y otros afines, se han analizado múltiples conceptos y entre ellos el de equilibrio estable; véase McKenzie (1960). Takayama (1974), entre otras nociones, analiza la relación entre estabilidad local y global. Rosenblatt (1957) y Lady (1996) muestran herramientas para detectar matrices estables. En definitiva, el uso del término *stable* (o *stability*) es muy frecuente en el análisis económico, sobre todo cuando influye la variable tiempo.

Por lo tanto, el principal objetivo de este artículo consiste en comprobar que la observación de pérdidas puntuales en diferentes ramas de actividad, que podrían dar lugar a uno o varios valores negativos en el vector de valor añadido, no implica necesariamente un problema para la elaboración y resolución de los tradicionales modelos lineales multisectoriales. En consecuencia, no sería necesario modificar el marco input-output para evitar, por distintas vías como agregaciones u otros ajustes más complejos, su reflejo en la estadística oficial. En esta línea, se presentan varios teoremas para analizar si existen soluciones viables desde el punto de vista económico. Además, como es lógico se efectuarán las demostraciones de dichos teoremas. También se exponen las interpretaciones económicas relativas a los elementos de las matrices que se emplearán posteriormente como herramientas de apoyo.

En todo caso, se hace explícito que la aplicación práctica de estos teoremas es limitada en la actualidad, dados los pocos casos reales existentes de sectores con valores añadidos negativos en las TIOs oficialmente publicadas. Sin duda, vencidos los problemas de computación, la necesidad de mejorar la desagregación sectorial del marco input-output para tratar ramas y sectores incipientes con un mayor nivel de detalle, mostrará el verdadero alcance de la propuesta realizada en este trabajo. En este caso, es mucho más sencillo que el problema de la existencia de valores añadidos negativos se dé en mayor medida lo que hace imprescindible la existencia de alternativas teóricas que permitan la elaboración de los diferentes modelos propuestos en el análisis input-output.

2. EL MODELO DE DEMANDA Y LA INVERSA DE LEONTIEF

El modelo de demanda, o de Leontief, se emplea para analizar las repercusiones sectoriales mediante variaciones en la demanda final; por lo tanto, es un modelo orientado desde el lado de la demanda. Las relaciones por filas de una TIO simétrica se pueden escribir del siguiente modo:

⁷ En este punto es interesante indicar que en muchas economías con elevados niveles de protección exterior de su producción podrían observar valores añadidos negativos en muchas actividades si los precios de referencia para la compra de los *inputs* necesarios para el proceso productivo o la venta del *output* dejasen de estar administrados por el sector público. Es decir, un proceso de producción puede ser eficiente para un conjunto de precios pero puede ser ineficiente para otro conjunto de precios diferentes (Naciones Unidas, 1993).

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + y_1 \\ x_2 &= x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + y_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} + y_n \end{aligned} \right\}$$

donde x_{ij} representa el flujo que va del sector suministrador i al sector receptor j ($i, j \in N^*$), x_i es la producción total del sector i , y_i es la demanda final neta de importaciones del sector i y n es el número de sectores considerado. Los flujos se pueden expresar en términos de unidades físicas o monetarias. Matricialmente se tiene que:

$$x = Ze + y, \tag{1}$$

donde x es el vector columna de producción por sectores, Z es la matriz de transacciones o flujos intersectoriales, e es una matriz columna (vector) de unos e y es el vector de demanda final (neta de importaciones) por sectores.⁸

A partir de la relación contable (1), se elabora el modelo de demanda. Eso sí, asumiendo que la proporción de factores empleada por cada sector productivo es invariable. Previamente, se define la matriz de coeficientes técnicos totales: $A = Z \hat{x}^{-1}$, donde \hat{x} es la matriz diagonal de producción. Mediante operaciones elementales se obtiene el sistema de Leontief:

$$(I - A)x = y, \tag{2}$$

donde $(I - A)$ es la matriz de Leontief, que es de la siguiente forma:

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1 - a_{nn} \end{pmatrix}$$

El sistema presentado en (2) se conoce como el modelo del sistema input-output. Si la inversa de $(I - A)$ es no negativa, el sistema tendría por solución la siguiente expresión⁹:

$$x = (I - A)^{-1}y, \tag{3}$$

La matriz $(I - A)^{-1}$ se denomina inversa de Leontief y hace referencia a los requerimientos totales (directos e indirectos), de tal modo que relaciona la producción de cada

⁸ Las notaciones en minúsculas hacen referencia a vectores y las que aparecen en mayúsculas a matrices, excepto aquellas matrices que se corresponden con vectores diagonalizados. El símbolo $\hat{}$ asociado a un vector indica la correspondiente diagonalización del mismo

⁹ En relación con las TIOs simétricas, se admite que se verifican las siguientes condiciones: i) El input total es igual a la producción total de cada sector o rama de actividad. ii) Las estructuras productivas y de distribución son diferentes por ramas, o sea, en la matriz de coeficientes técnicos no se manifiesta dependencia lineal tanto por columnas como por filas. iii) Cada elemento de A es no negativo y al mismo tiempo estrictamente menor que uno. iv) La suma de los coeficientes técnicos de inputs intermedios y primarios (por unidad de producción) de cada columna es igual a uno.

sector con la demanda final neta de importaciones. Los elementos de la diagonal principal deben ser mayores o iguales a uno, lo que significa que para producir una unidad adicional para satisfacer la demanda final neta de importaciones, es necesario aumentar la producción al menos en una unidad. La inversa de Leontief se emplea asiduamente para explicar los distintos efectos de la demanda final sobre la producción, diferenciándolos entre directos e indirectos. Seguidamente se analizan ciertos aspectos acerca de la inversa de Leontief que se tomarán a posteriori como referentes.

De tal modo que se parte de la relación (1)¹⁰. Ahora bien, admitiendo la estabilidad de los coeficientes técnicos, también se puede presentar de modo alternativo de la siguiente forma:

$$x = y + Ax.$$

En este contexto se supone que ninguna fila de la matriz de consumos intermedios es combinación lineal de las restantes¹¹, bajo este supuesto se tiene que $|A| \neq 0$ y, por lo tanto, existe la inversa de A . A continuación, se multiplican por la izquierda ambos miembros de esta identidad por la matriz de coeficientes técnicos:

$$Ax = A(y + Ax),$$

pero como $Ax = x - y$ se tiene que:

$$x - y = Ay + A^2x.$$

Entonces, el vector de producción se escribe como sigue:

$$x = y + Ay + A^2x = (I + A)y + A^2x.$$

De tal forma que aparece una primera aproximación de la descomposición de la producción dada por la demanda final (efecto directo), por el primer efecto indirecto dado por esa demanda final (Ay) ¹² y por los restantes efectos. A partir de aquí, si se desea continuar desagregando los restantes efectos, hay que multiplicar de nuevo por la izquierda por A y realizar las pertinentes operaciones de manera sucesiva, obteniendo la expresión general¹³:

$$x = y + Ay + A^2y + \dots + A^n y + A^{n+1}x = (I + A + A^2 + \dots + A^n)y + A^{n+1}x.$$

Entonces se tiene que:

$$x = (I + A + A^2 + \dots + A^n + \dots)y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right)y = (I - A)^{-1}y.$$

¹⁰ A los efectos de esta exposición, se considera que las TIOs se expresan en términos de valor.

¹¹ En muchos ocasiones se denomina a una economía de estas características como indescomponible; véase Morillas (1982).

¹² Morillas (1982) denomina a este vector como *inputs* directos requeridos para hacer posible la necesidad original de *output* (demanda final estipulada).

¹³ Dadas las características de A , según se incrementa n la potencia A^{n+1} converge hacia la matriz nula. Por ejemplo, puede consultarse este resultado en Miller y Blair (2009).

Se observa que la inversa de Leontief se corresponde con una serie de potencias de matrices. En realidad, es una forma de descomponer la producción a través de los distintos efectos: el directo y los indirectos, que en cada eslabón se van reduciendo.¹⁴ Aunque no se verifique que todas las sumas por columnas de la matriz A sean estrictamente menores que uno, fácilmente las de A^2 lo verifican. Por lo tanto, la serie matricial convergería y no existiría ningún problema en la búsqueda de una solución con significado económico. También se considera oportuno detenerse en los elementos de la matriz A^2 . Su elemento genérico es de la siguiente forma:

$$a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \dots + a_{in}a_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

El hecho de exigir que las sumas por columnas de A^2 sea estrictamente menor que uno ya implica tener presente la interrelación entre las distintas ramas que constituyen el sistema económico. En este contexto ya existe una diferencia con la primera exigencia, donde se analizaban los sectores a través de las sumas de las distintas columnas, aunque de forma aislada. La expresión genérica concerniente a la suma por columnas de los elementos de esta matriz es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj}, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Considerando TIOs en términos de valor¹⁵, la anterior expresión representa la *proporción que las distintas ramas de actividad aportan a la rama 1 por la proporción que esta aporta a la rama j y así sucesivamente, a través de las restantes ramas de la economía*. De esta forma, se va más allá de los requerimientos directos de la rama j porque también se consideran los inputs que precisan las distintas ramas suministradoras del sector j , es decir, se acude al primer eslabón de requerimientos indirectos. Si se procede por filas, se ve como la suma de la fila i es del siguiente modo:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj},$$

representando *la proporción de inputs de la rama i destinada a la rama 1 por las proporciones que esta última rama aporta a las restantes ramas y así para las demás ramas productivas*. Por lo tanto, se explicita la mencionada interrelación sectorial, que evidentemente no es tan palpable si se analiza solamente la matriz de coeficientes técnicos.

¹⁴ El algoritmo que aquí aparece se toma como referente en muchas ocasiones, por ejemplo, en Sánchez-Chóliz y Duarte (2003). En lo que respecta a la descomposición de la producción aquí presentada, en Robles y Sanjuán (2005) se puede ver la exposición del cálculo de efectos directos e indirectos de acuerdo con la misma.

¹⁵ Si el sistema se formula en términos de cantidades no tiene sentido la interpretación; consúltese Morillas (1982).

3. UNA EXPRESIÓN ALTERNATIVA DEL MODELO DE DEMANDA

En este apartado se expresa el modelo de demanda (flujos totales) de una forma alternativa. Previamente se construye una matriz instrumental, $(I - K^{-1}(I - A))$, que será objeto de estudio posteriormente. A partir de la matriz $(I - A)$, se elabora una matriz diagonal con los elementos de su diagonal principal.

$$K = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dadas las características de los coeficientes técnicos (recuérdese que los mismos son no negativos y estrictamente menores que uno), existe K^{-1} . A partir de estas matrices, se construye la siguiente matriz instrumental:

$$(I - K^{-1}(I - A)) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{1-a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{1-a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{1-a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{a_{2n}}{1-a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{1-a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{1-a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

A efectos de buscar otra expresión del modelo de demanda, se multiplica por la izquierda ambos miembros de (2) por la matriz K^{-1} :

$$K^{-1}(I - A)x = K^{-1}y.$$

Y ahora se suman a los mismos el vector de producción:

$$x + K^{-1}(I - A)x = K^{-1}y + x.$$

Obteniendo que:

$$x = K^{-1}y + x - K^{-1}(I - A)x;$$

$$x = K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))x. \quad (4)$$

Donde las ecuaciones son de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{1-a_{11}} y_1 + \frac{a_{12}}{1-a_{11}} x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{1-a_{11}} x_n \\ x_2 &= \frac{1}{1-a_{22}} y_2 + \frac{a_{21}}{1-a_{22}} x_1 + \cdots + \frac{a_{2n}}{1-a_{22}} x_n \\ &\quad \dots\dots\dots \\ x_n &= \frac{1}{1-a_{nn}} y_n + \frac{a_{n1}}{1-a_{nn}} x_1 + \cdots + \frac{a_{n(n-1)}}{1-a_{nn}} x_{n-1} \end{aligned} \right\},$$

o sea, cada ecuación se escribe de la siguiente manera:

$$\forall i = 1, 2, \dots, n, \quad x_i = \frac{1}{1 - a_{ii}} y_i + \sum_{j=1(j \neq i)}^n \frac{a_{ij}}{1 - a_{ii}} x_j.$$

En realidad, cada ecuación representa una descomposición de la producción de la rama i por destinos, bien sea encaminada hacia la demanda final o bien hacia la demanda intermedia de las restantes ramas productivas del sistema, atendiendo siempre a los autoconsumos de la rama productora. Ahora, si se multiplican por la izquierda ambos miembros de (4) por $(I - K^{-1}(I - A))$ se obtiene que:¹⁶

$$(I - K^{-1}(I - A))x = (I - K^{-1}(I - A))[K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))x].$$

A partir de aquí,

$$x - K^{-1}(I - A)x = (I - K^{-1}(I - A))K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))^2 x,$$

pero como $(I - A)x$ se corresponde con y , se tiene que:

$$x = K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))^2 x.$$

Repitiendo el proceso de forma sucesiva, se logra la expresión general:

$$x = K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))K^{-1}y + \dots + (I - K^{-1}(I - A))^n K^{-1}y + (I - K^{-1}(I - A))^{n+1} x.$$

A partir de un determinado n , la matriz $(I - K^{-1}(I - A))^{n+1}$ se aproxima a la matriz nula, o sea que $\lim_{n \rightarrow \infty} (I - K^{-1}(I - A))^n = 0$. Entonces, se tiene que:

$$x = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (I - K^{-1}(I - A))^n \right] K^{-1}y. \quad (5)$$

En esta representación alternativa del modelo de demanda, a la matriz $(I - K^{-1}(I - A))$ se le otorga la función que cumple la matriz de Leontief en (3) y el vector $K^{-1}y$ es la variable independiente.

4. ¿CÓMO SE PUEDE DETERMINAR LA ESTABILIDAD DE UN SISTEMA INPUT-OUTPUT?

De entrada, se indica que es necesario diferenciar una economía productiva de una economía con todos los sectores productivos en equilibrio; por supuesto que lo segundo implica lo primero. Generalmente, se dice que una economía es productiva si existe la inversa de Leontief no negativa; para determinar este hecho, se usa la condición necesaria y suficiente de Hawkins-Simon. Sin embargo, a veces cuando se analizan las características de una matriz de Leontief se recurre a la condición suficiente de Brauer-Solow; consúltese Waugh (1950) o Morillas (1982). Así, una economía tiene todos los sectores en equilibrio si las sumas por columnas de los

¹⁶ Aunque no se demuestra si existe la inversa de esta matriz, se asume que se puede obtener.

elementos de la matriz de coeficientes técnicos son estrictamente menores que uno. Esta condición suficiente implica que el autovalor máximo de A es estrictamente menor que uno. Por tanto, la matriz de Leontief es invertible y no negativa. En efecto, si se acude al modelo de Leontief (3) se asegura una producción no negativa para todo vector de demanda final (neta de importaciones) no negativo.

En este apartado se explica cómo se puede averiguar, a través del análisis de la matriz instrumental $(I - K^{-1}(I - A))$, si una economía puede admitir un desequilibrio en una rama, o incluso en varias ramas productivas. Así, hay que demostrar como en un contexto de este tipo el sistema sigue funcionando, en el sentido de que exista la inversa de Leontief (relativa a dicha economía) y al mismo tiempo sea no negativa.¹⁷ Una forma fácil de afrontar el análisis anteriormente descrito consiste en ver si la matriz de Leontief $(I - A)$ cumple la condición necesaria y suficiente de Hawkins-Simon, que se expresa como sigue¹⁸: *Existe la inversa de Leontief y la misma es no negativa si y solo si todos los menores principales de la matriz de Leontief $(I - A)$ son estrictamente positivos.*

También se puede dar una caracterización de las matrices productivas como aquellas en que todos sus autovalores (en valor absoluto) son menores que 1. Esta última caracterización se basa en la combinación de dos resultados: el primero es el Teorema de Perron-Frobenius (Perron (1907); Frobenius (1912)), por el que el radio espectral de la matriz (máximo de los autovalores en valor absoluto) vendría determinado por el mayor autovalor real, llamado raíz de Perron o autovalor de Perron-Frobenius; mientras que el segundo dice que una matriz no negativa A satisface que la inversa de $(\rho I - A)$ es no negativa si y solo si ρ es mayor que la raíz de Perron (es decir, que el radio espectral). Las demostraciones se encuentran en Takayama (1974); para Perron-Frobenius pp. 372–375 y para el segundo resultado pp. 385–387.

Una primera observación acerca de la condición de Hawkins-Simon es que al intentar buscar una interpretación económica a los menores principales resulta complicado,¹⁹ porque normalmente se trabaja con una matriz de dimensión elevada. Al acudir al concepto de determinante las dificultades de interpretación aumentan. A veces se considera un único menor principal: el determinante de la matriz de Leontief. Ahora bien, centrándose en este último menor principal y en el supuesto caso de sea muy próximo a cero –aunque sea estrictamente positivo– se entiende que es una exageración calificar a una economía como productiva, puesto que los efectos que provocaría un incremento en la demanda final sobre la producción serían excesivos e inasumibles en la práctica por cualquier economía. Además, los elementos de la

¹⁷ En Economía Matemática se han realizado muchos esfuerzos en relación a las características de las inversas no negativas; véase, por ejemplo, Fujimoto y Ranade (2004).

¹⁸ Véanse, entre otros, los propios autores Hawkins y Simon (1949), Bidard (2007) o Barrios *et al.* (2006).

¹⁹ Fujita (2008) aborda este asunto.

inversa, a pesar de que sean estrictamente positivos, se incrementarían mucho y, como es obvio, los multiplicadores también se comportarían del mismo modo. En realidad, existe una discrepancia entre el significado económico y el significado matemático del término productivo en una situación como la apuntada. Esta circunstancia sugiere buscar herramientas intermedias, entre la flexibilidad de la condición de Hawkins-Simon y la relativa rigidez de la condición de Brauer-Solow, que tengan una interpretación económica más clara y al mismo tiempo que sean capaces de justificar desequilibrios sectoriales. A continuación, se presentan y demuestran varios teoremas para lograr inversas de Leontief no negativas cuando aparezcan valores negativos en el vector de *inputs* primarios, de tal forma que sea posible asegurar la deseada viabilidad del sistema. En primer lugar, se introduce una condición suficiente que facilita inversas no negativas de Leontief. Para explicar esta condición y las siguientes, se opta por el modelo de demanda relativo a la tabla simétrica de flujos totales, estudiado anteriormente en (5). La primera condición queda expuesta por el siguiente teorema:

Teorema 1. *Sea la matriz de Leontief $(I - A)$ y sea $(I - K^{-1}(I - A))$. Si existe K^{-1} y si las sumas por filas de $(I - K^{-1}(I - A))$ son estrictamente menores que 1, es decir, si $\|(I - K^{-1}(I - A))\| < 1$, entonces $(I - A)$ es invertible y su inversa es no negativa.²⁰*

Demostración. En este sentido, si se considera la aplicación $\Phi : M_n(\mathfrak{R}) \rightarrow M_n(\mathfrak{R})$ definida por:

$$\Phi(X) = K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))X, \quad (6)$$

se tiene que:

$$\|\Phi(X) - \Phi(X')\| = \|(I - K^{-1}(I - A))(X - X')\| \leq \|(I - K^{-1}(I - A))\| \|X - X'\|,$$

y si se supone que $\|(I - K^{-1}(I - A))\| < 1$, entonces Φ es una contracción en $M_n(\mathfrak{R})$ que admite un punto fijo único X^* en este espacio²¹:

$$\Phi(X^*) = K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))X^* = X^*.$$

²⁰ Se define la norma matricial

$$\|A\| = \sup_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right), \quad A \in M_n(\mathfrak{R})$$

que es compatible con el producto, en el sentido de que $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ y $\|I\| = 1$. Una norma matricial que satisface $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ se dice submultiplicativa; véase, por ejemplo, Jungers (2008). $M_n(\mathfrak{R})$ con esta norma es un álgebra de Banach con unidad I . Aunque, en este caso, solamente se estudian las matrices no negativas. En otro contexto, Wood y O'Neill (2005) trabajan de forma alternativa con el concepto de radio espectral.

²¹ Se emplea el Teorema del Punto Fijo de Banach para funciones contractivas en un espacio métrico completo; consúltese Debnath y Mikusinski (2005). En efecto, el teorema es aplicable porque el espacio de las matrices $M_n(\mathfrak{R})$ con la norma matricial definida, al ser un álgebra de Banach, también es un espacio métrico completo.

Simplificando, queda:

$$K^{-1}(I - A)X^* = K^{-1},$$

a partir de aquí, multiplicando ambos miembros por la izquierda por K y resolviendo se tiene que $(I - A)X^* = I$. Por lo que se deduce que X^* es la inversa por la derecha de la matriz de Leontief,²² o sea que $X^* = (I - A)^{-1}$.

Se sabe que $(I - A)^{-1}$ es un punto fijo de $\Phi(X) = K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))X$, de modo que partiendo de una matriz $X_0 \geq 0$ ($K^{-1} > 0$ e $(I - K^{-1}(I - A)) \geq 0$) se tiene que la sucesión $X_0, X_1 = \Phi(X_0), \dots, X_n = \Phi(X_{n-1}), \dots$ es tal que $X_n \geq 0, \forall n$ y, en consecuencia, se obtiene que $(I - A)^{-1} \geq 0$. ■

De modo alternativo, la condición suficiente se expresa analíticamente según se indica a continuación:

$$\text{Si } \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \sum_{j=1(j \neq i)}^n \frac{a_{ij}}{1 - a_{ii}} < 1 \Rightarrow \exists (I - A)^{-1} \geq 0.$$

Con relación al supuesto ahora expresado a través del sumatorio estrictamente menor que uno, se entiende que se toman como referentes los elementos de la matriz instrumental $(I - K^{-1}(I - A))$. Aun así, cuando se acude al sumatorio indicar que j nunca es igual a i dado que los elementos de la diagonal principal de esta matriz son iguales a cero. A continuación se aborda la interpretación económica de la suma de los elementos de las filas de esta matriz. En general, se acude a la i -ésima fila:

$$\frac{a_{i1}}{1 - a_{ii}} + \dots + \frac{a_{i(i-1)}}{1 - a_{ii}} + \frac{a_{i(i+1)}}{1 - a_{ii}} + \dots + \frac{a_{in}}{1 - a_{ii}}$$

Y, para una mejor comprensión, se selecciona una fila intermedia. El primer sumando, $\frac{a_{i1}}{1 - a_{ii}}$, representa el *tanto por uno que tiene que producir la rama i para que la rama 1 pueda elaborar una unidad monetaria de producción*. Se señala que esta cantidad está infravalorada, pues de este modo solamente se incluyen los autoconsumos de la rama i , es decir, no se consideran los efectos indirectos en su totalidad, tan solo una estimación que supera la cantidad dada por los coeficientes técnicos. El efecto global (infravalorado) se corresponde con la *producción necesaria del sector i para que cada una de las restantes ramas del sistema pueda producir una unidad monetaria de producto*. Se supone que los coeficientes de disponibilidad de las distintas ramas productivas son menores o iguales que uno y al mismo tiempo estrictamente positivos, o sea que $0 < 1 - a_{ii} \leq 1$. En estas condiciones, se tiene que

²² En $M_n(\mathfrak{R})$ la inversa por la derecha de una matriz coincide con la inversa por la izquierda.

$\frac{a_{ij}}{1-a_{ii}} \geq a_{ij}$. Por lo tanto, la rama i está obligada a producir una cantidad mayor o igual de

productos que la cantidad de *inputs* demandada por la rama j , precisamente la (posible) diferencia vendrá dada por los autoconsumos del propio sector suministrador. En definitiva, el Teorema 1 sirve para abordar determinados escenarios, pero en una situación más extrema alguna de las sumas por filas de la matriz instrumental puede ser mayor o igual que uno. A pesar de ello, es factible que exista la inversa de Leontief y sea no negativa. Para tratar estos hipotéticos casos, es posible trabajar con otra condición suficiente menos restrictiva que la anteriormente presentada. Véase el siguiente teorema:

Teorema 2. *Sea la matriz de Leontief $(I - A)$ y sea $(I - K^{-1}(I - A))$. Si existe K^{-1} y si las sumas por filas de $(I - K^{-1}(I - A))^2$ son estrictamente menores que 1, entonces la matriz $(I - A)$ es invertible y su inversa es no negativa.*

Antes de realizar la demostración se hacen algunas aclaraciones. En este sentido, se indica que el elemento genérico de la matriz $(I - K^{-1}(I - A))^2$ es de la siguiente forma:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_{ik}}{1-a_{ii}} \frac{a_{kj}}{1-a_{kk}}, k \neq i, j \text{ y } \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Los elementos de la diagonal principal poseen $n-1$ sumandos y los restantes $n-2$ sumandos. Los elementos de esta matriz adquieren cierta complejidad. Así, a modo de ejemplo, se selecciona el situado en la primera fila y la primera columna:

$$\frac{a_{12}}{1-a_{11}} \frac{a_{21}}{1-a_{22}} + \dots + \frac{a_{1n}}{1-a_{11}} \frac{a_{n1}}{1-a_{nn}},$$

que representa la *proporción que aporta la rama 1 a las otras ramas de tal modo que las mismas puedan satisfacer los consumos intermedios necesarios para producir una unidad monetaria de producción de la rama 1, incluidos los autoconsumos de las distintas ramas de la economía que ejercen de suministradoras*. Cuando se analizan los elementos de esta matriz, ya se respetan ciertas interrelaciones sectoriales.

Demostración. Se considera la aplicación Φ definida en (6) para la cual:

$$\Phi^2(X) = \Phi(\Phi(X)) = \Phi(K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))X).$$

Entonces:

$$\Phi^2(X) = K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))^2 X.$$

Se tiene que:

$$\|\Phi^2(X) - \Phi^2(X')\| = \|(I - K^{-1}(I - A))^2(X - X')\| \leq \|(I - K^{-1}(I - A))^2\| \cdot \|(X - X')\|$$

y, suponiendo que $\|(I - K^{-1}(I - A))^2\| < 1$, entonces:

$$\|\Phi^2(X) - \Phi^2(X')\| \leq \|X - X'\|.$$

Por lo tanto, $\Phi^2(X)$ es una contracción en $M_n(\mathfrak{R})$ que admite un punto fijo X^* . En consecuencia, se sabe que $\Phi^2(X^*) = X^*$. Entonces:

$$\Phi[\Phi^2(X^*)] = \Phi[X^*]$$

y, como $\Phi \circ \Phi^2 = \Phi^2 \circ \Phi$, también $\Phi^2[\Phi(X^*)] = \Phi(X^*)$ y $\Phi(X^*)$ es punto fijo de Φ^2 . Como el punto fijo de Φ^2 es único, entonces se tiene que $\Phi(X^*) = X^*$ y X^* es punto fijo de Φ . De tal forma que $K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))X^* = X^*$ y a continuación, simplificando, se obtiene que $(I - A)X^* = I$, donde X^* es la matriz inversa de Leontief por la derecha. De modo análogo a lo hecho en la demostración del Teorema 1, se concluye que $(I - A)^{-1}$ es punto fijo de $\Phi(X^*)$ y que $(I - A)^{-1} \geq 0$. ■

A continuación se aborda la interpretación económica de la hipótesis de este Teorema 2. Así, al actuar sobre esta matriz, $(I - K^{-1}(I - A))^2$, es posible comprobar si el supuesto de equilibrio de una rama (o varias ramas) es, o no, asimilado por el conjunto del sistema. En efecto, se pide que las sumas de los elementos por filas de esta matriz sean menores que uno. Para facilitar su interpretación, se opta por escoger la suma relativa a la primera fila:

$$\frac{a_{12}}{1 - a_{11}} \left(\frac{a_{21}}{1 - a_{22}} + \dots + \frac{a_{2n}}{1 - a_{22}} \right) + \dots + \frac{a_{1n}}{1 - a_{11}} \left(\frac{a_{n1}}{1 - a_{nn}} + \dots + \frac{a_{n(n-1)}}{1 - a_{nn}} \right).$$

Si se exige que esta suma sea menor que uno, también se exige que la suma de los *inputs* que aporta la rama de actividad 1 a las restantes ramas de actividad sea inferior a la unidad; todo ello para que estas ramas a su vez puedan realizar las correspondientes aportaciones de *inputs* a las restantes ramas del sistema. Ahora bien, es preciso indicar que se están considerando los niveles de autoconsumos de las distintas ramas productoras. Al trabajar con la matriz $(I - K^{-1}(I - A))^2$ se posee una visión más global de la economía, cuestión que no sucede si se analiza directamente la matriz de Leontief, ya que en ese supuesto se estudian los sectores productivos de una forma más aislada.

Hasta el momento se acudía a $(I - K^{-1}(I - A))$ y $(I - K^{-1}(I - A))^2$, y se procedía por filas, para saber si la matriz de Leontief era invertible y si su inversa era no negativa. Ahora se acude solamente a la matriz instrumental y, acto seguido, se suma por columnas para ver si se alcanza el mismo objetivo²³. Por lo tanto, se considera otra norma, en concreto la correspondiente al supremo de la suma en valor absoluto por columnas de los elementos de la

²³ Como la exposición es análoga a la surgida en relación a la otra norma, solamente se acude a la matriz $(I - K^{-1}(I - A))$.

matriz.²⁴ A continuación se introduce una condición necesaria y suficiente acerca de la inversas no negativas de Leontief:

Teorema 3. Sea la matriz de Leontief $(I - A) \in M_n(\mathfrak{R})$. $(I - A)$ es invertible si y solo si existe $B \in M_n(\mathfrak{R})$ invertible y además $\|I - B^{-1}(I - A)\|^* < 1$.

Demostración. La demostración de la condición necesaria es inmediata. En efecto, solamente basta con tomar $B = (I - A)$. Ahora, en lo que concierne a la demostración de la condición suficiente, se supone que existe B invertible y además $\|I - B^{-1}(I - A)\|^* < 1$.

Se considera la aplicación $\Phi : M_n(\mathfrak{R}) \rightarrow M_n(\mathfrak{R})$ definida por:

$$\Phi(X) = B^{-1} + (I - B^{-1}(I - A))X,$$

se tiene que

$$\|\Phi^2(X) - \Phi^2(X')\|^* = \|(I - B^{-1}(I - A))(X - X')\|^* \leq \|I - B^{-1}(I - A)\|^* \cdot \|X - X'\|^*$$

y, si se acepta que $\|I - B^{-1}(I - A)\|^* < 1$, entonces Φ es una contracción en $M_n(\mathfrak{R})$ que admite un punto fijo único X^* en este espacio:

$$\Phi(X^*) = B^{-1} + (I - B^{-1}(I - A))X^* = X^*.$$

Por lo tanto, resulta que $B^{-1}(I - A)X^* = B^{-1}$. A partir de aquí, multiplicando por la izquierda ambos miembros por B y simplificando se tiene que $(I - A)X^* = I$. De lo que se deduce que X^* es la inversa por la derecha de $(I - A)$. Entonces se tiene que $X^* = (I - A)^{-1}$. ■

A efectos prácticos, el problema radica en estipular la matriz B . De ahí que, a continuación se introduzca una condición suficiente en donde se recurre nuevamente a la matriz instrumental, que (como ya se sabe) ostenta unas características determinadas.

Teorema 4. Sea la matriz de Leontief $(I - A)$ y sea $(I - K^{-1}(I - A))$. Si existe K^{-1} y si las sumas por columnas de $(I - K^{-1}(I - A))$ son estrictamente menores que 1, o sea, si $\|I - K^{-1}(I - A)\|^* < 1$, entonces $(I - A)$ es invertible y su inversa es no negativa.

²⁴ Se define la siguiente norma en $M_n(\mathfrak{R})$:

$$\|A\|^* = \sup_i (\sum_j |a_{ij}|).$$

Además, con la misma $M_n(\mathfrak{R})$ también es un álgebra de Banach con unidad I .

Demostración. Su demostración es semejante a la condición necesaria del Teorema 3. Se trata de particularizar $B = K$, obteniendo así el punto fijo $X^* = (I - A)^{-1}$. Ahora solamente queda por comprobar que esa inversa es no negativa.

Dado que $(I - A)^{-1}$ es un punto fijo único de $\Phi(X^*) = K^{-1} + (I - K^{-1}(I - A))X^*$, se puede proceder del mismo modo que en el Teorema 1 para concluir que $(I - A)^{-1} \geq 0$. ■

La tarea de comprobar si las sumas por filas o por columnas (de la matriz instrumental) son estrictamente menores que uno se traduce en un procedimiento sencillo para determinar si un sistema económico es capaz de mantener el equilibrio global, a pesar de presentar algún desequilibrio sectorial.

Por último, cabe indicar que en el momento de efectuar simulaciones a medida en que la demanda final va disminuyendo a favor de la demanda intermedia –lo que implica, de modo paralelo, que los *inputs* primarios pierdan peso frente a los consumos intermedios– los elementos de las inversas de Leontief resultantes van aumentando su valor. Es más, en relación con este contexto, el dominio de la aplicación que transforma matrices en sus inversas es un conjunto abierto, así que al aproximarse a su frontera los elementos de las matrices imagen tienden a infinito. Se puede comprobar que en ese hipotético caso el determinante de $(I - A)$ es estrictamente positivo pero prácticamente nulo, y aunque la matriz cumpla las condiciones de Hawkins-Simon los posibles efectos de la demanda final serían tremendamente exagerados al acercarse a la frontera del dominio, pero cuando aparezcan elementos negativos en las matrices imagen, los elementos de estas inversas tenderán a menos infinito. En esas circunstancias el determinante de $(I - A)$ ya sería negativo, por lo tanto no se verificaría la condición de Hawkins-Simon. En este sentido, se indica que si se parte de una matriz de Leontief, $(I - A)$, y por alguna razón se desea modificar su estructura hay que exigir que la nueva matriz, $(I - A')$, cumpla la siguiente condición suficiente (Bourbaki, 1967):

$$\|(I - A') - (I - A)\| < \frac{1}{\|(I - A)^{-1}\|},$$

para que exista y sea no negativa $(I - A)^{-1}$. En definitiva, no hay que desviarse mucho de la matriz inicial y cuanto mayor sea la norma de la inversa menor será el margen de maniobra.

5. UNA APLICACIÓN PRÁCTICA

Seguidamente se introduce una hipotética economía en la que existe un desequilibrio sectorial. Se trata de analizar, a través de la matriz instrumental, si ese supuesto desequilibrio puede ser asumido, o no, por el sistema. Se consideran los siguientes datos relativos a una economía ficticia:

| | R.1 | R.2 | R.3 |
|--------------------|-----|-----|-----|
| R.1 | 15 | 18 | 20 |
| R.2 | 2 | 14 | 8 |
| R.3 | 12 | 9 | 10 |
| Inputs intermedios | 29 | 41 | 38 |
| Inputs primarios | 31 | -1 | 14 |
| Producción | 60 | 40 | 52 |

No todas las sumas de los elementos por filas de la matriz de coeficientes técnicos, A , son menores que uno²⁵. En este caso, también sucede lo mismo por columnas. En efecto, se tiene que:

| | | | |
|------|------|------|------|
| 0,25 | 0,45 | 0,38 | 1,08 |
| 0,03 | 0,35 | 0,15 | 0,54 |
| 0,20 | 0,23 | 0,19 | 0,62 |
| 0,48 | 1,03 | 0,73 | |

La suma de los elementos de la primera fila de la matriz instrumental $(I - K^{-1}(I - A))$ tampoco es menor que uno:

| | | | |
|------|------|------|------|
| 0 | 0,60 | 0,51 | 1,11 |
| 0,05 | 0 | 0,24 | 0,29 |
| 0,25 | 0,28 | 0 | 0,53 |
| 0,30 | 0,88 | 0,75 | |

Aunque todas las sumas por filas no son estrictamente menores que uno, por columnas si lo son. En este caso, ya se asegura el objetivo marcado de acuerdo con el Teorema 4 sin necesidad de acudir al Teorema 2, donde aparecía una matriz algo más compleja. Pero si se calcula la matriz $(I - K^{-1}(I - A))^2$ y se suma por filas, se observa que los correspondientes resultados son inferiores al valor uno:

| | | | |
|------|------|------|------|
| 0,16 | 0,14 | 0,14 | 0,44 |
| 0,06 | 0,10 | 0,03 | 0,18 |
| 0,01 | 0,15 | 0,19 | 0,36 |
| 0,23 | 0,39 | 0,36 | |

Se cumple la hipótesis del Teorema 2. Por lo tanto, por esta vía es posible obtener una inversa no negativa de Leontief. También se ve como no se verifica el supuesto del Teorema 1, de ahí que en esta ocasión dicha herramienta no sea válida.

Por último, se indica que la $(I - A)^{-1}$ es del siguiente modo:

| | | |
|------|------|------|
| 1,70 | 1,56 | 1,10 |
| 0,20 | 1,83 | 0,44 |
| 0,48 | 0,90 | 1,64 |

²⁵ El determinante de la matriz de Leontief es igual a 0,29.

6. CONCLUSIONES

En las TIOs, los elementos de la matriz de consumos intermedios son no negativos y lo más frecuente es que los valores añadidos por industria también lo sean. Si estos valores son no negativos, todas las ramas productivas del sistema permanecerán en una situación de equilibrio y, de ser así, la economía en su conjunto también estaría en equilibrio. Pero en una economía es factible que haya sectores, o sub-sectores, que no verifiquen este requisito. Esta situación podría venir causada por un excedente bruto de explotación negativo y relativamente importante (y, por tanto, superior al resto de elementos que forman los *inputs* primarios), permitido en gran medida por las subvenciones a los sectores en cuestión. Además, una sociedad puede mantener dichas subvenciones por distintas causas: cohesión territorial, freno del despoblamiento rural, conservación del patrimonio rural o mantenimiento del entorno ambiental.

En este artículo se analizó la existencia de cifras negativas en el vector de *inputs* primarios para ver si suponen un problema insalvable, o por contra pueden ser soportados (momentáneamente) por el resto del sistema. Aun así, se matizó que el supuesto caso de que aparezcan esas cifras hay que observar si es posible lograr soluciones no negativas. En escenarios como el ahora indicado, el empleo de modo alternativo de los Teoremas 1 y 4, donde se acude a la matriz instrumental observando si las sumas de las filas o de las columnas son estrictamente menores que uno, se convierte en un método muy manejable para determinar si el sistema económico está en equilibrio. La utilización del Teorema 2 es primordial para esclarecer la posible viabilidad de un sistema input-output con sectores en desequilibrio, ya que se trata de un instrumento de índole global que sirve para comprobar si las interrelaciones sectoriales son capaces de soportar esos desequilibrios.

Por último, cabe indicar que a medida que la demanda final va perdiendo peso frente a la demanda intermedia los elementos de las correspondientes inversas se incrementan. De hecho, como el dominio de la aplicación que transforma matrices en sus inversas es un conjunto abierto, al aproximarse a su frontera los elementos de las matrices imagen tienden a infinito. En este contexto, el determinante de la matriz de Leontief sería estrictamente positivo pero prácticamente nulo; consecuentemente, la matriz cumpliría la condición de Hawkins-Simon, pero desde el punto de vista económico difícilmente se podría calificar una economía como productiva, dado que los efectos que provocaría un incremento de la demanda final sobre la producción serían exagerados. En el fondo, el significado matemático de los términos no siempre coincide plenamente con el significado económico.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a los evaluadores anónimos sus comentarios y sugerencias durante la preparación de la versión final de este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barrios, J.; González, C.; Moreno, J.C. (2006) *Álgebra Matricial para Economía y Empresa*, Madrid, Delta Publicaciones.
- Bidard, C. (2007) “The Weak Hawkins-Simon Condition”, *Electronic Journal of Linear Algebra*, 16, pp. 44–59.
- Bourbaki, N. (1967) *Théories Spectrales: Éléments de Mathématique*, Paris, Hermann.
- Debnath, L.; Mikusinski, P. (2005) *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, San Diego, Elsevier Academic Press (3rd Edition).
- Eurostat (1996) *European System of National and Regional Accounts: ESA 1995*, Luxemburgo, Statistical Office.
- Frobenius, G. (1912) *Über Matrizen aus nicht Negativen Elementen*, Berlin, Sitzungsberg. Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften, pp. 456–477.
- Fujimoto, T.; Ranade, R. (2004) “Two characterizations of inverse-positive matrices: The Hawkins-Simon Condition and the Chatelier-Braun Principle”, *Electronic Journal of Linear Algebra*, 11, pp. 59–65.
- Fujita, Y. (2008) “A Reconsideration of a Correct Economic Interpretation of the Hawkins-Simon Condition”, *Fukuoka University Review of Economics*, 53 (1-2), pp. 11–15.
- Hawkins, D.; Simon, H.A. (1949) “Note: Some Conditions of Macro-Economic Stability”, *Econometrica*, 17, pp. 245–248.
- Jungers, R. (2008) *Thesis: Infinite Matrix Products from the Joint Spectral Radius to Combinatorics*, Louvain, Université Catholique de Louvain.
- Lady, G. (1996) “Detecting Stable Matrices”, *Annuals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 17, pp. 29–36.
- McKenzie, L.W. (1960) “Stability of Equilibrium and the Value of Excess Demand”, *Econometrica*, 28, pp. 606–617.
- Miller, R.E.; Blair, P.D. (2009) *Input-Output Analysis: Foundations and Extensions*. 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge.
- Morillas, A. (1982) “El Modelo de Leontief (Input-Output): Formulación y Limitaciones”, *Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales*, 9 y 10, pp. 189–216.
- Naciones Unidas (1999) *Handbook of Input-Output Table Compilation and Analysis, Studies in Methods*, Series F. 74.
- Perron, O. (1907) “Zur Theorie der Matrizes”, *Mathematische Annalen*, 64 (2), pp. 248–263.
- Pulido, A.; Fontela, E. (1993) *Análisis Input-Output. Modelos, Datos y Aplicaciones*, Madrid, Pirámide.
- Robles, L.; Sanjuán, J. (2005) “Análisis Comparativo de las Tablas Input-Output en el Tiempo”, *Estadística Española*, 27 (158), pp. 143–177.
- Rosenblatt, D. (1957) “On Linear Models and the Graphs of Minkowski-Leontief Matrices”, *Econometrica*, 25, pp. 323–338.
- Sánchez-Chóliz, J.; Duarte, R. (2003) “Production Chains and Linkage Indicators”, *Economics Systems Research*, 15 (4), pp. 481–494.
- Takayama, A. (1974) *Mathematical Economics*, Hinsdale, III, Dryden Press.
- Waugh, F.V. (1950) “Inversion of the Leontief Matrix by Power Series”, *Econometrica*, 18 (2), pp. 142–154.
- Wood, R.J.; O’Neill, M.J. (2005) “A Faster Algorithm for Identification of an M-Matrix”, *ANZIAM Journal*, 46 (E), C732–C743.

Volumen 15 (junio de 2013)

Una aplicación de los árboles de expansión mínima y árboles jerárquicos al estudio de la convergencia interregional en dinámica de regímenes

An Application of Minimum Spanning Trees and Hierarchical Trees to the Study of Interregional Convergence in Regime Dynamics

Brida, Juan Gabriel; London, Silvia; Rojas, Mara

Páginas 3–28

Artificial Neural Networks for Predicting Real Estate Prices

Redes neuronales artificiales para la predicción de precios inmobiliarios

Núñez Tabales, Julia M.; Caridad y Ocerin, José María; Rey Carmona, Francisco J.

Páginas 29–44

Selección y utilización de niveles de desagregación adecuados en pronósticos de series temporales: caso de estudio de una empresa de suscripción utilizando el proceso analítico jerárquico

Selecting and Using an Adequate Disaggregation Level in Time Series Forecasting: A Study Case in a Subscription Business Model Company through the Analytic Hierarchy Process

Alvarado Valencia, Jorge Andrés; García Buitrago, Javier Alexander

Páginas 45–64

Asignación óptima de capital en base al perfil de riesgo de las instituciones de inversión colectiva: una aplicación de las medidas de riesgo distorsionadas

Optimal Capital Allocation Based on the Risk Profile of Collective Investment Schemes: An Application of Distortion Risk Measures

Belles-Sampera, Jaume; Santolino, Miguel

Páginas 65–86

The Accuracy of Forecasts Made for the Structure of Consumer Basket: A Comparative Analysis between Euro Area and Romania

La exactitud de las predicciones para la estructura de la cesta del consumo: un análisis comparativo entre la zona euro y Rumanía

Bratu (Simionescu), Mihaela

Páginas 87–100

Factores explicativos de las diferencias de eficiencia en el sector de la distribución en España: una aproximación paramétrica

Influence of Company Resources in Productive Efficiency: A Parametric Approach in the Distribution Sector in Spain

De Jorge Moreno, Justo

Páginas 101–116

Eficiencia de las sociedades musicales de la Comunidad Valenciana

Efficiency of Musical Societies in the Valencian Community

Rausell Koster, Pau; Coll-Serrano, Vicente; Abeledo Sanchís, Raúl; Marco-Serrano, Francisco

Páginas 117–132

La muestra de empresas en los modelos de predicción del fracaso: influencia en los resultados de clasificación

The Sample of Firms in Business Failure Prediction Models: Influence on Classification Results

García-Gallego, Ana; Mures-Quintana, María-Jesús

Páginas 133–150

La prima de riesgo recargada en un seguro de rentas: tarificación mediante el uso de una medida de riesgo coherente

The Risk Recharged Premium for a Survival Life Insurance: Recharged Premium through the Use of a Coherent Risk Measure

Hernández Solís, Montserrat; Lozano Colomer, Cristina; Vilar Zanón, José Luis

Páginas 151–167

Análisis de la estabilidad de una economía con desequilibrios sectoriales

Analysis of the Stability in an Economy with Sectoral Imbalances

Pereira López, Xesús; Quiñoa López, José Luis; Fernández Fernández, Melchor

Páginas 168–187