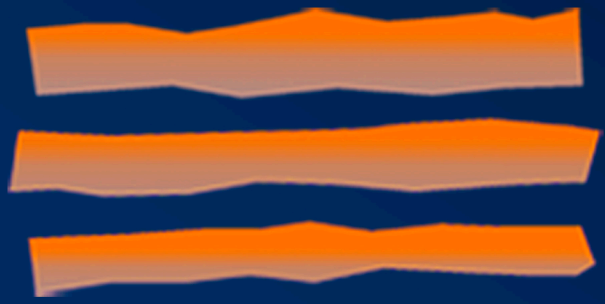
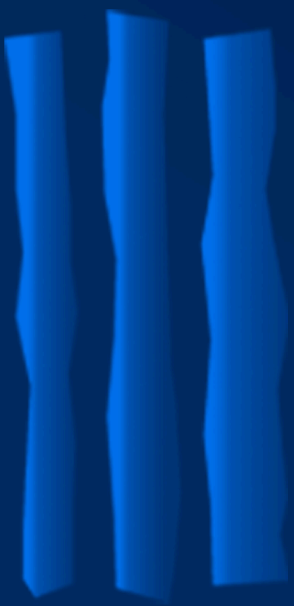


Universidad Pablo de Olavide, Sevilla



UNIVERSIDAD  
**PABLO DE OLAVIDE**  
SEVILLA

# Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa



Journal of Quantitative Methods for  
Economics and Business Administration

ISSN: 1886-516 X  
D.L.: SE-2927-06



**REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS  
PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA**

**Journal of Quantitative Methods for  
Economics and Business Administration**

Número 16. Diciembre de 2013.  
ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.  
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/>

**Editores:**

Dr. Eugenio M. Fedriani Martel  
Universidad Pablo de Olavide  
Ctra. de Utrera, km 1 - 41013  
Sevilla (Spain).  
Correo-e: [efedmar@upo.es](mailto:efedmar@upo.es)

Dr. Alfredo García Hernández-Díaz  
Universidad Pablo de Olavide  
Ctra. de Utrera, km 1 - 41013  
Sevilla (Spain).  
Correo-e: [agarher@upo.es](mailto:agarher@upo.es)

**Comité Editorial:**

Dr. S. Ejaz Ahmed, University of Windsor, Ontario (Canadá)  
Dr. Adam P. Balcerzak, Nicolaus Copernicus University, Toruń (Polonia)  
Dr. Carlos A. Coello Coello, CINVESTAV-IPN, México D.F. (México)  
Dr. Ignacio Contreras Rubio, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)  
Dra. Manuela Coromaldi, University of Social Sciences UNISU, Roma (Italia)  
Dr. Miguel Ángel Hinojosa Ramos, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)  
Dr. Matías Irigoyen Testa, Universidad Nacional del Sur, Buenos Aires (Argentina)  
Dr. M. Kazim Khan, Kent State University, Ohio (EE.UU.)  
Dr. Manuel Laguna, University of Colorado at Boulder, Colorado (EE.UU.)  
Dra. María Amparo León Sánchez, Universidad de Pinar del Río (Cuba)  
Dr. Jesús López-Rodríguez, Universidad de A Coruña, (España)  
Dr. Cecilio Mar Molinero, University of Kent, Canterbury (Reino Unido)  
Dra. Ana M. Martín Caraballo, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)  
Dra. M<sup>a</sup> Carmen Melgar Hiraldo, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)  
Dr. Gábor Nagy, University of Kent, Canterbury (Reino Unido)  
Dr. José Antonio Ordaz Sanz, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)  
Dr. Andrés Rodríguez-Pose, London School of Economics, Londres (Reino Unido)  
Dr. José Manuel Rueda Cantuche, IPTS-DG J.R. Centre-European Commission  
Dra. Mariagrazia Squicciarini, OECD, París (Francia)  
Dra. Mariangela Zoli, Università degli Studi di Roma 'Tor Vergata', Roma (Italia)



## Editorial

Evaluando la trayectoria de la Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa (*Journal of Quantitative Methods for Economics and Business Administration*), creemos que estamos en condiciones de poder afirmar que ha alcanzado su madurez. A 1 de diciembre de 2013 la página web de la Revista ha recibido a más de 30 000 visitantes (sin contar varias veces a los que visitan la página en más de una ocasión). Además, teniendo en cuenta el volumen 16, habremos publicado 85 artículos científicos, lo que (sumando las editoriales) suponen 1 871 páginas fruto del trabajo y el esfuerzo de autores y evaluadores (y editores). Gracias a todos ellos podemos presumir de que nuestra publicación sigue creciendo día a día y que va por el buen camino. Según nuestras previsiones, el número de artículos publicados por volumen debería mantenerse en adelante por encima de los 10, lo que significaría superar el umbral de 20 por año, algo valorado favorablemente por varias bases de datos (que, por ejemplo, solo contabilizan las citas que recibe una revista cuando alcanza dicho número de artículos de forma anual). Como decíamos, podemos estar bastante confiados en la consolidación de nuestra Revista. En cualquier caso, como los hechos son los que nos permiten extraer conclusiones fundamentadas, de las dos siguientes tablas puede extraerse un resumen de su evolución.

Año	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Artículos	7	8	9	9	11	11	10	20

Vol.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Págs.	57	124	79	97	115	94	94	109	105	120	113	131	96	158	187	249

Sin embargo, nuestro crecimiento también ha supuesto que tengamos que rechazar más propuestas de artículos. A fin de ayudar a los autores a ver publicados sus trabajos en una revista reconocida y de calidad (uno de nuestros objetivos iniciales, planteado allá por 2006), estamos desarrollando herramientas para hacer más útil y eficiente el proceso de evaluación. Así, por ejemplo, 2014 comenzará con la implantación de un nuevo servicio automático de recepción de artículos, que sugerirá mejoras a los autores antes de que procedan al envío definitivo de los originales. Confiamos en que esta herramienta informática tenga buena acogida entre los autores y que agilice aún más el proceso de evaluación de los artículos. En principio, esta mejora cerraría el proyecto que iniciábamos hace unos años para que la página web de RevMetCuant fuese realmente un lugar que posibilitara la transferencia del conocimiento científico, sobre todo el relativo al desarrollo y la aplicación de los métodos cuantitativos útiles para la Economía y la Empresa.

Como hemos comentado en editoriales anteriores, RevMetCuant sigue incrementando regularmente su presencia en las bases de datos internacionales; de hecho, tenemos fundadas esperanzas de que este año logremos ingresar en la de más prestigio actualmente (para qué decir su nombre una vez más). Sin embargo, hay que seguir trabajando para que nuestra publicación sea más reconocida y eso, hoy día, depende de que los autores utilicen y citen los artículos que publicamos. Eso no quita que creamos pertinente compartir aquí con nuestros lectores la buena noticia del incremento en el número de citas recibidas. Como puede constatarse en <http://scholar.google.com/citations?user=2LLBPpwAAAAJhl=en>, ya hemos recibido más de un centenar de citas (113, según Google-Scholar), algunas de ellas procedentes de artículos publicados en revistas de prestigio (incluidas en ISI-JCR). Os animamos a seguir estudiando, utilizando y citando nuestros trabajos, para incrementar la visibilidad de los mismos y el prestigio de RevMetCuant.

Finalmente, aprovechamos estas líneas para agradecer su interés a los casi 200 suscriptores (192 a 1 de diciembre de 2013) así como el trabajo desinteresado de nuestros evaluadores anónimos, que pasan ya del centenar. Recordamos que la lista de los que nos han autorizado a publicar sus nombres está disponible en todo momento a través de nuestra página web, en la dirección:

<http://www.upo.es/RevMetCuant/equipo.php>

LOS EDITORES.







## Detectando diferencias en la medición de la calidad del resultado: evidencia empírica para empresas españolas

FERRER GARCÍA, CRISTINA

Departamento de Contabilidad y Finanzas

Universidad de Zaragoza (España)

Correo electrónico: [cferrer@unizar.es](mailto:cferrer@unizar.es)

LAÍNEZ GADEA, JOSÉ ANTONIO

Departamento de Contabilidad y Finanzas

Universidad de Zaragoza (España)

Correo electrónico: [lainez@unizar.es](mailto:lainez@unizar.es)

### RESUMEN

La calidad del resultado empresarial no es un concepto medible a través de una única variable, sino que existen diversos atributos que la caracterizan y el uso de uno u otro puede condicionar los resultados de la investigación sin poder considerar que ninguno represente la mejor medida de calidad.

El estudio se aborda midiendo la calidad del resultado a través de una importante recopilación de alternativas utilizadas en la literatura y contrastamos si existen diferencias significativas entre la selección de métodos diferentes para medir un mismo atributo utilizando el test de Friedman.

Con los resultados de este trabajo se demuestra que no solo es determinante el atributo seleccionado para evaluar la calidad del resultado empresarial, sino que, además, las diferentes alternativas de cálculo de cada atributo condicionan los resultados.

De este modo, a través de los resultados obtenidos, podemos afirmar que es una cuestión clave para cualquier trabajo de investigación sobre la calidad del resultado contable, definir y medir de forma apropiada dicho concepto, puesto que los resultados y las conclusiones del trabajo pueden estar determinadas por dicha decisión.

**Palabras clave:** calidad de la información; atributos del resultado; ajustes por devengo discrecionales; calidad de los ajustes por devengo; alisamiento del resultado; test de Friedman.

**Clasificación JEL:** M41.

**MSC2010:** 91B82; 91B99.

# Detecting Differences on the Earnings Quality Measurement: Empirical Evidence on Spanish Firms

## ABSTRACT

Earnings quality is not a measurable concept through only one variable, but there are several attributes that characterize earnings quality and employing one or another could influence the research conclusion without considering one of them the best measure of earnings quality.

The study deals with measuring earnings quality through different alternatives used in previous literature. Then, we study there are significant differences among these different methods to measure the same attribute using the Friedman test.

The results of this study demonstrate that not only the earnings attribute is crucial to assess earnings quality, but also the different ways of measuring them could determine the results.

Thus, through the results, we can say that is a key issue for any research on earnings quality, defining and measuring this concept properly, since the results and conclusions may be determined by that decision.

**Keywords:** accounting quality; earnings attributes; discretionary accruals; accruals quality; earnings smoothing; Friedman test.

**JEL classification:** M41.

**MSC2010:** 91B82; 91B99.



## 1. INTRODUCCIÓN

La información financiera elaborada y publicada por las empresas resulta un importante instrumento informativo acerca de la gestión realizada por éstas y, dada la relevancia de esta información, la investigación ha mostrado mucho interés por conocer la calidad con la que se elabora y ha realizado grandes esfuerzos por determinar el modo en que esta calidad debería definirse y valorarse, así como los determinantes y consecuencias de la misma.<sup>1</sup> Aunque no existe unanimidad en la definición del concepto de calidad de la información financiera, adoptamos una visión general considerando que, para que esta información sea de calidad, debe resultar útil para el usuario y facilitar su proceso de toma de decisiones.

Para medir la calidad del resultado y, por tanto, su utilidad en el proceso de toma de decisiones, se han analizado diversas características del mismo, llevando en la última década a muchos investigadores a evaluar varios atributos de calidad a la vez. A este respecto, pueden servir como referente el trabajo de Schipper y Vincent (2003) o el trabajo empírico de Francis *et al.* (2004), que analizan diferentes atributos que aportan calidad al resultado, tratando de recopilar las cualidades que debería compilar una cifra de resultados para aportar la suficiente información al usuario para serle útil en su toma de decisiones. Los atributos de calidad propuestos por estos autores han sido ampliamente aceptados y adoptados en la investigación contable posterior. De hecho, en los últimos años existen gran número de trabajos que definen la calidad del resultado mediante diversos atributos. Entre ellos, podríamos destacar algunos de ellos, como son, Francis *et al.* (2006), Francis *et al.* (2008), Laksmana y Yang (2009), Gaio (2010), Gaio y Raposo (2011), Zeghal *et al.* (2012) o Cheng *et al.* (2013), entre otros muchos.

Tal y como indican Dechow *et al.* (2010), la literatura ha estudiado la calidad del resultado desde dos perspectivas diferentes. Por un lado, existen trabajos que analizan cómo las características corporativas de las empresas o sus sistemas contables influyen en la calidad del resultado. Por otro, encontramos aquellos trabajos que tratan de medir el impacto de esta calidad en otros aspectos de interés, como el coste de capital, por ejemplo. Sea cual sea la perspectiva desde la que evaluemos la calidad de la información, la forma de definirla y medirla puede determinar los resultados obtenidos. De hecho, tal y como muestran Dechow *et al.* (2010), es posible identificar casos en los que el atributo del resultado escogido para medir su calidad lleva a conclusiones contradictorias, lo que demuestra que cada medida de calidad del resultado capta distintos rasgos de la utilidad de éste. Pero, además de esto, cada uno de estos atributos ha sido definido de maneras diferentes, de tal forma que tampoco existe unanimidad en sus mediciones. Por tanto, los resultados de la investigación no solo podrían venir determinados por el atributo

---

<sup>1</sup> Aunque la calidad de la información financiera (*accounting quality*) abarca un ámbito más amplio, la mayoría de los estudios se centran en la calidad del resultado (*earnings quality*), puesto que es la mejor variable capaz de resumir el desempeño de la empresa y de extraer la información relevante para su valoración (Schipper and Vincent, 2003; Francis *et al.*, 2004).

seleccionado como subrogado de la calidad del resultado, sino también por el método de medición de éste.

Una de las soluciones adoptadas por un gran número de investigadores es generar variables agregadas a partir de un conjunto determinado de atributos. El argumento de estos autores es que, utilizando diferentes medidas de calidad del resultado, se mitiga el error de cada una de ellas (Leuz *et al.*, 2003; Aussenegg *et al.*, 2008). Una de las prácticas más habituales en la generación de estas variables agregadas es la creación de índices a partir de análisis factoriales (Francis *et al.*, 2008; Yanmin y Huifang, 2011) o la asignación de rangos (Leuz *et al.*, 2003; Bhattacharya *et al.*, 2003; Burgstahler *et al.*, 2006; Krishnan y Visvanathan, 2007, Douppnik 2008, Bowen *et al.*, 2008; Gaio, 2010; Gaio y Raposo, 2011; entre otros). Sin embargo, esta solución no sería tampoco válida, puesto que si cada uno de los componentes de estas medidas agregadas puede estar definido desde puntos de vista diferentes, el problema de base no puede resolverse considerando medidas agregadas.

Ante esta situación de relativa incertidumbre sobre el concepto de calidad del resultado y la forma en la que se mide esta variable tan utilizada en la investigación contable actual, el propósito de este estudio es profundizar en los conceptos y métodos empleados en la literatura previa para la medición del concepto de calidad del resultado con el fin de clarificar si toda esa incertidumbre se traduce en una única forma de medir la calidad o si, por el contrario, la comunidad académica está asignando una denominación común al estudio de aspectos totalmente diferentes. Para ello, el objetivo de este trabajo es recopilar las diferentes alternativas empleadas en la literatura empírica previa para la medición de diversos atributos del resultado y estudiar si estas diferentes alternativas arrojan resultados equivalentes o no. Este análisis inicial sirve como anticipo para el planteamiento de un modelo más complejo a través del cual analizar la relación existente entre los diferentes indicadores empleados para la medición de una misma característica y el atributo que pretenden medir todos ellos.

Este trabajo contribuye al avance de la investigación sobre la información empresarial, recopilando de forma sistemática las distintas formas de medición empleadas para los atributos del resultado más comúnmente analizados, pero, sobre todo, evidencia que el empleo de estas diferentes alternativas de medición de los atributos arroja resultados distintos, lo que podría derivar en la obtención de diferentes conclusiones acerca de la calidad del resultado empresarial en función de la alternativa empleada. De esta forma, nuestro trabajo contribuye en la concienciación del investigador a la hora de seleccionar la medida de calidad del resultado empleada y el método de medición. No podemos afirmar que exista una medida que sea mejor que las demás, sino que con nuestro trabajo demostramos que el uso de una u otra puede modificar las conclusiones extraídas en un estudio. Por tanto, es de gran importancia elegir, con el mejor de los criterios, la medida a emplear por el investigador, así como justificar adecuadamente la razón por la que se emplea una u otra.

El artículo lo hemos estructurado de la siguiente forma. Tras esta introducción, definimos los atributos de calidad del resultado objeto de estudio y revisamos las diferentes alternativas de medición que se han empleado en la literatura previa. A continuación, en el tercer apartado, exponemos la muestra de empresas analizadas, así como la metodología empleada tanto en la medición de los atributos de calidad del resultado como en el contraste de diferencias significativas entre ellos. En el cuarto epígrafe presentamos los resultados obtenidos en la investigación realizada y, por último, indicamos las principales conclusiones de nuestro estudio.

## **2. LOS ATRIBUTOS DE CALIDAD DEL RESULTADO**

Partimos de la tesis, apoyada por Dechow *et al.* (2010), de que las distintas medidas de calidad del resultado no son sustitutivas porque miden diferentes atributos del resultado y, además, cada uno de estos atributos ha sido especificado y calculado de forma distinta en los estudios empíricos previos. Así pues, a partir de esta realidad, realizamos una exhaustiva recopilación de las diversas definiciones y perspectivas que la investigación sobre calidad del resultado ha generado acerca de los diferentes atributos.

En este trabajo nos centramos en los atributos del resultado más empleados en la literatura sobre calidad del resultado de entre los propuestos por Francis *et al.* (2004). Estos se corresponden con aquéllos que se encuentran más relacionados con la manipulación del resultado (*earnings management*): la calidad de los ajustes por devengo (*accruals quality*), los ajustes por devengo discrecionales (*discretionary accruals*) y el alisamiento de beneficios (*earnings smoothing*). No obstante, los resultados obtenidos son extensibles a los atributos relacionados con las propiedades de series temporales, como son la persistencia (*persistence*), la capacidad predictiva (*predictability*) y la volatilidad del resultado (*variability*).

### **2.1. Ajustes por devengo discrecionales (*Discretionary Accruals*)**

Esta medida de calidad se basa en la idea de que los ajustes por devengo que no están bien explicados por los factores procedentes de las actividades fundamentales de la empresa son una medida de la discrecionalidad ejercida por los directivos en la aplicación de las políticas contables y, por tanto, una medida inversa de la calidad del resultado. El modelo pionero, propuesto por Jones (1991), permite estimar los ajustes por devengo normales teniendo en cuenta el efecto de los cambios en las circunstancias económicas sobre dichos ajustes. Esta propuesta consiste en una regresión de los ajustes por devengo totales (*Total Accruals, TA*) sobre dos variables: la variación en las ventas, relacionada con el capital circulante, y el nivel de inmovilizado material, que considera el componente no discrecional de los gastos de amortización y deterioro.

Tabla 1. Medidas de *Discretionary Accruals* (DA) (continúa en página siguiente).

Medida empleada como medida de calidad: valor absoluto de los ajustes por devengo discretionales $DA_{j,t} = TA_{j,t}/TAss_{j,t-1} - NDA_{j,t}$ ó $DA_{j,t} =  \varepsilon_{j,t} $	
Modelo 1: modelo de Jones ( <i>accruals</i> totales) (Jones, 1991)	$\frac{TA_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} = \kappa_1 \frac{1}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_2 \frac{\Delta Rev_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_3 \frac{PPE_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \varepsilon_{j,t}$
Modelo 2: modelo de Jones ( <i>accruals</i> a c/p) (Jones, 1991)	$\frac{TCA_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} = \gamma_1 \frac{1}{TAss_{j,t-1}} + \gamma_2 \frac{\Delta Rev_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \varepsilon_{j,t}$
Modelo 3: modelo de Jones modificado (Dechow <i>et al.</i> , 1995)	$\frac{TA_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} = \kappa_1 \frac{1}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_2 \frac{(\Delta Rev_{j,t} - \Delta AR_{j,t})}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_3 \frac{PPE_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \varepsilon_{j,t}$
Modelo 4: modelo de Jones con <i>accruals</i> totales, con flujos de caja (CFO) (Kasznik, 1999)	$\frac{TA_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} = \kappa_1 \frac{1}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_2 \frac{(\Delta Rev_{j,t} - \Delta AR_{j,t})}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_3 \frac{PPE_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_4 \frac{\Delta CFO_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \varepsilon_{j,t}$
Modelo 5: modelo de Jones con <i>accruals</i> a c/p, con CFO (García Osma y Gill de Albornoz, 2007)	$\frac{TCA_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} = \kappa_1 \frac{1}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_2 \frac{(\Delta Rev_{j,t} - \Delta AR_{j,t})}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_3 \frac{\Delta CFO_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \varepsilon_{j,t}$
Modelo 6: modelo modificado de Jones con ratio BtM y CFO (Larcker y Richardson, 2004)	$\frac{TA_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} = \kappa_1 \frac{1}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_2 \frac{(\Delta Rev_{j,t} - \Delta AR_{j,t})}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_3 \frac{PPE_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_4 \frac{CFO_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_5 \frac{BtM_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \varepsilon_{j,t}$
Modelo 7: modelo modificado de Jones con ROA de <i>t</i> (Kothari <i>et al.</i> , 2005)	$\frac{TA_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} = \kappa_0 + \kappa_1 \frac{1}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_2 \frac{(\Delta Rev_{j,t} - \Delta AR_{j,t})}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_3 \frac{PPE_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_4 ROA_{j,t} + \varepsilon_{j,t}$
Modelo 8: modelo modificado de Jones con ROA de <i>t-1</i> (Kothari <i>et al.</i> , 2005)	$\frac{TA_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} = \kappa_0 + \kappa_1 \frac{1}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_2 \frac{(\Delta Rev_{j,t} - \Delta AR_{j,t})}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_3 \frac{PPE_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_4 ROA_{j,t-1} + \varepsilon_{j,t}$
Modelo 9: modelo de Jones adaptado (Dechow <i>et al.</i> , 2003)	$\frac{TA_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} = \kappa_1 \frac{1}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_2 \frac{(1+k)(\Delta Rev_{j,t} - \Delta AR_{j,t})}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_3 \frac{PPE_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \varepsilon_{j,t}$ $\Delta AR_{j,t} = \alpha + k \Delta Rev_{j,t} + \varepsilon_{j,t}$
Modelo 10: modelo retardado (Chambers, 1999)	$TA_{j,t} = \kappa_1 \frac{1}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_2 \frac{(1+k)(\Delta Rev_{j,t} - \Delta AR_{j,t})}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_3 \frac{PPE_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_4 \frac{LagTA_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \varepsilon_{j,t}$
Modelo 11: modelo con expectativas de futuro (Dechow <i>et al.</i> , 2003)	$NDA_{j,t} = \kappa_1 \frac{1}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_2 \frac{(1+k)(\Delta Rev_{j,t} - \Delta AR_{j,t})}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_3 \frac{PPE_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \kappa_4 \frac{LagTA_{j,t}}{TAss_{j,t-1}} + \varepsilon_{j,t}$

Tabla 1. Medidas de *Discretionary Accruals* (DA) (continuación).

Autores que han empleado cada modelo	
Modelo 1: modelo de Jones ( <i>accruals</i> totales) (Jones, 1991)	DeFond y Jiambalvo (1994), Dechow <i>et al.</i> (1995), Subramanyam (1996), Young (1999), Bartov <i>et al.</i> (2000), Delgado y Castrillo (2001), Francis <i>et al.</i> (2002), Van Tendeloo y Vanstraelen (2005), García Osma y Gill de Albornoz (2005), Gill-de-Albornoz y Illueca (2005), García Osma y Gill de Albornoz (2007)
Modelo 2: modelo de Jones ( <i>accruals</i> a c/p) (Jones, 1991)	DeFond y Jiambalvo (1994), Francis <i>et al.</i> (2002), García Osma y Gill de Albornoz (2005), García Osma y Gill de Albornoz (2007), DeGeorge <i>et al.</i> (2007)
Modelo 3: modelo de Jones modificado (Dechow <i>et al.</i> , 1995)	Dechow <i>et al.</i> (1995), DeFond y Park (1997), DeFond y Subramanyam (1998), Young (1999), Guidry <i>et al.</i> (1999), Bartov <i>et al.</i> (2000), Delgado y Castrillo (2001), Aboody <i>et al.</i> (2005), Su <i>et al.</i> (2007), Francis <i>et al.</i> (2008)
Modelo 4: modelo de Jones con <i>accruals</i> totales, con flujos de caja (CFO) (Kasznik, 1999)	Kasznik (1999), Alcarria y Gill de Albornoz (2004), García Osma y Gill de Albornoz (2005), Gill-de-Albornoz y Illueca (2005), García Osma y Gill de Albornoz (2007), Bowen <i>et al.</i> (2008)
Modelo 5: modelo de Jones con <i>accruals</i> a c/p, con CFO (García Osma y Gill de Albornoz, 2007)	García Osma y Gill de Albornoz (2007)
Modelo 6: modelo modificado de Jones con ratio BtM y CFO (Larcker y Richardson, 2004)	Larcker y Richardson (2004), Larcker <i>et al.</i> (2007), Callao y Jarne (2010)
Modelo 7: modelo modificado de Jones con ROA de $t$ (Kothari <i>et al.</i> , 2005)	Kothari <i>et al.</i> (2005), Geiger y North (2006)
Modelo 8: modelo modificado de Jones con ROA de $t-1$ (Kothari <i>et al.</i> , 2005)	Kothari <i>et al.</i> (2005), Jones <i>et al.</i> (2008), Su <i>et al.</i> (2007)
Modelo 9: modelo de Jones adaptado (Dechow <i>et al.</i> , 2003)	Dechow <i>et al.</i> (2003), Ronen y Yaari (2007)
Modelo 10: modelo retardado (Chambers, 1999)	Chambers (1999), Dechow <i>et al.</i> (2003), Ronen y Yaari (2007)
Modelo 11: modelo con expectativas de futuro (Dechow <i>et al.</i> , 2003)	Dechow <i>et al.</i> (2003), Ronen y Yaari (2007), Ayers <i>et al.</i> (2006)

$$\frac{TA_{j,t}}{Assets_{j,t-1}} = \kappa_1 \frac{1}{Assets_{j,t-1}} + \kappa_2 \frac{\Delta Rev_{j,t}}{Assets_{j,t-1}} + \kappa_3 \frac{PPE_{j,t}}{Assets_{j,t-1}} + \varepsilon_{j,t} \quad (1)$$

Donde:

$TA_{j,t}$  = ajustes por devengo totales de la empresa  $j$  en el año  $t$

$$TA_{j,t} = (\Delta CA_{j,t} - \Delta Cash_{j,t}) - (\Delta CL_{j,t} - \Delta STDEBT_{j,t}) - DEPN_{j,t}$$

$(\Delta CA_{j,t} - \Delta Cash_{j,t})$  = variación de activo corriente, no disponible, entre  $t-1$  y  $t$

$(\Delta CL_{j,t} - \Delta STDEBT_{j,t})$  = variación de pasivo corriente, menos la parte de la deuda a largo plazo reclasificada, entre  $t-1$  y  $t$

$DEPN_{j,t}$  = amortizaciones de la empresa  $j$  en el año  $t$

$\Delta Rev_{j,t}$  = variación en la cifra de ventas de la empresa  $j$  entre  $t-1$  y  $t$

$PPE_{j,t}$  = inmovilizado material de la empresa  $j$  en el periodo  $t$

$Assets_{j,t-1}$  = cifra total de activo de la empresa  $j$  en el periodo  $t-1$

Con posterioridad, el modelo original de Jones ha sufrido múltiples modificaciones en aras de conseguir un modelo con mejores propiedades para la estimación de los ajustes discretos. Las adaptaciones al modelo inicial más destacadas, que quedan recogidas en la Tabla 1, se refieren a la incorporación de nuevas variables explicativas en la regresión propuesta por Jones, como los flujos de caja de la empresa o variables de mercado, o la corrección de la variable de variación en las ventas con los créditos por clientes (modelo modificado de Jones). Los 11 modelos recopilados son los más empleados en la literatura para la estimación de los ajustes discretos.

A partir de dichos modelos, los ajustes por devengo discretos se calculan con los residuos generados en su estimación. Así, obtenemos un residuo por cada observación empresa-año, por lo que, para que esta medida sea comparable con el resto, calcularemos la media, en el horizonte temporal estudiado, de los valores residuales en valor absoluto (Francis *et al.*, 2008). De este modo, contamos con una medida agregada de ajustes discretos para cada empresa:

$$DA_j = \text{media} \left| DA_{j,t} \right|.$$

## 2.2. Calidad de los ajustes por devengo (*Accruals Quality*)

Este enfoque considera que la distribución de los resultados debe ser similar a la distribución de los flujos de caja para que la cifra de beneficios sea deseable. Este concepto de calidad de los ajustes por devengo fue propuesto inicialmente por Dechow y Dichev (2002) y posteriormente modificado por McNichols (2002). Ambos se basan en la idea de que los ajustes por devengo, correctamente calculados, tienen un reflejo directo en la serie de flujos de caja y McNichols (2002) incorpora en la estimación las variaciones en las ventas y en el inmovilizado material.

### Modelo de Dechow y Dichev (2002)

$$\frac{TCA_{j,t}}{\text{"Size"}_{j,t}} = \varphi_{0,j} + \varphi_{1,j} \frac{CFO_{j,t-1}}{\text{"Size"}_{j,t}} + \varphi_{2,j} \frac{CFO_{j,t}}{\text{"Size"}_{j,t}} + \varphi_{3,j} \frac{CFO_{j,t+1}}{\text{"Size"}_{j,t}} + v_{j,t} \quad (2)$$

### Modelo de McNichols (2002)

$$\frac{TCA_{j,t}}{\text{"Size"}_{j,t}} = \varphi_{0,j} + \varphi_{1,j} \frac{CFO_{j,t-1}}{\text{"Size"}_{j,t}} + \varphi_{2,j} \frac{CFO_{j,t}}{\text{"Size"}_{j,t}} + \varphi_{3,j} \frac{CFO_{j,t+1}}{\text{"Size"}_{j,t}} + \varphi_{4,j} \frac{\Delta REV_{j,t}}{\text{"Size"}_{j,t}} + \varphi_{5,j} \frac{PPE_{j,t}}{\text{"Size"}_{j,t}} + v_{j,t} \quad (3)$$

Donde (el resto de variables han sido explicadas en la sección 2.1):

$TCA_{j,t}$  = ajustes por devengo a corto plazo de la empresa  $j$  en el año  $t$

$$TCA_{j,t} = (\Delta CA_{j,t} - \Delta Cash_{j,t}) - (\Delta CL_{j,t} - \Delta STDEBT_{j,t})$$

$CFO_{j,t}$  = flujos de caja operativos de la empresa  $j$  en el año  $t$ , calculados como:

$$CFO_{j,t} = NIBE_{j,t} - TA_{j,t}$$



$NIBE_{j,t}$  = resultado antes de resultados extraordinarios de la empresa  $j$  en el periodo  $t$

$TA_{j,t}$  = ajustes por devengo totales de la empresa  $j$  en el periodo  $t$ , calculados como se definen en el apartado anterior

" $Size$ " $_{j,t}$  = se emplean diferentes variables que están explicadas en la Tabla 2

Por tanto, estos autores sugieren medir la calidad de los ajustes por devengo estimando la proporción de los mismos que no se materializa en los flujos de caja de los ejercicios adyacentes. La literatura empírica ha medido este atributo empleando tanto el valor absoluto de los residuos de la regresión temporal de ambos modelos, como su desviación típica. Además, se han empleado diferentes variables correctoras del tamaño. Todas las alternativas empleadas en estudios previos quedan recogidas en la Tabla 2.

Tabla 2. Medidas de Calidad de los ajustes por devengo (AQ)

<p>Modelo de Dechow y Dichev (2002):</p> $\frac{TCA_{j,t}}{"Size"_{j,t}} = \varphi_{0,j} + \varphi_{1,j} \frac{CFO_{j,t-1}}{"Size"_{j,t}} + \varphi_{2,j} \frac{CFO_{j,t}}{"Size"_{j,t}} + \varphi_{3,j} \frac{CFO_{j,t+1}}{"Size"_{j,t}} + v_{j,t}$ <p>Modelo de McNichols (2002):</p> $\frac{TCA_{j,t}}{"Size"_{j,t}} = \varphi_{0,j} + \varphi_{1,j} \frac{CFO_{j,t-1}}{"Size"_{j,t}} + \varphi_{2,j} \frac{CFO_{j,t}}{"Size"_{j,t}} + \varphi_{3,j} \frac{CFO_{j,t+1}}{"Size"_{j,t}} + \varphi_{4,j} \frac{\Delta REV_{j,t}}{"Size"_{j,t}} + \varphi_{5,j} \frac{PPE_{j,t}}{"Size"_{j,t}} + v_{j,t}$ <p><math>TCA_{j,t}</math> = ajustes por devengo corrientes del año <math>t</math> de la empresa <math>j</math>:</p> $TCA_{j,t} = \Delta CA_{j,t} - \Delta CL_{j,t} - \Delta Cash_{j,t} + \Delta STDEBT_{j,t}$ <p><math>CFO_{j,t}</math> = flujos de caja operativos en el año <math>t</math>: <math>CFO_{j,t} = NIBE_{j,t} - TA_{j,t}</math></p> <p>"<math>Size</math>" son los diferentes deflatores empleados: AQ_01,06: activo total en <math>t</math>; AQ_02,07: activo total en <math>t-1</math>; AQ_03,08: activo medio entre <math>t</math> y <math>t-1</math>; AQ_04,09: ventas en <math>t</math>; AQ_05,10: valor de mercado en <math>t</math></p>	
Medidas Accrual Quality	<p>DT: <math>\sigma(\hat{v}_{j,t})</math></p> <p>ABS Res : <math>Media_t  \hat{v}_{j,t} </math></p>
Autores que han empleado los modelos	<p>Modelo de Dechow y Dichev (2002): Scholer (2004), Francis <i>et al.</i> (2004), Aboody <i>et al.</i> (2005), Francis <i>et al.</i> (2005), Barua (2006), Biddle y Hilary (2006), Gisbert (2006), Boonlert-U-Thai <i>et al.</i> (2006), Francis <i>et al.</i> (2006), Gill de Albornoz y Illueca (2007), Gunny <i>et al.</i> (2007), Sivaramakrishnan y Yu (2008), Jones <i>et al.</i> (2008), Gordon <i>et al.</i> (2008), Petru (2008), Laksmana y Yang (2009), Chen <i>et al.</i> (2009), Beatty <i>et al.</i> (2009), Gaio (2010), Francis <i>et al.</i> (2002), Scholer (2004), Aboody <i>et al.</i> (2005), Gisbert (2006), Gill de Albornoz y Illueca (2007)</p> <p>Modelo de McNichols (2002): Ecker <i>et al.</i> (2005), Francis <i>et al.</i> (2005), Boonlert-U-Thai <i>et al.</i> (2006), Biddle y Hilary (2006), Gisbert (2006), Gill de Albornoz y Illueca (2007), Francis <i>et al.</i> (2008), Jones <i>et al.</i> (2008), Petru (2008), Chen <i>et al.</i> (2009), Biddle <i>et al.</i> (2009), Wang (2010)</p>

### 2.3. Alisamiento de beneficios (*earnings smoothing*)

El alisamiento de resultados supone una reducción intencionada de la volatilidad del mismo. Este atributo se ha medido a través de la relación entre la distribución de beneficios a lo largo del tiempo y la distribución de los flujos de caja, considerando que estos últimos son el componente del resultado que no es objeto de manipulación.

Una parte muy importante de la investigación sobre *earnings smoothing* basa la medida de este atributo de calidad en los indicadores propuestos por Leuz *et al.* (2003).

La primera medida propuesta se basa en la relación existente entre la volatilidad del resultado (*Rdo*) y la volatilidad de los flujos de caja (*CFO*), donde menores valores indican que la volatilidad de los flujos de caja es mayor que la de los resultados y, por tanto, hay mayor nivel de alisamiento artificial de los resultados.

$$ESMa = \frac{\sigma(Rdo_{j,t})}{\sigma(CFO_{j,t})} \quad (4)$$

Donde:

$CFO_{j,t}$  = flujos de caja operativos de la empresa  $j$  en el año  $t$ , calculados como:

$$CFO_{j,t} = Rdo_{j,t} - TA_{j,t}$$

$TA$  sigue la definición establecida en la sección 2.1 y la variable  $Rdo$  y las variables deflactoras se especifican en la Tabla 3.

Según Leuz *et al.* (2003), los gerentes también pueden utilizar su discreción contable para disimular los impactos en los flujos de caja. Los ajustes por devengo intentan amortiguar estos impactos y esto supone una correlación negativa entre los cambios en ajustes por devengo (*Accruals*) y los cambios en flujos de caja (*CFO*). La correlación negativa es el resultado natural, pero grandes magnitudes indicarán un alisamiento artificial de los resultados. La segunda medida propuesta se basa en la correlación entre la variación de los ajustes discretos y los flujos de caja.

$$ESMb = \rho(\Delta Accruals_{j,t}, \Delta CFO_{j,t}) \quad (5)$$

Donde:

$TA_{j,t}$  y  $CFO_{j,t}$  siguen las definiciones establecidas en las secciones anteriores y tanto la variable  $Rdo$  como las variables deflactoras se especifican en la Tabla 3.

Ambas medidas se han calculado en la literatura empírica previa empleando diferentes escalones de resultado y considerando distintas variables deflactoras.

Tabla 3. Medidas de alisamiento de beneficios (ESM)

<p>Medidas propuestas por Leuz <i>et al.</i> (2003):</p> <p>1ª medida: <math>ESMa = \frac{\sigma(Rdo_{j,t})}{\sigma(CFO_{j,t})}</math></p> <p>2ª medida: <math>ESMb = \rho(\Delta Accruals_{j,t}, \Delta CFO_{j,t})</math></p> <p><math>CFO_{j,t}</math> = flujos de caja operativos en el año t: <math>CFO_{j,t} = Rdo_{j,t} - TA_{j,t}</math></p> <p><math>TA_{j,t}</math> = ajustes por devengo totales de la empresa j en el año t</p> <p><math>TA_{j,t} = (\Delta CA_{j,t} - \Delta Cash_{j,t}) - (\Delta CL_{j,t} - \Delta STDEBT_{j,t}) - DEPN_{j,t}</math></p> <p><math>Rdo_{j,t}</math> = se utilizan dos escalones del resultado: el resultado operativo (<i>OpIncome</i>) y el resultado neto antes de resultados extraordinarios (<i>NIBE</i>)</p> <p>Todas las variables están deflactadas para corregir por tamaño y se utilizan las variables empleadas para ello en la literatura: activo total en t; activo total en t-1; activo medio entre t y t-1; valor contable en libros en t; número medio de acciones entre t y t-1.</p>	
<p>Autores que han empleado los modelos</p>	<p>ESMa: Hunt <i>et al.</i> (1997), Thomas y Zhang (2002), Leuz <i>et al.</i> (2003), Francis <i>et al.</i> (2004), Ecker <i>et al.</i> (2005), Burgstahler <i>et al.</i> (2006), Gassen y Sellhorn (2006), Boonlert-U-Thai <i>et al.</i> (2006), Gunny <i>et al.</i> (2007), Gordon <i>et al.</i> (2008), Douppnik (2008), Van Tendeloo y Vanstraelen (2008), Bowen <i>et al.</i> (2008), García Osma y Pope (2009), Laksmana and Yang (2009) y Gaio (2010).</p> <p>ESMb: Leuz <i>et al.</i> (2003), Bhattacharya <i>et al.</i> (2003), Ball y Shivakumar (2005), Biddle y Hilary (2006), Burgstahler <i>et al.</i> (2006), Douppnik (2008), Van Tendeloo y Vanstraelen (2008), García Osma y Pope (2009)</p>

A modo de resumen, la Tabla 4 establece el número de alternativas de medida de los distintos atributos derivadas de las propuestas realizadas por la literatura previa. En nuestro caso, calcularemos todas estas alternativas con el fin de comparar si todas ellas son equivalentes o no.

Tabla 4. Alternativas de medidas de los distintos atributos de calidad del resultado.

Atributo de calidad	Alternativas de medida	
Ajustes por devengo discrecionales ( <i>Discretionary Accruals</i> )	11 modelos	11 indicadores diferentes para la medición de ajustes por devengo discrecionales
Calidad de los Ajustes por devengo ( <i>Accruals Quality</i> )	2 modelos; 2 medidas y 5 variables deflactoras	20 indicadores diferentes para la medición de la calidad de ajustes por devengo
Alisamiento de beneficios ( <i>Earnings Smoothing</i> )	2 medidas, 2 escalones de resultados y 5 variables deflactoras	15 indicadores diferentes para la medición del alisamiento de beneficios

### 3. METODOLOGÍA

#### 3.1. Selección de la muestra

La muestra seleccionada para el estudio está formada por un conjunto de empresas españolas cotizadas en el mercado de valores y el periodo de análisis abarca desde 1998 hasta 2007. Se han seleccionado empresas españolas y para dicho periodo de tiempo con el fin de aislar los resultados de la posible influencia de la normativa contable aplicada<sup>2</sup>.

La información financiera de las empresas de la muestra se ha obtenido de la base de datos *Amadeus*. De la muestra inicial de empresas con información disponible en dicha base de datos, se excluyen las empresas no financieras debido a la normativa específica con la que cuentan y para mejorar la homogeneidad de la muestra y la comparabilidad de los resultados entre las empresas. Además, excluimos las empresas de las que se dispone de información para menos de 5 años. De este modo, la muestra final contiene 153 empresas no financieras cotizadas en el mercado español.

El perfil de las empresas incluidas en la muestra se caracteriza porque son empresas grandes cuyas acciones cotizan en el mercado continuo español. No obstante, para caracterizar la situación económico-financiera de la empresa podríamos destacar que, en media, las empresas analizadas presentan una cifra de activo de 1.598 millones de euros, un capital social de 143 millones de euros y cifras de ventas y beneficios de 415 y 121 millones de euros, respectivamente.

La distribución sectorial de las empresas incluidas en la muestra se muestra en la Tabla 5, según la clasificación sectorial bursátil, pues todas las empresas incluidas pertenecen al mercado bursátil español. La distribución sectorial de la muestra representa bien al mercado bursátil, pues es muy similar a la de éste (ver Tabla 5). Podemos destacar que la mitad de la muestra se corresponde con los sectores de “Materiales básicos, industria y construcción” y “Bienes de consumo” y los sectores con menos representación son el de “Petróleo y energía” y el de “Tecnología y telecomunicaciones”.

Tabla 5. Distribución sectorial de las empresas de la muestra y del mercado bursátil español.

Sectores	Distribución de la muestra (nº y %)		Distribución mercado bursátil
1. Petróleo y energía	13	8%	13%
2. Materiales básicos, industria y construcción	41	27%	28%
3. Bienes de consumo	41	27%	26%
4. Servicios de consumo	20	13%	13%
5. Inmobiliarias	28	18%	15%
6. Tecnología y telecomunicaciones	10	7%	5%
TOTAL	153	100%	100%

Fuente: Elaboración propia, a partir de Bolsas y Mercados Españoles.

<sup>2</sup> En el caso del horizonte temporal, el final se establece en 2007 debido al cambio normativo producido en 2008. La inclusión de datos posteriores podría alterar la serie temporal por la falta de comparabilidad entre la información financiera elaborada con normativas diferentes.

### 3.2. Procedimiento de cálculo de los indicadores de calidad

Los indicadores de calidad, basados en los distintos atributos del resultado recogidos en la sección 2, se calculan individualmente para cada una de las empresas de la muestra seleccionada. En la misma línea que la selección de autores de la que son pioneros Francis *et al.* (2004)<sup>3</sup>, medimos cada uno de los indicadores a través de una regresión temporal para cada empresa, abarcando un periodo de estudio de 10 años (1998-2007).

Dado que consideramos diversos modelos para obtener las diferentes medidas de calidad del resultado, debemos estimar todos ellos, con las distintas variantes planteadas, para cada una de las empresas de la muestra. De esta forma, obtenemos un indicador de calidad para cada empresa.

Una vez calculados los diferentes indicadores por empresa para cada medida de calidad del resultado analizada, eliminamos los extremos en base a la desigualdad de Tchevichev<sup>4</sup>.

La Tabla 6 recoge el análisis descriptivo de los resultados obtenidos para los diferentes indicadores calculados. Evaluando los estadísticos descriptivos, podemos anticipar algunos de los resultados que confirmaremos posteriormente, principalmente, la falta de homogeneidad entre los valores adquiridos por los indicadores que tratan de medir el mismo atributo de calidad del resultado.

Tabla 6. Análisis descriptivo de los indicadores de calidad del resultado.

Panel A. Estadísticos descriptivos de los ajustes por devengo discrecionales (DA)

	Media	Desv. típica	10%	25%	Mediana	75%	90%	Nº observ.
DA_01	0,0546	0,0402	0,0172	0,0287	0,0452	0,0648	0,1038	144
DA_02	0,0672	0,0661	0,0183	0,0298	0,0481	0,0786	0,1294	146
DA_03	0,0528	0,0395	0,0173	0,0274	0,0424	0,0673	0,0903	145
DA_04	0,0304	0,0183	0,0100	0,0170	0,0262	0,0404	0,0585	144
DA_05	0,0395	0,0299	0,0121	0,0193	0,0317	0,0486	0,0707	147
DA_06	0,0126	0,0107	0,0028	0,0054	0,0096	0,0171	0,0263	100
DA_07	0,0452	0,0343	0,0133	0,0222	0,0367	0,0569	0,0863	145
DA_08	0,0430	0,0366	0,0120	0,0190	0,0325	0,0546	0,0879	146
DA_09	0,0527	0,0395	0,0174	0,0277	0,0424	0,0662	0,0903	145
DA_10	0,0392	0,0286	0,0113	0,0188	0,0303	0,0568	0,0798	142
DA_11	0,0447	0,0342	0,0116	0,0216	0,0372	0,0553	0,0865	138

<sup>3</sup> Francis *et al.* (2005), Boonlert-U-Thai *et al.* (2006), Bowen *et al.* (2008), Francis *et al.* (2008), Laksmana y Yang (2009) o Gaio (2010) son algunos de los autores que miden los atributos del resultado para cada empresa individualmente sobre un serie temporal.

<sup>4</sup> Para cada medida estudiada, eliminamos aquellas empresas cuyos resultados se encuentran por encima del valor de la media más tres veces la desviación típica y aquellas que caen por debajo del valor de la media menos tres veces la desviación típica. Los resultados coinciden si eliminamos las empresas situadas en el primer percentil (1%) y en el último percentil (99%)

Panel B. Estadísticos descriptivos de calidad de ajustes por devengo (AQ)

	Media	Desv. típica	10%	25%	Mediana	75%	90%	Nº observ.
AQ01_ABS(Res)	0,0166	0,0128	0,0047	0,0071	0,0133	0,0237	0,0305	142
AQ01_DTRes	0,0218	0,0169	0,0068	0,0096	0,0180	0,0307	0,0385	142
AQ02_ABS(Res)	0,0206	0,0192	0,0051	0,0081	0,0151	0,0259	0,0399	142
AQ02_DTRes	0,0261	0,0225	0,0072	0,0105	0,0195	0,0329	0,0493	141
AQ03_ABS(Res)	0,0176	0,0144	0,0045	0,0074	0,0143	0,0242	0,0336	142
AQ03_DTRes	0,0230	0,0187	0,0059	0,0096	0,0187	0,0315	0,0415	142
AQ04_ABS(Res)	0,3448	0,9056	0,0080	0,0166	0,0418	0,1599	0,9016	139
AQ04_DTRes	0,4678	1,2211	0,0106	0,0215	0,0547	0,2010	1,1900	139
AQ05_ABS(Res)	0,0168	0,0211	0,0036	0,0061	0,0095	0,0178	0,0408	97
AQ05_DTRes	0,0220	0,0282	0,0046	0,0081	0,0129	0,0240	0,0536	97
AQ06_ABS(Res)	0,0089	0,0069	0,0024	0,0039	0,0066	0,0123	0,0177	129
AQ06_DTRes	0,0118	0,0092	0,0031	0,0053	0,0087	0,0169	0,0246	129
AQ07_ABS(Res)	0,0111	0,0102	0,0018	0,0043	0,0083	0,0143	0,0235	131
AQ07_DTRes	0,0148	0,0135	0,0025	0,0057	0,0108	0,0195	0,0303	131
AQ08_ABS(Res)	0,0099	0,0085	0,0020	0,0041	0,0074	0,0128	0,0196	129
AQ08_DTRes	0,0131	0,0114	0,0029	0,0053	0,0095	0,0167	0,0267	129
AQ09_ABS(Res)	0,1707	0,4405	0,0037	0,0082	0,0252	0,0644	0,3886	129
AQ09_DTRes	0,2763	0,7529	0,0049	0,0106	0,0355	0,0879	0,5811	130
AQ10_ABS(Res)	0,0085	0,0109	0,0010	0,0032	0,0056	0,0092	0,0177	83
AQ10_DTRes	0,0105	0,0123	0,0015	0,0044	0,0073	0,0113	0,0214	82

Panel C. Estadísticos descriptivos de alisamiento de beneficios (ESM)

	Media	Desv. típica	10%	25%	Mediana	75%	90%	Nº observ.
ESM. Ratio DT_01	0,4096	0,3264	0,0821	0,1628	0,3090	0,6098	0,8882	149
ESM. Ratio DT_02	0,3880	0,3122	0,0580	0,1334	0,2765	0,5977	0,7975	146
ESM. Ratio DT_03	0,3863	0,3060	0,0617	0,1359	0,2874	0,5956	0,8047	146
ESM. Ratio DT_04	0,4335	0,4677	0,0799	0,1625	0,3067	0,5429	0,8574	147
ESM. Ratio DT_05	0,4096	0,3365	0,0768	0,1546	0,3062	0,6043	0,8484	126
ESM. Ratio DT_06	0,4606	0,2674	0,1342	0,2282	0,4126	0,6278	0,8256	148
ESM. Ratio DT_07	0,4481	0,2688	0,1141	0,2488	0,4332	0,6219	0,8104	145
ESM. Ratio DT_08	0,4539	0,2697	0,1198	0,2424	0,4184	0,6038	0,8342	146
ESM. Ratio DT_09	0,4703	0,3832	0,1149	0,2364	0,3972	0,5732	0,8075	150
ESM. Ratio DT_10	0,4923	0,3068	0,1291	0,2676	0,4547	0,6498	0,8605	128
ESM. Corr_01	-0,8482	0,1915	-1,0000	-0,9762	-0,9167	-0,7857	-0,5000	144
ESM. Corr_02	-0,8361	0,1923	-1,0000	-0,9762	-0,9048	-0,7619	-0,5571	145
ESM. Corr_03	-0,8370	0,1968	-1,0000	-0,9762	-0,9048	-0,7857	-0,4810	145
ESM. Corr_04	-0,8242	0,2195	-1,0000	-0,9762	-0,9048	-0,7857	-0,4048	146
ESM. Corr_05	-0,8495	0,1846	-1,0000	-0,9762	-0,9286	-0,8095	-0,5619	127

Tal y como podemos observar, en el caso de los ajustes por devengo discrecionales (DA), si medimos la calidad del resultado utilizando el nivel de ajustes discrecionales estimados con el modelo propuesto por Larcker y Richardson (2004), el resultado, en media, es de 0,0126 y, sin embargo, si el modelo que utilizamos para la estimación de ajustes discrecionales es el de Jones (1991) con ajustes discrecionales a corto plazo, el resultado, en media, es 0,0672. Y entre estos dos extremos se encuentran los resultados obtenidos con los diferentes modelos empleados en la estimación de los ajustes discrecionales. Asimismo, en el caso en que quisiéramos medir la calidad del resultado a través de la calidad de los ajustes por devengo, los resultados descriptivos muestran que esta calidad sería ligeramente superior, en media, si utilizamos el modelo de Dechow y Dichev (2002) (modelos 1 a 5) que si utilizamos el modelo de McNichols (2002) (modelos 6 a 10). Del mismo modo, si empleáramos las ventas para corregir la serie por el tamaño (modelos 4 y 9), los resultados, en media, son muy superiores a los que se obtienen con el resto de variables deflactoras.

Finalmente, para el caso de la medición de la calidad del resultado a través del alisamiento de beneficios, los resultados medios se duplican utilizando como medida de alisamiento la correlación entre la variación en los flujos de caja y los ajustes por devengo (2ª medida) con respecto a los resultados obtenidos con el ratio entre la desviación típica en los resultados y en los flujos de caja. Por tanto, en base a los resultados preliminares arrojados por el análisis descriptivo, podemos anticipar la variabilidad que existe entre las diferentes alternativas empleadas en la literatura para medir el mismo concepto. Nuestro objetivo es estudiar si estas diferencias son significativas.

### **3.3. Metodología para el análisis de diferencias entre las alternativas de medición de los atributos del resultado**

El objetivo del estudio, como hemos indicado anteriormente, es evaluar si los resultados que arrojan las distintas alternativas empleadas para la medición de cada uno de los atributos son equivalentes o si, por el contrario, los valores de cada atributo obtenidos por la aplicación de las distintas alternativas metodológicas difieren entre sí. Para ello, contrastamos la existencia de diferencias significativas entre el conjunto de alternativas empleadas para la medición de cada uno de los atributos. Concretamente, realizamos este análisis empleando la prueba no paramétrica para  $k$  muestras independientes de Friedman (1937)<sup>5</sup>. Esta prueba se utiliza en las situaciones en las que se seleccionan  $n$  individuos de  $k$  elementos distintos, de forma que a estos elementos se les aplican  $k$  tratamientos distintos. En este caso, para cada una de las  $n$  empresas contamos con  $k$  distintas alternativas de medida para cada uno de los atributos y tratamos de contrastar la hipótesis nula de que las  $k$  alternativas de medición proceden de la misma población. Esta prueba es el equivalente

---

<sup>5</sup> Una descripción del test de Friedman puede consultarse en el Anexo II.

de la prueba de Wilcoxon cuando existen más de dos muestras relacionadas y la del análisis ANOVA cuando las variables no siguen la distribución normal<sup>6</sup>.

De esta forma, es posible observar si el conjunto de alternativas empleadas con anterioridad por la literatura contable comparten la misma distribución de probabilidad o pertenecen a la misma muestra, o si la aplicación de una u otra alternativa arroja resultados diferentes; esto es, si existen diferencias significativas entre ellas.

#### 4. RESULTADOS

Tal y como ha quedado de manifiesto en el desarrollo de los distintos atributos del resultado y sus alternativas de medición, existen diversas formas de medición empleadas en la literatura previa que han sido aplicadas para el análisis del mismo atributo, sin resaltar las diferencias existentes entre ellas. El análisis descriptivo realizado para los resultados obtenidos en el cálculo de cada uno de los indicadores ha mostrado las diferencias que existen entre diferentes indicadores de calidad del resultado que responden al mismo concepto y que en la literatura previa han sido empleados como sustitutivos. En base a estos resultados previos, en la presente sección mostramos los resultados de la aplicación del análisis de Friedman con el fin de evaluar si las distintas alternativas de medición para cada uno de los atributos son equivalentes o si, por el contrario, existen diferencias significativas entre ellas. Los resultados de la aplicación del test de Friedman para todos los indicadores de los distintos atributos del resultado estudiados se presentan en la Tabla 7 e indican que, para todos los atributos estudiados, los valores obtenidos para la medición de cada uno de los atributos a través de los distintos indicadores se muestran significativamente diferentes, en todos los casos con una significatividad superior al 99%.

Tabla 7. Resultados del test de Friedman.

Panel A. Resultados incluyendo todos los indicadores de cada atributo

Atributo del resultado	Valor de Chi-cuadrado	p-valor	N
DA	454,399	0,000	97
AQ	777,126	0,000	76
ESM	1155,766	0,000	119

Panel B. Resultados excluyendo los dos indicadores con mayor y menor valor medio para cada atributo.

Atributo del resultado	Valor de Chi-cuadrado	p-valor	N
DA	324,786	0,000	134
AQ	624,512	0,000	76
ESM	962,940	0,000	121

<sup>6</sup> Antes de aplicar la prueba de Friedman hemos contrastado la hipótesis de normalidad para las 46 variables objeto de estudio basándonos en el test de Kolmogorov-Smirnov (con la corrección de la significación de Lilliefors). La mayor parte de las variables analizadas no se distribuyen con normalidad, por lo que no podemos utilizar test paramétricos de comparación de medias.



Tomando de nuevo como referencia los resultados del análisis descriptivo anterior (Tabla 6), para garantizar robustez en los resultados y que las diferencias significativas que muestra el test de Friedman no estén provocadas por un único indicador, repetimos los análisis excluyendo los dos indicadores con mayor valor medio y los dos indicadores con menor valor medio. Los resultados, tal y como muestra la Tabla 7, panel B, se mantienen. Esto es, se muestran diferencias significativas entre los indicadores empleados para la medición de cada uno de los atributos. Por tanto, estos resultados aportan evidencia de que la aplicación de todas las alternativas empleadas en la literatura previa no conduciría a resultados equivalentes, sino que en función de la alternativa empleada, las conclusiones del estudio serían diferentes.

## 5. CONCLUSIONES

Ya ha quedado demostrado que la calidad del resultado contable no es un concepto medible a través de una única variable y que existen diversos atributos de la cifra de resultados que caracterizan a la información que resulta útil en la toma de decisiones del usuario, es decir, una información de calidad.

Dechow *et al.* (2010) demuestran que no existe una característica del resultado, de entre las estudiadas en la literatura como subrogado de calidad, que pueda considerarse la mejor medida de calidad del resultado. Y, además, afirman que el uso de uno u otro atributo del resultado para medir su calidad puede condicionar los resultados de la investigación. Con los resultados de este trabajo, se demuestra que no solo es determinante el atributo seleccionado para la evaluación de la calidad de la información financiera, sino que, además, para cada atributo existen diferentes alternativas de cálculo y el uso de unas u otras condiciona los niveles observados de calidad del resultado, pues estas diferentes alternativas se muestran significativamente distintas para cada uno de los atributos.

Los resultados obtenidos en el presente trabajo tienen una importante implicación para la comunidad académica interesada en el estudio de la calidad del resultado empresarial, pues se demuestra que no resulta indiferente la aplicación de un modelo u otro en el análisis de un determinado atributo del resultado o que el empleo de una u otra variable para deflactar la serie de resultados puede determinar las conclusiones extraídas de un trabajo de investigación.

Además, estos resultados servirían para afirmar que analizar la calidad del resultado no es tan sencillo como analizar uno cualquiera de los atributos que otorgan calidad al mismo, pues no se realiza una medición completa de dicho concepto. Por un lado, el atributo seleccionado para el análisis y, por otro, el método escogido para su evaluación, determinan los resultados extraídos de la investigación.

En consecuencia, para obtener mediciones fiables de la calidad del resultado y poder establecer relaciones de dependencia entre esta calidad y otras características corporativas de interés, o realizar análisis comparativos a nivel internacional, no deberíamos limitarnos al estudio de un atributo ni medirlo en base a una determinada perspectiva. Por el contrario, la mejor opción sería tener en cuenta el conjunto de atributos que caracterizan un resultado contable de calidad, así como las alternativas de medición de dichos atributos.

De este modo, dado que la combinación de atributos y modelos de medición lleva a la obtención de un gran número de indicadores de la calidad del resultado, parece evidente la necesidad de buscar un modelo capaz de medir los atributos de calidad incorporando todos aquellos indicadores en los que se refleja cada una de las características del resultado. En este sentido, en nuestra opinión, los modelos de ecuaciones estructurales constituirían una metodología idónea porque, además, permiten analizar simultáneamente relaciones de dependencia entre variables latentes y observables y relaciones tanto directas como indirectas. Así pues, las líneas futuras de investigación a partir de este trabajo inicial deberían diseñar un modelo a través del cual la variable “calidad del resultado” recogiera el valor de los distintos atributos del resultado y las interrelaciones entre ellos y, a su vez, que esta variable de calidad estuviera relacionada (como variable endógena o exógena) con otros aspectos de interés de la empresa.

## REFERENCIAS

- Aboody, D., Hughes, J. y Liu, J. (2005). Earnings quality, insider trading, and cost of capital. *Journal of Accounting Research*, Vol. 43, Nº 5, pp. 651–673.
- Alcarria, J. y Gill de Albornoz, B. (2004). Specification and power of cross-sectional abnormal working capital accruals models in the Spanish context. *European Accounting Review*, Vol. 13, Nº 1, pp. 73–104.
- Aussenegg, W., Inwinkl, P. y Schneider, G.T. (2008). Earnings management and local vs. international accounting standards of european public firms. *Working paper*: <http://www.ssm.com>.
- Ayers, B.C., Jiang, J. y Yeung, P.E. (2006). Discretionary Accruals and Earnings Management: An analysis of pseudo earnings targets. *Accounting Review*, Vol. 81, Nº 3, pp. 617–652.
- Ball, R. y Shivakumar, L. (2005). Earnings quality in UK private firms: comparative loss recognition timeliness. *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 39, Nº 1, pp. 83–128.
- Bartov, E., Gul, F. y Tsui, J. (2000). Discretionary-accruals models and audit qualifications. *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 30, Nº 3, pp. 421–452.
- Barua, A. (2006). *Using the FASB's qualitative characteristics in earnings quality measures*. Louisiana State University.
- Beatty, A., Liao, S. y Weber, J. (2009). Financial reporting quality, private information, monitoring and the lease-versus-buy decision. *Working paper, disponible en: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1499306](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1499306)*. Ohio State University.
- Bhattacharya, U., Daouk, H. y Welker, M. (2003). The world price of earnings opacity. *The Accounting Review*, Vol. 78, Nº 3, pp. 641–678.
- Biddle, G. y Hilary, G. (2006). Accounting quality and firm-level capital investment. *Accounting Review*, Vol. 81, Nº 5, pp. 963–982.

- Biddle, G., Hilary, G. y Verdi, R. (2009). How does financial reporting quality relate to investment efficiency? *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 48, N° 2-3, pp. 112–131.
- Boonlert-U-Thai, K., Meek, G. y Nabar, S. (2006). Earnings attributes and investor-protection: International evidence. *International Journal of Accounting*, Vol. 41, N° 4, pp. 327–357.
- Bowen, R., Rajgopal, S. y Venkatachalam, M. (2008). Accounting discretion, corporate governance, and firm performance. *Contemporary Accounting Research*, Vol. 25, N° 2, pp. 351–405.
- Burgstahler, D., Hail, L. y Leuz, C. (2006). The importance of reporting incentives: Earnings management in European private and public firms. *The Accounting Review*, Vol. 81, N° 5, pp. 983–1016.
- Callao, S. y Jarne, J.I. (2010). Have IFRS affected earnings management in the European Union? *Accounting in Europe*, Vol. 7, N° 2, pp. 209–239.
- Chambers, D. (1999). Earnings management and capital market misallocation. *Working paper*, disponible en: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=198790](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=198790).
- Chen, H., Tang, Q., Jiang, Y. y Lin, Z. (2009). Mandatory IFRS Adoption and Accounting Quality: Evidence from the European Union. *Working paper*, disponible en: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1330352](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1330352).
- Cheng, P., Man, P. y Yi, C.H. (2013). The impact of product market competition on earnings quality. *Accounting and Finance*, 53, 137–162.
- Dechow, P. y Dichev, I. (2002). The quality of accruals and earnings: The role of accrual estimation errors. *Accounting Review*, 77, Supplement, pp. 35–59.
- Dechow, P., Ge, W. y Schrand, C. (2010). Understanding earnings quality: A review of the proxies, their determinants and their consequences. *Journal of Accounting and Economics*, 50, 2-3, pp. 127–466.
- Dechow, P., Richardson, S. y Tuna, I. (2003). Why are earnings kinky? An examination of the earnings management explanation. *Review of Accounting Studies*, Vol. 8, N° 2, pp. 355–384.
- Dechow, P., Sloan, R. y Sweeney, A. (1995). Detecting earnings management. *The Accounting Review*, Vol. 70, N° 2, pp. 193–225.
- DeFond, M. y Jiambalvo, J. (1994). Debt covenant violation and manipulation of accruals. *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 17, N° 1-2, pp. 145–176.
- DeFond, M. y Park, C. (1997). Smoothing income in anticipation of future earnings. *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 23, N° 2, pp. 115–139.
- DeFond, M. y Subramanyam, K. (1998). Auditor changes and discretionary accruals. *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 25, N° 1, pp. 35–67.
- DeGeorge, F., Ding, Y., Jeanjean, T. y Stolowy, H. (2007). The impact of analyst following on earnings management: Monitoring or consensus fixation? International evidence. *Working paper*: <http://www.iae.univ-poitiers.fr/afc07/Programme/PDF/p102.pdf>. Swiss Finance Institute.
- Delgado, M. y Castrillo, L. (2001). Detecting earnings management in a Spanish context. *Working paper*: [http://www3.uva.es/empresa/uploads/dt\\_09\\_01.pdf](http://www3.uva.es/empresa/uploads/dt_09_01.pdf).
- Doupnik, T. (2008). Influence of culture on earnings management: a note. *Abacus*, Vol. 44, N° 3, pp. 317–340.
- Ecker, F., Francis, J., Olsson, P. y Schipper, K. (2005). Comparing total and current accruals quality. *Working paper*: [http://faculty.fuqua.duke.edu/~fecker/EFOS\\_2005.pdf](http://faculty.fuqua.duke.edu/~fecker/EFOS_2005.pdf). Duke University.
- Francis, J., LaFond, R., Olsson, P. y Schipper, K. (2002). The market pricing of accruals quality. *Working paper*: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=414140](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=414140).
- Francis, J., LaFond, R., Olsson, P. y Schipper, K. (2004). Costs of equity and earnings attributes. *Accounting Review*, Vol. 79, N° 4, pp. 967–1010.

- Francis, J., LaFond, R., Olsson, P. y Schipper, K. (2005). The market pricing of accruals quality. *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 39, Nº 2, pp. 295–327.
- Francis, J., Nanda, D. y Olsson, P. (2008). Voluntary disclosure, earnings quality, and cost of capital. *Journal of Accounting Research*, Vol. 46-99, Nº 1, pp. 53–99.
- Francis, J., Olsson, P. y Schipper, K. (2006). *Earnings Quality*, Foundations and Trends in Accounting.
- Friedman, M. (1937). The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance. *Journal of the American Statistical Association* (American Statistical Association) 32, 200, pp. 675–701.
- Gaio, C. (2010). The Relative Importance of Firm and Country Characteristics for Earnings Quality around the World. *European Accounting Review*, Vol. 19, Nº 4, pp. 693–738.
- Gaio, C. y Raposo, C. (2011). Earnings quality and firm valuation: international evidence. *Accounting and Finance*, 51, pp. 467–499.
- García Osma, B. y Gill de Albornoz, B. (2005). Corporate governance and earnings management in Spain. *Working paper*: [http://dfc.gestao.iscte.org/downloads/Gov\\_EM\\_BelenNoguer.pdf](http://dfc.gestao.iscte.org/downloads/Gov_EM_BelenNoguer.pdf).
- García Osma, B. y Gill de Albornoz, B. (2007). The effect of the board composition and its monitoring committees on earnings management: Evidence from Spain. *Corporate Governance: An International Review*, Vol. 15, Nº 6, pp. 1413–1428.
- García Osma, B. y Pope, P. (2009). Earnings quality effects of mandatory IFRS adoption. *Working paper*.
- Gassen, J. y Sellhorn, T. (2006). Applying IFRS in Germany: determinants and consequences. *Working paper*, disponible en: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=906802](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=906802).
- Geiger, M.A. y North, D.S. (2006). Does hiring a new CFO change things? An investigation of changes in discretionary accruals. *Accounting Review*, Vol. 81, Nº 4, pp. 781–809.
- Gill-de-Albornoz, B. y Illueca, M. (2005). Earnings management under price regulation: Empirical evidence from the Spanish electricity industry. *Energy Economics*, Vol. 27, Nº 2, pp. 279–304.
- Gill de Albornoz, B. y Illueca, M. (2007). La calidad de los ajustes por devengo no afecta al coste de la deuda de las PYMES españolas. *Investigaciones Económicas*, Vol. 31, Nº 1, pp. 79–117.
- Gisbert, A. (2006). La reacción de los mercados de capitales europeos a las estrategias de publicación del resultado. *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, Vol. 131, Nº Extraordinario, pp. 72–108.
- Gordon, E., Jorgensen, B. y Linthicum, C. (2008). Could IFRS Replace US GAAP? A Comparison of Earnings Attributes and Informativeness in the US Market. *Working paper*, disponible en: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1132908](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1132908).
- Guidry, F., Leone, A. y Rock, S. (1999). Earnings-based bonus plans and earnings management by business-unit managers. *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 26, Nº 1-3, pp. 113–142.
- Gunny, K., Jacob, J. y Jorgensen, B. (2007). Earnings Attributes of Alternate Annual Reporting Periods. *Working paper*: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=992068](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=992068).
- Hunt, A., Moyer, S. y Shevlin, T. (1997). Earnings volatility, earnings management and equity value. *Working paper*: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.129.8282&rep=rep1&type=pdf>. University of Washington.
- Jones, J. (1991). Earnings management during import relief investigations. *Journal of Accounting Research*, Vol. 29, Nº 2, pp. 193–228.
- Jones, K., Krishnan, G. y Melendrez, K. (2008). Do models of discretionary accruals detect actual cases of fraudulent and restated earnings? An empirical analysis. *Contemporary Accounting Research*, Vol. 25, Nº 2, pp. 499–531.
- Kasznik, R. (1999). On the association between voluntary disclosure and earnings management. *Journal of Accounting Research*, Vol. 37, Nº 1, pp. 57–81.

- Kothari, S., Leone, A. y Wasley, C. (2005). Performance matched discretionary accrual measures. *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 39, N° 1, pp. 163–197.
- Krishnan, G. y Visvanathan, G. (2007). Was Arthur Andersen different? Further evidence on earnings management by clients of Arthur Andersen. *International Journal of Disclosure and Governance*, 5, 1, pp. 36–47.
- Laksmana, I. y Yang, Y. (2009). Corporate citizenship and earnings attributes. *Advances in Accounting, incorporating Advances in International Accounting*, Vol. 25, N° 1, pp. 40–48.
- Larcker, D. y Richardson, S. (2004). Fees paid to audit firms, accrual choices, and corporate governance. *Journal of Accounting Research*, Vol. 42, N° 3, pp. 625–658.
- Larcker, D., Richardson, S. y Tuna, A. (2007). Corporate governance, accounting outcomes, and organizational performance. *Accounting Review*, Vol. 82, N° 4, pp. 963–1008.
- Leuz, C., Nanda, D. y Wysocki, P. (2003). Earnings management and investor protection: an international comparison. *Journal of Financial Economics*, Vol. 69, N° 3, pp. 505–527.
- McNichols, M. (2002). Discussion of the quality of accruals and earnings: The role of accrual estimation errors. *The Accounting Review*, 77, Supplement, pp. 61–69.
- Petru, B. (2008). *Calidad del resultado en la empresa española: evidencia empírica*. Tesis doctoral, Universidad de Extremadura.
- Ronen, J. y Yaari, V. (2007). *Earnings management: emerging insights in theory, practice, and research*, Springer.
- Schipper, K. y Vincent, L. (2003). Earnings Quality. *Accounting Horizons*, 17, Supplement, pp. 97–111.
- Scholer, F. (2004). The Quality of Accruals and Earnings and the Market Pricing of Earnings Quality. *Working paper*: [http://www.hha.dk/afl/wp/rep/R\\_2004\\_01.pdf](http://www.hha.dk/afl/wp/rep/R_2004_01.pdf). University of Aarhus.
- Sivaramakrishnan, S. y Yu, S. (2008). On the Association Between Corporate Governance and Earnings Quality. *Working paper*: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1014243](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1014243).
- Su, L., Srinidhi, B. y Gul, F. (2007). Informativeness of Earnings and Accruals: Evidence from Audit Pricing. *Working paper*: <http://www.uic.edu/cba/accounting/Documents/Srinidhi-paper.pdf>.
- Subramanyam, K. (1996). The pricing of discretionary accruals. *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 22, N° 1-3, pp. 249–281.
- Thomas, J. y Zhang, H. (2002). Value-relevant properties of smoothed earnings. *Working paper*: <http://www.uic.edu/classes/actg/actg315zhang/smoo.pdf>. Columbia University, New York.
- Van Tendeloo, B. y Vanstraelen, A. (2005). Earnings management under German GAAP versus IFRS. *European Accounting Review*, Vol. 14, N° 1, pp. 155–180.
- Van Tendeloo, B. y Vanstraelen, A. (2008). Earnings management and audit quality in Europe: Evidence from the private client segment market. *European Accounting Review*, Vol. 17, N° 3, pp. 447–469.
- Wang, L. (2010). Cross-Listing and the Value of Bonding Under Increased Market Integration. *Working paper, disponible en*: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1572105](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1572105).
- Yanmin, P. y Huifang, J. (2011). The measurement of earnings quality of listed companies from manufacturing industry: an empirical study. *2011 International Conference on E-Business and E-Government, ICEE2011 – Proceedings, art. No. 5882251, pp. 3692–3695*.
- Young, S. (1999). Systematic measurement error in the estimation of discretionary accruals: An evaluation of alternative modelling procedures. *Journal of Business Finance & Accounting*, Vol. 26, N° 7-8, pp. 833–862.
- Zeghal, D., Chtourou, S.M. y Fourati, Y.M. (2012). The effect of mandatory adoption of IFRS on earnings quality: Evidence from the European Union. *Journal of International Accounting Research*, 11, 2, pp. 1–25.

## ANEXO 1: DENOMINACIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LOS INDICADORES

Tabla Anexo 1.1. Ajustes por devengo discrecionales (*Discretionary Accruals*)

Indicador	Medida <i>Discretionary Accruals</i>	Descripción
		DA = valor absoluto de los residuos de la regresión del modelo X
DA(1)	ABS Res _Jones1	modelo 1 (modelo de Jones)
DA(2)	ABS Res _Jones2	modelo 2 (modelo de Jones con <i>accruals</i> a corto plazo)
DA(3)	ABS Res _JonesMod	modelo 3 (modelo de Jones modificado)
DA(4)	ABS Res _JonesModCF	modelo 4 (modelo de Jones modificado con flujos de caja)
DA(5)	ABS Res _JonesModCF2	modelo 5 (modelo de Jones modificado con flujos de caja y <i>accruals</i> a corto plazo)
DA(6)	ABS Res _JonesModCF.BtM	modelo 6 (modelo de Jones modificado con flujos de caja y ratio <i>Book to Market</i> )
DA(7)	ABS Res _JonesModROA	modelo 7 (modelo de Jones modificado con ratio ROA)
DA(8)	ABS Res _JonesModROA2	modelo 8 (modelo de Jones modificado con ratio ROA retardado un periodo)
DA(9)	ABS Res _JonesAdap	modelo 9 (modelo de Jones adaptado)
DA(10)	ABS Res _JonesAdapLag	modelo 10 (modelo de Jones adaptado con ajustes por devengo retardados un periodo)
DA(11)	ABS Res _JonesAdapGR	modelo 11 (modelo de Jones adaptado con el crecimiento de las ventas)

Tabla Anexo 1.2. Denominación y descripción de los indicadores de calidad de los ajustes por devengo (*Accruals Quality*)

Indicador	<i>Descripción</i>
	<b>Medidas basadas en el modelo de Dechow y Dichev</b>
DT_AQ1	Desviación típica de los residuos del modelo AQ1 (Modelo DD deflactado por el activo total del periodo actual).
ABS Res _AQ1	Media del valor absoluto de los residuos del modelo AQ1 (Modelo DD deflactado por el activo total del periodo actual).
DT_AQ2	Desviación típica de los residuos del modelo AQ2 (Modelo DD deflactado por el activo total del periodo anterior).
ABS Res _AQ2	Media del valor absoluto de los residuos del modelo AQ2 (Modelo DD deflactado por el activo total del periodo anterior).
DT_AQ3	Desviación típica de los residuos del modelo AQ3 (Modelo DD deflactado por la media del activo).
ABS Res _AQ3	Media del valor absoluto de los residuos del modelo AQ3 (Modelo DD deflactado por la media del activo).
DT_AQ4	Desviación típica de los residuos del modelo AQ4 (Modelo DD deflactado por la cifra de ventas del periodo actual).
ABS Res _AQ4	Media del valor absoluto de los residuos del modelo AQ4 (Modelo DD deflactado por la cifra de ventas del periodo actual).
DT_AQ5	Desviación típica de los residuos del modelo AQ5 (Modelo DD deflactado por el valor del mercado del periodo actual).
ABS Res _AQ5	Media del valor absoluto de los residuos del modelo AQ5 (Modelo DD deflactado por el valor del mercado del periodo actual).

Tabla Anexo 1.2. Denominación y descripción de los indicadores de calidad de los ajustes por devengo (*Accruals Quality*) (continuación)

<b>Medidas basadas en el modelo de McNichols</b>	
DT_AQ6	Desviación típica de los residuos del modelo AQ6 (Modelo MCN deflactado por el activo total del periodo actual).
ABS Res _AQ6	Media del valor absoluto de los residuos del modelo AQ6 (Modelo MCN deflactado por el activo total del periodo actual).
DT_AQ7	Desviación típica de los residuos del modelo AQ7 (Modelo MCN deflactado por el activo total del periodo anterior).
ABS Res _AQ7	Media del valor absoluto de los residuos del modelo AQ7 (Modelo MCN deflactado por el activo total del periodo anterior).
DT_AQ8	Desviación típica de los residuos del modelo AQ8 (Modelo McN deflactado por la media del activo).
ABS Res _AQ8	Media del valor absoluto de los residuos del modelo AQ8 (Modelo McN deflactado por la media del activo).
DT_AQ9	Desviación típica de los residuos del modelo AQ9 (Modelo McN deflactado por la cifra de ventas del periodo actual).
ABS Res _AQ9	Media del valor absoluto de los residuos del modelo AQ9 (Modelo McN deflactado por la cifra de ventas del periodo actual).
DT_AQ10	Desviación típica de los residuos del modelo AQ10 (Modelo McN deflactado por el valor del mercado del periodo actual).
ABS Res _AQ10	Media del valor absoluto de los residuos del modelo AQ10 (Modelo McN deflactado por el valor del mercado del periodo actual).

Tabla Anexo 1.3. Denominación y descripción de los indicadores de alisamiento de beneficios (*Earnings smoothing*)

Indicador	Medida <i>Smoothing</i>	Escalón de resultados	Deflactor
$\frac{\sigma(CFO)}{\sigma(Rdo)}$			
ESMa_01	$\frac{\sigma(CFO)}{\sigma(Rdo)}$	OpIncome	TAss
ESMa_02		OpIncome	TAss-1
ESMa_03		OpIncome	TAssAv
ESMa_04		OpIncome	BV
ESMa_05		OpIncome	ShAv
ESMa_06		NIBE	TAss
ESMa_07		NIBE	TAss-1
ESMa_08		NIBE	TAssAv
ESMa_09		NIBE	BV
ESMa_10		NIBE	ShAv
$\rho(\Delta Accruals, \Delta CFO)$			
ESMb_01	$\rho(\Delta Accruals, \Delta CFO)$		TAss
ESMb_02			TAss-1
ESMb_03			TAssAv
ESMb_04			BV
ESMb_05			ShAv

## ANEXO 2: DESCRIPCIÓN DEL TEST NO PARAMÉTRICO DE FRIEDMAN

La prueba de Friedman (1937) es una prueba no paramétrica que permite contrastar la hipótesis de igualdad entre  $k$  medianas poblacionales. La prueba de Friedman constituye una alternativa al estadístico  $F$  del ANOVA cuando no se cumplen los supuestos paramétricos del ANOVA o el nivel de medida de los datos es ordinal. Esta prueba puede utilizarse cuando se seleccionan  $n$  grupos de  $k$  elementos de forma que los elementos de cada grupo sean lo más parecidos posibles entre sí, y a cada uno de los elementos del grupo se le aplica uno de entre  $k$  tratamientos. La hipótesis nula que se contrasta es que las respuestas asociadas a cada uno de los tratamientos tienen la misma distribución de probabilidad o distribuciones con la misma mediana, frente a la hipótesis alternativa de que al menos la distribución de una de las respuestas difiere de las demás. Para poder utilizar esta prueba las respuestas deben ser variables continuas y estar medidas en una escala, al menos, ordinal. Los datos se disponen en una tabla en la que en cada fila se recogen las respuestas de los  $k$  elementos de cada grupo a los  $k$  tratamientos:

Grupo \ Tratamiento	1	2	...	j	...	k
1	x11	x12	...	x1j	...	x1k
...	...	...	...	...	...	...
i	xi1	xi2	...	xij	...	xik
...	...	...	...	...	...	...
n	xn1	xn2	...	xnj	...	xnk

A las observaciones de cada fila se le asignan rangos de menor a mayor desde 1 hasta  $k$ ; a continuación se suman los rangos correspondientes a cada columna, siendo  $R_j$  la suma correspondiente a la columna  $j$ -ésima. Si la hipótesis nula es cierta, la distribución de los rangos en cada fila se debe al azar, y es de esperar que la suma de los rangos correspondientes a cada columna sea aproximadamente igual a  $n(k + 1)/2$ . La prueba de Friedman determina si las  $R_j$  observadas difieren significativamente del valor esperado bajo la hipótesis nula ( $H_0$ ).

Tomando como punto de partida las sumas de rangos, Friedman (1937) diseña un estadístico con distribución muestral conocida capaz de proporcionar información sobre el parecido existente entre las  $k$  poblaciones. El estadístico de prueba es:

$$F = \frac{12}{nk(k + 1)} \sum_{j=1}^k R_j^2 - 3n(k + 1)$$

Si  $H_0$  es cierta y el número de columnas o de filas es moderadamente grande la distribución de  $F$  se aproxima a una chi-cuadrado con  $k-1$  grados de libertad; de forma que se rechaza  $H_0$  para valores de  $F$  superiores al valor crítico para el nivel de significación fijado.

La prueba de Friedman es idónea para responder a nuestra pregunta de investigación porque contamos con un conjunto de medidas alternativas, que se corresponden exactamente con los  $k$  tratamientos que se aplican a la misma muestra de  $n$  empresas. Nuestro objetivo es comprobar si los  $k$  tratamientos se corresponden con la misma distribución o no lo hacen; es decir, si todas las medidas alternativas del mismo concepto son equivalentes o no lo son.





UNIVERSIDAD  
**PABLO DE OLAVIDE**  
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA  
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (16). Páginas 29–46.  
Diciembre de 2013. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.  
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=77>

## Aplicación de una metodología difusa a la negociación de la reforma laboral

LOZANO GUTIÉRREZ, M.<sup>a</sup> CARMEN

Departamento de Economía Financiera y Contabilidad

Universidad Politécnica de Cartagena (España)

Correo electrónico: [carmen.lozano@upct.es](mailto:carmen.lozano@upct.es)

FUENTES MARTÍN, FEDERICO

Departamento de Economía

Universidad Politécnica de Cartagena (España)

Correo electrónico: [federico.fuentes@upct.es](mailto:federico.fuentes@upct.es)

### RESUMEN

En el presente artículo se desarrolla una metodología basada en técnicas de *Fuzzy Logic* (lógica borrosa) para la determinación de una solución de consenso aplicada a la negociación de la reforma laboral a partir de las opiniones de Sindicatos, Patronal y Gobierno. El modelo creado se inserta en el ámbito de la metodología cualitativa o estructural aplicando técnicas basadas en la incertidumbre. Ello resulta especialmente adecuado en un momento como el actual caracterizado por unos cambios sociales y económicos extremadamente rápidos y profundos que nos hacen prácticamente imposible el saber con exactitud todo lo que nos depara el futuro.

**Palabras clave:** reforma laboral; crisis; lógica difusa.

**Clasificación JEL:** A12; C15; C61.

**MSC2010:** 03B52; 91B10; 68T27; 68T35.

# Methodology Based on Fuzzy Logic Techniques for Searching a Solution Reached by Consensus about the Labour Reform

## ABSTRACT

In this paper it is carried out a methodology based on Fuzzy Logic techniques for searching a solution which has been reached by consensus. This solution is related to labour reform and considers Trade Unions, Employers' Associations, and Government opinions. The proposed model belongs to the field of a qualitative or structural methodology based on uncertainty. This viewpoint is particularly appropriate at present when economic and social changes are so fast and deep that it is impossible to know what the future will bring.

**Keywords:** labour reform; crisis; fuzzy logic.

**JEL classification:** A12; C15; C61.

**MSC2010:** 03B52; 91B10; 68T27; 68T35.



## 1. INTRODUCCIÓN

Los Sindicatos y la Patronal han demostrado tener serias dificultades para ponerse de acuerdo en un asunto de vital importancia para la economía española, como es la reforma del mercado laboral. La falta de consenso implica que el Ejecutivo se haya visto obligado a adoptar medidas por decreto que no satisfacen a los agentes implicados, además del riesgo que conlleva el hecho de que se adopten soluciones de forma precipitada cuando lo deseable sería que estas medidas gozasen de continuidad y adaptabilidad ante nuevas situaciones, resultando así más efectivas y eficientes.

El presente artículo aborda la problemática de la búsqueda de un consenso como pauta deseable en una reforma laboral y muestra la aplicación de una metodología capaz de determinar una línea de acercamiento inicial en las posturas de los interlocutores en dicha negociación con la que se podrían iniciar los debates con mayor garantía de encontrar soluciones aceptadas por todos. El método permite obtener, a partir de unos cálculos computacionales sencillos, conclusiones acerca del establecimiento de las líneas de actuación posibles, las que se consideran más urgentes y necesarias, así como las más profundas a acometer a largo plazo.

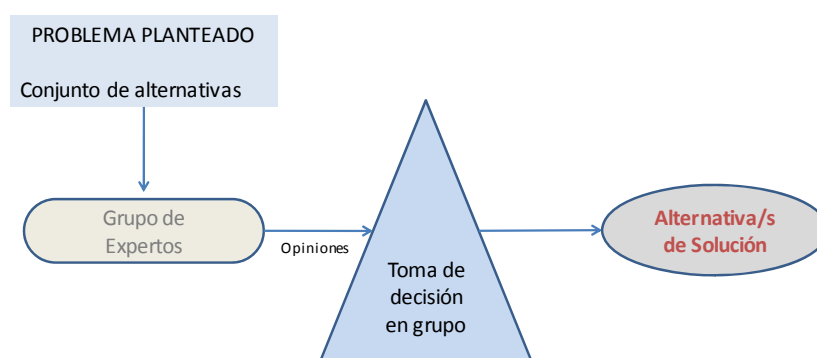
En una primera fase del estudio, se empieza a trabajar el modelo a partir de las líneas de actuación propuestas por el Gobierno para la reforma laboral y las opiniones suscitadas sobre ellas en Sindicatos y Patronal (como en el discurso en la Asamblea General de la CEOE por Rosell en 2013 o en la guía sindical para la reforma laboral de la UGT de 2012 o en el informe nº 0 de seguimiento de la reforma laboral de CCOO en 2012 o en las propuestas sindicales para promover el crecimiento, el empleo y la cohesión social, ante la crisis de la economía española por parte de UGT y CCOO en 2013, etc.); así mismo se ha realizado una selección de artículos de prensa y entrevistas a expertos publicadas en los diferentes medios informativos, que tratan sobre el tema (De la Dehesa, 2009; Berzosa, 2009; Campa, 2009). A continuación, en la segunda fase del estudio, se ha diseñado una encuesta en la que se pide opinión sobre la oportunidad y conveniencia de adoptar tales medidas. Con los resultados obtenidos en esta encuesta, se ha llevado a cabo la tercera fase del estudio, en la que se han analizado las respuestas de la muestra y se ha desarrollado un análisis de similaridad. Las conclusiones a las que llegamos en el estudio nos han servido para diseñar un plan de actuación en las futuras reformas laborales que gozaría de un mayor consenso.

El desarrollo de este estudio se inserta en el ámbito de la metodología cualitativa o estructural, aplicando técnicas basadas en la incertidumbre (Kosko, 1995). Ello resulta especialmente adecuado en un momento como el actual caracterizado por unos cambios sociales y económicos extremadamente rápidos y profundos que provocan una inevitable incertidumbre en la formulación de predicciones del futuro, lo que pone de manifiesto que los conocimientos basados

en la lógica formal ya no son suficientes. En opinión de los autores, resultaría muy limitada la aplicación de un análisis basado en probabilidades, ya que para ello sería necesario contar con una serie de fenómenos que se hayan repetido en unas determinadas condiciones y que los resultados obtenidos se pudieran aplicar a otro fenómeno sometido a las mismas condiciones que las anteriores. Por todo ello, solo las técnicas basadas en la incertidumbre permiten predecir y dar una opinión sobre la mayor parte de los acontecimientos futuros (Kaufmann, Gil Aluja y Terceño, 1994). Para ello se recurre a la más general de las teorías capaces de describir ambientes inciertos: la teoría de los subconjuntos borrosos (Lazzari, Machado y Pérez, 1999).

Por lo general, en una mesa de negociación intervienen varias personas que representan los intereses del colectivo al que representan. En principio, todos están predispuestos a alcanzar una solución común a un problema (Chernoff, 1987) que, de entre todas las alternativas posibles, debe resultar aceptable para todo el grupo de participantes. Con el fin de dirigir el debate, se debería partir de unas propuestas elaboradas a partir de las opiniones de un grupo de expertos; a partir de la información obtenida en el debate, se podrían medir las amplitudes de opiniones, estudiando las medidas que generan un mayor acercamiento en las posturas. Repetido este proceso, se irían reduciendo las diferencias y perfilando de este modo las líneas de actuación que gozarían de mayor consenso. El esquema del planteamiento que hemos seguido quedaría expresado gráficamente a través de la Figura 1.

Figura 1. Proceso de toma de decisiones en grupo



Fuente: elaboración propia

El proceso de negociación debe ser dinámico e iterativo, de forma que los interlocutores expresen sus preferencias, las justifiquen y, finalmente, las aproximen con el propósito de alcanzar un nivel de acuerdo aceptable entre todos ellos, antes de tomar una decisión sobre el problema. Todo ello implica que ningún participante en el debate esté en desacuerdo total con tales decisiones,

aunque esto no significa que individualmente pueda seguir pensando que sus soluciones son mejores que las finalmente tomadas. Para que este acuerdo sea posible, es necesario que todos los participantes cambien sus opiniones o preferencias iniciales y tiendan a aproximarlas hacia una preferencia colectiva que consideren satisfactoria, lo que normalmente se conseguirá gracias a la realización de varias rondas de consulta.

Una vez calculado el grado de consenso inicial existente entre los participantes, así como sus modificaciones sucesivas en el desarrollo de los debates, será necesario fijar una condición de parada o “*umbral de consenso*”, que representará el valor mínimo que debe alcanzar el grado de consenso para dar por finalizada la fase de consenso y proceder a la selección de alternativas. Según los expertos, cuando las consecuencias de la decisión a tomar sean muy importantes y de gran repercusión para un gran colectivo, entonces se puede exigir un grado de consenso alto (por ejemplo 0,8). Para decisiones menos trascendentales, podría llegarse a un nivel de hasta 0,5 y nunca inferior.

La información proporcionada por los participantes en la decisión sobre las posibles alternativas de solución a un conflicto puede ser de diversa naturaleza. Dependiendo de su conocimiento, experiencias y creencias, los participantes en el debate emitirán sus valoraciones sobre el conjunto de alternativas y establecerán un orden de preferencia sobre la idoneidad de cada una de ellas como solución al problema. Para emitir sus preferencias, podrían optar por varios formatos: información numérica, intervalos o etiquetas lingüísticas (Sánchez, 2007). Para poder operar con toda esta información, debemos expresarla en un dominio de expresión unificado en el que se seleccionará un conjunto de etiquetas que denominaremos *conjunto básico de términos lingüísticos* y en el conjunto difuso de respuestas correspondiente (Cabrerizo Lorite, 2008). La descripción del proceso de tratamiento de la información, su unificación en un criterio común de expresión y el posterior tratamiento de explotación de los datos hasta la obtención de las alternativas de solución, quedará descrito a continuación.

## **2. ENFOQUE METODOLÓGICO: LA TEORÍA DE CONJUNTOS DIFUSOS EN EL TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN**

La Teoría de Conjuntos Difusos ha dado muy buenos resultados para el tratamiento de la información obtenida a partir de patrones de razonamiento que vienen expresados mayormente a través de formas de tipo lingüístico cualitativo y no necesariamente cuantitativo. A lo largo de las cuatro décadas de existencia de esta Teoría, gran cantidad de investigadores le han prestado atención en sus investigaciones y la han aplicado con éxito probado, demostrando suficientemente que se trata de una parte de las matemáticas que se halla perfectamente adaptada al tratamiento

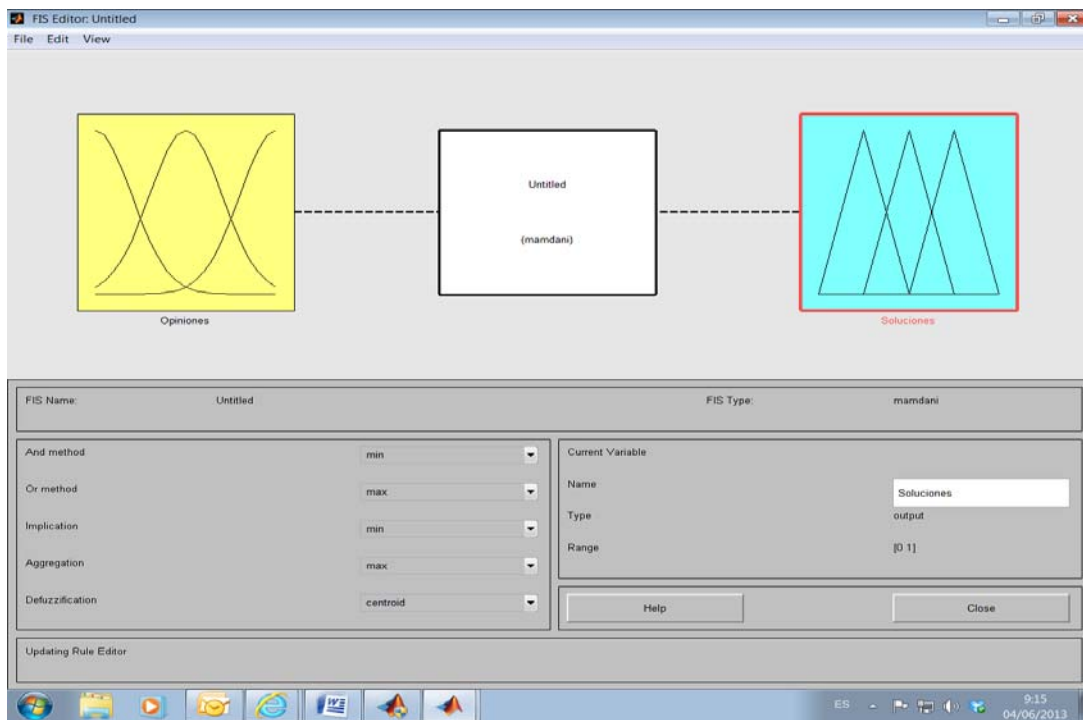
tanto de lo subjetivo como de lo incierto y que se adapta con facilidad a diferentes contextos y problemas (Kauffman y Gil Aluja, 1987).

La aplicación de la metodología propuesta en el presente artículo está basada, fundamentalmente, en comentarios y opiniones de expertos acerca de su visión de la crisis y las posibles medidas que se podrían tomar para salir de ella; estas respuestas estarán sujetas a ciertas dosis de subjetividad, por lo que se hace especialmente útil el graduar las respuestas en el intervalo entre 0 y 1<sup>1</sup> (Cabrerizo Lorite, 2008), captando los matices a través de decimales. Para asignar un valor a las respuestas se establecerán “*etiquetas lingüísticas*” (Herrera y Herrera-Viedma, 2000) (que traduzcan el lenguaje natural a números) del tipo “*estoy en desacuerdo total*”(0); “*estoy en desacuerdo en la mayor parte*” (0,1); “*en más de un aspecto estoy en desacuerdo*”(0,2) ; “*en algún aspecto podría estar de acuerdo*” (0,3); “*sería posible aunque no tengo información suficiente para afirmarlo*” (0,4); “*no estoy ni de acuerdo ni en desacuerdo*” (0,5); “*estoy algo de acuerdo*” (0,6); “*en buena parte estoy de acuerdo*” (0,7) ; “*estoy bastante de acuerdo*”(0,8) ; “*estoy muy de acuerdo*(0,9)”; “*estoy totalmente de acuerdo*”(1). Estas respuestas formarían una función de pertenencia mediante la cual se asociará a cada opinión integrante de un conjunto difuso  $A$  con el grado con que pertenece al valor lingüístico asociado sobre un universo de discurso  $X$  formado por el rango de valores que pueden tomar las opiniones que poseen la propiedad expresada por la variable lingüística de la forma  $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ , donde a cada elemento de  $X$  le corresponde un valor entre 0 y 1. Este valor, llamado valor de pertenencia o grado de pertenencia, representa el grado en el que el elemento de  $X$  pertenece al conjunto borroso  $A$  constituido por las respuestas. La decisión de consenso se interpretará como una intersección de las opiniones (Bellman y Zadeh, 1970). Para la determinación de las funciones de pertenencia utilizaremos el *Fuzzy Toolbox*, *FIS Editor* de Matlab, para lo cual estableceremos los métodos de los operadores lógicos *and* y *or*, así como los métodos de implicación, de agregación y de “defuzzificación”. Introducimos así mismo el nombre de la variable que se encuentre seleccionada, “*Opiniones*”, así como la salida “*Soluciones*” (Figura 2). Es posible modificar el nombre de la función de pertenencia, los parámetros de la función de pertenencia y también su forma. A la hora de determinar una función de pertenencia, podíamos optar por funciones lineales (triangular y trapezoidal) o no lineales (funciones gamma, gaussiana, sigmoideal, pseudo-exponencial); hemos optado por elegir una función lineal sencilla triangular, que nos ha parecido la adecuada por dos motivos principalmente: para que los cálculos no sean complicados, así como por su estructura lógica a la hora de definir un valor lingüístico asociado.

---

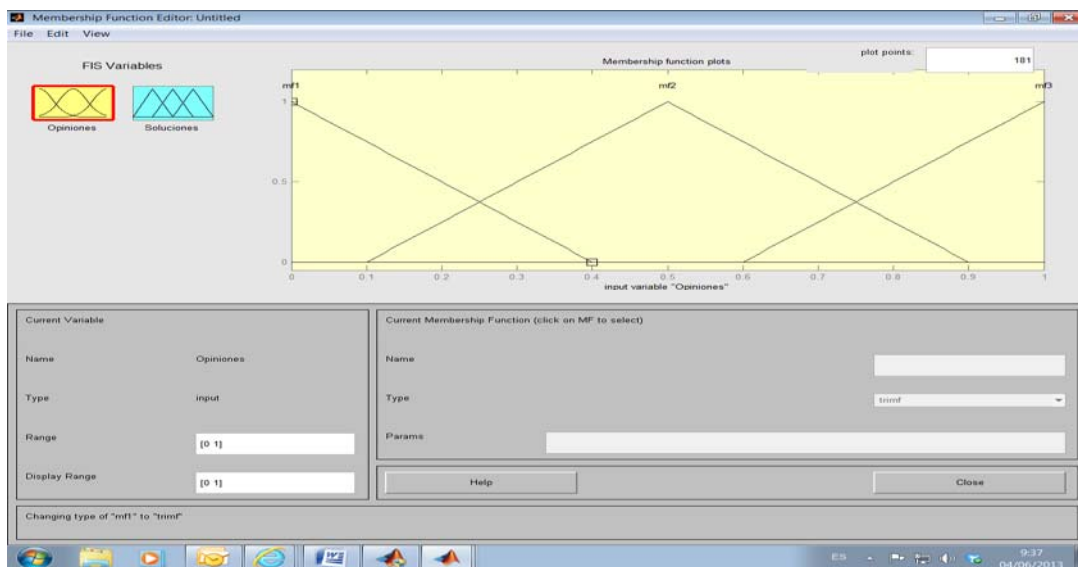
<sup>1</sup> Esta es la principal diferencia entre la lógica tradicional y la difusa: mientras que los valores de la función de pertenencia de la primera son 0 o 1, la lógica difusa se mueve en todo el intervalo [0,1]. Se suele normalizar el grado de pertenencia máximo a 1.

Figura 2. FIS editor



A continuación (Figura 3) entramos en el Editor de Funciones de Pertenencia, *Membership Editor*, en el que se establecerá el rango de la función de pertenencia.

Figura 3. Editor de funciones de pertenencia



Para establecer las reglas del modelo, utilizaremos el *Rule Editor*. Según el número de variables de entrada y salida que existan y sus funciones de pertenencia, así será el número de reglas que es posible generar (Figura 3). Los gráficos (Figura 4) muestran cómo se usan las variables de entrada en las reglas y cómo estas últimas son combinadas para conseguir un solo conjunto borroso de salida.

Figura 4. Rule Editor

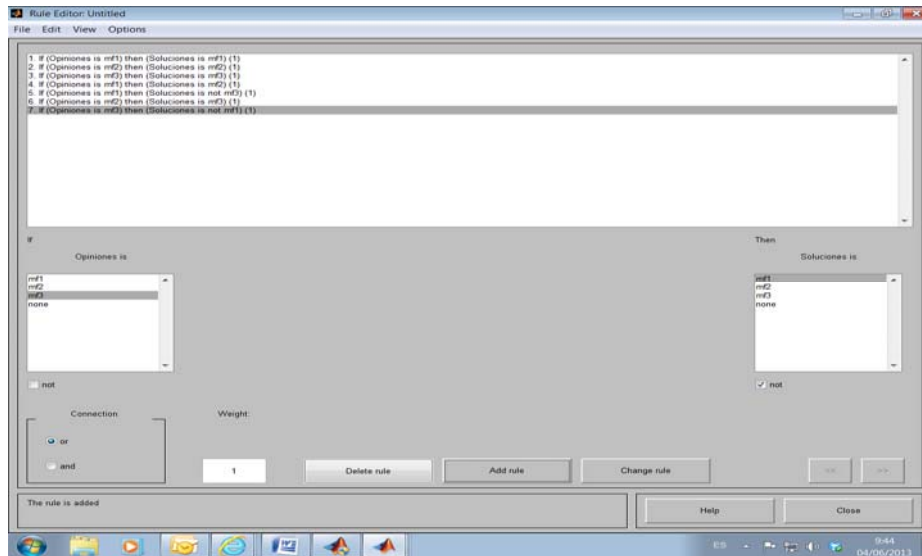
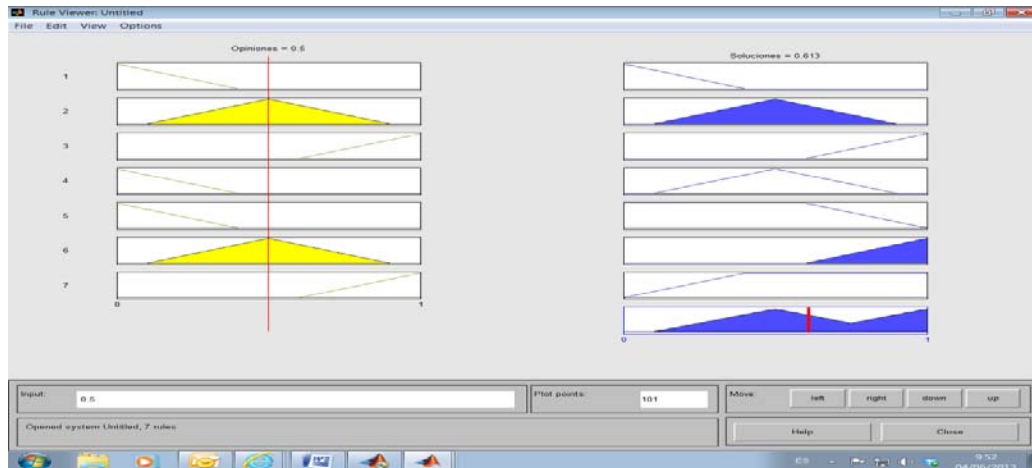


Figura 5. Rule Viewer



Las columnas amarillas de los gráficos muestran cómo se usan las variables de entrada en las reglas. Las columnas azules de gráficos muestran cómo es usada la variable de salida en las reglas. El gráfico de la parte inferior derecha muestra cómo las salidas de cada regla son combinadas para conseguir un solo conjunto borroso de salida y después “desfuzzificar”.



Un modelo de consenso como el planteado en el presente artículo (bajo evaluaciones lingüísticas) se basa en contar el número de individuos que están de acuerdo con el valor lingüístico asignado a cada preferencia y en la agregación de esa información (Cabrerizo Lorite, 2008). A las alternativas se asocia un grado de relevancia y a los individuos un grado de importancia; cada uno de ellos proporciona su opinión como una relación de “preferencia” borrosa recíproca evaluada lingüísticamente en un conjunto de términos, que representa el grado de preferencia de una alternativa con respecto a otra. Se evalúa el consenso entre individuos y la distancia del grupo al máximo consenso de preferencia. Ambas medidas, usadas conjuntamente, ayudarán al decisor.

La metodología propuesta en nuestro trabajo se ha desarrollado en dos fases. En la primera fase se utilizarán algoritmos como el de la distancia de Hamming, el coeficiente de adecuación y los vectores de ponderación. La distancia de Hamming ha ofrecido muy buenos resultados a la hora de ordenar conjuntos borrosos y nos permite calcular la diferencia entre los extremos de los intervalos. Así, en este método no se diferencia entre un exceso o un defecto respecto al valor tomado en referencia, por lo que evaluamos ambos de forma equivalente. La formulación del coeficiente de adecuación nos permitirá analizar la adecuación de las repuestas detectando extremos y, aplicando un vector de ponderaciones, se podría realizar una corrección de los excesos y defectos (opiniones extremas). Las conclusiones a las que llegamos nos permitirán establecer una ordenación por prioridades de las líneas de actuación más recomendables o que gozan de mayor consenso en el colectivo considerado para el estudio.

En la segunda fase del estudio, se introducirá en el modelo la variable incertidumbre, de tal modo que se contemple la posibilidad de que ocurra algún acontecimiento que obligue a una reformulación de objetivos y por tanto de prioridades de actuación.

### 3. ENSAYO DEL MODELO

Para iniciar el ensayo de un modelo de negociación, nos hemos basado en cuatro líneas de actuación consideradas en opinión de los expertos como claves en una reforma laboral, que resumimos en la siguiente tabla:

<b>Variab</b> les	<b>Líneas de actuación</b>
A <sub>1</sub>	Cotizaciones a la Seguridad Social
A <sub>2</sub>	Contrato de fomento de empleo
A <sub>3</sub>	Flexibilidad laboral
A <sub>4</sub>	Edad de jubilación

Estas cuatro líneas posibles de actuación serán propuestas hipotéticamente en nuestro ensayo por tres grupos de interés: Sindicatos (P1), Patronal (P2), y Gobierno (P3). En función de las líneas de actuación anteriores y en colaboración con un grupo de expertos, definimos el subconjunto difuso de umbrales que designaremos por  $\tilde{P}^*$ . A los tres grupos de interlocutores, se les solicita que nos especifiquen su opinión mediante una escala en  $[0,1]$ , de forma que cuanto más se acerquen a 1 más de acuerdo estarán con la puesta en marcha de la línea de actuación señalada y cuanto más se acerquen a 0 más en desacuerdo estarán con la adopción de esa medida. Las opiniones de los tres grupos de la muestra no serán sometidas a ningún tipo de ponderación en cuanto a su relevancia o peso específico en las decisiones finales, dado que el objetivo del trabajo es precisamente el de poner de relieve las diferencias y afinidades de opinión entre éstos por lo que si estas opiniones se ponderaran restaríamos validez a las conclusiones. Así, en nuestra simulación: en la línea de actuación A1 (cotizaciones a la Seguridad Social), la Patronal quiere que se rebajen las cotizaciones que los empresarios pagan a la Seguridad Social y el Gobierno ve inviable esta modificación debido a la crisis y a la necesidad de seguir recaudando ingresos públicos. En la línea de actuación A2 el Gobierno pretende ampliar a los hombres entre 30 y 45 años el contrato de fomento de empleo que implicaría que la indemnización por despido es de 33 días por año trabajado en lugar de los 45 días que corresponden en el momento de escribir estas líneas. Los Sindicatos se oponen a esta medida porque consideran que lo que se conseguiría es precarizar el trabajo de este colectivo. En cuanto a la línea de actuación A3 (flexibilidad laboral), el Gobierno quiere apostar por la movilidad geográfica, la adaptabilidad en la formación y la facilidad de contratación como ejes de la reforma laboral y en este punto todas las partes están de acuerdo en potenciar las bonificaciones para contratar a jóvenes y en el “contrato alemán”, que contempla la reducción de la jornada laboral como vía alternativa al despido. También tienen claro todas las partes en la existencia de una dualidad del mercado laboral entre contratos indefinidos y temporales. Por último, en la línea de actuación A4 (edad de jubilación), los empresarios y el Gobierno son partidarios de retrasar la edad de jubilación hasta los 67 años y ampliar a 25 o 30 años trabajados la base para el cómputo de la pensión; por su parte, los Sindicatos proponen que el retraso se haga de manera incentivada, es decir, voluntaria con incentivos de más pensión y penalizaciones en la cantidad de pensión si se jubilan anticipadamente.

De este modo, podremos obtener un subconjunto borroso para cada propuesta. A continuación procedemos a calcular la distancia de Hamming que nos suministra información sobre aquello que diferencia a dos subconjuntos difusos (el obtenido a partir de las opiniones  $\mu_p(X_i)$  y un perfil de consenso establecido como referencia  $\mu_1(X_i)$  dividiendo el resultado de la diferencia por el cardinal  $N$  correspondiente al número de observaciones. La distancia de Hamming entre las tres

propuestas consideradas para las cuatro variables consideradas el subconjunto borroso de umbrales, se obtendrá de la siguiente forma:

$$d(\underset{\approx}{P}, \underset{\approx}{I}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \mu_{\underset{\approx}{P}}(X_i) - \mu_{\underset{\approx}{I}}(X_i) \right|$$

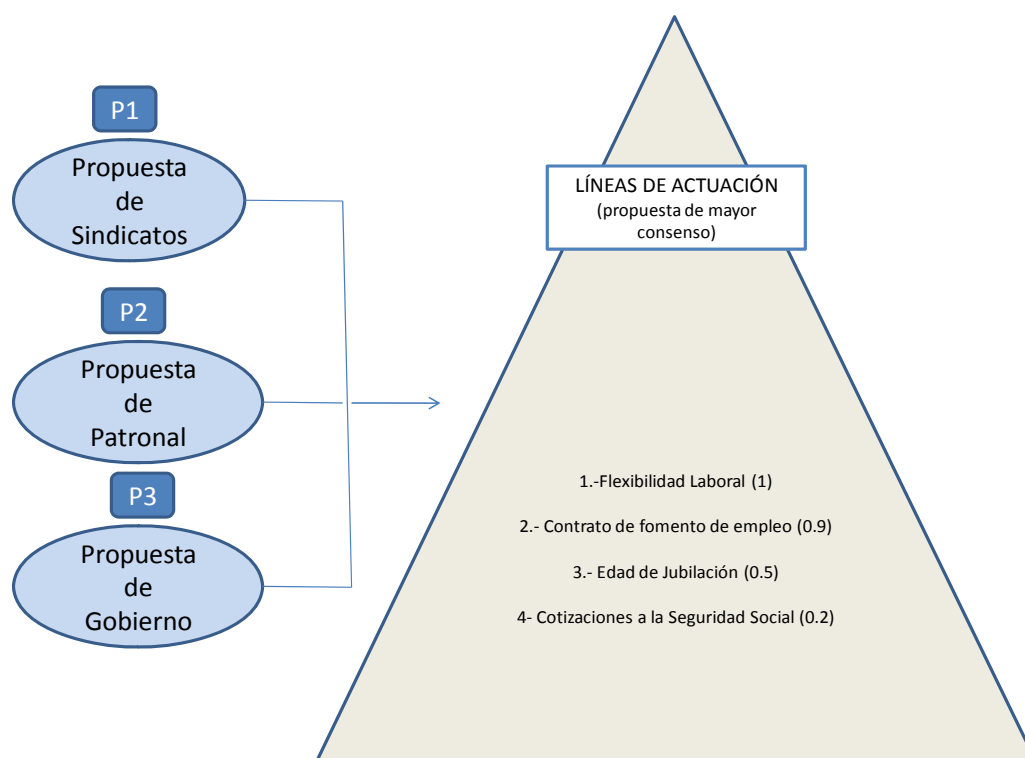
La determinación de esa “distancia” existente nos permitirá determinar el grado de afinidad entre las tres propuestas sobre las valoraciones otorgadas a las cuatro variables en la opinión de los participantes. Todo ello resultará útil para el establecimiento de conclusiones generales y pondrá de manifiesto las diferencias de opinión entre Sindicatos, Patronal y Gobierno. De este modo, se obtendría la línea de actuación que ofrece mayor grado de afinidad entre los tres grupos sobre la base de una valoración de los expertos.

Otro de los análisis que podríamos realizar sería el determinar el grado de adecuación entre las respuestas ofrecidas y el subconjunto borroso de umbrales (Klir y Yuan, 1995). Para ello se puede construir un coeficiente de adecuación de  $P$  (opiniones) a  $I$  (perfil ideal de consenso), de la siguiente manera: si  $\mu_{\underset{\approx}{P}}(x) \geq \mu_{\underset{\approx}{I}}(x)$ , entonces se escribirá  $K_x(p \rightarrow i) = 1$ ; y si  $\mu_{\underset{\approx}{P}}(x) < \mu_{\underset{\approx}{I}}(x)$ , se escribirá  $K_x(p \rightarrow i) = 1 - \mu_{\underset{\approx}{I}}(x) + \mu_{\underset{\approx}{P}}(x)$ ; lo que permite también la siguiente notación globalizadora:  $K_x(p \rightarrow i) = 1 \wedge (1 - \mu_{\underset{\approx}{I}}(x) + \mu_{\underset{\approx}{P}}(x))$ . De esta forma, el coeficiente de adecuación  $K(p,i)$  se obtendrá sumando los  $K_x(p \rightarrow i)$  y dividiendo el resultado por el cardinal  $N$  (formado por el número de opiniones consideradas), con objeto de obtener un número en  $[0,1]$ . De este modo, obtendríamos la propuesta que ha obtenido un mayor grado de adecuación al subconjunto difuso de umbrales (Sánchez, 2007).

Sin embargo, el método señalado presenta una clara limitación, debida al hecho de que el incumplimiento de algún aspecto relativo a alguna de las variables consideradas (que supondría una valoración en la variable de 0), asociado al hecho de que en el perfil ideal tampoco se hallara precisado en un grado distinto de 0, implicaría la obtención de un  $K=1$ , que indicaría una máxima adecuación al perfil referente; al igual que en el caso de que se presentara un grado de cumplimiento en un aspecto por encima del umbral ambas obtendrían el mismo nivel de adecuación, pero en este último caso el nivel de aceptación alcanzado estaría por encima del ideal (Merigó y Gil-Lafuente, 2008). Para evitar este problema, podríamos haber determinado un vector de ponderaciones  $W$  en función de las prioridades que se pudieran establecer y que nos permitiría corregir valores extremos. Por tanto, al realizar esta ponderación, los resultados se han modificado (al suavizar valores extremos).

En un primer ensayo del modelo, el orden obtenido marca “las líneas de actuación prioritarias” que gozan de un mayor consenso entre los 3 grupos y será el punto de partida para iniciar la negociación. Pero hemos de ser conscientes de que un acontecimiento inesperado podría suponer la necesidad de reformular de nuevo las prioridades asignadas y establecer un nuevo orden. Por tanto, el resultado obtenido debe ser sometido a cierto análisis que lo sitúe en la posición en que realmente se encuentra dentro de los propios esquemas de tratamiento de la incertidumbre (Figura 6).

Figura 6. Líneas de actuación que han obtenido el mayor consenso y adecuación a la opinión agregada de los expertos en un primer ensayo del modelo (en 2010)



Fuente: elaboración propia

Supongamos que, tras la adopción de una línea de actuación como la anteriormente obtenida en el estudio, se produjera un acontecimiento que afectara profundamente a la situación inicial y obligara a la reformulación de prioridades en esa línea de actuación. Por ello, en la segunda fase de nuestro estudio introduciremos el factor incertidumbre, acomodando las respuestas a los niveles de incertidumbre que se den en cada momento y flexibilizando de esta manera las decisiones que se produzcan.

Comenzaremos la segunda parte de este estudio partiendo del número borroso triangular en forma ternaria en el que se han expresado las respuestas de cada grupo a la valoración de cada

propuesta o línea de actuación; podríamos hacer unos sencillos cálculos para convertirlo en un número borroso triangular en forma de  $\alpha$ -cortes. Así, por ejemplo: supongamos que una opinión queda expresada por el número borroso triangular (NBT)  $I=(0,2;0,4;1)$  se podría expresar en forma de  $\alpha$ -cortes, de la siguiente manera:  $(a+(b-a)\alpha; c-(c-b)\alpha)$ , quedando, por tanto, como  $(0,2+0,2\alpha; 1-0,6\alpha)$ . De este modo, cuando el nivel de presunción  $\alpha=0$ , el resultante sería  $(0,2;1)$  que expresaría el rango de aceptación de la propuesta para un nivel de incertidumbre máximo, y a medida que  $\alpha$  aumenta se va reduciendo la incertidumbre, hasta llegar al valor de  $\alpha=1$  (máxima presunción) en cuyo caso el intervalo se reducirá a un número preciso  $(0,4;0,4)$ . Siguiendo este método, las respuestas iniciales se irían reformulando en función del grado de incertidumbre que haya en cada momento.

A continuación se procederá a determinar la amplitud de las diferencias de opinión entre los participantes de grupo para un nivel de incertidumbre determinado. El hecho de que existan opiniones que, ante un aumento de la incertidumbre, se alejan sensiblemente de la opinión agregada del grupo en ambiente de certeza, pondría de manifiesto la necesidad de replantear las líneas de actuación inicialmente previstas y buscar un nuevo consenso en el grupo. Para lograr un nuevo consenso, proponemos un camino ya ensayado con éxito en las técnicas Delphi, que consiste en informar a cada participante de la distancia que existe entre su opinión y la opinión agregada de los demás, con objeto de que reconsidere la suya. El proceso lo describimos a continuación y lo desarrollamos con un ejemplo que facilitará la comprensión del lector.

Con las opiniones obtenidas de cada grupo elaboramos un “haz de números borrosos” (Kaufmann, 1982), ante lo cual sería conveniente posicionar el número borroso medio, con objeto de poner de manifiesto de una manera visible la amplitud de las respuestas obtenidas. En caso de obtener respuestas que se alejan sensiblemente de la que consideramos representativa del agregado ante un acontecimiento inesperado (por ejemplo) que implique un incremento de la incertidumbre, indicaría que no existe un patrón de opinión típico y, por tanto, debemos reformular el número de variables consideradas; repetiríamos de nuevo el proceso de determinación de amplitud de respuestas y de este modo iríamos depurando el análisis. Normalmente, resulta conveniente establecer *ex ante* el número de veces que se va a pedir opinión; también se puede establecer la detención del proceso cuando la distancia de la mayor parte de las opiniones no sea superior a una determinada cifra, o bien cuando la mayor parte de las opiniones que se dan en una determinada fase no difiera de la anterior de una forma sustancial.

Se utilizará para el análisis el concepto de “distancia lineal” entre NBT como valor medio de la “distancia lineal a la izquierda” y la “distancia lineal a la derecha” (Kaufmann, Gil Aluja y Terceño, 1994), para lo cual consideraremos que si la opinión agregada correspondiente a las 3

líneas de actuación  $a_1, a_2, a_3$  viene dada por:  $\tilde{R} = \binom{m}{a_1, a_2, a_3}$  y la opinión de cada individuo por:

$\tilde{I} = \binom{i}{a_1, a_2, a_3}$  no existirá cruce a la izquierda (y, recíprocamente, a la derecha) si:

$(a_1 - a_1) \cdot (a_2 - a_2) \geq 0$  y en cambio habrá cruce, por ejemplo, a la derecha si:

$(a_3 - a_3) \cdot (a_2 - a_2) < 0$ . La obtención de distancias en términos absolutos cuando no existe cruce

quedará limitada al cálculo del área del triángulo:  $D_1 = \frac{\left| (a_1 - a_1) \right| + \left| (a_2 - a_2) \right|}{2}$ . Para obtener una

cifra comprendida entre 0 y 1 se acostumbra a tomar un referencial:  $P \geq \bigvee_i a_3 - \bigwedge_i a_1$ , donde la

distancia relativa a la izquierda sería:  $d_1 = \frac{D_1}{P}$ . Para obtener la distancia en términos absolutos

cuando se produce un cruce entre los lados, es necesario hallar la suma de las áreas de dos triángulos y, por consiguiente, hallar las alturas de los mismos (las bases son conocidas). Si llamamos  $\alpha$  a la altura de un triángulo, la altura del otro será  $1 - \alpha$ , y por semejanza se cumplirá que:

$$\frac{\beta}{\left| a_3 - a_3 \right|} = \frac{1 - \beta}{\left| a_2 - a_2 \right|}$$

$$D_D = \frac{\left| a_3 - a_3 \right| \cdot \alpha}{2} + \frac{\left| a_2 - a_2 \right| \cdot (1 - \beta)}{2},$$

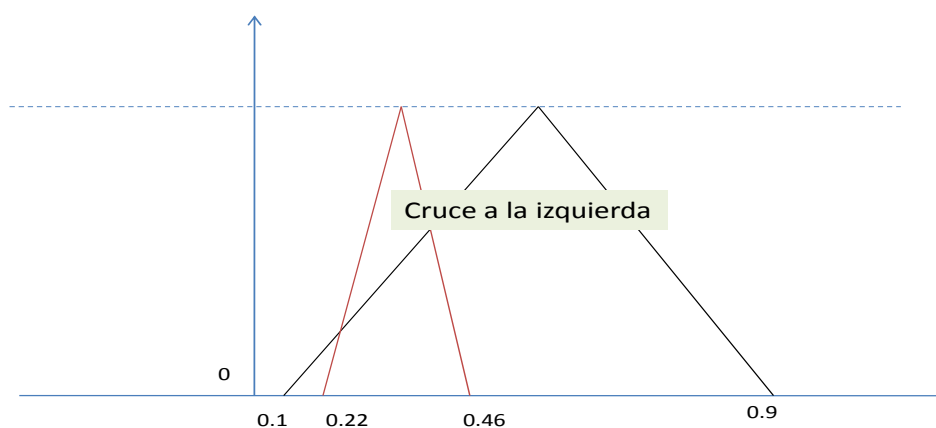
$$\text{donde: } \beta = \frac{\left| a_3 - a_3 \right|}{\left| a_2 - a_2 \right| + \left| a_3 - a_3 \right|} \quad \text{y} \quad 1 - \beta = \frac{\left| a_2 - a_2 \right|}{\left| a_2 - a_2 \right| + \left| a_3 - a_3 \right|}.$$

La distancia lineal a la derecha sería:  $d_D = \frac{D_D}{P}$  y la distancia lineal relativa sería:

$$d = \frac{d_1 + d_D}{2}$$

Supongamos que el grupo P1 (Sindicatos), ante un nivel de incertidumbre planteado con un  $\alpha = 0,6$ , mantiene una opinión  $[0,1;0,5;0,9]$  para la variable  $A_3$  (Flexibilidad Laboral), siendo la opinión del agregado  $[0,22;0,3;0,46]$ . La representación gráfica se mostraría en la Figura 7.

Figura 7. Distancia entre la opinión del grupo P1 y la opinión del agregado de respuestas



$[0,1 - 0,22] \times [0,5 - 0,3] < 0$ ; por tanto, existe cruce a la izquierda.

$[0,9 - 0,46] \times [0,5 - 0,3] > 0$ ; por tanto, no existe cruce a la derecha.

La obtención de distancia en términos absolutos cuando no existe cruce vendrá dada por:

$$\frac{|0,9 - 0,46| + |0,5 - 0,3|}{2} = 0,32$$

Para obtener la distancia en términos absolutos cuando se produce un cruce entre los lados, es necesario hallar la suma de las áreas de los triángulos y, por tanto, habría que hallar las alturas (las bases son conocidas). Así, si llamamos  $\beta$  a la altura de uno de los triángulos,  $1-\beta$  será la del otro. Por semejanza:

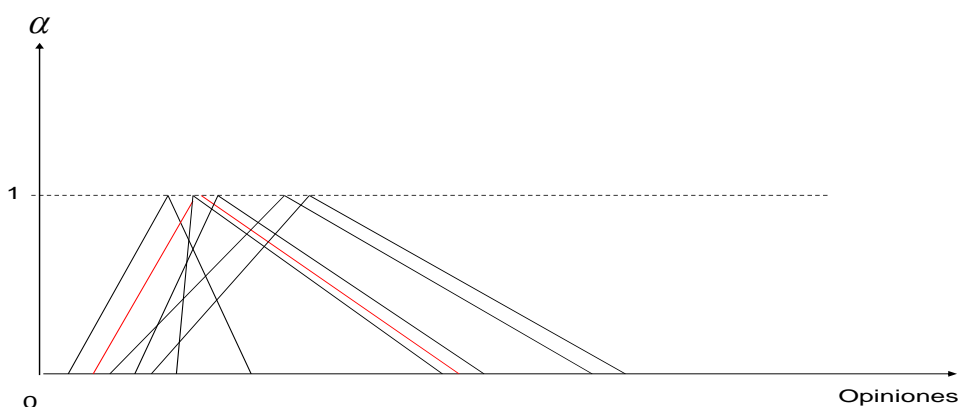
$$\frac{\beta}{|0,9 - 0,46|} = \frac{1 - \beta}{|0,5 - 0,3|}$$

Donde  $\beta = \frac{|0,9-0,46|}{|0,5-0,3|+|0,9-0,46|} = 0,6875$  y, por tanto,  $1-\beta = 0,3125$ . La suma de las áreas de los triángulos será:  $D = \frac{|0,9-0,46| \times 0,6875}{2} + \frac{|0,5-0,3| \times 0,3125}{2} = \boxed{0,1825}$

La información que recibe cada participante le permitirá reconsiderar o no la opinión inicialmente emitida. Así, por ejemplo, el grupo P1 cuya distancia habríamos obtenido por el procedimiento anterior, se podría acercar a la opinión agregada, mientras que los grupos P2 y P3 se alejarían sensiblemente de lo que se ha considerado como opinión general. En este caso concreto, como en otros muchos, resulta conveniente remitir a todos y cada uno de los participantes consultados el resultado de la agregación de opiniones, que vendría dada por el NBT medio, junto con la distancia de sus respuestas con las del resto del grupo, abriendo así una fase de información-

reconsideración de sus opiniones. Se detendrá el proceso cuando la mayor parte de las opiniones que se dan en una determinada fase no difiera de la anterior de una manera sustancial y para ello debemos elegir un criterio de parada. Para elegir el criterio de parada, tal y como ya indicamos en la sección 1, consideraremos que se ha alcanzado un grado de consenso alto en 0,8) y un nivel aceptable de consenso en 0,5 y nunca inferior. Podríamos tomar cifras entre 0 y 0,5 como niveles de bajo consenso o de difícil reconsideración.

Figura 8. Gráfica de opiniones de los expertos integrantes del grupo 1 del estudio en un ensayo (año 2012)



Fuente: elaboración propia

Hemos podido apreciar en nuestro ejemplo que la mayoría de cruces que se han producido han sido a la izquierda. El proceso se repetiría en cada uno de los grupos, pudiendo de este modo extraer conclusiones acerca de la sensibilidad de las respuestas ante un cambio en el contexto de la decisión o la incertidumbre de que éste se pudiera producir, lo que podría resultar útil para formular o no una nueva opinión, es decir, reconsiderarla eventualmente. Cuando se detecten grandes disparidades en las opiniones (altas distancias) conviene realizar un análisis de las causas por las cuales se han producido.

## 4. CONCLUSIONES

### 4.1. Sobre la conveniencia del estudio

En el artículo se ha desarrollado un ensayo de negociación entre Sindicatos, Patronal y Gobierno a partir de unas líneas de actuación posibles en materia de reforma laboral. La metodología propuesta permite buscar la postura que ofrezca un mayor acercamiento entre los interlocutores de la mesa de negociación, teniendo en cuenta la incertidumbre que conlleva este tipo de decisiones. Se trata de un método dinámico y flexible que permite reformular la decisión ante una modificación en alguna



de las variables de contexto y, tras analizar el impacto que supondría en las respuestas, buscar un nuevo consenso. Consideramos que la puesta en práctica de esta metodología podría facilitar la búsqueda de acuerdos futuros.

#### **4.2. Sobre el enfoque del estudio**

El estudio se ha desarrollado siguiendo una secuencia lógica en la que se toman como punto de partida las informaciones aparecidas en los medios de comunicación sobre la negociación de la reforma laboral entre Sindicatos, Patronal y Gobierno. Con estas informaciones, se han establecido las variables del estudio (posibles líneas de actuación) y, a través de una metodología de búsqueda de similitudes, se ha propuesto una secuencia de propuestas de mayor a menor consenso, para posteriormente someter mediante encuesta a miembros de los tres grupos participantes. Con los datos obtenidos en la encuesta de opinión, hemos desarrollado una metodología de análisis de sus opiniones, puntos de discrepancia y de consenso, llegando a una solución consensuada que permite establecer un punto de partida en la toma de decisiones. La introducción de la variable incertidumbre nos ha permitido reformular el modelo sobre el resultado anterior, permitiendo de forma dinámica el analizar las consecuencias en la decisión de la aparición de nuevas variables externas que influirán sobre el sistema. Se trata, por tanto, de establecer un mecanismo de inferencia ideado para analizar respuestas y con ellas segmentar grupos de la muestra que presentan un grado de similitud alto en su percepción de los puntos fundamentales en que se debe basar la reforma laboral.

#### **4.3. Sobre la técnica empleada**

La aplicación de la Teoría de Conjuntos Difusos ha dado muy buenos resultados para el tratamiento de la información obtenida a partir de patrones de razonamiento que vienen expresados mayormente a través de formas de tipo lingüístico cualitativo. El modelo aplicado en este artículo es de fácil manejo y aplicación y presenta de forma clara y rápida los resultados de los cálculos programados, permitiendo una reprogramación rápida según las necesidades requeridas en un momento determinado. Los ejemplos que hemos ido mostrando a lo largo de la exposición han permitido que el lector comprenda fácilmente la operativa de cálculo, aunque no tienen un valor real, ya que se trata de simulaciones. Actualmente, el modelo, tras la fase de diseño (descrita en el presente trabajo), está siendo programado algorítmicamente y está prevista su puesta en práctica con datos reales.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bellman, R.; Zadeh, L. (1970). "Decision Making in a Fuzzy Environment", *Management Science*, 17 (4), pp. 141–164.
- Berzosa, C. (2009). "Crisis financiera, crisis global", *El País digital*, 10/09/2009: [http://www.elpais.com/articulo/opinion/Crisis/financiera/crisis/global/elpepiopi/20090210elpepiopi\\_4/Tes/](http://www.elpais.com/articulo/opinion/Crisis/financiera/crisis/global/elpepiopi/20090210elpepiopi_4/Tes/)
- Cabrerizo Lorite, F.J. (2008). *Nuevos modelos de toma de decisión en grupo con información lingüística difusa*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- Campa, J.M. (2009) "A por lo importante, que también es lo urgente" [en línea], *El Mundo Mercados*: <http://www.elmundo.es/papel/2009/04/19/mercados/2631682.html> [Consulta: 01/06/2009]
- Chernoff, H. (1987). *Elementary decision theory*, Dover Publications, New York.
- De la Dehesa, G. (2009). *La primera gran crisis financiera del siglo XXI: orígenes, detonantes, efectos, respuestas y remedios*, Ariel, Barcelona.
- Fondo Monetario Internacional (2009). Vídeo explicativo sobre las perspectivas de la crisis [en línea]: <http://www.imf.org/external/mmedia/view.asp?eventID=1370> [Consulta: 03/09/2009]
- Herrera, F.; Herrera-Viedma, E. (2000). "Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information", *Fuzzy Sets and Systems*, 115, pp. 67–82.
- Kaufmann A. (1982). *Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos*, CECSA, México.
- Kaufmann A.; Gil Aluja J. (1987). *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Hispano Europea, Barcelona.
- Kaufmann, A.; Gil Aluja, J.; Terceño, A. (1994). *Matemática para la economía y la gestión de empresas*, Foro Científico, Barcelona.
- Klir, J.; Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications*, Prentice-Hall International, New Jersey.
- Kosko, B. (1995). *Pensamiento borroso*, Grijalbo Mondadori, Barcelona.
- Lazzari, L.; Machado, E.; Pérez, R. (1998). *Teoría de la decisión fuzzy*, Macchi, Buenos Aires.
- Lazzari, L.; Machado, E.; Pérez, R. (1999). "Los conjuntos borrosos: una introducción", *Cuadernos del CIMBAGE*, 2, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.
- Merigó, J.M.; Gil-Lafuente, A.M. (2008). "The generalized adequacy coefficient and its application in strategic decision making", *Fuzzy Economic Review*, 13 (2), pp. 17–36.
- Sánchez, J. (2007). *Modelos para la combinación de preferencias en toma de decisiones: herramientas y aplicaciones*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- Zadeh, L.A. (1965). "Fuzzy Sets", *Information and Control*, 8, pp. 338–353.
- Zadeh, L.A. (1975). "The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning", Part I, *Information Sciences*, 8, pp. 199–249, Part II, *Information Sciences*, 8, pp. 301–357, Part III, *Information Sciences*, 9, pp. 43–80.



# A Comparison between General Population Mortality and Life Tables for Insurance in Mexico under Gender Proportion Inequality

ORNELAS, ARELLY

Department of Econometrics, Riskcenter-IREA  
Universitat de Barcelona (España)  
Correo electrónico: [arelly.ornelas@ub.edu](mailto:arelly.ornelas@ub.edu)

GUILLÉN, MONTSERRAT

Department of Econometrics, Riskcenter-IREA  
Universitat de Barcelona (España)  
Correo electrónico: [mguillen@ub.edu](mailto:mguillen@ub.edu)

## ABSTRACT

We model the mortality behavior of the general population in Mexico using data from 1990 to 2009 and compare it to the mortality assumed in the tables used in Mexico for insured lives. We fit a Lee-Carter model, a Renshaw-Haberman model and an Age-Period-Cohort model. The data used are drawn from the Mexican National Institute of Statistics and Geography (INEGI) and the National Population Council (CONAPO). We also fit a Brass-type relational model to compare gaps between general population mortality and the mortality estimates for the insured population used by the National Insurance and Finance Commission in Mexico. As the life tables for insured lives are unisex, i.e. they do not differentiate between men and women, we assume various sex ratios in the mortality tables for insured lives. We compare our results with those obtained for Switzerland and observe very similar outcomes. We emphasize the limitations of the mortality tables used by insurance companies in Mexico. We also discuss the bias incurred when using unisex mortality tables if the proportion of male and female policyholders in an insurance company is not balanced.

**Keywords:** mortality rates; Lee-Carter; longevity dynamics; Brass-type model; insured population.

**JEL classification:** I13; I14; I18; C13; C18.

**MSC2010:** 62-07; 62H12; 62J05; 62P05.

# Una comparación entre la mortalidad de la población general y las tablas de vida de los seguros en México ante porcentajes desiguales de género

## RESUMEN

Interesados en conocer las diferencias entre la mortalidad general y la de un subgrupo de la población, como son los asegurados en una compañía de seguros, hemos ajustado un modelo relacional Brass-Type. Para ello, en primer lugar, hemos modelado el comportamiento de la mortalidad de la población general de México entre los años 1990 y 2009. Hemos ajustado un modelo Lee-Carter, un modelo Renshaw-Haberman y un modelo edad-período-cohorte. Los datos utilizados proceden del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) y el Consejo Nacional de Población (CONAPO). Una vez estimadas las tasas de mortalidad se han comparado con la mortalidad asumida por las compañías aseguradoras mexicanas. Estas tasas de mortalidad han sido calculadas por la Comisión Nacional de Seguros y Finanzas de México. Como las tablas de mortalidad del seguro de vida son *unisex*, es decir, que no distinguen entre hombres y mujeres, hemos creado diferentes escenarios modificando el porcentaje de hombres y mujeres en las tablas de mortalidad. Comparamos los parámetros estimados con los parámetros obtenidos en un análisis con la población Suiza y se observan resultados muy similares. Finalmente, hacemos hincapié en las limitaciones de las tablas de mortalidad utilizadas por las compañías de seguros en México y se analiza el sesgo cuando la proporción de los asegurados masculinos y femeninos en una compañía de seguros no está equilibrada.

**Palabras clave:** tasas de mortalidad; modelo Lee-Carter; modelo Brass-Type; población asegurada.

**Clasificación JEL:** I13; I14; I18; C13; C18.

**MSC2010:** 62-07; 62H12; 62J05; 62P05.



# 1 Introduction

Insurance policyholders are widely held to be wealthier than the average citizen on the grounds that they can, in fact, afford insurance. Similarly, members of the insured subpopulation are believed to invest more in prevention, resulting in their presenting lower mortality rates than those of the general population for the same age and gender groups. In this article we model the mortality behavior of the general population in Mexico, drawing on data for the period 1990 to 2009, and compare these patterns to the unisex mortality tables used by insurance companies in Mexico. Since this table are unisex we could studied the gender effect in mortality. We conclude that the overly crude life tables used by Mexican insurers may overestimate policyholder mortality. The fact that, in many countries insurance regulators dictate that only unisex life tables are used to price life insurance products raises several questions: First, does the sex ratio have a direct impact on mortality rates? Does the gap in the mortality rates of the general population and the insured population differ between the sexes? Typically, when implementing the unisex rule in a life insurance portfolio, the insurer does not have the same gender and age composition as in the unisex table being applied. In the application reported here we assume different sex ratios in the insured population and conclude that the life tables used in Mexico for pricing insurance products appear to be based on a sex ratio biased in favor of men. The obligation in Europe to avoid gender discrimination when pricing life insurance led us to undertake this analysis, in which we seek to contribute to a better understanding of mortality models in this context. Guillén (2012) discusses the possible effects of unisex pricing in life insurance.

## 1.1 Background

During the 20th century, there was a substantial decrease in mortality, attributable in the main to the reduction in infant mortality from infectious diseases. In Mexico, for example, life expectancy at birth has increased from 57.04 years in 1960 to 76.47 in 2009, equivalent to an average year-on-year growth of 0.39 years. If we only consider the last two decades, average life expectancy has risen by 0.27 and 0.33 years for females and males, respectively.

The deceleration in the life expectancy rate can be attributed to the fact that while some causes of death, such as accidents and violence-related deaths, have been reduced, there has been an increase in such chronic conditions as heart-related disease. Moreover, among the Mexican male population, the changes can also be attributed to emigration (typically to the United States), a factor that constantly modifies the composition and structure of the population (Camposortega, 1997).

In short, during the second half of the 20th century, mortality has fallen markedly in early childhood, while it has only slightly increased at later ages. These changes have given rise to the need for further research in the insurance sector, and above all in the field of risk management, insofar as life expectancy affects mortality forecasting, longevity risk, reserve calculations, annuities, pension plan design and

premiums for life products.

Over recent decades, various models have been proposed to describe mortality. Yet as early as the 19th century, reference was already being made in the literature to such concepts as mortality, annuities and adverse selection risk. Indeed, the first life tables to consider alterations in mortality were created in the United Kingdom, constructed with data for insurers in the period 1900 to 1920. Pitacco et al. (2009) provides an interesting review of the historical background to early mortality tables.

The early study of mortality led to the development of graduation models, which have been used to smooth crude mortality data and to analyze mortality behavior. This line of study in the actuarial literature has drawn heavily on the so-called Mortality Laws of Heligman-Pollard, Gompertz-Makeham, among others. With the advent of new statistical methods, mortality analysis for insurance portfolios was revolutionized. Recently introduced models include Poisson models, which fit the number of deaths given the number of individuals exposed to risk. These models also include a trend component that captures the evolution of mortality over time given a fixed gender and age. Survival models, such as the Cox proportional hazards model, fit the probability that an individual survives to a particular age; hence, it can model the duration of life conditional to various characteristics, including lifestyle and health. In this case, age is considered a continuous variable (Cox and Oakes, 1984). All these models can include risk factors other than gender in their analyses of mortality. Obvious examples include: time trends and other regressors that can incorporate interaction effects between variables. In non-parametric models, such as generalized additive models (GAM), specification provides the potential for better data fits than those provided by other methods. This is attributable to the fact that the effects induced by risk factors can allow more flexible forms (Hastie and Tibshirani, 1990). Other approach in non-parametric models, focused in older ages, is described in Fledelius et al. (2004).

Contemporary predictive mortality modeling usually takes into account cohort (i.e., a group of the population born in the same period, typically, a specific year) effects. The advantage of modeling cohort mortality is that individuals in the same cohort evolve together and are, therefore, exposed to the same external phenomena, such as epidemics. This approach facilitates mortality prediction because the effects of ageing can vary from one cohort to another.

Among the models that take cohort or age effects into account, we find: the Lee-Carter model (1992), the Renshaw-Haberman model (2006), the Currie model (2006) and the Cairns, Blake and Dowd model (2006) and its generalizations. In the section that follows we discuss these models and then adopt them in order to analyze and predict mortality rates for the Mexican population. Lee-Carter model is a reference model in mortality, it has been used by several authors, for instance, Brouhns et al. (2002), Renshaw and Haberman (2003), Delwarde et al. (2003), Debón et al. (2008) and more recently Betzuen (2010) compared Spanish mortality rates with the ones estimated by the Lee-Carter model.

## 2 Methodology

In this section we describe various models that are currently being used to estimate demographic trends in the general population. We also present a model for comparing a reference mortality population (for example, the general population) with another population (for example, a population of insured policyholders).

Using the following notation, the log crude rate of mortality  $m(x, t)$  can be calculated as:

$$\log m(x, t) = \log \frac{d(x, t)}{l(x, t)}, \quad (1)$$

where  $l(x, t)$  is the number of living individuals and  $d(x, t)$  the number of deaths at time  $t$  of individuals aged  $x$ .

### 2.1 Mortality Models

#### 2.1.1 Lee-Carter model

This model combines time series to adjust decreasing mortality rates exponentially. Mortality is represented by  $m(x, t)$ , which is the crude mortality rate at time  $t$  of individuals aged  $x$ . A single index guides the trend and it is used to obtain both predictions and confidence intervals (Lee and Carter, 1992). The model is specified as follows:

$$\log[m(x, t)] = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t + \epsilon_{x,t}, \quad (2)$$

where  $\kappa_t$  is an index that varies over time and which represents variations in mortality per year.  $\hat{\beta}_x^{(1)}$  and  $\hat{\beta}_x^{(2)}$  are parameters to be estimated and the residuals  $\epsilon_{x,t}$  is a set of independent random variables.  $\hat{\beta}_x^{(1)}$  represents the time average for  $\log[m(x, t)]$  and  $\frac{\partial \log(m(x, t))}{\partial t} = \beta_x^{(2)} \frac{\partial \kappa_t}{\partial t}$  is the rate change over time. A negative  $\beta_x^{(2)}$  is expected for certain ages, indicating that at these ages mortality increases. The error term is assumed to have zero mean and constant variance  $\sigma_\epsilon^2$ .

As specified above, the model parameters are not identified, i.e. given the data, the solution of the system of equations when fitting equation (2) by maximum likelihood (assuming that the error term is normally distributed) is not unique. Consequently, constraints have to be imposed to guarantee identifiability:

$$\sum_x \beta_x^{(2)} = 1 \quad \text{and} \quad \sum_t \kappa_t = 0. \quad (3)$$

$\sum_t \kappa_t = 0$  implies that the parameter  $\hat{\beta}_x^{(1)}$  is in fact the empirical average over the time of the age profile in age  $x$ . Given that  $\beta_x^{(2)}$  and  $\kappa_t$  have restrictions, they are estimated by using singular value decomposition applied to the difference  $\log[m(x, t)] - \hat{\beta}_x^{(1)}$ . The estimates of  $\kappa_t$  can be modeled as an ARIMA time series by using the Box-Jenkins methodology.

### 2.1.2 Renshaw-Haberman model

The model proposed by Renshaw and Haberman (2006) seeks to identify and represent cohort effects; thus, clearly establishing generational changes. As such, the term  $\beta_x^{(3)} \gamma_{t-x}^{(3)}$  is added to the Lee-Carter model:

$$\log[m(x, t)] = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \gamma_{t-x}^{(3)} + \epsilon_{x,t}. \quad (4)$$

Here  $\beta_x^{(3)}$  is the rate change over time for the cohort effect  $\gamma_{t-x}^{(3)}$ . As in the Lee-Carter model, this new model also presents identification problems, so a further restriction is added to those already included in (3):

$$\sum_x \beta_x^{(3)} = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{x,t} \gamma_{t-x}^{(3)} = 0. \quad (5)$$

The parameters are estimated using an iterative process. Details can be found in Renshaw and Haberman (2006).

### 2.1.3 Age-Period-Cohort model

The Age-Period-Cohort model was proposed by Currie (2006) and usually refers to the following model:

$$\log[m(x, t)] = \beta_x^{(1)} + \frac{1}{n_a} \kappa_t^{(2)} + \frac{1}{n_a} \gamma_{t-x}^{(3)} + \epsilon_{x,t}, \quad (6)$$

where  $n_a$  is the total number of ages. Currie used p-splines to estimate the parameters. The following constraints are required:

$$\sum_t \kappa_t^{(2)} = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{x,t} \gamma_{t-x}^{(3)} = 0. \quad (7)$$

### 2.1.4 Model Selection Criteria

The following two criteria can be used to compare the mortality models fitted. One of them is the Bayesian information criterion (BIC), which penalizes models that are over parameterized. It is defined as:

$$BIC_k = \hat{l}_x - \frac{1}{2} n_k \log N, \quad (8)$$

where  $n_k$  is the number of parameters,  $\hat{l}_x$  is the maximum of the likelihood function and  $N$  is the number of observations.

Models were also evaluated based on standardized residuals,

$$Z(x, t) = \frac{d(x, t) - l(x, t) \hat{m}(x, t; \phi)}{\sqrt{l(x, t) \hat{m}(x, t; \phi)}}, \quad (9)$$



where  $d(x, t)$  is the number of individuals aged  $x$  who die at time  $t$  and  $l(x, t)$  is the number of people still living at age  $x$  and time  $t$ . Residuals  $Z(x, t)$  are assumed to be distributed identically and independently as a standard normal law. More details can be found in Cairns et al. (2009).

## 2.2 Brass-type relational model

The Brass-type relational model is a mortality model that links the survival probabilities of a given group with a set of benchmark survival probabilities (Brass, 1971). In others words, the model assumes that the mortality rates of two different populations might be related in terms of their survival probabilities. For instance, it allows the mortality of insured policyholders to be compared with the mortality of the general population. The association is established through a linear or logistic regression so as not to omit information from the reference rates (Brouhns et al., 2002).

In the actuarial sciences, the Brass-type relational model can also be used to measure adverse selection. If the mortality rates of the insured population are higher than those of the general population in adult ages, then individuals may have private information that is not disclosed to the company and they underwrite insurance because they know they have a greater risk of mortality than individuals of the same age. If there is no adverse selection, the opposite phenomenon is likely to be found.

As mentioned above, as insurance policyholders tend to have higher incomes than those of the average citizen, they tend to spend more money and resources on healthcare and, consequently, their risk of mortality can be expected to be lower than that of a similar person in the uninsured population. This situation is known as counter adverse selection or positive selection.

The Brass-type relational model is specified as follows:

$$f(m(x, t)) = \beta_0 + \beta_1 f(m(x, t)_{ref}) + \epsilon_{x,t}, \quad (10)$$

where  $m(x, t)_{ref}$  refers to the crude mortality rate of a reference group. Link function  $f(\cdot)$  can be the logarithm or the logistic function. This model can be extended to incorporate interactions between mortality rates and time  $t$ , as Gatzert and Wesker (2011) have proposed, or to incorporate interactions between mortality rates and age  $x$ . Their model includes a time trend component  $t$ :

$$\log[m(x, t)] = \beta_0 + \beta_1 \log[m_{ref}(x, t)] + \beta_2 \log[m_{ref}(x, t)] \cdot t + \epsilon_{x,t}. \quad (11)$$

Since the mortality rates available are unisex we vary the proportion  $w$  of women in the population, at a given age  $x$  and time  $t$ , and calculate unisex mortality rates for the general population:  $m_w(x, t) = wm_f(x, t) + (1 - w)m_m(x, t)$ , where  $m_f(x, t)$  and  $m_m(x, t)$  are the crude mortality rates for the female and male populations, respectively. We assume that the proportion is stable and constant for all

adult age groups. This assumption can be relaxed, as we know that after the age of 65 the proportion of women in each cohort increases substantially due to their longer life expectancy.

When comparing a general population and an insured population, the simplest Brass-type relational model is:

$$\log[m_{ins}(x, t)] = \beta_0 + \beta_1 \log[m_w(x, t)] + \epsilon_{x,t}, \quad (12)$$

where  $m_{ins}(x, t)$  is the crude mortality rate for insured individuals aged  $x$  at time  $t$ .

Parameter  $\beta$  in equations (10), (11) and (12), should be interpreted as the parameters in linear regression. Consequently  $\beta_0$  is the intercept estimate, then, it represents the mean outcome when  $\log(m(x, t)_{ref}) = 0$ . Finally  $\beta_1$  is the slope coefficient, so that, it represent the expected increment or decrement (depending on the sign) in the response per unit change in  $\log(m(x, t)_{ref})$ .

### 3 Data description

The data for this study were collected from the Mexican National Institute of Statistics and Geography (INEGI) and the National Population Council's (CONAPO) website. Mortality rates  $m(x, t)$  were computed as the ratio between the number of people alive and the number of registered deaths of individuals aged  $x$  in year  $t$  (see equation (12)). The data reflect the demographic behavior of the 32 Mexican states between 1990 and 2009, and are arranged by sex for ages ranging from 0 to 100 years.

In order to avoid any biased information, data without any description of sex and/or age were excluded. The omission of these details is usually the result of death having occurred at a very early age and so the individual's sex is not recorded, or, in the case of the elderly, the exact age at death is sometimes not known. The percentage of such data is small.

We only have information for those living in the years when a census was held. Information for the years without a census was completed by linear interpolation in accordance with the method described by Delwarde and Denuit (2003).

From information disaggregated by sex and age, the interpolated  $l(x, t)$  data for the periods  $t$  between 1992 and 1994, 1996 and 1999, 2001 and 2004 and finally between 2006 and 2009 were obtained.

### 4 Results

We analyzed the evolution in mortality rates separately by gender over  $t$  years and for different ages  $x$ . Figure 1 shows that the log mortality rate curves for men and women are very similar during childhood and adulthood, the largest differences being found in young adulthood when men are more likely to be involved in accidents. This phenomenon, known as the accident hump, has not changed greatly

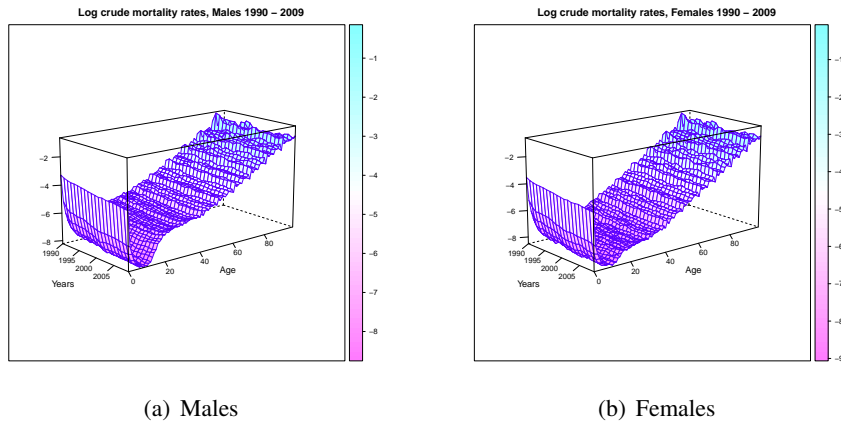


Figure 1: Log crude mortality rates for Mexican population from 1990 to 2009: (a) Males, (b) Females

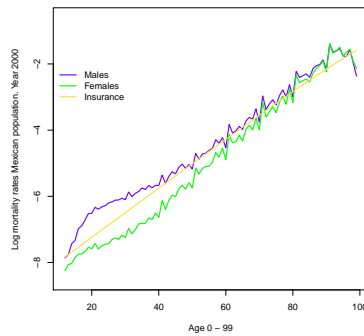


Figure 2: Log mortality rates for Mexican population in 2000. Log insured mortality rates (CNSF) Mexico.

over the two decades studied here.

In the following sections we present the results obtained from the Lee-Carter model, the Renshaw-Haberman model and the Age-Period-Cohort model. The estimation was performed separately for men and women, from the ages of 0 to 99 and between the years 1990 to 2009. We only report estimates for ages 12 to 99 years, because the minimum age for underwriting a contract in most insurance companies is twelve. To obtain these estimates we used Lifemetrics software implemented in R version 2.13.

Since the mortality rates for the insured population are available, Figure 2 compares the logarithm of the mortality rate for an insured policyholder and the logarithm of the mortality rate for the Mexican population in 2000. After the age of 70, the mortality rate of an insured individual seems to be lower than that of the general population. If the mortality for insured individuals is lower than that of the general population, then we would expect the longevity of insured individuals to be much longer than that observed in the general population. This may give rise to some bias in the reserve calculations or in the number of expected claims if the

general population's mortality is considered in the forecasts. Later we address this problem by studying the Brass-type relational model described in equation (12). The CNSF rates do not represent the real mortality shape.

## 4.1 Results of the general mortality models

### 4.1.1 Lee-Carter model

Figure 3 presents the parameter estimates for the Lee-Carter model for the Mexican population data. The number of estimated parameters is 88 for both  $\hat{\beta}_x^{(1)}$  and  $\hat{\beta}_x^{(2)}$  and 20 for  $\hat{\kappa}_t$ , resulting in a total of 196 parameters.

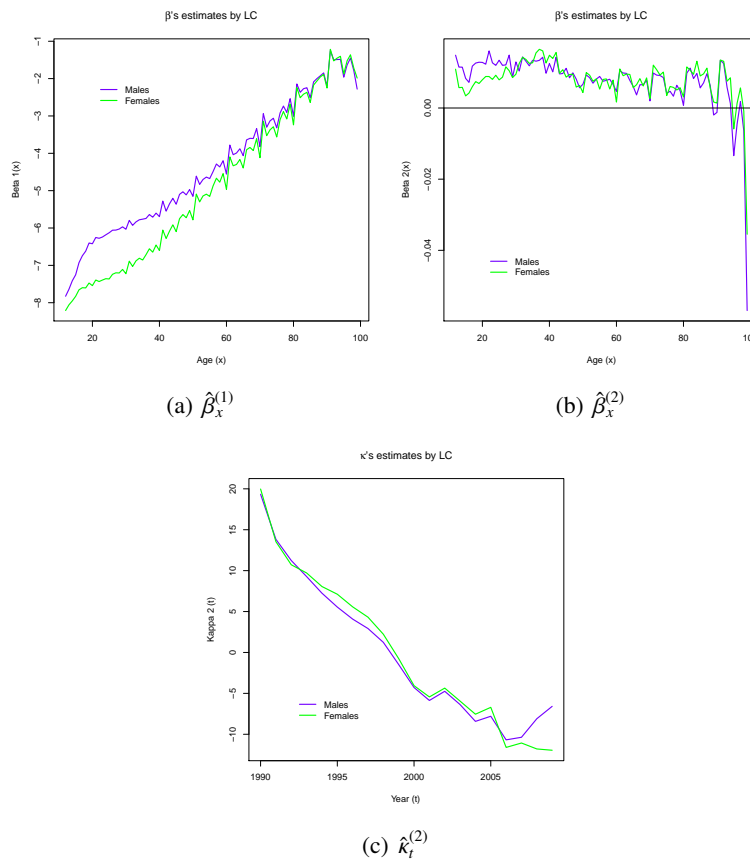


Figure 3: Estimated parameters for the Lee-Carter model. Male and Female aged 12 to 99 from 1990 to 2009. Mexican population.

Note that  $\hat{\beta}_x^{(1)}$  estimates for women are lower than those for men (Figure 3), except at ages above 80 . Applying exponential function yields, crude mortality rates have a median of 0.007 for women (interquartile range, denoted as IQR, is 0.001,0.045 ) and a median of 0.010 for men (IQR 0.003,0.054).

A further feature is that  $\hat{\beta}_x^{(2)}$  has a positive sign for both sexes, and for all ages ranging from 12 to 78. Changes in the logarithm of mortality rates are very low because  $\hat{\beta}_x$  parameter estimates are around 0.01. The median of  $\hat{\beta}_x^{(2)}$  is 0.009 (IQR 0.006,0.011 ) for women and 0.009 (IQR 0.006,0.012) for men. Substantial differences between men and women are shown for ages between 12 and 40, when the female logarithmic mortality rates grow steadily. After the age of 40, the curves do not differ by sex.

Inspection of the values of  $\hat{\kappa}_t$  show that they decrease for both genders. If we analyze the differences between male and female values of  $\hat{\kappa}_t$  , we note that from 1995 to 2005 , women presented a slight increase in their mortality level, approaching that of men for 2000. However, after 2005 the opposite occurs with the male  $\hat{\kappa}_t$  increasing.

#### 4.1.2 Renshaw-Haberman model

Parameter estimates were obtained for the Renshaw-Haberman model using an iterative process. Figure 4 shows the values for both the male and female population aged 12 to 99 years. The number of estimated parameters is 88 for every  $\hat{\beta}_x$  ( $3 \times 88$ ), 20 for  $\hat{\kappa}_t$  and 119 for  $\hat{\gamma}_{t-x}$ , resulting in a total of 403 estimated parameters. In general, these estimated parameters are similar to those estimated using the Lee-Carter model. There is no perceived difference between the ages of 22 and 40, though the most notable difference is just before the age of 22 . Mortality rates are higher for men than they are for women.

Values of  $\hat{\beta}_x^{(2)}$  for women have a median of 0.008 (IQR 0.003,0.011), while for men this median is equal to 0.007 (IQR 0.005,0.014). Estimates for men are above zero. These estimates increase at the age of 23 up to 0.033, followed by a gradual drop until the age of 60. From this age until 90, we can observe a much more stable behavior, with some occasional fluctuations. After the age of 90, estimated parameters have negative values. Estimates are more stable between the ages of 12 and 40 for women than they are for men. For young women, there is a slight fall and these parameters eventually become negative. Between the ages of 45 and 60, values oscillate and are very close to zero. From the age of 61 onward, values begin to rise steadily, reaching their peak at the age of 91. After this age, observed parameters have similar values, with the exception of ages 95 and 99.

The slope indicates some abrupt increases in the logarithm of the mortality rate as age increases. There is a sudden increase in the mortality of men at the age of 23. This reaffirms the fact that the mortality of young men rises while that of young females does not. Unlike the Lee-Carter model, the Renshaw-Haberman model indicates that there are differences between the mortality of the sexes at older ages. This is most notable in women, whose mortality has slightly increased in recent years.

We know that the parameter  $\hat{\beta}_x^{(3)}$  indicates the rate of change for period mortality rates. Using this model, estimated values for women have a median equal to 0.010 (IQR 0.007,0.013), while those for men have a median of 0.009 (IQR

0.007,0.016). We also observe that, for men, oscillations are common around different ages. Meanwhile, females present a very stable behavior, with the most significant difference occurring after the age of 50.

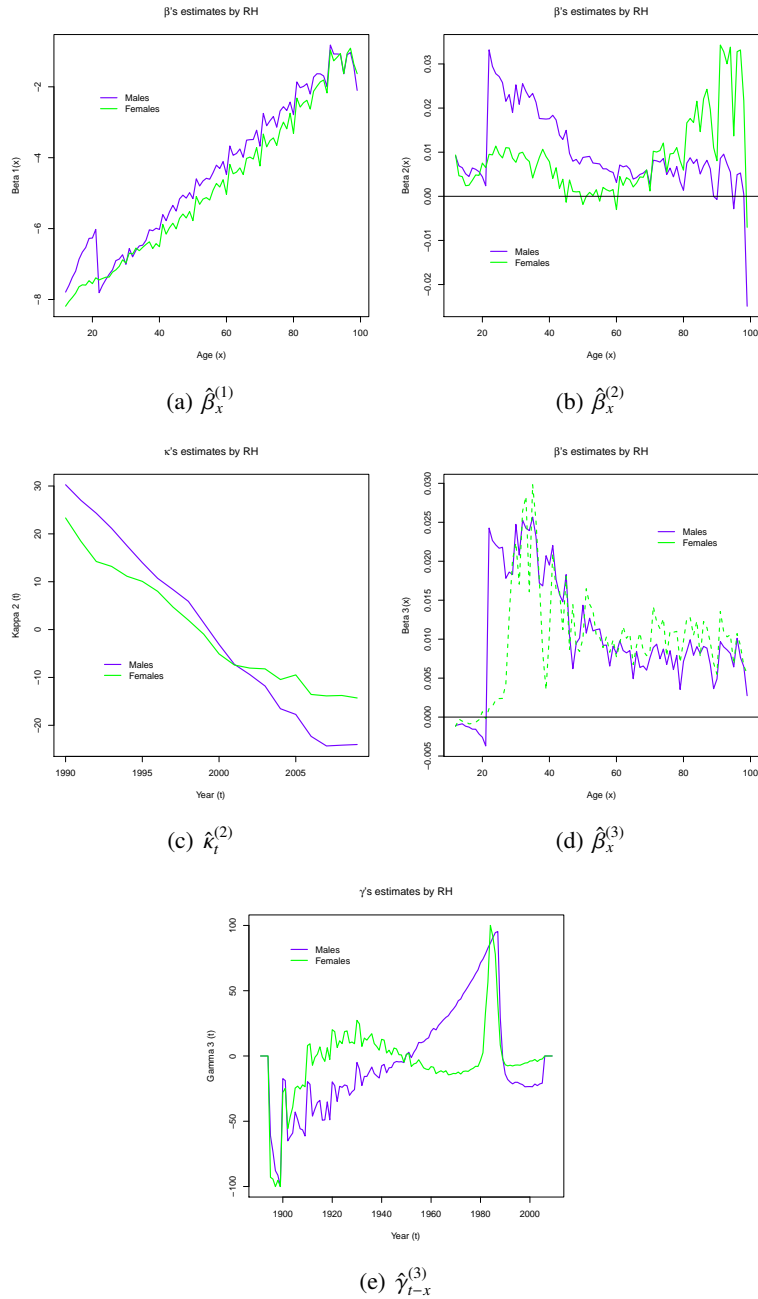


Figure 4: Estimated Parameters Renshaw-Haberman. Men and women aged between 12 and 99 between 1990 and 2009. Mexican population.

We know that the parameter  $\hat{\beta}_x^{(3)}$  indicates the rate of change for period mortality rates. Using this model, estimated values for women have a median equal to 0.010 (IQR 0.007,0.013), while those for men have a median of 0.009 (IQR 0.007,0.016). We also observe that, for men, oscillations are common around different ages. Meanwhile, females present a very stable behavior, with the most significant difference occurring after the age of 50.

The evolution of  $\hat{\kappa}_t$  represents the overall path of mortality over time, as if all ages were considered together. The male  $\hat{\kappa}_t$  value presents an almost linear behavior up until 2005. From this year on, we observe a long curved path leading to the last year studied here, i.e. 2009. In the case of the women, the slope is less steep, but it maintains a negative value. We see that the decrease in male mortality rates has been faster than it has been for women if we consider all ages. In general, beginning in 2000, the evolution in female rates presents a less steep curve than that of men.

If we focus on the year of birth and treat it as a series with non-constant variance, we note that gender behavior is different for those born between 1903 to 1950, and then for those born from 1980 onward. For these generations born after 1980 the  $\hat{\gamma}_{t-x}$  for women is higher than it is for men. Values for men show a linear shape, with a mostly rising trend, while for women the values present a convex and concave shape before and after 1950 respectively. Peaks are reached between 1984 and 1987. A possible explanation for this phenomenon is the strong earthquake that hit Mexico in 1985, affecting several states in the country.

#### 4.1.3 Age-Period-Cohort model

This is a special case of the previous model, with  $\hat{\beta}_x^{(1)}$  and  $\hat{\beta}_x^{(2)}$  equal to one. The number of estimated parameters is 88 for  $\hat{\beta}_x$ , 20 for  $\hat{\kappa}_t$  and 119 for  $\hat{\gamma}_{t-x}$ , resulting in a total of 227 estimated parameters. Like the Lee-Carter model, this model emphasizes the differences in mortality by gender among the young. These differences disappear at older ages. This is an expected behavior of the log mortality rates. Figure (5) presents the estimated parameters.

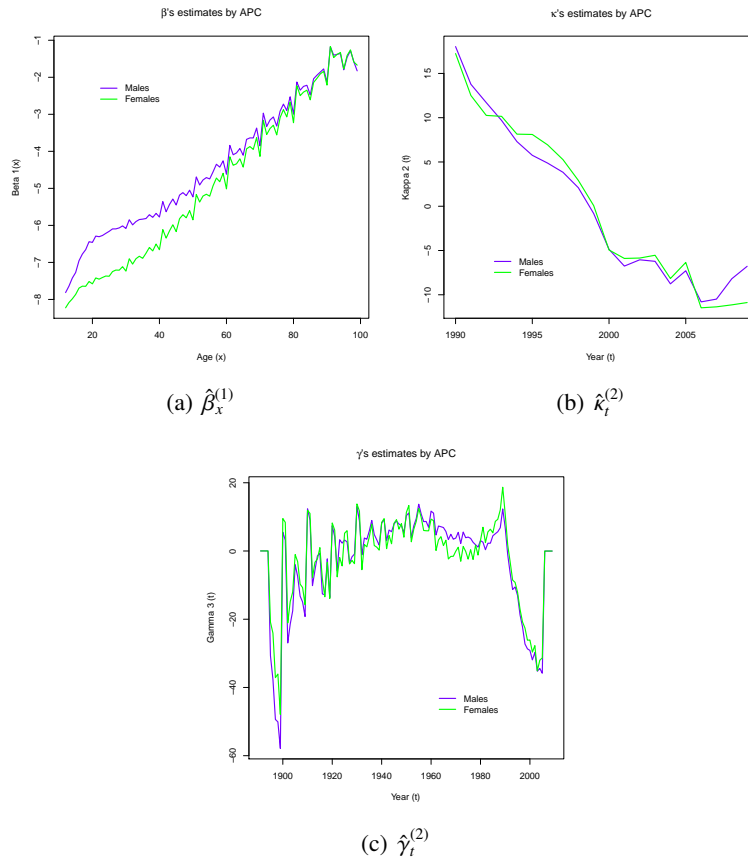


Figure 5: Estimated Parameters Age-Period-Cohort. Male and Female aged 12 to 99 from 1990 to 2009. Mexican population.

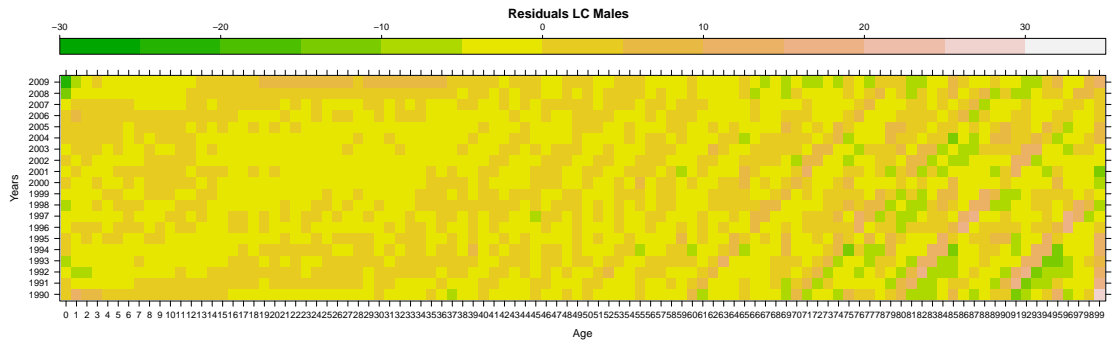
Values of the parameters  $\hat{\kappa}_t$  were similar to those obtained by the Lee-Carter model especially in men. Prior to 2000, this model predicted lower values, above all between 1995 and 1999. For women, changes are constant and no linear behavior can be identified. If we take the year of birth we see there are no differences between the sexes and the respective behaviors are very similar.

#### 4.1.4 Model comparison

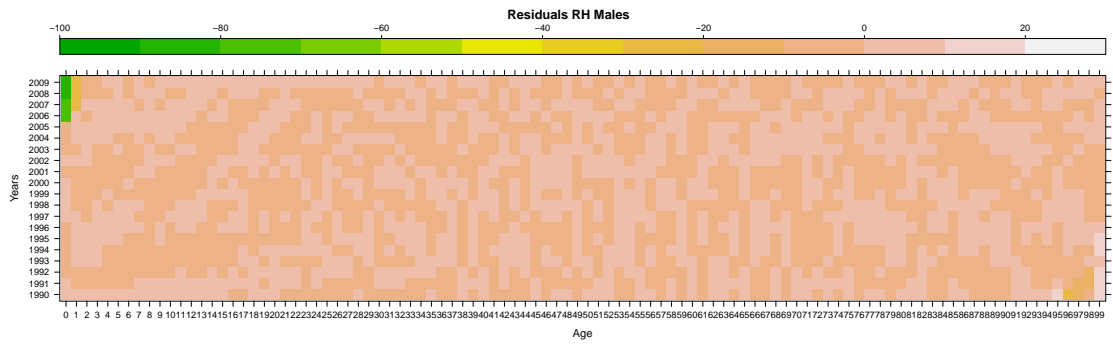
To evaluate the quality of the models, we plotted residuals in order to identify patterns. The x-axis displays age  $x$  and the y-axis shows the year  $t$ . We would expect residuals to be distributed randomly, i.e. they should be independent and identically distributed.

The residuals of the Lee-Carter model show that cohort effects were not captured. There are diagonal lines through years, mainly after 60, for both male and female. Residuals have a median of -0.35 (IQR -1.96,1.60) for men and -0.3 (IQR -1.88,1.52) for women. The largest residuals correspond to the estimated mortality

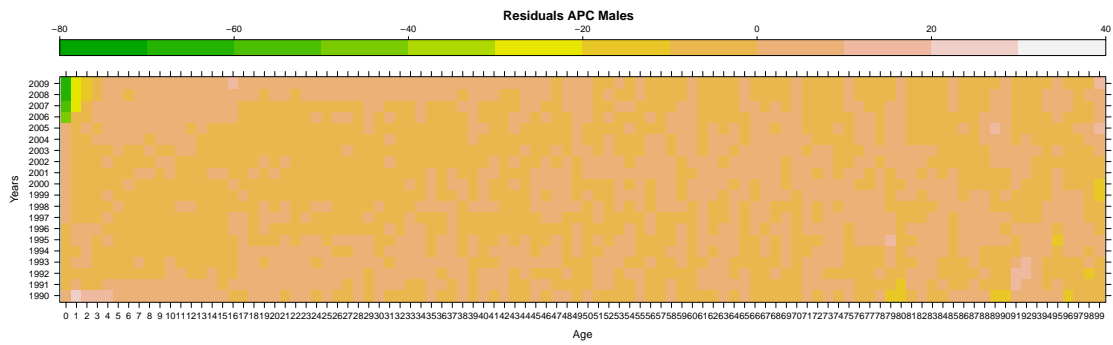




(a)

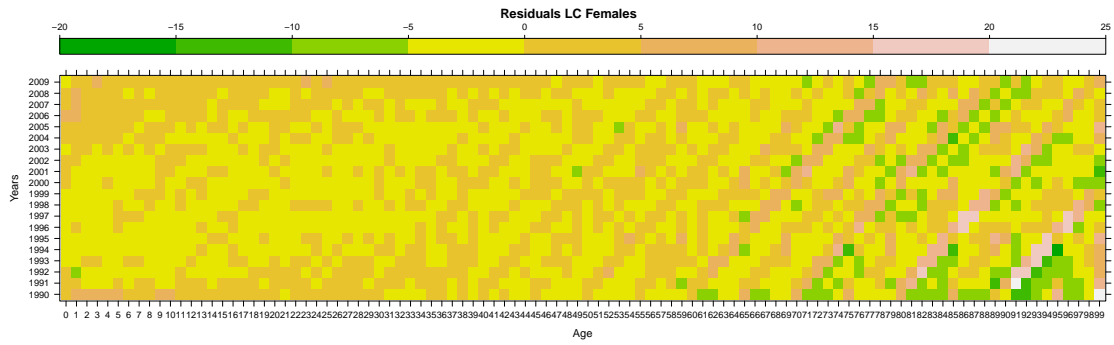


(b)

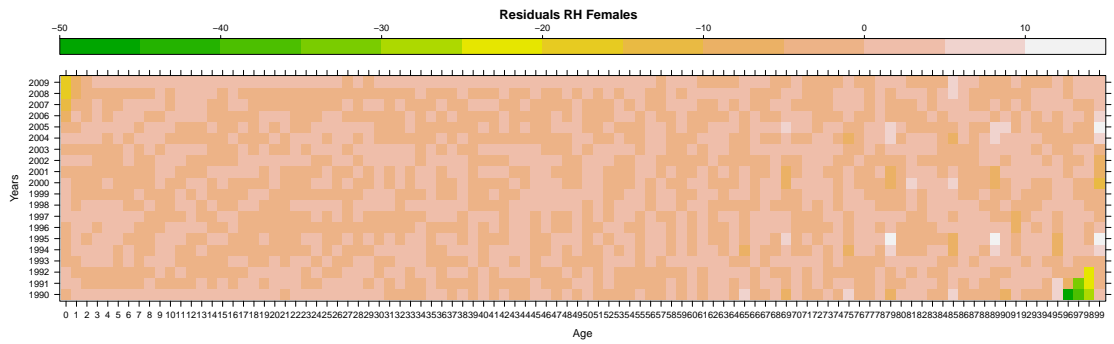


(c)

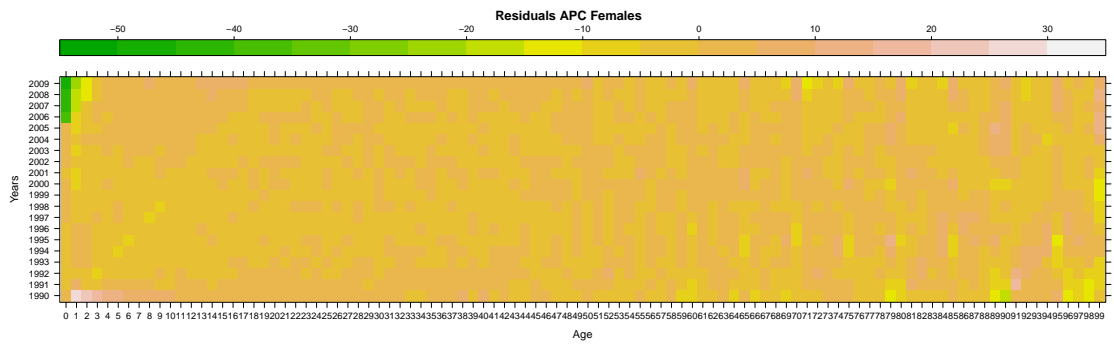
Figure 6: Standardized Residuals  $Z(x, t)$  (a) Lee-Carter, (b) Renshaw-Haberman and (c) Age-Period-Cohort models for males. Largest residuals appear in dark  $Z(x, t) < 0$  or soft colors  $Z(x, t) > 0$



(a)



(b)



(c)

Figure 7: Standardized Residuals  $Z(x, t)$  (a)Lee-Carter , (b)Renshaw-Haberman and (c)Age-Period-Cohort models for females. Largest residuals appear in dark  $Z(x, t) < 0$  or soft colors  $Z(x, t) > 0$

Model	Male	Female
Lee-Carter	-23,105.68	-23,559.63
Renshaw-Haberman	-14,963.81	-14,302.79
Age-Period-Cohort	-19,058.61	-18,273.52

Table 1: Bayes Information Criterion

at older ages.

In contrast, the residuals of the Renshaw-Haberman model do not show a clear pattern, as cohort effects were included in the model and these have a median of -0.06 (IQR -1.13,1.13) for men, and a median of -0.02 (IQR -1.03,1.02) for women. Residuals are larger through ages 96 to 99, and also in the early nineties. We can also observe that residuals are larger in women than they are in men, most presenting negative values. Nevertheless, overall residuals are close to zero.

Finally, the residuals of the Age-Period-Cohort model have a median equal to -0.22 (IQR -1.61,1.58) for men and -0.06 (IQR -1.43,1.4) for women. No large differences are found at any particular age or year (see Figures 6 and 7). As in the Renshaw-Haberman model, diagonals in residuals do not appear in the Age-Period-Cohort model. Residuals are larger for this particular model than for the previous ones.

According to the Bayes information criterion (BIC), the Renshaw-Haberman model provides a better fit than the other models. This model includes cohort effects and presents a better distribution of the residuals.

## 4.2 Results for the Brass-type relational model

In this subsection we analyze the results obtained from the Brass-type relational model. We carried out a linear regression to compare the mortality reported in the insurance industry with the mortality in the general population. We consider as reference mortality rates those estimated for the general population in Mexico with the Lee-Carter, the Renshaw-Haberman and the Age-Period-Cohort models, as described in sections 2.1.1, 2.1.2 and 2.1.3. A Brass-type relational model is used to analyze the mortality rates calculated by the National Insurance and Finance Office for insured lives. The fundamental idea is that the insured individuals' mortality behavior is significantly different from the mortality experienced by the general population (Brouhns et al., 2002).

In our setting, we assume that the mortality rates for the insured population are unisex, which is the case of the Mexican mortality tables for the insured population, there being no male-female segregation.

Thus, using the Brass-type relational model, we investigate the influence of the gender composition of insurance portfolios on the management of mortality risk when only a unisex table is available. We see that for insurers, using a single unisex mortality life table can be hazardous.

Estimated parameters and the BIC for this model are shown in Table 2. The first column indicates the percentage of women in the population. This means that we considered different values for weight  $w$  in the linear regression. The estimates of the slope are equal to one when the proportion of women is exactly 25%, which means that there is a similarity between the insured population and the general population when we consider that one individual in every four is a woman. The significant negative intercept indicates that the mortality of the insured population is lower than the mortality of the general population.

Examining the logarithm rates adjusted by the Brass-type relational model from ages 12 to 18, the larger the proportion of women, the larger we can expect the difference between the mortality rate of the insured and that of the general population to be. The opposite occurs in the age interval 19-40; at these ages the differences are small.

% Women	Lee-Carter			Renshaw-Haberman			Age-Period-Cohort		
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	BIC	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	BIC	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	BIC
0%	-0.06	1.04*	33.36	-0.04	1.05*	22.06	-0.01	1.05*	24.17
25%	-0.14*	1.00*	17.88	-0.12	1.00*	3.48	-0.10	1.00*	7.79
50%	-0.22*	0.95*	8.70	-0.20*	0.95*	-7.86	-0.19*	0.96*	-1.18
75%	-0.30*	0.91*	6.00	-0.27*	0.91*	-11.18	-0.27*	0.91*	-2.64
100%	-0.38*	0.87*	8.77	-0.35*	0.87*	-7.58	-0.35*	0.87*	1.96

Table 2:  $\hat{\beta}$  by Brass-Type relational model:  $\log[m_{ins}(x, t)] = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \log[m_w(x, t)]$ , with different weights  $w$  according to the female proportion. \* significance  $\alpha = 0.05$ .

According to Gatzert and Wesker (2011),  $\hat{\beta}_0 = -0.3197$  and  $\hat{\beta}_1 = 1.0747$  for the Swiss population. Comparing these estimates with the estimated parameters for the Mexican population using the Brass-type relational model, we see that  $\hat{\beta}_0$  is similar to that estimated by the Brass-type relational model when there is a population with more women than men. Meanwhile, in contrast with the previous parameter,  $\hat{\beta}_1$  resembles that obtained for Switzerland when considering a low proportion of women.

Figure 8 shows the result of setting the year 2000 for the Mexican mortality rates, and when considering the parameter estimates in accordance with the Swiss Brass-type relational model, we obtained mortality rate estimates that could be used by the insurers.

## 5 Conclusions

We have described the mortality behavior of the Mexican population and, as in other countries, the pattern of mortality has been shown to be dependent on the factors of age and gender. Gender is a relevant factor in the longevity and mortality risk of the Mexican population, with the main gap between male and female

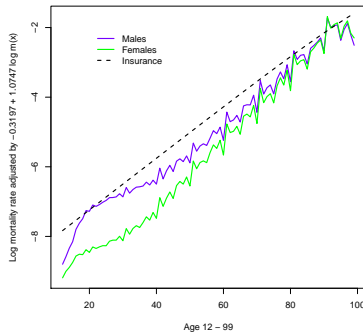


Figure 8: : Solid line represents the log-adjusted death rates obtained with the parameters for the Switzerland population. Dotted line represents the rates of CNSF Mexico year 2000.

mortality rates occurring in the age interval of 20 to 50. According to the Mexican Association of Insurance Institutions (AMIS), this age interval corresponds to adult ages and is precisely where the highest proportion of policyholders is to be found. Thus, using unisex life tables for insurance purposes can lead to a marked bias in the data, particularly if the male-female ratio in any given portfolio is not taken into account.

No historical mortality rates are available for the life insurance market in Mexico, but a unisex life table has been used by insurers. Here, therefore, we have proposed approximating the mortality of the insured population by comparing experiences in other countries. Gatzert and Wesker (2011) have used a Brass-type relational model to fit the insured population mortality rates to the general population mortality rates in Switzerland. This has been done for men and women separately.

We have compared the parameters obtained in the Brass-type relational model for Switzerland and the parameter estimates for the Mexican case, when the mortality of the population mortality is compared to the unisex life table assuming different male-female ratios. We obtained linear regression coefficients that are similar to those for the Swiss population. However, note that as the Mexican life table for insured portfolios is unisex, it should be stressed that we cannot compare the two sets of results directly.

We recommend studying mortality in insurance portfolios separately by gender, since the proportion of men and women in the general population and in a given portfolio can differ substantially. Unisex tariffs should be based on reasonable assumptions regarding the proportion of women in the portfolio, and on the gap between the mortality of the general population and that of the insured population. Unisex life tables for insured portfolios, such as those used by Mexican insurers, implicitly assume a constant male-female equilibrium of risk exposures in the portfolio. Thus, we believe that even though regulations insist that insur-

ance prices should be equal for men and women, mortality analyses for actuarial purposes should be conducted separately. Insurers need to bear in mind the gender composition of their portfolios when setting the price of their particular life insurance product. All in all, a unisex life table for insurers should serve as a benchmark against which their portfolio mortality can be compared.

## Acknowledgments

All authors thank support received from The Spanish Ministry: ECO2010-21787-C03-01. Montserrat Guillén thanks ICREA Academia.

## References

- Betzuen, A. (2010). Un Análisis sobre las posibilidades de prediccion de la mortalidad futura aplicando el modelo Lee-Carter. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles : Colegio Profesional*, (16):111–140.
- Brass, W. (1971). *On the Scale of Mortality*. Taylor and Francis, London.
- Brouhns, N., Denuit, M., and Vermunt, J. K. (2002). A Poisson Log-Bilinear Regression Approach to the Construction of Projected Lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(3):373–393.
- Cairns, A., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G., Epstein, D., Ong, A., and Balevich, I. (2009). A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data from England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal*, 13:1–35.
- Camposortega, S. (1997). Cien Años de Mortalidad en México. *Demos*, 10:11–13.
- Cox, D. R. and Oakes, D. (1984). Analysis of Survival Data. In *Monographs on Statistics and Applied Probability*, volume 21. Chapman and Hall.
- Currie, I. (2006). Smoothing and Forecasting Mortality Rates with P Splines. Talk given at the Institute of Actuaries.
- Debón, A., Montes, F., and Puig, F. (2008). Modelling and Forecasting Mortality in Spain. *European Journal of Operational Research*, 189(3):624–637.
- Delwarde, A. and Denuit, M. (2003). Importance de la Période d’observation et des âges Considérés dans la Projection de la Mortalité selon la Méthode de Lee-Carter. *Belgian Actuarial Bulletin*, 3:1–21.
- Delwarde, A., Denuit, M., Guillen, M., and Vidiella, A. (2003). Application of the Poisson Log-Bilinear Projection Model to the G5 Mortality Experience. *Belgian Actuarial Bulletin*, 6:54–68.

- Fledelius, P., Guillen, M., Nielsen, J., and Petersen, K. (2004). A Comparative Study of Parametric and Nonparametric Estimators of old age Mortality in Sweden. *Journal of Actuarial Practice*, 11:101–126.
- Gatzert, N. and Wesker, H. (2011). Mortality Risk and its Effect on Shortfall and Risk Management in Life Insurance.
- Guillén, M. (2012). Sexless and Beautiful Data: from Quantity to Quality. *The Annals of Actuarial Science*, 6(2):231–234.
- Hastie, T. J. and Tibshirani, R. J. (1990). *Generalized Additive Models*. Chapman and Hall.
- Lee, R. and Carter, L. (1992). Modeling and Forecasting U. S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87:659–671.
- Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S., and Olivieri, A. (2009). *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*. United States: Oxford University Press.
- Renshaw, A. and Haberman, S. (2003). Lee-Carter Mortality Forecasting: a Parallel Generalized Linear Modelling Approach for England and Wales Mortality Projections. *Journal of the Royal Statistical Society Series C*, 52(1):119–137.
- Renshaw, A. and Haberman, S. (2006). A Cohort-Based Extension to the Lee - Carter Model for Mortality Reduction Factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(3):556–570.



## La escasa relevancia de la información contable sobre los activos intangibles en la valoración de las empresas innovadoras españolas: el caso de los sectores farmacéutico y biotecnológico

RUBIO MARTÍN, GRACIA

Departamento de Economía Financiera y Contabilidad III  
Universidad Complutense de Madrid (España)  
Correo electrónico: [graciarubiomartin@ccee.ucm.es](mailto:graciarubiomartin@ccee.ucm.es)

RODRÍGUEZ PAREDES, MERCEDES

Departamento de Economía Financiera y Contabilidad II  
Universidad Complutense de Madrid (España)  
Correo electrónico: [paredes@ccee.ucm.es](mailto:paredes@ccee.ucm.es)

MAROTO ACÍN, JUAN ANTONIO

Departamento de Economía Financiera y Contabilidad III  
Universidad Complutense de Madrid (España)  
Correo electrónico: [jamaroto@ccee.ucm.es](mailto:jamaroto@ccee.ucm.es)

### RESUMEN

El presente artículo analiza en qué medida la norma contable recoge adecuadamente el valor de los activos intangibles, así como su utilidad para los agentes financieros en los procesos de compra-venta de empresas. A partir de una muestra, que recoge los precios pagados en transacciones privadas y en los mercados cotizados de los sectores farmacéutico y biotecnológico españoles durante el periodo 2005-2011, se ha analizado, en primer lugar, el comportamiento de la ratio precio-valor en libros. En segundo lugar, a través de un modelo de regresión, se ha evaluado la relevancia de las diferentes partidas contables en el proceso de generación de precios, así como qué parte del valor intangible de la empresa no aparece recogido en los estados contables. Los autores concluyen sobre la necesidad de acompañar la información económico-financiera tradicional con un informe de capital intelectual.

**Palabras clave:** intangible; generador de valor; valor razonable; informe de capital intelectual.

**Clasificación JEL:** M41; C31.

**MSC2010:** 62J05.

Artículo recibido el 9 de mayo de 2013 y aceptado el 13 de noviembre de 2013.



# The Low Impact of Accounting Information about Intangible Assets in the Valuation of Innovative Spanish Companies: The Case of Pharmaceutical and Biotechnology Industry

## ABSTRACT

This article analyzes the extent to which accounting standards adequately reflects the value of intangible assets as well as its usefulness for financial agents in the process of buying and selling companies. Based on a sample that includes price of private transactions and listed companies from the pharmaceutical and biotech Spanish sector in the period 2005-2011, we have analyzed: i) The performance of price-to-book ratio; and ii) Based on a regression model, the relevance of different accounting items in the price generation process, as well as what part of the intangible value of the company is not reflected in the financial statements. The authors conclude that traditional financial information must be complemented with an intellectual capital report.

**Keywords:** intangible; value driver; fair value; intellectual capital report.

**JEL classification:** M41; C31.

**MSC2010:** 62J05.



## 1. INTRODUCCIÓN

El papel que ejercen los activos intangibles en la creación de valor de las empresas ha suscitado un interés creciente por su medición y contabilización, particularmente en sectores donde estos activos constituyen fundamentales generadores de valor, como son el sector farmacéutico y el biotecnológico, que necesitan reflejar su riqueza en innovación para una imagen “más fiel” de su situación económico-financiera y, en definitiva, de su valor. Sin embargo, tanto las Normas Internacionales de Contabilidad (NIIF y NIC), como su adaptación al caso español, han impuesto importantes límites a la hora de permitir el correcto reconocimiento y valoración de los activos intangibles de dichas empresas.

A tenor de esta problemática, se propone contrastar en qué medida la nueva reforma contable sigue incorporando limitaciones a la hora de presentar información relevante para la determinación del valor razonable de las empresas, en particular respecto al reconocimiento de sus activos intangibles y, más concretamente, si estos valores, recogidos en sus estados contables, resultan insuficientes y deben completarse a través de informes que incorporen otros parámetros vinculados a la capacidad de los activos para generar beneficios o rentabilidades futuras.

Para ello se han tomado los precios pagados tanto en transacciones privadas como en mercados cotizados del sector farmacéutico y biotecnológico español, lo que permite contrastar el impacto de la norma contable en dos segmentos empresariales tan diversos. A partir de esta información y de los datos contables de ambas muestras, se ha analizado, en primer lugar, el comportamiento de la ratio precio-valor en libros. En segundo lugar, a través de modelos de regresión, se ha evaluado la relevancia de las diferentes partidas contables, distinguiendo entre las de naturaleza tangible e intangible, así como las de beneficios en el proceso de generación de precios. Una de las aportaciones de este artículo es la utilización de los precios pagados en transacciones privadas, para comprobar las carencias de un sector tan opaco y carente de información; también si la reforma contable llevada a cabo ha mejorado la información derivada de los estados contables en los procesos de generación de precios, a través de la inclusión de variables de control. Por último, se ha introducido en el modelo de regresión la estimación financiera sobre el valor de las compañías, en función de su capacidad actual de generar flujo de caja, y también se ha analizado la relevancia de esta magnitud frente al resto de parámetros para diferentes niveles de rentabilidad y riesgo. Así mismo, partir del modelo propuesto, se ha cuantificado la parte de los activos no explicados desde la contabilidad para cada clasificación. En función de las carencias que arroja este análisis, pese a no ser el objetivo principal del trabajo, se determina la necesidad de elaborar informes de capital intelectual que incluyan la parte del valor no explicado por los estados contables, a través de técnicas financieras generalmente aceptadas.

El artículo se divide en los siguientes epígrafes: 1. Introducción; 2. Antecedentes y marco teórico; 3. Muestra de empresas: una aproximación a los intangibles no reconocidos; 4. Desarrollo del modelo y resultados; 5. Conclusiones.

## **2. ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO**

El esfuerzo de armonización propiciado por las normas internacionales de contabilidad (NIIF 3, 13, NIC 36 y 38), no parece haber resuelto el problema del registro de estas inversiones en los estados financieros, ya que, aunque se introduce el criterio del valor razonable<sup>1</sup> o “fair value”, los requisitos de la norma dificultan enormemente su aplicación. Entre éstos cabe mencionar los exigidos por la NIC 38, que establece condiciones al reconocimiento de los activos intangibles: control sobre el recurso, que se puedan medir de manera fiable y que generen beneficios futuros. El marco conceptual también exige que sean identificables, para lo cual deberá cumplir una de las siguientes condiciones: (1) que sean separables: esto es, que puedan ser vendidos, cedidos, entregados para su explotación, arrendados o intercambiados, ya sea individualmente o junto con otros activos; (2) que surjan de derechos legales o contractuales, con independencia de que sean transferibles o separables de la empresa. Además, también existen restricciones a su revalorización, pues se requiere la existencia de un mercado “activo” para determinar el valor razonable o revalorizado.

Lo señalado es aplicable tanto para activos adquiridos a terceros como para los generados internamente. Ahora bien, en este último caso, los activos intangibles tales como el fondo de comercio, las marcas, las cabeceras de periódicos o revistas, los sellos o denominaciones editoriales, las listas de clientes u otras partidas similares, al igual que los gastos de puesta en marcha, desembolsos por formación del personal, por publicidad y promoción, o reubicación total o parcial de la empresa, se llevarán a la cuenta de resultados del ejercicio en que se produzcan.

Respecto a los gastos de investigación y desarrollo<sup>2</sup> de nuevos productos (I+D), principal partida intangible en los sectores a analizar, existe un tratamiento diferente para cada uno de

---

<sup>1</sup> La NIC 38 y la NIIF 3 definen valor razonable como “el importe por el cual puede ser intercambiado un activo entre un comprador y un vendedor interesados y adecuadamente informados, en una transacción libre”. A su vez la NIIF 13 indica que: “El valor razonable es una medición basada en el mercado, no una medición específica de la entidad. Para algunos activos y pasivos, pueden estar disponibles transacciones de mercado observables o información de mercado. Para otros activos y pasivos, pueden no estar disponibles transacciones de mercado observables e información de mercado. Sin embargo, el objetivo de una medición del valor razonable en ambos casos es el mismo –estimar el precio al que tendría lugar una transacción ordenada para vender el activo o transferir el pasivo entre participantes de mercado en la fecha de la medición en condiciones de mercado presentes–”. Además las normas establecen una jerarquía de valoración: metodología de mercado, metodología de ingresos y metodología de coste.

<sup>2</sup> La NIC 38 define *investigación* como “todo aquel estudio original y planificado, emprendido con la finalidad de obtener nuevos conocimientos científicos o tecnológicos” y *desarrollo* como “la aplicación de los resultados de la investigación o de cualquier otro tipo de conocimiento científico, a un plan o diseño en particular para la producción de tangibles, productos, métodos, procesos o sistemas nuevos, o sustancialmente mejorados, antes del comienzo de su producción o uso comercial”.

ellos: para los primeros la norma exige su imputación a resultados, ello es consecuencia de la dificultad que existe en demostrar que tales gastos puedan generar beneficios económicos futuros. Por su parte, los de desarrollo, pese a que en este caso sí se permite su activación, en la práctica las empresas farmacéuticas y biofarmacéuticas optan por activarlos solo cuando está asegurada la comercialización de sus productos.<sup>3</sup>

La normativa española, por su parte, tampoco ha posibilitado una mejora en el hermetismo que ha existido en torno a la política de inversiones en intangibles, al permitir la activación de los gastos de I+D en función del deseo de la compañía –y siempre que existan motivos fundados de éxito técnico y rentabilidad económica– y al establecer la obligación de presentar informes de gestión solo para empresas que superen determinado tamaño, en los que se especifica la política de activación de gastos llevada a cabo.

Por todo ello, el criterio de prudencia sigue predominando sobre el “valor razonable”, por miedo a prácticas de “contabilidad creativa”, y la problemática queda parcialmente resuelta solo en adquisiciones a terceros o en los procesos de combinaciones de negocios, tal y como se recoge en Gutiérrez y Rubio (2006). En este sentido, la NIIF 3 establece la necesidad de estimar el valor razonable en el proceso de determinación del precio de los activos (DPA) y el fondo de comercio queda definido como diferencia entre el precio pagado por la compañía y los activos y pasivos cuantificados a su valor razonable (para reflejar los beneficios futuros esperados no atribuibles a ningún otro activo). Sin embargo, un análisis anterior de las adquisiciones de empresas cotizadas españolas del sector farmacéutico y biotecnológico durante el periodo 2005-2010 pone de manifiesto el escaso reconocimiento del valor razonable individual de los activos intangibles, ya que el fondo de comercio llega a ascender, por término medio, al 86% del precio pagado por la empresa.<sup>4</sup>

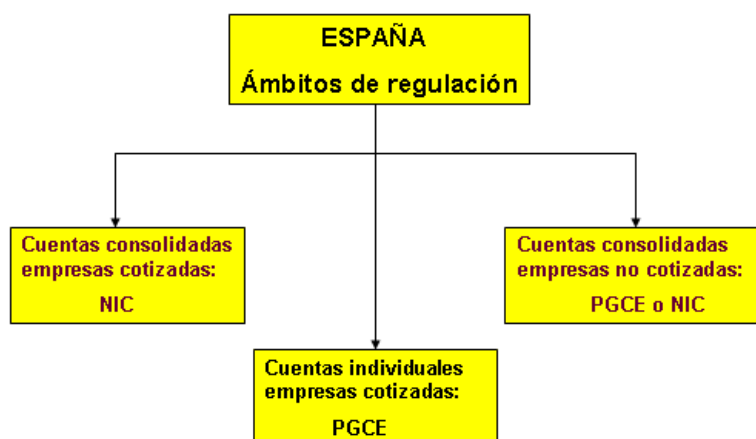
A lo anterior es necesario añadir que el proceso de armonización internacional ha ocasionado diversidad de criterios y cierto caos a nivel nacional. Uno de los grandes problemas es que existen diferentes normas en función de si la empresa cumple unos requisitos u otros. Para las empresas cotizadas, que presentan balances consolidados, las cuentas deben elaborarse según la norma internacional desde el año 2005 (formato NIIF); pero las empresas que presentan estados contables individuales deben elaborarlas según el Plan General Contable Español del 2007 (PGC 2007). En cambio, las empresas españolas, no cotizadas, pero que sí son grupos empresariales y presentan sus estados contables consolidados, pueden elegir entre ambas normativas, como se detalla en la Figura 1.

---

<sup>3</sup> Price Water House Coopers (2006): *A review of the implementation of IRFS in the pharmaceuticals industry*, Price Water House Coopers, Madrid.

<sup>4</sup> Ello se confirma al analizar en detalle la asignación de precios realizada en estas adquisiciones. Ver Rubio, Sousa y Maroto (2012).

Figura 1. Diferentes normas contables que coexisten en España.



Fuente: elaboración propia.

Tras lo descrito puede afirmarse que el valor de los activos intangibles sigue sin ser una magnitud directamente observable desde la información contable en su totalidad, pues su activación es el resultado de un proceso discrecional y sometido a condiciones de difícil cumplimiento, lo que crea consecuencias socio-económicas muy negativas, tal y como las resumen los trabajos de revisión y recopilación de bibliografía previa tales como el de Larrán y Sotomayor (2005) o el de Zéghal y Maaloul (2011): (1) asimetría de información entre los inversores cercanos a la gerencia y los que no lo están, ya que los primeros son los que se hayan en disposición de contar con información sobre la capacidad de los intangibles de generar valor para la empresa; (2) mayores costes de capital, al no contar la empresa con un nivel importante de activos reconocidos que puedan hacer frente a las deudas contraídas; (3) sobrevaloración de los intangibles que posee la empresa por parte de los inversores ajenos a la gerencia o, por el contrario, en otras ocasiones, su falta de reconocimiento, imputación a gastos y deterioro del beneficio, puede infravalorar de forma sistemática este tipo de empresas; (4) bajo estímulo para los trabajadores que forman parte del equipo humano de la empresa al no percibir los resultados de su trabajo; (5) por último, dado que la adopción de nuevas tecnologías exige elevados costes de inversión, que son imputados a resultados, puede ser disuasorio para las empresas con rentabilidades inferiores a la media del mercado.

Para mitigar estas deficiencias es importante medir en que grado la estructura contable se aleja del valor razonable de la empresa y buscar soluciones para que la información financiera incluya las magnitudes necesarias, a partir de las cuales se pueda extraer su auténtico valor, así como su composición, tanto tangible como intangible. De ahí la importancia de este estudio, así como de otros precedentes que han servido como base del mismo.

No obstante, estos importes sí deberían aparecer en los precios pagados en los mercados cotizados y en las transacciones privadas. Sin embargo, existe una fuerte controversia sobre si los valores bursátiles recogen el auténtico valor de la empresa o, por el contrario, se crean

continuas burbujas y depresiones que comportan una valoración irracional (Malkiel, 2008; Shiller, 2001); porque, a lo largo de los últimos veinticinco años, el valor de mercado de las empresas cotizadas en los mercados internacionales se ha alejado cada vez más de su valor en libros. Desde la década de los 80 del siglo XX, autores como Lev (1989, 2000, 2005), ponen en evidencia el distanciamiento paulatino entre el valor de mercado de las empresas y su valor contable. El cociente del valor de mercado y el valor en libros de la compañía ya se había usado en numerosos trabajos; entre ellos destacamos los de Tobin (1969),<sup>5</sup> si bien el autor sustituye el valor en libros por el coste de reposición, lo que representa el valor de los intangibles que no están reflejados en el balance empresarial. Una aplicación de esta ratio y su relación con otras magnitudes, como los niveles de gasto de I+D en la industria farmacéutica, es la de Gleason y Klock (2006).

Debemos destacar también el trabajo de Ohlson (1995) que determina el valor de las acciones de una empresa en función de su valor neto contable y el valor actual de los beneficios “anormales o residuales”, es decir, los beneficios que exceden de los exigidos por los inversores. Así mismo, existen numerosos trabajos que han utilizado modelos cuantitativos para evaluar si el inadecuado tratamiento de los intangibles afecta a los valores de las compañías que los poseen, entre ellos merecen destacar los de Lev y Zarowin (1999), los cuales ponen de manifiesto que los gastos de I+D se recogen como gasto y los beneficios de las investigaciones cuando se realizan, por lo que se rompe el principio de correlación de ingresos y gastos. También demuestran, a través de una muestra de empresas, que la utilidad de la información financiera para los inversores había decrecido significativamente en el periodo 1977-1996; dicha pérdida la achacan la incapacidad de la contabilidad de recoger el capital intangible de las compañías. Otros Autores como Brown, Lo y Lis (1999) también ponen de manifiesto la pérdida de relevancia del valor patrimonial y de los beneficios en la explicación del valor de mercado de las compañías americanas durante el periodo 1958-1996. Los mismos resultados son arrojados por el trabajo de Dantoh, Radhakrishnan y Ronen (2004), para el periodo 1983-2000, cuyos resultados demuestran además que la pérdida de relevancia es más pronunciada para aquellas empresas de alto contenido en intangibles. Liang y Yao (2005) ratifican este resultado para empresas taiwanesas de alto contenido tecnológico e innovador. Sin embargo, otros autores como Collins, Maydew y Weiss (1997) señalan lo contrario y ponen de manifiesto que el poder explicativo de las magnitudes contables tradicionales ha aumentado fuertemente en el tiempo, si bien la tasa de crecimiento de los beneficios ha disminuido en la últimas cuatro

---

<sup>5</sup> Tobin desarrolló el ratio  $Q$  en un esfuerzo contable para armonizar las políticas diferentes de depreciación. El autor definió  $Q$  como valor de mercado de una empresa dividido por su valor de reposición. Si  $Q > 1$ , la empresa vale más que su coste de sustitución; si  $Q < 1$ , a la inversa; si  $Q$  es mayor en una compañía que en otra, entonces la compañía tiene un capital intelectual más alto. La  $Q$  de Tobin establece que la diferencia entre valor de mercado y valor de reposición debe ser atribuible a ventajas intangibles.

décadas (1953-1994). Otros autores, como Francis y Schipper (1999), concluyen que durante un periodo similar tampoco encuentran evidencias de esta pérdida de relevancia, si bien sí consideran que la información derivada de los estados financieros es menos relevante en las empresas de alto contenido tecnológico que en las que no lo son. Finalmente, en este sentido, Core, Guay y Van Buskirk (2003) encuentran evidencias parecidas durante el periodo 1975-1999, pero señalando además que para la submuestra de empresas correspondientes a la nueva economía decrece el poder explicativo de las magnitudes financieras tradicionales, si bien la estructura del modelo explicativo es parecido, por lo que concluyen que la pérdida de relevancia se debe a otros factores omitidos, no correlacionados, tales como los intangibles. Otras investigaciones, como las de Amir y Lev (1996), analizan la relevancia de la información no financiera en el sector de las telecomunicaciones y concluyen que el patrimonio contable y los resultados de empresas con un alto nivel de intangibilidad tienden a estar infravalorados y que las rentabilidades del mercado están relacionados positivamente con los costes de desarrollo de *software* capitalizados. A su vez, Choj, Kwon y Lobo (2000) muestran una relación positiva entre los precios de mercado americano y los intangibles divulgados por las empresas. En consonancia con los anteriores, Íñiguez y López (2005), también concluyen que existe una relación positiva entre precios e intangibles y tratan de medir la relevancia de los activos intangibles, frente a los tangibles y al resultado, en las cotizaciones del mercado de capitales español para el periodo 1991-1999. Otros autores, como Larrán y Sotomayor (2005), se centran en la incidencia, para el caso europeo, de las diferentes partidas contables y del resultado, en función de diferentes situaciones económico-financieras de las empresas. En ambos trabajos se concluye que los activos intangibles reconocidos guardan una relación directa con los precios, pero no son los principales generadores de valor. Además, Larrán y Sotomayor advierten que en las empresas con pérdidas la relevancia valorativa es menor frente a las que tienen beneficios. Aboody y Lev (1998), Tutticci *et al.* (2007) y Oswald y Zarowin (2007) y, más recientemente, Oswald (2008), estudian la repercusión de la política contable elegida sobre los gastos de investigación y desarrollo en los precios de compañías, es decir, la imputación de los mismos a gasto o su capitalización. Concluyen que existe una relación entre el modelo elegido y determinadas características de la empresas, en concreto de su ciclo de vida empresarial; demuestran que las empresas eligen capitalizar la I+D cuando se encuentran en periodos tempranos del ciclo empresarial, mientras que en ciclos de madurez y declive prefieren imputar dichos importes como gasto. Ahmed y Falk (2006), además, analizan en Australia la repercusión de la adopción de la norma internacional; también concluyen que existe una mayor relevancia de la información financiera en los precios cuando se opta por la capitalización y que la discrecionalidad relativa de la norma internacional (NIC 38) no mejora ni la elección de capitalizar el gasto ni, consecuentemente, la relevancia de las partidas de intangibles frente a la normativa anterior.

### **3. MUESTRA DE EMPRESAS: UNA APROXIMACIÓN A LOS INTANGIBLES NO RECONOCIDOS**

Para la elaboración de la muestra se han tomado los precios, tanto de transacciones privadas como del mercado continuo español, para el sector farmacéutico y el biotecnológico. Los primeros se han extraído de la base de datos ZEPHYR. El número de transacciones privadas de empresas no cotizadas ha ascendido a 241, durante el periodo 2005-2011, de éstas solo 133 cuentan con precios, porcentajes de adquisición y cuentas debidamente depositadas en el registro mercantil para ser objeto de estudio. En el Anexo 1 se muestra el listado de las empresas adquiridas, en total 186. En cuanto a los datos económicos de las empresas objeto de transacción han sido extraídos de la base de datos SABI. A continuación, en las Tablas 1 y 2, se presentan los estadísticos más significativos de la muestra, a través de los cuales se puede comprobar la gran heterogeneidad de las empresas a analizar.

En la Tabla 1 se ha procedido a segmentar la muestra en función de que las empresas coticen o no: las primeras arrojan un valor de mercado promedio de unos 796 millones de euros, más de veinte veces el importe pagado por término medio por las empresas no cotizadas, que ascendió a unos 37 millones de euros, lo que da una idea de la diferencia de tamaño existente entre unas y otras. Respecto a la cantidad de intangibles que registra la contabilidad, para las empresas que cotizan esta cifra asciende a 136,4 millones de euros, lo que representa un 17% del precio medio pagado; el inmovilizado tangible asciende a 72,5 millones de euros, lo que supone un 11% sobre lo pagado, mientras que la partida de resto de activo, que incluye el activo circulante y financiero, ha supuesto el 21,2%. Para empresas no cotizadas la cifra de intangibles ha sido mucho menor, de unos 2,4 millones de euros, solo el 6,5% de las cantidades pagadas, lo que denota una política de activación del gasto de investigación y desarrollo caracterizada por un menor reconocimiento contable. El inmovilizado tangible ha ascendido a 2,2 millones de euros, un 5,8% sobre el precio pagado, mientras que el activo circulante y el financiero suponen, por término medio, el 17,95%.

Respecto al beneficio, las empresas cotizadas generaban un beneficio antes de intereses, amortizaciones e impuestos (BAAII) de unos 44 millones de euros, un 5,5%, sobre el valor pagado por la estructura económica y, sin embargo, para las empresas no cotizadas el porcentaje desciende hasta el 2,47%. Asimismo, las empresas cotizadas con beneficios representan el 80%, mientras que en transacciones privadas es tan solo del 48%.

También se han comprobado las diferencias existentes en la muestra (ver la Tabla 2), en función de que las empresas tengan un BAAII positivo o negativo, hallando de nuevo importantes desigualdades. En concreto el precio pagado es muy superior en empresas con beneficios positivos, 3,82 veces más, respecto a los que corresponden a compañías en pérdidas o no cuentan con ellos.



Tabla 1. Caracterización de empresas cotizadas frente a no cotizadas.

	N	Media cotizadas	Desviación típica cotizadas	N	Media no cotizadas	Desviación típica no cotizadas
Valor de mercado (mil €)	95	795.863,19	943.377,26	133	37.199,66	81.305,18
Inmovilizado intangible (mil €)	95	136.437,19	169.992,22	133	2.419,31	6.184,00
Inmovilizado tangible (mil €)	95	72.483,55	88.839,02	133	2.160,63	5.527,27
Resto activos (mil €)	95	168.717,13	194.811,10	133	6.671,91	22.007,07
BAAll (mil €)	95	43.890,13	78.042,76	133	918,78	4.894,44
Empresas con BAAll positivo (%)	95	80		133	48	
Empresas biotecnológicas (%)	95	54		133	60	
Transacciones periodo crisis (%)	95	52		133	53	

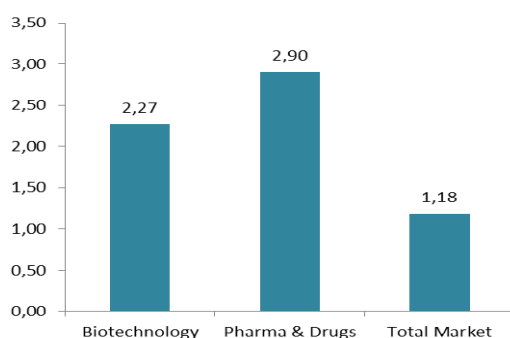
El activo intangible y el tangible, junto con el resto de activos reconocidos, respecto al precio pagado representan el 17% y el 31%, respectivamente, para el tramo de empresas con beneficios positivos; mientras que ambos porcentajes descienden, de manera importante, hasta el 12% y el 25%, para las compañías que tienen pérdidas. Todo lo descrito induce a la existencia de cambios estructurales y de comportamiento en el modelo que se va a proponer en función de los diferentes segmentos de las Tablas 1 y 2. Además, el hecho de que las desviaciones de los parámetros sigan siendo muy superiores a las medias, indica que no se han eliminado los posibles problemas del diferente tamaño muestral a través de la segmentación realizada. Ambos factores se han tenido en cuenta en los siguientes epígrafes.

Tabla 2. Caracterización de empresas con beneficios frente a empresas sin beneficio.

	N	Media BAAll positivo	Desviación típica BAAll positivo	N	Media BAAll negativo	Desviación típica BAAll negativo
Valor de mercado (mil €)	139	494.136,45	855.832,03	89	129.266,53	292.060,70
Inmovilizado intangible (mil €)	139	85.118,54	154.716,98	89	15.530,74	38.323,01
Inmovilizado tangible (mil €)	139	46.721,19	80.943,41	89	7.185,63	16.884,68
Resto activos (mil €)	139	105.182,44	180.906,49	89	24.885,80	46.616,00
BAAll (mil €)	139	34.156,38	64.698,84	89	-5.569,69	11.189,41
Empresas biotecnológicas (%)	139	47,86		89	0,73	
Empresas no cotizadas (%)	139	45,71		89	0,78	

Una aproximación para observar el alto nivel de intangibles, no contabilizados, que poseen estos sectores es a través de la ratio que relaciona el precio de mercado y el valor en libros de las empresas cotizadas en Europa, tal y como se observa en la Figura 2. En el sector biotecnológico representa un 92% más que la media del mercado, y, en el farmacéutico, un 145% más.

Figura 2. Ratio precio/valor en libros en Europa (2011).



Fuente: Damodaran Online (2011).

Aplicando una modificación de este ratio a la muestra propuesta en el presente epígrafe, se puede observar también el peso de los intangibles no reflejados en el balance de las empresas. Para ello definimos la variable “ $Q$  aproximada” tomando, en el numerador, el valor de la estructura económica ( $EV$ ) como suma del valor patrimonial a precios de mercado y la deuda financiera a valor contable y, en el denominador, el valor de la empresa según libros ( $K$ ).<sup>6</sup>

Definimos la ratio de  $Q$  aproximada como:

$$Q_{aprox} = \frac{EV}{K} \quad (1)$$

para  $EV = PRECIO + DEUDA_{FN}$  y (2)

$$K = ACTIVO_{NO.CORRIENTE} + F.MANIOBRA \quad (3)$$

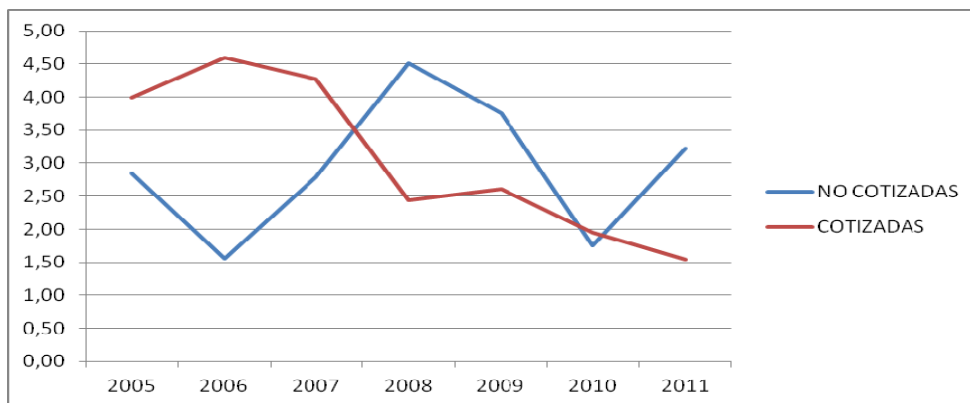
En dicho esquema,  $K$  es el valor en libros de  $EV$ , lo que es igual a la suma del activo no corriente neto más su fondo de maniobra (activos corrientes menos pasivos corrientes no financieros). Como se puede comprobar en la Tabla 3 y la Figura 3, los cálculos arrojan para compañías farmacéuticas y biotecnológicas cotizadas una ratio media de 3,06, lo que quiere decir que de cada euro que se invirtió en bolsa al comprar estas compañías un 67% no se encontraba recogido en los balances empresariales. La ratio para las no cotizadas arroja un saldo medio de 2,92, es decir, de lo pagado, por término medio, el 66% no se encontraba recogido en el balance.

---

<sup>6</sup> Chung y Pruit (1994) concluyen que la ratio de esta “ $Q$  aproximada” explica el 98% de la variación de la ratio elaborado por Tobin.

Tabla 3 y Figura 3. Evolución Ratio EV/K.

	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	Media
NO COTIZADAS	2,85	1,56	2,78	4,52	3,75	1,75	3,22	2,92
COTIZADAS	3,99	4,59	4,28	2,43	2,61	1,95	1,55	3,06



Es importante destacar que la evolución de la ratio sufre una fuerte caída para las empresas cotizadas, desde el máximo de 4,6, en 2006, hasta el mínimo de 1,5, en 2011; si bien ésta se mantiene más estable para empresas no cotizadas. Ello indica que las primeras han sufrido un mayor castigo, llevadas por la tendencia bajista del mercado y, por el contrario, las empresas no cotizadas han conservado mejor su carácter anticíclico.

#### 4. DESARROLLO DEL MODELO Y RESULTADOS

Se ha realizado un análisis de regresión, tomando como variables dependientes los precios de las compañías a valor empresa,  $EV$ , tal y como se ha definido en el epígrafe anterior, y como variables independientes determinadas magnitudes contables. Parece lógico pensar, partiendo de modelos anteriores (Ohlson, 1995; Íñiguez y López, 2005), que una manera de aproximar los precios pagados en transacciones privadas y en mercados cotizados sería a través de la suma de los activos o valor contable de la estructura económica de la empresa, más las utilidades que la misma genera. Así nuestro modelo de partida sería el siguiente:

$$EV = \alpha + b_1 * II_{RC} + b_2 * RA_{RC} + b_3 * BNF_R + \varepsilon \quad (4)$$

donde:

$EV$  = Valor de la estructura económica de la empresa;

$II_{RC}$  = Inmovilizado intangible reconocido en balance (valor contable);

$RA_{RC}$  = Resto de activos reconocidos en balance, incluyendo el inmovilizado tangible (valor contable) + inmovilizado financiero (valor contable) + fondo de maniobra (valor contable);

$BNF_R$  = Beneficio neto actual reconocido en balance.

Sin embargo, y dado que lo que buscamos es analizar en qué grado la información contable explica el valor de la estructura económica  $EV$ , y no la del patrimonio, hemos sustituido el beneficio neto ( $BNF_R$ ) por el beneficio antes de amortizaciones, intereses e impuestos ( $BAAII$ ), magnitud contable que se aproxima al cálculo del Flujo de Caja Libre<sup>7</sup>, ya que, por un lado no tiene en cuenta la carga financiera y, por otro, no incluye las amortizaciones de los activos que no han supuesto ninguna salida monetaria de tesorería. Además de las variables continuas anteriores, hemos utilizado cuatro variables dicotómicas: “Sector”, que establece la pertenencia al segmento biotecnológico (Sector=1) o farmacéutico (Sector=0); “Crisis”, que distingue entre transacciones realizadas después del año 2008 (Crisis=1) y antes del mismo (Crisis=0); “Cotiza”, empleándose (Cotiza=1) para compañías que cotizan en el mercado español y (Cotiza=0) para aquellas compañías, que no siendo cotizadas, han sido objeto de una compra-venta y se ha pagado un precio por ellas; por último, “Tamaño”, que define las empresas que presentan informe de auditoría y de gestión (Tamaño=0) y las que no (Tamaño=1); de este modo, según la normativa contable, Tamaño=1 corresponde a aquellas empresas que durante más de dos ejercicios consecutivos el importe de su activo ha sido inferior a 2,85 millones de euros, su cifra de ventas a 5,7 millones de euros y el número medio de empleados no ha superado los 50. El modelo quedaría como sigue:

$$EV = \alpha + b_1 * II_{RC} + b_2 * RA_{RC} + b_3 * BAAII + b_4 * Sector + b_5 * Crisis + b_6 * Cotiza + b_7 * Tamaño + \varepsilon \quad (5)$$

Se ha llevado a cabo el contraste para la muestra propuesta, 228 observaciones, a través de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) con los programas estadísticos SPSS y STATA. Para eliminar los problemas ocasionados por las diferencias de tamaño<sup>8</sup> que existen en la muestra no hay en la literatura previa un consenso de ideas. Easton y Sommers (2003) proponen como variable de ponderación más adecuada el inverso del cuadrado de la capitalización bursátil, lo que es imposible de aplicar para empresas no cotizadas. Otras variables utilizadas previamente, según describen Barth y Clinch (2009), son el número de acciones en circulación, el valor en

<sup>7</sup> El  $FCL$  representa los medios líquidos que genera una estructura económica o de activo ( $EV$ ) para remunerar a todos los oferentes de capital o pasivos, es la magnitud generalmente aceptada para su valoración. Partiendo del beneficio antes de intereses e impuestos ( $BAII$ ), y siendo  $Tg$  el tipo de gravamen del impuesto sobre sociedades, su fórmula analítica es:  $BAII * (1 - Tg) + \text{Amortizaciones} + \text{Necesidades de capital circulante} + \text{Necesidades de activos fijos}$ .

<sup>8</sup> Las diferencias de escala implican que las empresas de mayor tamaño cuentan con variables contables mucho más elevadas que las que cuentan con un tamaño inferior, por lo que los resultados de las regresiones podrían estar condicionadas por la submuestras de empresas grandes, que normalmente integra el menor de los casos; además ello origina problemas de heterocedasticidad en los residuos. Para solucionarlo existen dos posibilidades: deflactar las variables, si el efecto escala no es objeto de la investigación y se quieren conocer los resultados del modelo sin este efecto, u otra solución es introducir como variable independiente un subrogado de la escala y realizar las inferencias sobre la base de los errores estándar de White.

libros del patrimonio, las ventas, los activos totales y el precio de los títulos, rezagado un periodo. Sin embargo, Gu (2005) concluye que el control de estos efectos es imposible, porque para ello sería necesario conocer, *a priori*, tanto las relaciones libres del factor tamaño como la variabilidad de dicho factor de escala. Barth y Kallapur (1996) advierten que el hecho de deflactar las variables no siempre elimina la heterocedasticidad y puede provocar pérdidas en la eficiencia del modelo de hasta un 300%. De este modo, recomiendan introducir simplemente una variable subrogada a la escala, pero es posible que ello no elimine en su totalidad los problemas y, en nuestro caso, la ecuación (5) ya cuenta con este tipo de variables, como  $RA_{Rc}$ , y otras nuevas provocan problemas de colinearidad. Por todo ello, se ha procedido primero a la deflacción de los datos aplicando logaritmos neperianos y, en segundo lugar, como método de contraste, se han introducido mínimos cuadrados ponderados en función de la variable ventas; en ninguno de los casos se han detectado cambios significativos en el comportamiento de las variables, tal y como se indica en las Tablas 6 y 8. Posteriormente se ha utilizado el “test de White” (White 1980) para asegurar la eliminación de la heterocedasticidad en los residuos, arrojando homocedasticidad en los mismos.

Uno de los problemas de aplicar logaritmos es que éstos no existen para los valores negativos, lo que afecta a parámetros tales como el  $BAAII$ ; por ello, se ha procedido a su transformación, sumando a cada observación el valor negativo más alto, más uno; posteriormente se ha deseado para la correcta interpretación de los resultados.

De manera previa, se han analizado los posibles cambios estructurales en las rectas de regresión, por las diferentes características de las empresas expuestas en el epígrafe anterior a través del test de Chow (Gregory, 1960), cuyos resultados se recogen en las Tablas 4 y 5. Pese a las diferencias entre empresas cotizadas y no cotizadas, los resultados del test indican que solo existen cambios estructurales en las rectas de regresión en función de si tienen beneficios o no (p-valor inferior a 0,10).

Tabla 4. Test de Chow en función del  $BAAII$ .

CUADRO RESUMEN	TEST DE CHOW
$R^2_2$ CON CRUCES "EBITDA"	0,842
$R^2_1$	0,8
$F_{(7,213)}$	8,09
p-valor	0,00

Tabla 5. Test de Chow en función de “cotiza”.

CUADRO RESUMEN	TEST DE CHOW
$R^2_2$ CON CRUCES "COTIZA"	0,81
$R^2_1$	0,8
$F_{(7,216)}$	1,62
p-valor	0,13

Pese a ello, se ha aplicado el modelo a ambas clasificaciones y, efectivamente, no se han encontrado cambios estructurales en la ecuación 5, en función de que la empresa cotice o no. Sin embargo, en la Tabla 6, encontramos que para las empresas con beneficios antes de amortizaciones, intereses e impuestos positivos ( $EBITDA1$ ), todas las variables son

significativas menos “Crisis”, lo que parece lógico si se considera que es un sector poco correlacionado con el ciclo económico, en el que los precios dependen fundamentalmente de la capacidad innovadora de las empresas. La cantidad de información que explica el modelo es del 87%. Analizando los coeficientes, por término medio, si el activo intangible aumenta en un 1% un comprador estaría dispuesto a pagar un 0,16% más del valor de la empresa, mientras que pagaría un 0,21% más respecto al resto de activos tangibles y financieros reconocidos en balance. Ello podría indicar que para el inversor el activo tangible reconocido es un referente más fiable que el inmovilizado intangible, de modo que el valor que el comprador percibe del intangible no procede tanto de la contabilidad como de otros análisis sobre la capacidad generadora de beneficios futuros de los activos. Además, al analizar el coeficiente *BAAII*, se observa un efecto positivo sobre el precio pagado<sup>9</sup>. Se ha eliminado la transformación inicial realizada en la variable *BAAII* original, que llamaremos (*C*), a través del cálculo de la elasticidad de la función *EV* respecto a la misma<sup>10</sup>:

$$\varepsilon = \frac{b_3 * C}{C+T} = \frac{0,65 * 34,15}{34,15+45} = 0,28 \quad (6)$$

Si el *BAAII* aumenta un 1%, se pagaría un 0,28% más; esta variable arroja un coeficiente superior al del inmovilizado intangible y al del resto de activos, confirmándose la importancia de contar con estimadores sobre la capacidad de generación de beneficios de la estructura económica a valorar.

Es notable que para las empresas con *BAAII* negativo, Tabla 6, (*EBITDA0*), el inmovilizado intangible reconocido en los balances (*II<sub>RC</sub>*) no es significativo y, sin embargo, para activos tangibles y resto de activos el coeficiente desciende hasta 0,17%. Por su parte, el del *BAAII* es negativo, es decir, una vez realizada la transformación señalada en (6), si las pérdidas conocidas aumentasen un 1%, el precio pagado disminuiría un 0,03%. Consecuencia de lo expuesto, la parte no explicada por el modelo es mucho menor que en el caso anterior, obteniendo un *R*<sup>2</sup> del 67%.

Esta menor relevancia de las magnitudes contables se debe a que en las empresas farmacéuticas y biotecnológicas, el esfuerzo innovador supone un proceso largo, de entre 5 y 15 años, lo que las impide en sus primeros años de vida contar con beneficios positivos. Sin embargo, cuando el nuevo producto logra ser comercializado puede llegar a alcanzar cuotas de

<sup>9</sup> A lo largo del estudio se ha utilizado como contraste el método por pasos o “step-wises” del programa estadístico SPSS para comprobar la inexistencia de problemas de colinealidad, no siendo ninguna variable significativa eliminada. Por término medio, cada una de las variables que forman parte del modelo y son significativas tienen un *FIV*<2,5, lo que implica un *R*<sup>2</sup><0,60 y un índice de tolerancia superior a 0,40.

<sup>10</sup> Para eliminar del coeficiente el efecto de la transformación efectuada en la variable *BAAII*, con *C* la variable inicial y *T* la cantidad que se le ha sumado, siendo  $EV = \exp(\alpha + b_1 * II_{RC} + b_2 * RA_{RC} + b_3 * (C+T))$ , es necesario hallar la elasticidad de la función *EV* respecto de *C*. De este modo:  $\varepsilon = \frac{dEV}{dC} \times \frac{C}{EV} = \frac{b_3 * C}{C+T}$

mercado notables dado que las patentes en desarrollo les confieren exclusividad por un periodo medio de 20-25 años. Por ello, muchos inversores están dispuestos a pagar un precio importante sin que existan todavía beneficios; de este modo resulta frecuente en la industria el uso de modelos financieros que recogen, al margen de la información contable, el potencial de generación de rentabilidades futuras por parte de los distintos activos de naturaleza intangible que se están desarrollando, incorporando las llamadas “opciones de crecimiento”.<sup>11</sup>

Tabla 6. Análisis por mínimos cuadrados ordinarios. Muestra total y segmentada, sin ponderar y ponderada por ventas<sup>12</sup>.

	MUESTRA TOTAL	EBITDA 1	EBITDA 1 pond vtas	EBITDA 0	EBITDA 0 pond vtas
Constante	9,48***	1,451	0,79	12,12***	12,26***
	1,03	2,55	2,27	1,51	1,26
Inmovilizado intangible reconocido: $II_{Re}$	0,16***	0,16***	0,14***	0,07	0,08
	0,03	0,03	0,04	0,06	0,07
Resto activos reconocidos: $RA_{Re}$	0,24***	0,21***	0,25***	0,17***	0,10*
	0,04	0,04	0,06	0,06	0,061
Beneficio antes de amortizaciones, intereses e impuestos: $BAAII$	-0,07	0,65***	0,71***	-0,26**	-0,23***
	0,09	0,25	0,23	0,13	0,098
Sector	-0,80***	-0,59***	-0,50***	-0,10	0,33
	0,17	0,21	0,2	0,34	0,35
Crisis	0,26*	-0,08	-0,18	0,60*	0,37
	0,16	0,16	0,16	0,32	0,31
Cotiza	-1,23***	-0,60**	-0,57**	-1,59**	-1,69***
	0,27	0,28	0,27	0,65	0,6
Tamaño	-1,05***	-1,74***	-1,7***	-0,82**	-1,07***
	0,24	0,29	0,31	0,40	0,37
$R^2$	0,8	0,87	0,86	0,67	0,77
$N$	228	139	139	89	81

También resulta relevante, en la Tabla 6, la variable “Sector”, si la empresa pertenece al biotecnológico, el logaritmo del precio se reduciría en -0,50, lo que muy probablemente se deba a una menor madurez y tamaño respecto a la media de las compañías farmacéuticas, si bien la penalización desaparece para el tramo que tiene  $BAAII$  negativo. Por su parte, las empresas que por tener un menor tamaño no presentan cuentas detalladas sufren una corrección de -1,7 sobre el logaritmo del precio, para empresas con  $BAAII$  positivo y de -0,82, para el resto de empresas. El efecto de no presentar cuentas detalladas no se debe a la menor cantidad de información recogida en la memoria o a la inexistencia de un informe de gestión, pues lógicamente el comprador privado cuenta con mucha más información y no es el objetivo de este trabajo captar otros indicadores cualitativos; simplemente este efecto negativo se debe a que estas empresas tienen menores beneficios y en muchos casos una estructura de activo intangible reconocido

<sup>11</sup> En este sentido se puede consultar el trabajo de Rubio y Lamothe (2010), que aplica el método de opciones reales para la valoración de las grandes corporaciones farmacéuticas.

<sup>12</sup> \*\*\* implica una significatividad del 2% o inferior; \*\* significatividad entre el 2% y el 5%; \* significatividad entre el 5% y el 10%.

inferior, lo que claramente incide en el proceso explicativo de precios. Las empresas que no cotizan, por su parte, también sufren una corrección importante de -0,6 para empresas con *BAAII* positivo y, más pronunciada, de -1,59, para el resto, lo que pone de manifiesto, de nuevo, la importancia del tamaño, pero también de la liquidez, en relación a los valores pagados.

Para comprobar el impacto que ha supuesto la reforma contable introducida en España sobre el poder explicativo de las magnitudes contables de la ecuación (5) se ha creado una variable dicotómica “reforma contable” (*RC*): 1, implica cuentas sujetas a normativa internacional o Nuevo Plan General Contable y 0 cuentas elaboradas antes de la entrada en vigor de la nueva normativa, así como sus combinaciones lineales con  $II_{RC}$ ,  $RA_{RC}$  y *BAAII*; por su parte, el impacto de la convivencia de diferentes normativas, tal y como indicamos en la Figura 1, se ha introducido a través de la variable “consolida” (*C*): 1 para empresas que han presentado sus cuentas consolidadas y 0 para aquellas que han presentado sus cuentas individuales.

Para evitar problemas de colinealidad e identificar las magnitudes que son relevantes, frente a las que no lo son, hemos utilizado en SPSS el método “step-wises” o pasos sucesivos<sup>13</sup>. A través de los resultados de la Tabla 7 podemos apreciar que la reforma contable no ha tenido incidencia en el poder explicativo de las magnitudes sobre intangibles reconocidos, ni en las del beneficio: la variable reforma contable, *RC*, y sus combinaciones lineales con  $II_{RC}$ , y con *BAAII* han sido eliminadas del modelo, en el total de la muestra y para todas las segmentaciones llevadas a cabo. Solo parece haber incidido en la variable  $RA_{RC}$ , resto de activos reconocidos, mostrando su combinación lineal un incremento en el coeficiente de 0,10, tanto en la muestra en general como en el caso de empresas con *EBITDAI*, y de 0,26 para las empresas con *EBITDAO*.

Dado que las empresas cotizadas adaptaron sus cuentas anuales a la normativa internacional a partir de 2005 y la muestra llevada a cabo abarca el periodo 2005-2011, al introducir la variable *RC* todas las cotizadas cuentan con 1, por ello, para asegurar que el impacto de la nueva normativa no está recogiendo, en realidad, los efectos de la variable “Cotiza”, también se ha segmentado la muestra solo para empresas no cotizadas, comprobando que los resultados apenas varían y no hay cambios de significatividad. Por su parte, la variable consolida, *C*, tampoco es significativa para los casos señalados, por lo que el hecho de que las empresas se hallen sujetas a *NIIF* o a Nuevo Plan General de Contabilidad no incide en la capacidad explicativa de las variables contables del modelo propuesto.

Tabla 7. Análisis variable de control *RC* por mínimos cuadrados ordinarios. Muestra total y segmentada a través del método “step-wises”.

---

<sup>13</sup> Consiste en ir elaborando sucesivas ecuaciones de regresión en las que se va añadiendo cada vez un regresor más hasta que no haya más regresores que aporten nada sustantivo, que es cuando el procedimiento acaba. Hay que indicar, y aquí está lo destacable de este procedimiento, que en este proceso de elaboración del modelo definitivo, hay una continua reevaluación de los predictores incluidos, de forma que si algún regresor queda explicado por los restantes (en el sentido de que carece de contribución específica propia) queda eliminado.



	MUESTRA TOTAL	NO COTIZA	EBITDA 1	EBITDA 0
Constante	8,5***	8,37***	1,16	10,7***
	0,566	0,532	2,39	0,56
Activo Intangible reconocido: $II_{RC}$	0,149***	0,11***	0,15***	0,078
	0,03	0,045	0,04	Eliminado
Resto activos reconocidos: $RA_{RC}$	0,17***	0,14***	0,19***	-0,067
	0,04	0,06	0,06	Eliminado
Beneficio antes de amortizaciones, intereses e impuestos: $BAAII$	-0,027	0,059	0,65***	-0,042
	Eliminado	Eliminado	0,24	Eliminado
Sector	-0,76***	-0,67***	-0,61***	-0,01
	0,16	0,254	0,21	Eliminado
Crisis	-0,062	-0,024	-0,43*	-0,089
	Eliminado	Eliminado	0,38	Eliminado
Cotiza	-0,659**	No existe	-0,2	-1,38***
	0,31		Eliminado	0,56
Tamaño	-1,17***	-1,33***	-1,80***	-0,94***
	0,24	0,29	0,28	0,35
Consolida	0,089	0,008	0,032	0,24
	Eliminado	Eliminado	Eliminado	Eliminado
Ref Cont: $RC$	-0,071	-0,024	0	0,151
	Eliminado	Eliminado	Eliminado	Eliminado
$RC$ * Activo Intangible	-0,105	-0,125	0,032	0,044
	Eliminado	Eliminado	Eliminado	Eliminado
$RC$ * $BAAII$	-0,099	-0,032	-0,21	-0,102**
	Eliminado	Eliminado	Eliminado	0,04
$RC$ * Resto de Activos	0,10***	0,09***	0,10***	0,26***
	0,026	0,03	0,03	0,06
$R^2$	0,8	0,46	0,87	0,68
$N$	228	133	139	89

Por último, se ha analizado la relevancia del valor financiero de la estructura económica,  $EEV$ , en lugar del  $BAAII$ , pues ésta incorpora otros parámetros como la rentabilidad exigida por los oferentes de capital frente a la generación de liquidez de su activo. De este modo se ha calculado el valor de  $EEV$ , bajo la hipótesis de continuidad, a través de la actualización del flujo de caja libre ( $FCL$ ), al coste medio ponderado de capital,  $K_0$  o en terminología anglosajona  $WACC$  (Weighted Average Cost of Capital), suponiendo, bajo la premisa de empresa en funcionamiento, una tasa de crecimiento  $g$  igual a la inflación<sup>14</sup>. Todo ello implicaría que la capacidad actual de la estructura económica de generar liquidez sirve para determinar el valor de la empresa; es decir, no existen opciones de crecimiento, lo que, como ya hemos indicado anteriormente, es poco habitual en estas industrias y supone un problema en los procesos valorativos; de ahí la importancia de su análisis.<sup>15</sup>

$$EEV = FCL / (K_0 - g) \quad (7)$$

<sup>14</sup> El parámetro  $g$  equivale a la inflación media prevista para la zona euro del 2%.

<sup>15</sup> Para un mayor detalle, se puede consultar Gordon (1962), así como diferentes aplicaciones del modelo en Damodaran (2006).

A su vez, el cálculo de  $K_0$  se ha obtenido a partir de la siguiente fórmula:

$$K_0 = K_e * P / EV + K_i(1-t) * D / EV \quad (8)$$

El coste de los recursos propios ( $K_0$ ) se ha determinado a través de los argumentos del “Capital Asset Pricing model” (CAPM) de Sharpe (1970); se ha utilizado la beta media desapalancada de cada uno de los sectores, farmacéutico y biotecnológico, y posteriormente se ha apalancado por la estructura financiera de cada empresa; para calcular el coste de los recursos ajenos ( $K_i$ ) se ha procedido a dividir el gasto financiero anual entre el saldo del pasivo financiero, tanto a largo como a corto plazo.  $P$  supone el valor de mercado de los fondos propios de la compañía y  $D$  el valor de las deudas financieras. Finalmente se ha considerado que las empresas con  $FCL$  negativo no tienen capacidad de generar riqueza y por lo tanto no se puede determinar su valor financiero a partir de (7), por lo que para estos casos se ha tomado un valor de cero, como el logaritmo neperiano de cero no existe, estas empresas carecen de  $EEV$ . Sustituyendo en la ecuación (5) el  $BAAII$  por  $EEV$ :

$$EV = \alpha + b_1 * II_{RC} + b_2 * RA_{RC} + b_3 * EEV + b_4 * Sector + b_5 * Crisis + b_6 * Cotiza + b_7 * Tamaño + \varepsilon \quad (9)$$

Desde la anterior regresión, se han obtenido los coeficientes que aparecen en la Tabla 8, en la que se observa, tras la introducción de  $EEV$ , para empresas que cuentan con un  $BAAII$  positivo, un coeficiente del inmovilizado intangible significativo; de manera que por cada 1% que aumenta el inmovilizado intangible, el precio lo hace en un 0,12%, frente al 0,20% respecto al inmovilizado tangible y el 0,23% consecuencia de  $EEV$ . De nuevo comprobamos que el parámetro que incorpora la capacidad generadora de riqueza tiene mayor representatividad que el resto. Es importante añadir que en la Tabla 8, en transacciones privadas de empresas que no cumplen la condición de tener un  $BAAII$  positivo ( $EBITDA0$ ), el valor de los intangibles reconocidos, de nuevo, carece de significatividad, al igual que  $EEV$ . Todo ello incide en la importancia que tiene acompañar los estados contables de otras variables que muestren la capacidad de generar valor por parte de los activos que posee la empresa.

También se observa en la Tabla 8 que vuelven a ser significativos los factores tamaño y cotiza, y que existe una penalización en el logaritmo del precio si la empresa no presenta cuentas detalladas o no cotiza. La capacidad explicativa del modelo es, para las empresas con  $BAAII$  positivo del 88%, mientras que para las que cuentan con  $BAAII$  negativo, tan solo del 63%. Los datos son muy parecido a los arrojados en la Tabla 6, por tanto, no se hallan diferencias aparentes entre el poder explicativo del  $BAAII$  y de  $EEV$ .

La importancia de esta parte del análisis radica, sin embargo, en la incidencia que tiene en el modelo la relación rentabilidad-riesgo. En primer lugar se ha calculado la rentabilidad económica ( $RE$ ), como el cociente entre el beneficio antes de intereses y después de impuestos y el valor pagado por la estructura económica ( $EV$ ) y, en segundo lugar, este ratio se ha

comparado con el coste medio ponderado de la estructura financiera (*WACC*); a la diferencia entre ambas magnitudes se la conoce en la literatura como *EVA*<sup>16</sup>.

Los resultados de la Tabla 8 demuestran que aquellas empresas que cuentan con este diferencial positivo, es decir, aquellas que generaban valor para sus accionistas en el momento de la transacción, cuentan con una mayor capacidad explicativa en el proceso de generación de precios, presentando un  $R^2$  de 0,96 frente a aquellas que, pese a tener un *BAAII* positivo, cuentan con un diferencial negativo, cuyo  $R^2$  es ligeramente inferior, de 0,88.

Tabla 8. Análisis por mínimos cuadrados ordinarios. Muestra total y segmentada, sin ponderar y ponderada por ventas. Variable *EEV*.

	MUESTRA TOTAL	MUESTRA TOTAL pond ventas	EBITDA 1	EBITDA 0	RE<=WACC	RE>WACC
Constante	8,8*** 0,58	8,40*** 0,57	6,63*** 0,68	10,19*** 1,11	6,5*** 0,71	2,06* 1,90
Inmovilizado intangible reconocido: $II_{Re}$	0,15*** 0,03	0,17*** 0,03	0,12*** 0,03	0,04 0,07	0,11 *** 0,04	0,05 0,06
Resto activos reconocidos: $RA_{Re}$	0,24*** 0,04	0,25*** 0,04	0,2*** 0,05	0,16*** 0,06	0,27*** 0,05	0,08 0,11
Estructura Económica <i>EEV</i>	0,01 0,02	0,01 0,02	0,23*** 0,05	0,02 0,04	0,25*** 0,06	0,72*** 0,2
Sector	-0,75*** 0,18	-0,66*** 0,16	-0,65*** 0,18	-0,02 0,04	-0,72*** 0,19	-0,83** 0,43
Crisis	0,26* 0,16	0,1 0,14	0,05 0,15	0,45 0,31	0,10 0,17	0,25 0,23
Cotiza	-1,24*** 0,27	-1,06*** 0,25	-0,80*** 0,26	-2,17*** 0,60	-0,51* 0,3	-1,03** 0,39
Tamaño	-1,08*** 0,24	-1,13*** 0,24	-1,23*** 0,27	-0,86** 0,4	-1,43*** 0,32	-0,18 0,36
$R^2$	0,79	0,812	0,88	0,63	0,88	0,96
<i>N</i>	228	220	139	89	107	32

En las empresas con un *EVA* positivo, además se pone de manifiesto la gran importancia en el proceso generador de precios del valor de su estructura económica, *EEV*, determinada a partir del flujo de caja libre empresarial, frente al resto de magnitudes contables, las cuales resultan irrelevantes, porque concretamente arroja un coeficiente de 0,72, lo que implica que los precios se explican casi en su totalidad a través de esta magnitud.

Siguiendo el trabajo de Iñiguez y López (2005), el valor de los activos pagados y no explicados por la contabilidad o, al menos, por los parámetros contables utilizados, se puede aproximar a partir del término constante de la ecuación (8),  $\alpha$ ; para comprobar su peso sobre

<sup>16</sup> *EVA* (Economic Value Added) es un índice financiero que fue acuñado por la firma Stern&Stewart; para mayor profundidad consultar Stern y Shiely (2005). Se define como el valor en exceso que un negocio aporta después de restar del resultado que genera el coste que supone financiar los activos que están afectos a dicho negocio.

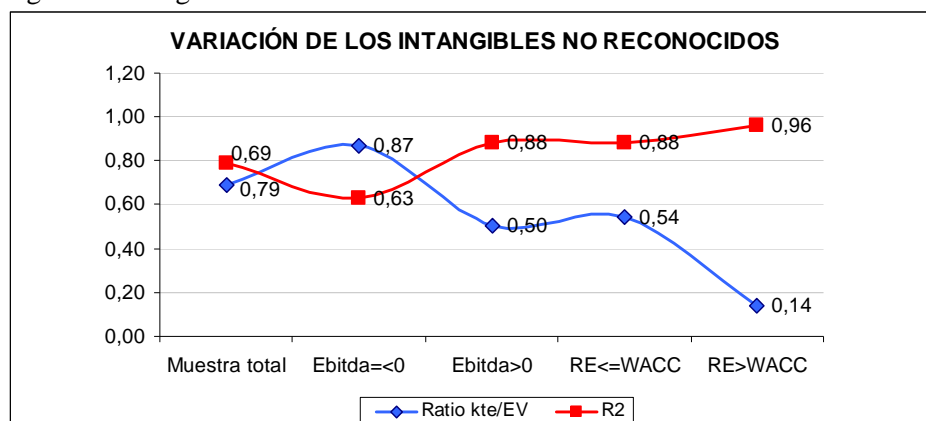
los valores pagados, basta con dividir el mismo entre el valor de la estructura económica pagada *EV*. Para ello, se han tomado los estadísticos del logaritmo de estos valores en los diferentes segmentos, tal y como se muestra en la Tabla 9. En el modelo sin dividir, el término constante es de 8,8, lo que indica que la parte no explicada a través de los parámetros contables es del 79%; sin embargo, para empresas que tienen pérdidas (*EBITDA0*), el término constante se hace máximo, 10,2, por lo que el cociente propuesto asciende al 87%. Por el contrario, desciende hasta el 54%, en empresas con beneficios (*EBITDA1*) y *EVA*<0 y finalmente se hace mínimo para las que, además, cuentan con un *EVA*>0; en este último caso, el precio medio pagado es ligeramente superior, 15,15, y el término constante desciende hasta 2,06, lo que representa tan solo un 14% de activos no reconocidos.

Tabla 9. Evolución a lo largo de la muestra del ratio *kte/EV*.

	Muestra total	Ebitda 0	Ebitda 1	RE<=WACC EVA=<0	RE>WACC EVA>0
EV	12,78	11,7	13,11	12,5	15,15
Kte	8,8	10,2	6,6	6,8	2,06
Ratio kte/EV	0,69	0,87	0,50	0,54	0,14
R <sup>2</sup>	0,79	0,63	0,88	0,88	0,96

Pese a las grandes diferencias mostradas en la Tabla 9, lo expuesto lleva a concluir, de nuevo, que para determinados segmentos de la muestra, una parte muy importante de los precios pagados por los activos de estas compañías no deriva de los parámetros emanados de la contabilidad sin más, sino de un análisis paralelo que realiza el inversor sobre la futura generación de beneficios proveniente del proceso innovador (también llamadas opciones de crecimiento), que poco o nada tienen que ver con los niveles actuales. Como finalmente se aprecia en la Figura 4, sólo las empresas que contaban con una generación de riqueza para sus accionistas (*EVA*>0) en el momento de su compra-venta arrojan niveles de explicación de sus precios altos y niveles de activos no reconocidos en el modelo propuesto aceptablemente bajos.

Figura 4. Intangibles no reconocidos.



Fuente: elaboración propia.

## 5. CONCLUSIONES

Tras el análisis realizado, queda patente la incapacidad del intangible reconocido para plasmar su generación futura de valor a lo largo de toda la muestra. No obstante, se encuentra una gran heterogeneidad en los diferentes segmentos analizados, tanto en la taxonomía de los modelos propuestos en las ecuaciones (5) y (9), como en su grado de explicación a través del  $R^2$ . De hecho, en las Tablas (6) y (8), se puede comprobar como la relevancia de las partidas contables (intangibles,  $II_{Rc}$ , resto de activos,  $RA_{Rc}$ ,  $BAAII$  y estructura económica  $EEV$ ) se hace máxima en aquellas empresas que tienen beneficios y mínima para las que no cuentan con ellos. Concretamente, se observa, para todo el segmento  $EBITDAI$ , que las magnitudes asociadas a la capacidad de generar valor, tanto la calculada a partir del beneficio,  $BAAII$ , como del flujo de caja,  $EEV$ , mantienen un coeficiente superior al resto de variables, y pese a que la partida de intangibles,  $II_{Rc}$ , guarda una relación positiva con los precios, su coeficiente también es inferior al de otros activos,  $RA_{Rc}$ . Ello está en consonancia con otros trabajos como el de Larrán y Sotomayor (2005), o el de Choi, Kwon y Lobo (2000), aunque no es así con el de Iñiguez y López (2005), en el que el coeficiente de los intangibles es superior al del resto de activos, pero inferior respecto al del beneficio. Por su parte, para las empresas que cuentan con un  $EVA$  positivo,  $EEV$  supone el auténtico motor en la determinación del precio frente al resto de partidas del balance, incluyendo la de los intangibles. Sin embargo, en empresas que tienen pérdidas, tanto las variables asociadas la utilidad actual:  $BAAII$  y  $EEV$ , como el valor intangible carecen de significatividad. Las diferencias encontradas en estos segmentos podrían guardar relación, según indican otros estudios, como los de Aboody y Lev (1998), Tutticci *et al.* (2007) y Oswald y Zarowin (2007) y, más recientemente, el de Oswald (2008), con que las empresas prefieren activar gastos en las primeras etapas de generación de ingresos, eso sí una vez conquistada la fase de beneficios, que en otras de mayor rentabilidad y madurez.

La reforma contable, por su parte, no ha implicado una mejora en la relevancia de los activos intangibles respecto al proceso de generación de precios, aunque en la Tabla 7 sí se encuentra, tras su entrada en vigor, un incremento en el coeficiente de la partida resto de activos,  $RA_{Rc}$ , tanto para empresas con beneficios como para las que tienen pérdidas, no habiendo cambios en función de que la empresa cotice o no; así mismo, tampoco encontramos diferencias por el hecho de que las empresas se hallen sometidas a diferente normativa: *NIIF* o *PGC* (2007). En este sentido, trabajos anteriores como Ahmed y Falk (2006), para el caso australiano, tampoco hallan mejoras en la relevancia de la información sobre intangibles tras la adopción de la NIC 38.

Respecto a la capacidad explicativa del modelo,  $R^2$ , en función de la Tabla 9, para las empresas con pérdidas ( $EBITDA 0$ ) es del 63%, mientras que para las empresas que cuentan con beneficios el grado de explicación asciende al 88% y, finalmente, para las que además cuentan con un  $EVA$  superior a cero, el mismo llega al 96%. Pese a que estos resultados representan

porcentajes elevados, en realidad existe una parte importante del precio sin explicar. Ello se comprueba, en primer lugar, en el estudio de la  $Q$  aproximada, Tabla 3, que arroja un importe, si se trata de empresas cotizadas, del 67%, y en las no cotizadas del 66%. En segundo lugar, a partir de la ecuación (9), encontramos una cifra parecida: 69%. Estos valores resultan superiores a los hallados en otros trabajos anteriores como Iñiguez y López (2005), que ya habían concluido la existencia de una parte sin reconocer, entorno al 50% para el periodo (1991-1999) en las empresas cotizadas españolas, si bien, en consonancia con este mismo estudio y los de Francis y Schipper (1999) o Core, Guay y Van Buskirk (2003), parece lógico que del presente se derive un mayor importe, al ser un sector más intensivo que otros en el desarrollo y uso de intangibles. Este porcentaje se hace máximo, 87%, en el caso de empresas sin beneficios, sin embargo, desciende hasta el 50% para empresas que sí cuentan con ellos y sólo hay un 14% de activos sin reconocer en los precios de aquellas empresas que además tienen un *EVA* positivo.

El mayor problema a la hora de determinar el precio, a partir de la información financiera tratada, se halla en las compañías que tienen pérdidas, estas empresas representan el 42% para las no cotizadas y el 20% en caso de cotizadas, en ellas tanto las variables asociadas a rentabilidades actuales, como el valor intangible reconocido carecen de significatividad, el término independiente del modelo,  $\alpha$ , se hace máximo y la capacidad explicativa sobre el proceso de generación de precios mínimo.

Lo descrito en los párrafos anteriores es el resultado de la normativa vigente que solo permite activar de manera discrecional y restrictiva el gasto de investigación y desarrollo, tan solo por su coste y nunca por su valor razonable, dada la inexistencia de un mercado activo, tal y como se ha descrito en el epígrafe 2. Los resultados obtenidos nos conducen a plantear, para las industrias intensivas en intangibles, como la farmacéutica y la biotecnológica, que todas las empresas, con independencia de su tamaño u otras característica, aporten información adicional sobre su capacidad de generar utilidades y beneficios futuros, es decir sobre las opciones de crecimiento provenientes de su actividad investigadora y de desarrollo de nuevos productos. Ello se podría hacer a través de un informe de capital intelectual, que se aporte al registro mercantil junto con las cuentas anuales; este informe debería contener no solo información detallada de la naturaleza, costes y precios de los activos intangibles que posee o se encuentran en fase de desarrollo, así como la política de activación llevada cabo, como indica hoy la normativa, si no también una estimación de la generación futura de rentabilidades y del riesgo que la misma incorpora, para finalmente, determinar su valor razonable. Estas magnitudes se podrían calcular a través de los mismos métodos de valoración que se usan para la determinación del precio de los activos intangibles en combinaciones de negocios. Asociaciones como la *American Institute of CPAs*, que aglutina al mayor número de profesionales de la contabilidad y la auditoría a nivel mundial, han publicado recomendaciones y guías básicas con esta finalidad, véase AICPA (2011), que son generalmente aceptadas por las grandes

consultoras y resto de comunidad financiera. No obstante, pese a los esfuerzos realizados, el desarrollo de nuevos modelos para valorar los diferentes activos intangibles sigue siendo un reto para la ciencia económica y representa una futura línea de investigación para los autores.

Pese a la dificultad que supone realizar un cambio normativo en el Plan General Contable Español o en la Norma Internacional, la incorporación de estos modelos y técnicas financieras en los informes de las empresas facilitaría enormemente la determinación de su valor y, finalmente, aumentaría la información disponible para analistas, inversores y demás receptores, evitando el hermetismo y la opacidad, casi absolutos, que imperan hoy en los sectores analizados.

## **AGRADECIMIENTOS**

Este artículo, junto a otros, ha sido el resultado de un proyecto de investigación auspiciado por la Comunidad de Madrid: “Valoración económica y financiación de las empresas innovadoras de la Comunidad de Madrid, el caso de la industria farmacéutica”. Así mismo, los autores agradecen el asesoramiento prestado a los profesores de la Universidad Complutense de Madrid: Conrado Miguel Manuel García, Catedrático del Departamento de Estadística e Investigación Operativa III y Javier Velázquez Angona, Profesor Titular del Departamento de Economía Aplicada II, así como la colaboración de las alumnas, becarias del proyecto, Almudena del Pozo Sánchez y Gelareh Haghightpour.

## **REFERENCIAS**

- ABOODY, D. y LEV, B. (1998): “The Value Relevance of Intangibles: The Case of Software Capitalization”. *Journal of Accounting Research*, 36, pp. 161–191.
- ABOODY, D. y LEV, B. (2001): *R&D Productivity in the Chemical Industry*, New York (disponible en [www.baruch-lev.com](http://www.baruch-lev.com)).
- AHMED, K. y FALK, H. (2006): “The value relevance of management's research and development reporting choice: evidence from Australia”. *Journal of Accounting and Public Policy*, 25 (3), pp. 231–264.
- AICPA (2011): *Assets acquired to be used in research and development activities*, American Institute of Certified Public Accountants, New York, USA.
- AMIR, E. y LEV, B. (1996): “Value-relevance of nonfinancial information: the wireless communications industry”, *Journal of Accounting and Economics*, 22, pp. 3–30.
- BARTH, M.E y CLINCH, G. (2009): “Scale Effects in Capital Markets-Based Accounting Research”. *Journal of Business Finance & Accounting*, 36(3) & (4), pp. 253–288.
- BARTH, M.E. y KALLAPUR, S. (1996): “The effects of Cross-Sectional Scale Differences on Regressions Results in Empirical Accounting Research”. *Contemporary Accounting Research*, Vol. 13, pp. 527–567.

- BROWN, S., LO, K. y LYS, T. (1999): "Use of R2 in accounting research: Measuring changes in value relevance over the last four decades". *Journal of Accounting and Economics*, 28, pp. 83–115.
- COLLINS, D.W., MAYDEW, E.L. y WEISS, I.S. (1997): "Changes in the value-relevance of earnings and book values over the past forty years". *Journal of Accounting and Economics*, 24, pp. 39–67.
- CORE, J., GUAY, W. y VAN BUSKIRK, A. (2003): "Market valuations in the New Economy: An investigation of what has changed". *Journal of Accounting and Economics*, 34, pp. 43–67.
- CHOIW, W.; KWONS, S. y LOBOG, J. (2000): "Market valuation of Intangible Assets", *Journal of Business Research*, 49, pp. 35–45.
- CHOW, G.C. (1960): "Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions", *Econometrica*, N° 28 (3), pp. 591–605.
- CHUNG, K. y PRUIT, S. (1994): "A simple approximation of Tobin's q", *Financial Management*, Vol. 23, N° 3, Autumn, pp. 70–74.
- DAMODARAN, A. (2006): *Damodaran on valuation: security analysis for investment and corporate finance*, 2ª ed., John Wiley & Sons, New Jersey, USA.
- DAMODARAN ONLINE: *Updated data. Europe 2011*. Disponible en: [www.damodaran.com](http://www.damodaran.com).
- DANTOH, A., RADHAKRISHNAN, S. y RONEN, J. (2004): "The declining value-relevance of accounting information and non-information-based trading: An empirical analysis". *Contemporary Accounting Research*, 21 (4), pp. 795–812.
- EASTON, P. y SOMMERS, G. (2003): "Scale and the Scale Effect in Market-based Accounting Research". *Journal of Business, Finance & Accounting*, Vol. 30, pp. 25–56.
- FRANCIS, J. y SCHIPPER, K. (1999): "Have financial statements lost their relevance?". *Journal of Accounting Research*, 37 (2), pp. 319–352.
- GLEASON, K. y KLOCK, M. (2006): "Intangible capital in the pharmaceutical and chemical industry", *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 46, pp. 300–314.
- GORDON, M. (1962): *The Investment, Financing and Valuation of the Corporation*, Irwin&Co, Illinois, USA.
- GU, Z. (2005): "Scale Factor, R2, the Choice of Levels versus Returns Models", *Journal of Accounting, Auditing, & Finance*, Vol. 20, Issue 1 (Winter), pp. 71–91.
- GUTIÉRREZ DE MESA VÁZQUEZ, E. y RUBIO MARTÍN, G. (2006): "La valoración de los activos intangibles en la empresa biofarmacéutica: Una reflexión crítica sobre la aplicación de las NIIF". *Partida Doble* (178), pp. 18–30.
- ÍÑIGUEZ, R. y LOPEZ, G. (2005): "Valoración de los activos intangibles en el mercado de capitales español", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, Vol. XXXIV, N° 125, abril-junio, pp. 459–499.
- LARRÁN, J.M., y SOTOMAYOR, S. (2005): "Valoración y reconocimiento de activos intangibles". *Revista Internacional Legis de Contabilidad y Auditoría*, 21, enero-marzo, pp. 83–128.



- LEV, B. (1989): “On the Usefulness of Earnings and Earnings research: Lessons and directions from Two Decades of Empirical Research”. *Journal of accounting research*, Vol. 27, pp. 153–193.
- LEV, B. (2000): *Knowledge and Shareholder Value: Working Paper*, Stern School of Business, New York University, New York, USA.
- LEV, B. (2005): “Intangible Assets: Concepts and Measurements”, *Encyclopedia of Social Measurement*, Vol. 2, pp. 299–305.
- LEV, B. y ZAROEIN, P. (1999): “The boundaries of financial reporting and how to extend them”. *Journal of Accounting Research*, 37 (2), pp. 353–385.
- LIANG, C.J. y YAO, M.L. (2005): “The value-relevance of financial and nonfinancial information—Evidence from Taiwan’s information electronics industry”. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 24, pp. 135–175.
- MALKIEL, B.G. (2008): *Un paseo aleatorio por Wall Street*, 9ª ed., Alianza Editorial, Madrid.
- NIIF 3, 13, NIC 36 y 38, International Accounting Standards Board (IASB). [www.ifrs.org](http://www.ifrs.org).
- OHLSON, J. (1995): “Earnings, book values and dividends in equity valuation”, *Contemporary Accounting Research*, Vol. 11, N° 2, Spring, pp. 661–687.
- OSWALD, D.R. (2008): “The determinants and value relevance of the choice of accounting for research and development expenditures in the United Kingdom”, *Journal of Business Finance & Accounting*, 35 (1) & (2), January-March, pp. 1–24.
- OSWALD, D.R. y ZAROWIN, P. (2007): “Capitalization of R&D and the Informativeness of Stock Prices”. *European Accounting Review*, 16, pp. 703–726.
- PRICE WATER HOUSE COOPERS (2006): *A review of the implementation of IFRS in the pharmaceuticals industry*, Price Water House Coopers, Madrid.
- RUBIO, G. y LAMOTHE, P. (2010): “Valoración de las grandes corporaciones farmacéuticas, a través del análisis de sus principales intangibles, con el método de opciones reales”, *Revista de Economía Financiera*, pp. 47–74.
- RUBIO, G., SOUSA, S. y MAROTO, J.A. (2012): “El valor razonable de la innovación en los estados financieros de las empresas farmacéuticas y biotecnológicas: la necesidad de elaborar un informe de capital intelectual”. *Revista Contable*, N° 5.
- SHARPE, W. (1970): *Portfolio Theory and Capital Market*. McGraw Hill, USA.
- SHILLER, R. (2001): *Irrational exuberance*, Broadway Books, USA.
- STERN, J.M., y SHIELY J. (2005): *El reto del EVA*. 1ª edición, Editorial 2000, Barcelona.
- TOBIN, J. (1969): “A general equilibrium approach to monetary theory, Q- de Tobin”. *Journal of Money, Credit & Banking*, Vol. 1, pp.15–29.
- TUTTICCI, I., KRISHMAN, G. y PERCY, M. (2007): “The role of external monitoring in firm valuation: The case of R&D capitalization”. *Journal of International Accounting Research*, 62, pp. 83–107.
- WHITE, H. (1980): “A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity”. *Econometrica*, Vol. May, pp. 817–838.
- ZÉGHAL, D. y MAALOUL, A. (2011): “The accounting treatment of intangibles—A critical review of the literature”. *Accounting Forum* Vol. 35, No. 4, pp. 262–274.

## **ANEXO 1. EMPRESAS OBJETO DE TRANSACCIÓN EN 2005-2011**

2B BLACKBIO S.L.; 3P Biopharmaceuticals S.L.; AB BIOTICS PRODUCCIONES INDUSTRIALES DE MICROBIOTAS S.L.; AB Biotics S.A.; ABBOTT HEALTHCARE S.A.; Activery Biotech S.L.; Advancell Advanced in Vitro Cell Technologies S.A.; Alentia Biotech S.L.; Aleria Biodevices S.L.; Almirall S.A.; Altana AG; AM Pharma BV; Amerihealth Plasma LLC; Análisis Clínicos Jose Luis Vallejo + Sanilab + Análisis Clínicos; Análisis Clínicos Jose Luis Vallejo S.L.; Análisis Clínicos Sabater S.A.; Angelini Farmaceutica S.A.; Antonio Puig S.A.; Apotex España S.L.; Applied Containment Engineering; Archivel Farma S.L.; Arrahona Optimus S.L.; AZUREBIO S.L.; Bertex Pharma GmbH; Binding Site Ltd's auto-immune división; Biobide S.L.; Biocontrol Technologies S.L.; Biocross S.L.; Bioglan AB; Bioglane SLNE; Biomaslinic S.L.; Biomedal S.L.; Bionaturis; Bionostra S.L.; Biosaude Productos Os LDA; BIOSEARCH S.A.; Biotica Bioquímica Analítica S.L.; Biotoools Biotechnological & Medical Laboratories S.A.; BioVex; Braes Group; Brainco Biopharma S.L.; Cakefriends A.G.; Cantabria Pharma S.L.; Cardio3 BioSciences S.A.; CARDOZ AB; Cederroth Distrex S.A.; Cellerix S.A.; CELVITAE BIOMÉDICA S.A.; Centre Immunologic de Catalunya S.A.; Inova Diagnostics Inc.; Cepro; Clave Suan Desarrollo; Clonbiotech; COMPASS RESEARCH S.L.; Copyr S.p.a; Crystax Pharmaceuticals S.L.; Cyndea Pharma S.L.; Cytognos S.L.; Deltalab S.L.; DERETIL S.A.; Dermofarm S.A.; DIFUSION IDESA S.L.; Digna Biotech S.L.; DUPHAR NEZEL S.L.; Dyadic International; Elfar S.A.; Endosense S.A.; Era Biotech S.A.; Española de I+D S.A.; EUROESPES S.A.; EUROSERV GRUPO S.A.; Exxentia Grupo Fitoterapéutico S.A.; F5 Profas S.L.; Faes Farma S.A.; FARMAPLACE S.L.; FASYMON 2005 CTA S.L.; Gadea Pharmaceutical Group S.L.; General Lab Portugal S.A.; Genetrix S.L.; Genmedica Therapeutics S.L.; Gerresheimer Zaragoza S.A.; Grifols S.A.; Grupo Noraybio S.L.; Halotech DNA S.L.; Hermal Kurt Herrmann GmbH; Histocell S.L.; Icart S.A.; Idifarma Desarrollo Farmaceutico S.L.; Ikerchem S.L.; INFINITEC ACTIVOS S.L.; Ingaso Farm S.L.; Inke S.A.; Innovate Media Technologies Limited; Institut Univ de Ciencia i Tecnologia S.A.; Instituto Biomar S.A.; Instituto Farmacológico Español S.L.; Integromics S.L.; Ipsen Pharma S.A.; Keramat S.L.; Kingfood Australia PTY Limited; Laboratoires Dermatologiques d'Uriage; Laboratoires Forté Pharma S.A.M.; Laboratorio Analítico Bioclínico S.L.; Laboratorios Abad S.L.; LABORATORIOS ALCOTAN S.A.; Laboratorios Almirall SA's 13; Laboratorios Belmac S.A.; Laboratorios Combix S.L.; Laboratorios Diviser Aquilea S.L.; Laboratorios Gelos S.L.; Laboratorios Indas; Laboratorios Inibsa S.A.; Laboratorios Lesvi S.L.; Laboratorios Novo Pharma S.L.; Laboratorios Ojer Pharma S.L.; Laboratorios Rovi S.A.; Laboratoris Vidal S.L.; Lactest S.L.; Litoplex S.A.; Lonza Group A.G.; LUGA SUMINISTROS MÉDICOS S.L.; Luwa B.V.; MDRenal Life Sciences; Mellitus S.L.; Melora Derm; Merck Sharp & Dohme de España S.A.; Microbial; Nanobiomatters S.L.; Nanoscale Biomagnetics S.L.; Natra S.A.; Natraceutical S.A.; Naturex; Neocodex S.L.; Nesplora Neurosciences Support S.L.; Neuron Biopharma S.A.; Neurotec Pharma S.L.; Noscira S.A.; Novel Pharma S.L.; Nutra Omega Biotecnológica Oleica S.L.; Nutraceutical International Corp.; Omnia Molecular S.L.; One Way Liver Genomics S.L.; Orphamed; Oryzon Genomics S.A.; OTC Ibérica S.A.; Oximeplus S.A.; Palau Farma S.A.; Pfizer; Pharmagenus S.A.; Pharmout - Farmacéutica Internacional; Plasma Collection Centers; Plasmacare; Prarfarma Oncológicos S.L.; Principia Technology Group S.L.; Procter & Gamble Pharmaceuticals Iberia S.L.; PRORETINA THERAPEUTICS S.L.; Puleva Biotech S.A.; BAYER SL (EXTINGUIDA); SABIRMEDICAL S.L.; Sagetis Biotech; Sakai Laboratorios S.A.; Salupharma Biosimilares; Sampletest Spain S.L.; Sanilab S.A.; Sanofi Pasteur MSD; Savia Biotech S.A.; Sensia S.L.; Sepmag Technologies S.L.; Shire PLC; Sistemas Genómicos S.L.; Solvay Pharma S.A.; Stat Diagnostica & Innovation S.L.; Suanfarma Biotech; SuanFarma Biotech S.G.E.C.R S.A.; Sylentis S.A.; TCD Pharma; Thrombotargets Europe S.L.; TRANSPORTES FARMACÉUTICOS S.A.; Traslational Cancer Drugs Pharma S.L.; Uso Racional S.L.; Vacunek S.L.; Valentia Biopharma; Vifor Uriach Pharma S.L.; Vitafarma S.L.; Vivotecnia Research; Zeltia S.A.



## Comparación de los modelos formativo, reflexivo y de antecedentes de evaluación estudiantil del servicio de docencia

VALDIVIESO TABORGA, CARLOS EDUARDO

Departamento de Ciencias Exactas

Universidad Privada Boliviana, UPB (Bolivia)

Correo electrónico: [cvaldivieso@upb.edu](mailto:cvaldivieso@upb.edu)

### RESUMEN

Se ha llevado a cabo un análisis comparativo entre un modelo con enfoque de medición formativo, otro reflexivo y un tercero de antecedentes, de las dimensiones de la calidad de servicio de docencia.

Previamente se diseñaron instrumentos válidos y fiables para la medición de la calidad de servicio y sus constructos relacionados, a través de un estudio exploratorio para obtener validez de contenido. Además, se llevaron a cabo un análisis factorial exploratorio (AFE) y otro confirmatorio (AFC), para obtener la estructura dimensional adecuada e ítems relevantes.

Usando modelos de estructuras de covarianza (MEC) se comprobó que el modelo de antecedentes, aunque presenta igual poder predictivo, tiene mejores índices de ajuste que los modelos reflexivo y formativo.

**Palabras clave:** calidad de servicio de docencia; valor percibido; satisfacción estudiantil; intenciones de comportamiento; modelos estructurales; enfoque formativo y reflexivo.

**Clasificación JEL:** M390; I230.

**MSC2010:** 62H25; 90B60.

# Comparison of Formative, Reflective, and Antecedents Models of Students Evaluation of Teaching Service

## ABSTRACT

A comparative analysis between three measurement models (with formative, reflective, and antecedents approach) has been conducted to measure the dimensions of the teaching service quality.

Previously valid and reliable instruments have been designed to measure the service quality and related constructs. An exploratory study has been performed to obtain content validity. Additionally, both exploratory and confirmatory factor analysis (EFA and CFA, respectively) have been conducted to obtain the appropriate dimensional structure and relevant items.

Using structural equations modeling (MEC) has been found that the antecedent model, although it has the same predictive power, has better fit indices than reflective and formative models.

**Keywords:** teaching service quality; perceived value; student satisfaction; behavioral intentions; structural models; formative and reflective approach.

**JEL classification:** M390; I230.

**MSC2010:** 62H25; 90B60.



## 1. INTRODUCCIÓN

En Economía y Empresa, es vital el uso de indicadores multidimensionales para evaluar fenómenos más o menos subjetivos; donde no existe un consenso es en qué tipo de indicadores utilizar. Domínguez *et al.* (2011) proporcionan un resumen de las diferentes formas de calcular indicadores sintéticos, con sus principales ventajas e inconvenientes; Fedriani y Martín (2011) proponen un conjunto de indicadores multidimensionales no necesariamente sintéticos y aplicables a las Ciencias Sociales, ejemplificados en la evaluación de la pobreza; Poza y Fernández (2011) también miden la pobreza desde la vertiente multidimensional, pero utilizando ecuaciones estructurales.

Algunos investigadores (e.g. Diamantopoulos, 2008 y Wilcox *et al.*, 2008) sostienen que la generalidad de los estudios en el campo del *management* se ha fundamentado en planteamientos que asumen la dirección de causalidad desde el constructo hacia sus medidas (indicadores reflexivos); señalando que este error puede dar lugar a problemas de una especificación inadecuada de los modelos y tener consecuencias adversas para la validez de sus conclusiones, además de originar diferencias en los valores de las rutas establecidas en modelos estructurales (Jarvis *et al.*, 2003; Podsakoff *et al.*, 2006). Las investigaciones acerca de la medición de la calidad de servicio y sus dimensiones, han adoptado una especificación de medición reflexiva (e.g. Dabholkar *et al.*, 1996 y Alén y Fraiz, 2006). Para probar si es mejor un enfoque formativo, se necesita incluir a la calidad de servicio en un modelo estructural de relaciones entre otros constructos (Bollen, 1989).

Varias investigaciones han concluido que las actitudes de la calidad y los juicios de la satisfacción juegan un papel en la formación de las intenciones de compra futuras (Cronin y Taylor, 1992; Taylor y Baker, 1994). Otros trabajos han incluido en esta relación al valor percibido como antecedente de las intenciones de compra (Brady *et al.*, 2005; Choi *et al.*, 2004). Sin embargo, sigue siendo desconocido si estos resultados pueden ser generalizados a los consumidores de países de América Latina. Si bien el modelo de la satisfacción, en el cual la satisfacción actúa como mediador entre la calidad de servicio y las intenciones de comportamiento, ha sido estudiado por varios investigadores (Dabholkar *et al.*, 2000; Brady *et al.*, 2005), éste solo ha sido aplicado a la Educación Superior por Banwet y Datta (2003). Tampoco existen investigaciones comparativas entre modelos con enfoque de medición formativo y reflexivo en este contexto. Por otro lado, algunos investigadores (Dabholkar *et al.*, 2000 y Wang y Lo, 2002) plantearon un modelo en el que las dimensiones de la calidad de servicio son consideradas antecedentes del constructo más que componentes, en el cual la satisfacción es un mediador poderoso entre la calidad de servicio y las intenciones de comportamiento, concluyendo que su modelo tenía mejores índices de ajuste que el de componentes.

El propósito de esta investigación es realizar un análisis comparativo de tres modelos (el reflexivo, el formativo y el de antecedentes) a fin de probar cuál tiene mejor especificación para medir las dimensiones de la calidad de servicio de docencia, dentro de un modelo estructural de relación con el valor percibido, la satisfacción y las intenciones de comportamiento de postdocencia, y comprobar el rol mediador de la satisfacción.

## **2. REVISIÓN DE LITERATURA**

### **2.1. La investigación sobre la medición de la calidad de servicio**

Grönroos (1984) remarcó la necesidad de una investigación de la calidad de servicio desde el punto de vista de los clientes, planteando un modelo de dos dimensiones: la técnica (resultado) y la funcional (proceso). Hasta el año 1985, pocos investigadores intentaron modelar la calidad de servicio, debido a la dificultad de delimitarla y medirla. La medición cuantitativa tiene su inicio en los estudios que realizaron Parasuraman *et al.* (1985; 1988), dando como resultado un instrumento genérico denominado SERVQUAL, el cual sería refinado posteriormente por los mismos investigadores (Parasuraman *et al.*, 1991). Este instrumento “operacionaliza” la calidad de servicio en 5 dimensiones (tangibles, confiabilidad, seguridad, empatía y receptividad) y mide la deficiencia entre las expectativas de los clientes con sus percepciones del servicio.

La medición de la calidad de servicio por medio del modelo de brecha y el SERVQUAL (Parasuraman *et al.*, 1985; 1988), fue criticado tanto por Cronin y Taylor (1992) como por Teas (1993), que propusieron el SERVPERF (que mide solamente las percepciones) y el modelo de desempeño evaluado (que pondera los atributos de la calidad de servicio según su nivel de expectativa), respectivamente. Posteriormente varios investigadores han llevado a cabo trabajos empíricos de replicación, adaptación o refinación del SERVQUAL en distintos servicios (Carman, 1990; 2000; Boulding *et al.*, 1993). Cronin y Taylor (1992) afirmaron que la calidad de servicio es un antecedente de la satisfacción, la cual influye significativamente en las intenciones de compra, surgiendo el modelo de calidad de servicio percibido y satisfacción (Spreng y Mackoy, 1996). Luego Dabholkar *et al.* (2000), examinaron la relación entre la calidad de servicio, la satisfacción y las intenciones de comportamiento, proponiendo el modelo de antecedentes y mediador. Cronin y Taylor (1992) destacaron la importancia del “valor percibido” por el cliente y, a partir de entonces, los investigadores han propuesto el modelo del valor percibido para el mejoramiento y entendimiento de la calidad de servicio (e.g. Oh, 1999 y Choi *et al.*, 2004).

La investigación actual está enfocada en la identificación de los factores que “conducen” las compras de los consumidores de servicios: calidad de servicio, valor del servicio, satisfacción del cliente e intenciones de comportamiento (Parasuraman *et al.*, 1988; Zeithaml *et al.*, 1996). Pocos investigadores han analizado estos constructos usando modelos comprensivos; es decir que examinen todas las relaciones entre ellos (Brady *et al.*, 2005).

### **2.2. La calidad de servicio como un constructo unidimensional**

La estrategia de conceptualización unidimensional de la calidad de servicio es eficaz y sencilla, pero no puede discernir su naturaleza compleja y multifacética. Varios investigadores han medido la calidad de servicio como un constructo unidimensional. La mayoría (Boulding *et al.*, 1993; Cronin y Taylor, 1992; Zeithaml *et al.*, 1996) han usado una medida simple de un ítem que hace imposible el cálculo de la fiabilidad. Otros estudios han usado medidas multi-ítem (Dabholkar *et al.*, 1996; Brady *et al.*, 2002).

### 2.3. La calidad de servicio como un constructo multidimensional

Los modelos multidimensionales de la calidad de servicio ayudan a los investigadores a discernir su naturaleza compleja; sin embargo, pueden ser incompletos, ya que si se conceptualiza la calidad de servicio en un nivel abstracto, el enfoque multidimensional no diferencia la calidad de servicio en sí de sus componentes o dimensiones. Las dimensiones más usadas han sido: tangibles, confiabilidad, seguridad, empatía, receptividad y resultado.

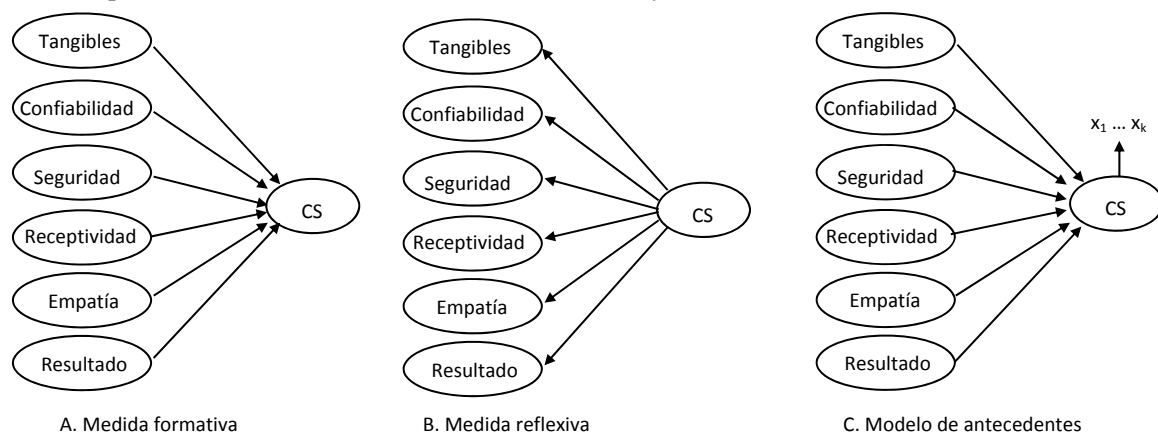
Asubonteng (1996) y Ladhari (2008) manifiestan que la mayoría de las escalas para medir la calidad de servicio son multidimensionales, con variación del número de dimensiones (desde 2 hasta 10), de acuerdo al contexto de servicio.

### 2.4. Modelos de medición formativa, reflexiva y de antecedentes, de la calidad de servicio

#### 2.4.1. Diferencias conceptuales

La característica de un modelo de medición reflexivo es que un cambio en la variable latente (no observable) será reflejado en un cambio en todos sus indicadores. En el modelo formativo, son los indicadores los que causan una variable latente, así que un cambio en ella no es acompañado por un cambio en todos sus indicadores. La diferencia entre los dos enfoques está en la prioridad causal entre la variable latente y sus indicadores (Bollen, 1989). En la Figura 1 se presentan las diferencias entre una especificación de medición reflexiva, formativa y de antecedentes de la calidad de servicio.

Figura 1. Especificación de medición reflexiva, formativa y de antecedentes de la calidad de servicio (CS)

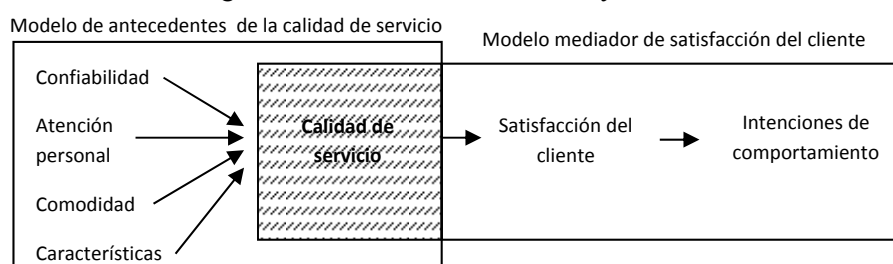


En el modelo formativo, las variables observadas causan la variable latente (panel A, a la izquierda de la Figura 1). Las dimensiones de tangibles, confiabilidad, seguridad, receptividad, empatía y resultado, causan el constructo de la calidad de servicio de docencia. En el modelo reflexivo la variable latente causa las variables observadas (panel B, en el centro de la Figura 1). Las dimensiones son un reflejo de la calidad de servicio de docencia. En ambos modelos la operacionalización de la calidad de servicio es multidimensional. En el modelo de antecedentes (panel C, a la derecha de la Figura 1), las dimensiones son constructos antecedentes de la calidad de servicio, y la operacionalización del constructo se realiza desde una perspectiva unidimensional, que puede ser medida por un ítem o por varios ítems ( $x_1 \dots x_k$ ).

Si bien el uso de medidas multi-ítem ha aumentado indudablemente la calidad metodológica de los estudios empíricos (desde el paradigma de Churchill, 1979), también ha llevado a una adherencia ciega a la perspectiva de medición reflexiva. Hasta ahora, no existen investigaciones que hayan planteado la medición de las dimensiones de la calidad de servicio, con indicadores formativos.

Dabholkar *et al.* (2000) y Wang y Lo (2002) plantearon un modelo en el que las dimensiones de la calidad de servicio son sus antecedentes y en el que la satisfacción es un mediador entre la calidad de servicio y las intenciones de comportamiento (véase la Figura 2). Una variable mediadora es aquella que interactúa con una variable predictora para conjuntamente afectar la variable dependiente de alguna manera (Taylor, 1997).

Figura 2. Modelo de antecedentes y mediador



Fuente: Dabholkar *et al.* (2000)

Dabholkar *et al.* (2000) y Wang y Lo (2002) probaron que el modelo de antecedentes tiene mejores índices de ajuste que el de componentes (reflexivo) y que la satisfacción actúa como un mediador poderoso. La única investigación de un modelo de antecedentes en la Educación Superior es la de Banwet y Datta (2003), con su modelo de la calidad de servicio de docencia.

#### 2.4.2. Criterios para la elección entre modelos reflexivos y formativos

La elección del modelo de medición más apropiado puede ser difícil. Se han formulado cuatro criterios que pueden ayudar en la elección de un modelo formativo. La pregunta clave es si cada dimensión hace una contribución única a la comprensión del constructo, y para constatar este hecho, las condiciones son: 1) deben ser distinguibles unos de otros; 2) no deben ser conceptualmente intercambiables; 3) no deben covariar a un alto nivel empíricamente; y 4) no deben tener redes nomológicas similares, es decir, no deben tener los mismos constructos antecedentes y consecuentes (Jarvis *et al.*, 2003; Coltman *et al.*, 2008).

### 3. MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA EL ANÁLISIS DE DATOS

#### 3.1. Análisis factorial

Es una técnica en la cual los factores son seleccionados para explicar las interrelaciones entre variables. Las variables originales juegan el papel de variables dependientes que se explican por factores comunes y únicos, que no son observables. Puede ser exploratorio (no se conoce *a priori* el número de factores y se determina en la aplicación empírica) o confirmatorio (los factores están fijados *a priori*, utilizándose contrastes empíricos para su corroboración).





### 3.1.1.5. Contrastes de validación del modelo

Los contrastes y estadísticos del AFE, se agrupan en dos bloques (Uriel y Aldás, 2005):

1. Los que se aplican previamente a la extracción de factores, cuyo objetivo es analizar la pertinencia de aplicación del AFE a un conjunto de variables. Los más usados son:

*Contraste de esfericidad de Barlett:* prueba si las variables originales están correlacionadas entre sí; si no lo estuvieran, no existirían factores comunes y no tendría sentido aplicar el AFE.

*Medidas de adecuación muestral:* la medida KMO (Kaiser-Meyer-Olkin) mide de adecuación de la muestra al AFE, la cual debe ser próxima a 1.

2. Los que se aplican *ex post* y que pretenden evaluar el modelo factorial estimado; en este tipo se enmarca la *medida de bondad de ajuste*, basado en un contraste de bondad de ajuste con una distribución Chi-cuadrada ( $\chi^2$ ), cuando el método de estimación aplicado ha sido el ML o el GLS.

### 3.1.1.6. Rotación de factores

Como afirman Uriel y Aldás (2005), la rotación de factores se ha ideado para obtener, a partir de la solución final, factores que sean fácilmente interpretables. Existen dos formas de realizar la rotación: la ortogonal y la oblicua. En la ortogonal, los ejes se rotan para que se preserve la incorrelación entre los factores (los ejes rotados son perpendiculares). El método más conocido es el Varimax. En la oblicua, los ejes no son perpendiculares, consiguiéndose una asociación más nítida de cada una de las variables con el factor correspondiente. El método más conocido es el Oblimin.

### 3.1.2. Análisis Factorial Confirmatorio (AFC)

El AFC provee una rigurosa evaluación de la dimensionalidad, proveyendo consistencia interna y externa.

#### 3.1.2.1. Identificación del modelo en el AFC

Uriel y Aldás (2005) sostienen que en el método AFC se dispone de una serie de datos (las varianzas-covarianzas muestrales de las variables observadas) y con ellos se ha de estimar una serie de parámetros (cargas factoriales, varianzas-covarianzas de los factores comunes y varianzas-covarianzas de los factores específicos o errores). Al igual que ocurre en un sistema de ecuaciones lineales, si no se imponen restricciones a los parámetros a estimar, habrá un número infinito de soluciones posibles. La identificación hace referencia a la cuestión de si los parámetros del modelo pueden o no ser determinados de forma única. Siguiendo a Ullman (1996), el investigador debería centrarse en las siguientes tareas:

1. Comparar el número de datos con el número de parámetros que han de estimarse.
2. Establecer una escala para los factores comunes.
3. Asegurar la identificabilidad de la parte del modelo que contiene la relación entre las variables observadas y los factores.
4. Fijar arbitrariamente el coeficiente de regresión del término de error al valor 1.

#### 3.1.2.2. Estimación de modelos en el AFC

Según Sharma (1996), el proceso de estimación del AFC sigue los siguientes pasos:

1. Dada la matriz de varianzas-covarianzas muestrales, se estiman los parámetros del modelo factorial hipotetizado.
2. Se determina el ajuste del modelo hipotetizado. En qué medida la matriz de varianzas-covarianzas estimada está próxima a la matriz de varianzas-covarianzas muestral.

Los procedimientos de estimación más comunes son: ULS (cuya ventaja reside en que no es necesaria la suposición de normalidad de las variables observadas), GLS, ML, libre distribución asintótica (ADF - Asymptotically Distribution Free) o mínimos cuadrados ponderados (WLS - Weigthed Least Squares).

### 3.1.2.3. Bondad de ajuste del modelo estimado

Es necesario determinar hasta qué punto el modelo asumido se ajusta a los datos muestrales. Si se detectan problemas de ajuste, será necesario reespecificar el modelo. Se usan para ello los siguientes estadísticos.

Primero se tiene el estadístico  $\chi^2$  para el contraste global del modelo. Los supuestos que requiere son: la hipótesis de normalidad de las variables observadas y un tamaño muestral lo suficientemente grande para justificar las propiedades asintóticas del contraste. Como estos requisitos se cumplen rara vez, Long (1983) y Ullman (1996) sugieren que el estadístico debe aplicarse con precaución con muestras grandes, dado que incluso pequeñas diferencias entre las matrices de covarianza muestral y la estimada serán evaluadas como significativas. El desarrollo de los estadísticos *ad hoc* de bondad de ajuste (véase la Tabla 1) surgen ante la limitación anterior.

Los índices comparativos de ajuste comparan el valor del modelo teórico que se evalúa, con el del modelo independiente (consistente en uno sin ninguna relación entre los constructos del modelo); los índices de proporción de varianza miden la proporción de ajuste entre la matriz de varianzas-covarianzas poblacional y la muestral; los índices de grado de parsimonia indican cuán complejas son las relaciones del modelo con el independiente (un valor más próximo al modelo independiente indicará que el modelo es más simple que otro); y los índices basados en residuos indican la diferencia que existe entre la matriz de varianzas-covarianzas muestral y la poblacional (Uriel y Aldás, 2005).

Tabla 1. Índices *ad hoc* de bondad de ajuste para el AFC

Grupo	Índice	Siglas	Ajuste aceptable
Índices comparativos de ajuste	Normed Fit Index	NFI	0,90 – 0,95
	Nonnormed Fit Index	NNFI	0,95 – 0,97
	Comparative Fit Index	CFI	0,95 – 0,97
	Incremental Fit Index	IFI	> 0,90
Índices de proporción de varianza	Goodness of Fit Index	GFI	0,90 - 0,95
	Adjusted Goodness of Fit Index	AGFI	0,85 - 0,90
Índices de grado de parsimonia	Akaike Information Criterion	AIC	El menor en la comparación
	Consistent AIC	CAIC	El menor en la comparación
Índices basados en residuos	Root Mean Squared Residual	RMR	0,05 – 0,10
	RMR Error of Approximation	RMSEA	0,05 – 0,08

Fuente: adaptado de García (2011) y Uriel y Aldás (2005)

#### *3.1.2.4. Interpretación del modelo*

Se examina si los estimadores de los parámetros son razonables en dos sentidos (Uriel y Aldás, 2005): 1) ¿Toman valores adecuados teóricamente?; y 2) ¿son significativos? Para que exista compatibilidad de las estimaciones de los parámetros con el modelo estadístico, las respuestas a las siguientes preguntas deben ser negativas: a) ¿Existen correlaciones superiores a la unidad?; b) ¿existen cargas factoriales estandarizadas fuera del intervalo  $-1, 1$ ?; c) ¿los residuos estandarizados son anormalmente grandes?; y d) ¿hay estimaciones negativas de las varianzas? Si no es el caso, existiría una incompatibilidad debida a que, según Long (1983): 1) el modelo estaría mal especificado; 2) los datos no respaldarían la hipótesis de normalidad multivariante de las variables observadas; 3) la muestra sería demasiado pequeña; o 4) el modelo estaría cerca de no estar identificado, dificultando la estimación de algunos parámetros.

#### *3.1.2.5. Reespecificación del modelo*

Ullman (1996) señala que existen dos motivos para reespecificar un modelo (es decir, eliminar o introducir relaciones entre las variables que los conforman). Estos motivos son: 1) mejorar su ajuste; y 2) contrastar alguna hipótesis teórica.

### **3.2. Modelos de Estructuras de Covarianza (MEC)**

#### *3.2.1. Propósito*

El MEC permite examinar simultáneamente una serie de relaciones de dependencia y es útil cuando una variable dependiente se convierte en variable independiente en ulteriores relaciones de dependencia (García, 2011; Poza y Fernández, 2011). Además, muchas de las mismas variables afectan a cada una de las variables dependientes, pero con efectos distintos (Cupani, 2012).

El MEC es una técnica estadística multivariante que puede ser entendida como una extensión de la regresión múltiple y el análisis factorial (Poza y Fernández, 2011). Posee algunas características particulares que lo diferencian de otras técnicas multivariadas (Kahn, 2006). Una de las diferencias es la capacidad de estimar y evaluar la relación entre constructos no observables, denominadas variables latentes, de forma múltiple y cruzada, que solo pueden ser medidas mediante variables observables, y tener en cuenta el error de medida en el proceso de estimación (Poza y Fernández, 2011).

Otra característica es que para interpretar los resultados del MEC se deben evaluar varias pruebas estadísticas e índices que determinan si la estructura teórica propuesta presenta un buen ajuste a los datos empíricos (García, 2011). Este ajuste se verifica si los valores de los parámetros estimados reproducen tan estrechamente como sea posible la matriz observada de covarianza (Kahn, 2006).

Como indican Uriel y Aldás (2005), los modelos de estructuras de covarianza (MEC), se descomponen en dos componentes: 1) la componente estructural, que incluye las relaciones entre los factores latentes; y 2) la componente de medida, que incluye las variables observadas que miden los factores latentes. Según Cupani (2012) el modelo estructural es el modelo guía, en el cual la teoría y no la experiencia, permitirá al investigador distinguir a las variables independientes que predicen cada

variable dependiente, mientras que el objetivo del modelo de medida es corroborar la idoneidad de los indicadores seleccionados en la medición de los constructos de interés.

### 3.2.2. Pasos para la modelización

Los especialistas en el MEC (García, 2011; Uriel y Aldás, 2005) consideran seis pasos a seguir para aplicar esta técnica: especificación, identificación, estimación de parámetros, evaluación del ajuste, reespecificación del modelo e interpretación de resultados (Kline, 2005). Estos pasos son similares a los descritos en la técnica AFC, aunque tendrán mayor complejidad debido a que el número de parámetros suele ser muy superior.

## 4. ESTUDIO EMPÍRICO PARA EL DISEÑO DE INSTRUMENTOS DE MEDIDA

### 4.1. Contexto

Se realizó un estudio empírico en la Universidad Privada Boliviana (UPB), con el objetivo de obtener instrumentos válidos y fiables de los constructos de la calidad de servicio de docencia, el valor percibido del servicio de docencia, la satisfacción estudiantil y las intenciones de comportamiento de postdocencia de los estudiantes.

### 4.2. Estudio exploratorio

A fin de obtener instrumentos que tengan validez de contenido, en primer lugar, se llevó a cabo un estudio exploratorio, siguiendo las fases sugeridas por Martínez (1995): 1) identificar el propósito; 2) especificar *a priori* las restricciones de operación: tiempo, medios y situaciones; 3) identificar el dominio del constructo; 4) especificar el formato de los ítems; 5) preparar un conjunto de ítems que cubran la totalidad del dominio; 6) un plan para seleccionar ítems relevantes; y 7) configurar el diseño definitivo. Para realizar las fases 1 a 4, se definieron aspectos importantes en la construcción del test, clasificados en:

#### 1) Factores contextuales externos:

- Propósito del instrumento: diagnóstico y predictivo.
- Tiempo de aplicación: sin restricciones; aproximadamente 20 minutos.
- Escenario temporal de aplicación: últimos días de impartición de una materia.

#### 2) Factores contextuales internos:

- Definición del dominio del constructo: la calidad de servicio de docencia presenta la calidad técnica y la funcional, donde se percibe la calidad cuando el docente excede las expectativas estudiantiles. La deficiencia es medida directamente (Snipes *et al.*, 2006).
- Tipo de formato: se miden percepciones o actitudes estudiantiles. Las respuestas serán tipo Likert, con una escala de 7 puntos, con (1) “mucho peor de lo esperado” y (7) “mucho mejor de lo esperado”.

Para realizar las fases 5 y 6 se utilizaron como base las siguientes escalas: 1) generales, que miden la calidad de servicio en la Educación Superior (LeBlanc y Nguyen, 1997; Abdullah, 2006) y en

otros servicios (Parasuraman *et al.*, 1991; Dabholkar *et al.*, 1996; Markovic, 2006); y 2) específicas, que miden la calidad de servicio de docencia (Banwet y Datta, 2003; Snipes *et al.*, 2006).

A partir de la revisión de instrumentos en la literatura, se diseñó un cuestionario estructurado, que contenía los siguientes aspectos, dividido en dos partes: 1) la Parte I tenía el propósito de realizar una recopilación de los principales aspectos de interés de alumnos y docentes acerca de cómo medir la calidad de servicio percibida de docencia, mediante la técnica de incidentes críticos y una encuesta de los principales aspectos para su medición; y 2) la Parte II pedía a los encuestados que analizaran un instrumento desarrollado por expertos del medio educativo en cuanto a: ítems y dimensiones relevantes, pertinencia de las directrices, confusiones al llenar el cuestionario, preguntas de doble sentido, etc.

Se tomó como muestra de juicio a estudiantes elegidos por facultad y carreras y con excelencia académica; y otra muestra de conveniencia a docentes y jefes académicos, tomando en cuenta su experiencia educativa. Se encuestó a 100 miembros de la UPB, obteniendo una tasa de respuesta del 40%. Tomando en cuenta las opiniones de los encuestados se diseñó una batería con ítems relevantes para la medición de la calidad de servicio de docencia.

Para realizar la fase 7, se llevó a cabo una aplicación piloto. Se administró la batería del instrumento a un curso elegido al azar, obteniéndose 30 encuestas. Las deficiencias del llenado del cuestionario condujeron a varias acciones correctivas. De esa manera, se obtuvo el diseño definitivo de una batería para la medición de la calidad de servicio de docencia percibida por los estudiantes, que constaba de 40 ítems, para encarar el estudio de validez y fiabilidad. También se generaron instrumentos para la medición de la calidad de servicio global de docencia (CSG), valor percibido del servicio de docencia (VAL), satisfacción estudiantil de la docencia (SAT), e intenciones de comportamiento de postdocencia (IC). En todos estos instrumentos se usó una escala de 7 puntos tipo Likert, con (1) “totalmente en desacuerdo” y (7) “totalmente de acuerdo”.

#### **4.3. Obtención de instrumentos válidos y fiables de la calidad de servicio de docencia y de sus constructos relacionados**

El instrumento de 40 ítems obtenido en el estudio exploratorio fue sometido luego a un AFE y a un AFC, para encontrar su dimensionalidad adecuada, y se realizaron pruebas de validez de constructo y fiabilidad.

##### *4.3.1. Recopilación de datos*

La población fue de 1145 alumnos de pregrado matriculados en la UPB, en el primer semestre del 2011. Para la recopilación de datos se usó el método del cuestionario y un muestreo de oportunidad, utilizando la logística que tiene esta universidad para la evaluación del desempeño docente. El cuestionario fue repartido por los jefes de carrera, los últimos días antes que culmine una materia, cuidando la confidencialidad de la información.

Se obtuvieron 600 encuestas, que fueron divididas en dos muestras, 300 para el AFE y 300 para el AFC y el MEC. Al respecto, Martínez-López *et al.* (2004) indican que el tamaño muestral

puede obtenerse de una relación de 5 individuos por parámetro que se quiere estimar en el modelo. Para el AFE se tienen 40 ítems, para el AFC 13 ítems y para el MEC 30, por lo cual el tamaño muestral elegido (300) cumple la regla de proporción 5:1.

#### 4.3.2. Idoneidad de los datos

Siguiendo a Uriel y Aldás (2005), las pruebas de idoneidad se dividieron en dos: a) previas a la técnica, para comprobar la confiabilidad de los datos; y b) propias a la técnica, para comprobar hipótesis subyacentes, como la normalidad y linealidad.

En el primer caso, se eliminaron los cuestionarios mal llenados o con patrones anómalos. En el segundo caso se verificó mediante el método del gráfico Chi-cuadrado (Johnson y Wichern, 1998) que no se cumplía el supuesto de normalidad multivariante. Por ese motivo, se usaron el método de componentes principales para realizar el AFE, y el método ULS, para realizar el AFC y el MEC. También se comprobó que las relaciones entre los ítems eran aproximadamente lineales.

#### 4.3.3. Análisis Factorial Exploratorio (AFE)

Con la primera muestra de tamaño 300, se procedió a realizar el AFE. Las medidas de adecuación muestral para la calidad de servicio percibida de docencia son mostradas en la Tabla 2, las cuales han sido obtenidas usando el programa SPSS 18.0.

Tabla 2. Medidas de adecuación muestral de la calidad de servicio de docencia

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin		0,961
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	9052,227
	Gl.	780
	Sig.	0,000

La prueba de esfericidad de Bartlett es significativa, así que existe relación entre los ítems de la calidad de servicio, aspecto primordial para el AFE. Como la medida KMO es próxima a 1, se pudo concluir que los datos son adecuados para realizar el análisis.

Los criterios para la eliminación de ítems fueron los siguientes (Ladhari, 2008):

- Puntajes de carga de menos de  $\pm 0,45$  (Markovic, 2006).
- Cargas cruzadas de más de  $\pm 0,40$  (Janda *et al.*, 2002).

Después de la eliminación de ítems, se realizó un análisis de fiabilidad, para ver si la eliminación de algunos mejoraba el coeficiente alfa de Cronbach para cada dimensión. El análisis factorial con el método de componentes principales (rotación varimax) dio como resultado 6 dimensiones (véase la Tabla 3).

Por su parte, la Tabla 4 resume los pasos seguidos para la eliminación de ítems.

En las tres primeras fases se desecharon ítems que cargaron en dos dimensiones o débilmente. En la cuarta eliminación se desecharon ítems para mejorar el alfa de Cronbach. Se logró una varianza acumulada extraída de 71%. Se observa que la medida KMO y el índice de Bartlett después de las eliminaciones tuvieron valores adecuados.

La estructura factorial resultante se muestra en la Tabla 5.

Tabla 3. AFE para la calidad de servicio de docencia

Ítem	Componente						Ítem	Componente					
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
CS1					0,797		CS21		0,763				
CS2			0,455		0,404		CS22	0,475	0,460				
CS3					0,815		CS23		0,627				
CS4					0,561		CS24		0,609				
CS5						0,616	CS25		0,690				
CS6			0,689				CS26		0,564				
CS7			0,684				CS27	0,435	0,438	0,510			
CS8			0,620				CS28			0,678			
CS9			0,462	0,514			CS29	0,446		0,524			
CS10						0,507	CS30	0,549		0,464			
CS11	0,432			0,482			CS31	0,463	0,425				
CS12				0,456			CS32	0,556					
CS13		0,416	0,543				CS33			0,579			
CS14			0,479	0,402			CS34	0,494					
CS15				0,739			CS35	0,766					
CS16		0,437		0,547			CS36	0,692					
CS17		0,453		0,444			CS37	0,676					
CS18		0,630					CS38	0,706					
CS19		0,487	0,417				CS39	0,741					
CS20		0,777					CS40	0,702					

Tabla 4. Procedimiento para lograr una estructura factorial adecuada para la calidad de servicio de docencia

Características	AFE inicial	1ª eliminación	2ª eliminación	3ª eliminación	4ª eliminación
Ítems eliminados		2, 9, 11, 13, 14,16, 17, 19,22, 27, 29, 30, 31	4, 7, 8, 10, 12, 26, 28, 32, 37	5, 6, 34	15, 33
Dimensiones	6	4	3	3	3
KMO	0,961	0,948	0,924	0,91	0,901
Prueba de Bartlett	9052,227 (g.l. 780)	5308,524 (g.l. 351)	3011,059 (g.l. 153)	2538,304 (g.l. 105)	2310,175 (g.l. 78)
Varianza acumulada extraída (%)	66,392	63,131	61,202	65,715	70,866

Tabla 5. Estructura factorial resultante de la calidad de servicio de docencia

Ítem	Componente		
	1	2	3
CS1			0,856
CS3			0,863
CS18	0,718		
CS20	0,830		
CS21	0,832		
CS23	0,728		
CS24	0,713		
CS25	0,781		
CS35		0,813	
CS36		0,741	
CS38		0,787	
CS39		0,836	
CS40		0,779	



Se observa una estructura clara, con 3 dimensiones (seguridad, resultado y tangibles), 13 ítems, y en las cuales todos los ítems cargaron en sus dimensiones hipotéticas. El instrumento para medir la calidad de servicio percibida de docencia se muestra en el Anexo A.1. El coeficiente de fiabilidad ponderado fue de 0,993, indicando que la batería multidimensional de la calidad de servicio de docencia es fiable (tiene consistencia interna). Usando el AFE se confirmó que la calidad de servicio global, valor percibido, satisfacción estudiantil e intenciones de postdocencia son unidimensionales. La Tabla 6 muestra las características de los cuatro constructos.

Tabla 6. AFE de la calidad de servicio global de comportamiento de postdocencia

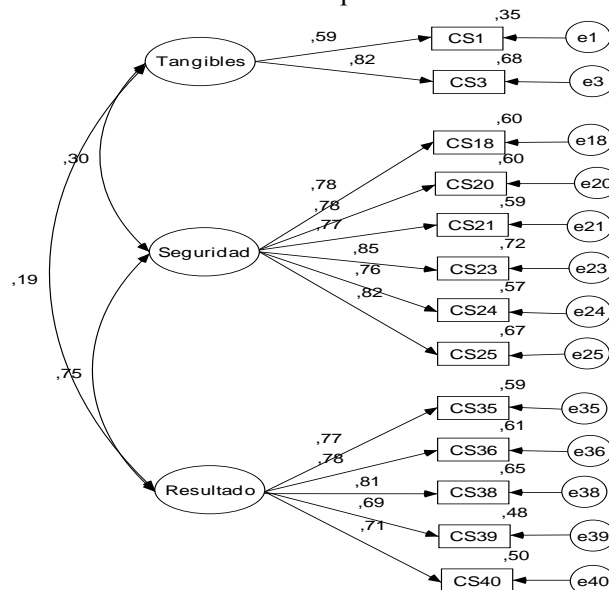
Características AFE	Calidad de servicio global (CSG)	Valor percibido (VAL)	Satisfacción (SAT)	Intenciones de comportamiento (IC)
Ítems eliminados	-	-	-	IC5
Dimensiones	1	1	1	1
Prueba KMO	0,866	0,837	0,842	0,894
Prueba de Bartlett	1262,379 (6 g.l.)	982,190 (6)	1455,922 (6)	1856,778 (10)
Varianza acumulada extraída (%)	87,689	81,441	89,531	87,167
Alfa de Cronbach	0,953	0,922	0,961	0,963

Todos los ítems se retuvieron en su respectivo constructo, excepto el ítem 5 de las intenciones de comportamiento (IC5), que fue eliminado: “Volvería a pasar clases en esta aula (incluye el equipo didáctico)”. De acuerdo a los valores de la prueba KMO, las muestras son adecuadas para el AFE. Por otro lado, la varianza porcentual extraída con la estructura unidimensional de los cuatro constructos considerados es adecuada y bastante alta. Los alfas de Cronbach ( $\alpha$ ) de los 4 constructos son superiores a 0,9. En el Anexo A.2 se exponen las baterías para la medición de estos constructos.

#### 4.3.4. Análisis Factorial Confirmatorio (AFC)

Se usó el programa AMOS 6.0 para generar los resultados del AFC. Se optó por el método ULS, ya que los datos no cumplieron el supuesto de normalidad multivariante. La Figura 3 muestra la solución estandarizada del AFC.

Figura 3. Solución estandarizada del AFC para la calidad de servicio de docencia



Se puede observar que todos los coeficientes de regresión estandarizados (cargas factoriales) entre los ítems y las dimensiones de la calidad de servicio tienen valores altos comprendidos entre 0 y 1 (como sugieren Uriel y Aldás, 2005) y todos son positivos, indicando una relación causal directa de las dimensiones hacia los ítems que los conforman. Esta fuerza de la relación de cada dimensión con sus ítems es un indicativo de una estructura factorial robusta.

Para determinar si el modelo asumido se ajustaba a los datos muestrales (es decir, presentaba un buen ajuste), se calcularon los índices ad hoc mostrados en la Tabla 7.

Tabla 7. Índices ad hoc para el AFC de la calidad de servicio de docencia

Grupo	Índice	Modelo independiente	Modelo analizado
Índices comparativos de ajuste	NFI		0,982
Índices de proporción de varianza	GFI	0,296	0,987
	AGFI	0,178	0,981
Índices basados en residuos	RMR	0,721	0,097

Los índices comparativos de ajuste y de proporción de varianza deben ser superiores a 0,9. Como se observa el NFI sobrepasa ese valor y los índices GFI y AGFI son cercanos a 1. Los índices basados en residuos deben ser menores a 0,10, y se observa que el RMR está dentro del rango permitido.

Por lo expuesto, se puede concluir que el modelo de la calidad de servicio de docencia presenta buenos índices de ajuste, lo que quiere decir que el AFC ha confirmado la estructura factorial formulada por el AFE.

#### 4.3.5. Análisis de validez de la calidad de servicio de docencia

La validez discriminante (grado al cual una medida no correlaciona fuertemente con otras medidas que se supone difieren entre sí) se confirma mediante las correlaciones entre las dimensiones de la calidad de servicio (véase la Tabla 8), ya que no existe un valor muy alto.

Tabla 8. Correlaciones entre las dimensiones de la calidad de servicio de docencia

Correlaciones	Tangibles	Seguridad	Resultado
Tangibles	1,000	0,238	0,146
Seguridad	0,238	1,000	0,658
Resultado	0,146	0,658	1,000

La validez convergente (es decir, el grado al cual un grupo de ítems que representan un constructo convergen sobre el constructo) se verifica observando las cargas factoriales de cada ítem en su dimensión (véase la Figura 3) y se comprueba que cada ítem ha cargado fuertemente en la dimensión hipotética.

La validez concurrente y predictiva se comprueban con las correlaciones entre constructos relacionados a la calidad de servicio (véase la Tabla 9).

Tabla 9. Matriz de correlaciones entre la calidad de servicio de docencia, valor percibido, satisfacción e intenciones de comportamiento de postdocencia

Correlaciones	CS	CSG	VAL	SAT	IC
CS	1,000	0,675	0,629	0,653	0,672
CSG	0,675	1,000	0,704	0,814	0,822
VAL	0,629	0,704	1,000	0,741	0,733
SAT	0,653	0,814	0,741	1,000	0,909
IC	0,672	0,822	0,733	0,909	1,000

La validez concurrente es el grado al cual los puntajes de la calidad de servicio, están asociados con medidas relacionadas conceptualmente, pero que son medidas al mismo tiempo, como la calidad de servicio global. La validez predictiva tiene el mismo concepto que la concurrente, pero las medidas relacionadas deben ser tomadas posteriormente, como ocurre con la satisfacción o las intenciones de comportamiento (Martínez, 1995).

El modelo tiene validez concurrente, ya que la calidad de servicio (CS) está relacionada con la calidad de servicio global (CSG); y tiene validez predictiva, porque está relacionada a constructos que son su consecuencia, como la satisfacción (SAT), el valor percibido (VAL) y las intenciones de comportamiento (IC).

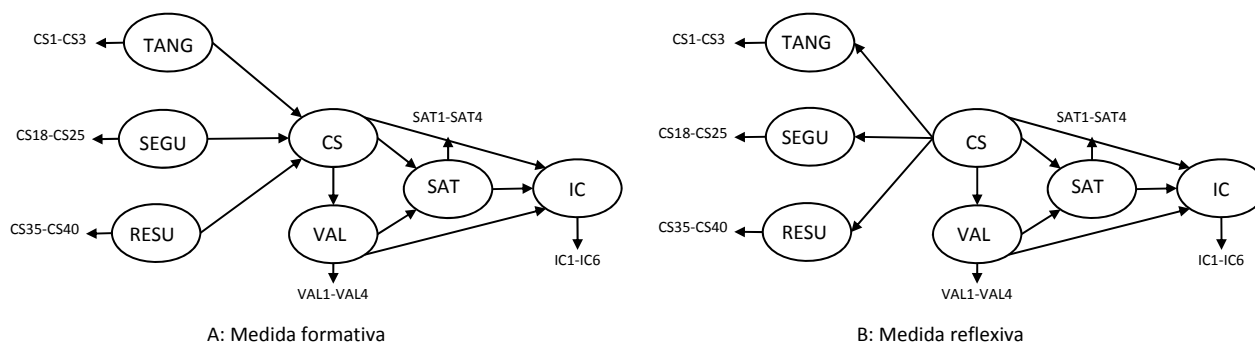
## 5. ANÁLISIS DE COMPARACIÓN DE LOS MODELOS ESTRUCTURALES DE EVALUACIÓN DEL SERVICIO DE DOCENCIA

### 5.1. Caracterización de los modelos reflexivo, formativo y de antecedentes

El modelo estructural que se analizó en esta investigación es denominado “comprehensivo”, similar al que plantearon Brady *et al.* (2005) y Choi *et al.* (2004), adaptado al contexto del servicio de docencia en la Educación Superior. Es comprehensivo en el sentido de que la calidad de servicio, el valor y la satisfacción influyen directa y conjuntamente a las intenciones de comportamiento.

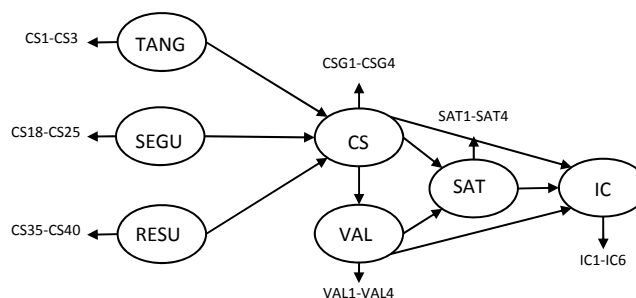
Los modelos reflexivo y formativo de la calidad de servicio de docencia, que se analizaron en esta investigación, se muestran en la Figura 4. En el panel A, las dimensiones de tangibles, seguridad y resultado hacen una contribución única al constructo de la calidad de servicio; es decir, causan el constructo. En el panel B, la calidad de servicio causa las dimensiones, siendo éstas intercambiables entre sí. En ambos modelos la calidad de servicio está conceptualizada como un constructo multidimensional de segundo orden.

Figura 4. Modelos reflexivo y formativo de la calidad de servicio de docencia



El modelo de antecedentes es el mostrado en la Figura 5. Diverge del modelo formativo en que las dimensiones de la calidad de servicio de docencia (tangibles, seguridad y resultado) son constructos antecedentes y la calidad de servicio de docencia se mide haciendo uso de una batería unidimensional compuesta de 4 ítems (CSG1 – CSG4).

Figura 5. Modelo de antecedentes de la calidad de servicio de docencia



Los modelos expuestos en las Figuras 4 y 5 han sido simplificados a fin de mostrar las relaciones más importantes. Toda variable no observable del modelo (componente de medida) ha sido medida mediante indicadores reflexivos, mediante los instrumentos mostrados en los Anexos A.1 y A.2.

## 5.2. Comparación de los modelos formativo, reflexivo y de antecedentes

### 5.2.1. Bases de comparación

Los tres modelos presentan una especificación adecuada, según el examen propuesto por Uriel y Aldás (2005): no han mostrado correlaciones superiores a la unidad, sus cargas factoriales estandarizadas no sobrepasan la unidad, no existen residuos extremadamente grandes y no se manifestaron estimaciones negativas de las varianzas.

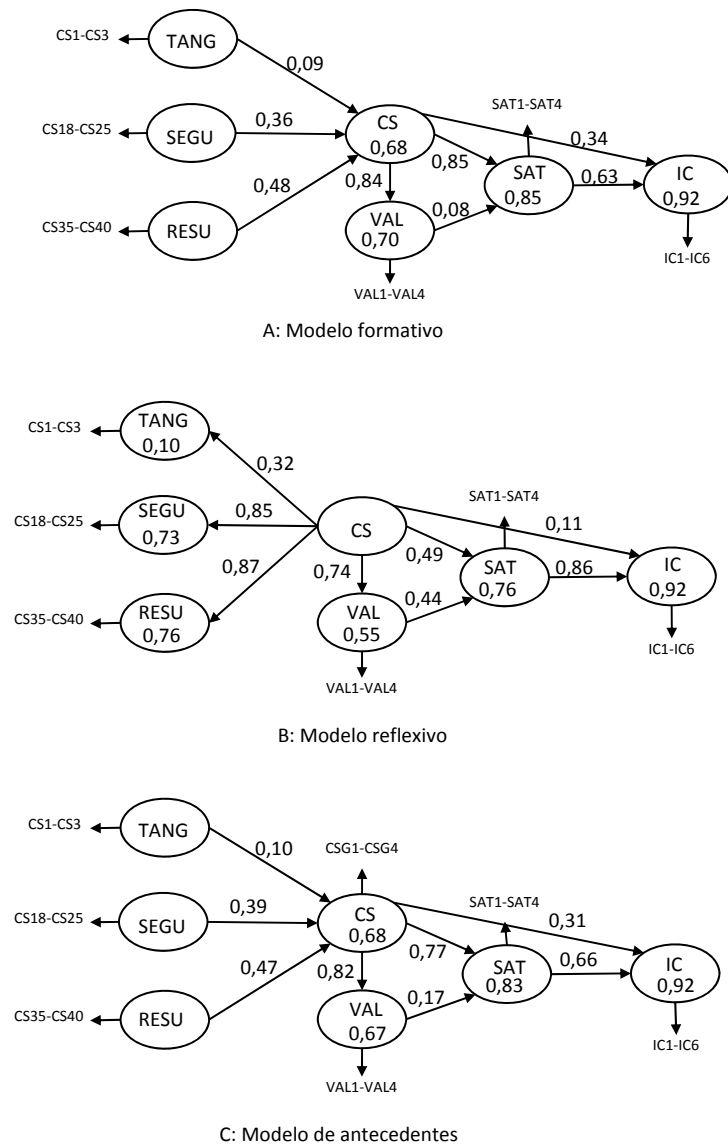
Por lo tanto, como los tres modelos están bien especificados, una de las maneras de probar la superioridad de los tres modelos es la de comparar de medidas de bondad de ajuste *ad hoc*. El modelo que presente mejores medidas de bondad de ajuste será el modelo más adecuado de medición de la calidad de servicio.

Otro criterio es la comparación de las correlaciones múltiples cuadradas entre los tres modelos. Bollen (1989) sugiere que si un modelo tiene correlaciones múltiples cuadradas de sus variables mayores al de otro modelo, entonces tiene mejor especificación de modelo de medición, ya que presenta mejor poder predictivo.

### 5.2.2. Diferencias entre los modelos formativo, reflexivo y de antecedentes

Primero se realizó una comparación entre las cargas factoriales y las relaciones causales entre los tres modelos, para determinar sus diferencias (véase la Figura 6). Estos valores fueron determinados mediante el MEC usando el programa AMOS 6.0.

Figura 6. Resultados estandarizados (MEC) de los modelos formativo, reflexivo y de antecedentes



Los valores encerrados en los círculos debajo de cada constructo son las correlaciones múltiples cuadradas ( $R^2$ ). En los tres modelos, la ruta del valor percibido con las intenciones de comportamiento (VAL-IC) no fue significativa (mostró una carga factorial estandarizada entre 0,04 y 0,05, dependiendo del modelo analizado); por lo tanto fue eliminada.

Se puede observar que existen diferencias en las relaciones causales entre la calidad de servicio, sus dimensiones y los constructos a los cuales está relacionada, entre uno y otro modelo. Estas diferencias establecen que la elección adecuada del modelo de medida es de fundamental importancia. Las principales conclusiones que se puede extraer de la comparación de los tres modelos son las siguientes:

- El modelo reflexivo favorece las relaciones valor-satisfacción y satisfacción-intenciones de comportamiento. Todas las relaciones de la calidad de servicio se ven disminuidas.

- El modelo formativo favorece más la relación calidad de servicio-valor, calidad de servicio-satisfacción y calidad de servicio-intenciones de comportamiento. En otras palabras, intensifica la relación de la calidad de servicio con sus constructos relacionados.
- El modelo de antecedentes intensifica aún más que el modelo formativo las relaciones de la calidad de servicio con sus constructos relacionados.
- En los tres modelos la satisfacción se constituye en un mediador poderoso entre la calidad de servicio y el valor, sobre las intenciones de comportamiento.

### 5.2.3. Verificación de la superioridad entre los tres modelos

En la Tabla 10 se comparan los índices de bondad de ajuste de los tres modelos. Como se puede apreciar, existe un mejor ajuste del modelo de antecedentes, comparado con el reflexivo y el formativo, aunque las diferencias porcentuales son del orden del 0,1% para los grupos de índices comparativos de ajuste y de proporción de la varianza, y del orden del -8% para el grupo de índices basados en los residuos. Prácticamente los índices de ajuste del modelo formativo son similares a los del modelo reflexivo.

Tabla 10. Comparación de índices de bondad de ajuste entre los tres modelos

Índices de ajuste		Modelo		
Grupo	Siglas	Formativo	Reflexivo	Antecedentes
Chi-cuadrado	$\chi^2$	879,785 (288 g.l.)	900,987 (291 g.l.)	992,879 (394 g.l.)
Índices comparativos de ajuste	NFI	0,992	0,992	0,994
Índices de proporción de varianza	GFI	0,993	0,993	0,994
	AGFI	0,992	0,992	0,993
Índices basados en residuos	RMR	0,092	0,093	0,085

El índice RMR (Root Mean Squared Residual) para el modelo de antecedentes es menor que para los otros dos modelos, indicando que con el modelo de antecedentes se ha logrado una mayor similitud entre la matriz de varianzas-covarianzas muestral y la poblacional.

En el grupo de índices comparativos de ajuste (que comparan el valor del modelo teórico que se evalúa, con el del modelo independiente), el NFI posee un valor mayor en el modelo de antecedentes que en los otros dos modelos, sugiriendo que el modelo de antecedentes está más alejado de la semejanza con el modelo independiente que los otros dos modelos.

En el grupo llamado “índices de proporción de la varianza” (que establecen la proporción entre la matriz de varianzas-covarianzas poblacional y la muestral), el GFI y AGFI presentan mayores valores en el modelo de antecedentes que en los otros dos modelos, indicando que el modelo de antecedentes explica una proporción mayor de la varianza poblacional que los otros dos modelos. Estos resultados indican que un modelo de antecedentes se desempeña mejor que el reflexivo o el formativo (el modelo presenta una mejor especificación de medición), probando así su superioridad.

Adicionalmente, se puede observar (véase la Figura 6) que los predictores del constructo de las intenciones de comportamiento de postdocencia de los tres modelos (antecedentes, reflexivo y formativo) explican una proporción igual de su varianza, indicando que todos los modelos

considerados tienen buen poder predictivo. La correlación múltiple cuadrada de las intenciones de comportamiento de postdocencia es del 92%, indicando que los predictores de ese constructo, que son la calidad de servicio de docencia, el valor percibido y la satisfacción estudiantil explican el 92% de la variabilidad de las intenciones de comportamiento de postdocencia.

## **6. RESULTADOS**

Mediante un análisis de estructuras de covarianza (MEC) se comprobó, a través de índices de bondad de ajuste y correlaciones múltiples cuadradas, que el modelo de antecedentes (unidimensional) para las dimensiones de la calidad de servicio percibida de docencia, es más idóneo que el modelo con enfoque de medición reflexivo y formativo. Por otro lado, se probó que el modelo de antecedentes intensifica más que el formativo y el reflexivo las relaciones calidad de servicio-valor, calidad de servicio-satisfacción y calidad de servicio-intenciones de comportamiento. Los índices de bondad de ajuste del modelo de antecedentes fueron bastante altos en comparación con los de los otros dos modelos.

Con respecto a la relación entre constructos en el modelo estructural estudiado, se comprobó el rol mediador significativo de la satisfacción entre la calidad de servicio percibida de docencia y el valor sobre las intenciones de comportamiento de postdocencia. La relación entre el valor percibido y las intenciones de comportamiento no fue significativa.

## **7. DISCUSIÓN DE RESULTADOS**

El resultado encontrado en esta investigación, “el modelo de antecedentes de la calidad de servicio de docencia tiene mejor modelo de especificación de medición que el modelo formativo o reflexivo, dentro de un modelo estructural de evaluación del servicio de docencia”, es congruente con los hallazgos realizados en otros escenarios de servicios por Dabholkar *et al.* (2000) y Wang y Lo (2002) y, en la Educación Superior, por Banwet y Datta (2003).

La mayoría de las investigaciones han elegido el enfoque reflexivo sin indagar si es la especificación de medición más idónea para la calidad de servicio (Ladhari, 2009; Alén y Fraiz, 2006). Varios investigadores (Podsakoff *et al.*, 2006; Howell *et al.*, 2007) han sugerido que la mejor especificación de medición para un constructo multidimensional, como es la calidad de servicio, es formativa, debido a que sus indicadores están conceptualizados como determinantes exógenos del constructo, no son necesariamente intercambiables, no necesariamente covarían entre sí en un nivel alto y no se espera que tengan redes nomológicas similares. Sin embargo, en esta investigación se ha constatado que el modelo formativo presenta prácticamente los mismos índices de ajuste que los del modelo reflexivo.

## **8. IMPLICACIONES EN LA GESTIÓN**

En primer lugar, la asignación de recursos de marketing varía cuando se aplican diferentes métodos de conceptualización. Bajo el modelo formativo, los recursos probablemente se destinarán a aumentar las habilidades de los estudiantes (resultado del servicio) más que para mejorar la adquisición de seguridad en el proceso de adquisición de esas habilidades y no asignar recursos a la mejora de los

elementos tangibles en el aula. Bajo el modelo unidimensional (de antecedentes) existe casi la misma importancia entre seguridad y resultado en la percepción de la calidad de docencia, mientras que todos los componentes se tratan como críticos en el modelo reflexivo. Por lo tanto, la percepción de la calidad de servicio de los consumidores no podrá ser mejorada eficazmente si se aplican modelos errados. Tomando en cuenta el modelo de antecedentes, para mejorar la calidad de servicio de docencia, se deberá medir sus antecedentes como constructos separados (tangibles, seguridad y resultado) y la calidad de servicio con la especificación unidimensional multi-ítem.

En segundo lugar, las fuerzas de las relaciones estructurales varían de acuerdo al modelo elegido. Si se adopta el enfoque de antecedentes, los programas de mejora deberán estar enfocados en lograr mayor calidad de servicio de docencia; si se adoptan los enfoques formativo o reflexivo, se deberán enfocar en lograr mayor satisfacción estudiantil, de modo que se obtengan intenciones de comportamiento positivas.

En ninguno de los modelos el valor tiene efecto directo sobre las intenciones de comportamiento de postdocencia, de modo que su medición puede resultar innecesaria para el mejoramiento global del servicio de docencia.

## **9. LIMITACIONES E INVESTIGACIONES FUTURAS**

A pesar de la parsimonia del modelo de antecedentes, es necesario seguir investigando la posibilidad de generalizar el modelo propuesto, llevando a cabo estudios en otras universidades e institutos de educación superior. Específicamente, se deben comprobar tres aspectos importantes: a) la superioridad del modelo de antecedentes frente a los modelos formativo y reflexivo de evaluación del servicio de docencia; b) la mínima contribución de los elementos tangibles para mejorar la calidad de servicio; y c) el hecho que el valor percibido del servicio de docencia no contribuya de ninguna manera a generar intenciones de comportamiento de postdocencia en los estudiantes.

Por otro lado, se debe tener en cuenta que la fuerza de las relaciones del modelo pueden ser susceptibles de cambiar con el tiempo, por lo cual es necesario realizar estudios de carácter longitudinal.

Por último, podría ser interesante incluir en el modelo a los antecedentes del valor percibido del servicio de docencia (valor funcional, epistémico, del dinero, condicional, social, etc.) (Lin *et al.*, 2005) y analizar si éstos contribuyen a incrementar el efecto del valor percibido sobre las intenciones de comportamiento de postdocencia.

## **REFERENCIAS**

- Abdullah, F. (2006): "Measuring service quality in higher education: HEdPERF versus SERVPERF", *Marketing Intelligence & Planning*, 24 (1): 31–47.
- Alén, M.E.; Fraiz, J.A. (2006): "Evaluación de la relación existente entre la calidad de servicio, la satisfacción y las intenciones de comportamiento en el ámbito del turismo termal", *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, 15 (3): 171–184.



- Asubonteng, P.; McCleary, K.J.; Swan, J.E. (1996): "SERVQUAL revisited: a critical review of service quality", *Journal of Service Marketing*, 10 (6): 62–81.
- Banwet, D.K.; Datta, B. (2003): "A study of the effect of perceived lecture quality on post-lecture intentions", *Work Study*, 52 (5): 234–243.
- Bollen, K. (1989): "Structural equations with latent variables", John Wiley & Sons, New York, NY.
- Boulding, W.; Kalra, A.; Staelin, R.; Zeithaml, V.A. (1993): "A dynamic process model of service quality: from expectations to behavioral intentions", *Journal of Marketing Research*, 30: 7–27.
- Brady, M.K.; Cronin, J.J.; Brand, R.R. (2002): "Performance-only measurement of service quality: a replication and extension", *Journal of Business Research*, 55: 17–31.
- Brady, M.K.; Knight, G.A.; Cronin, J. Jr.; Tomas G.; Hult, M.; Keillor, B.D. (2005): "Removing the contextual lens: a multinational, multi-setting comparison of service evaluation models", *Journal of Retailing*, 81 (3): 215–230.
- Carman, J.M. (1990): "Consumer perceptions of service quality: an assessment of the SERVQUAL dimensions", *Journal of Retailing*, 66 (1): 33–55.
- Carman, J.M. (2000): "Patient perceptions of service quality: combining the dimensions", *Journal of Services Marketing*, 14 (4): 337–352.
- Choi, K.S.; Cho, W.H.; Lee S.; Lee, H.; Kim, C. (2004): "The relationships among quality, value, satisfaction and behavioral intention in health care provider choice: A South Korean study", *Journal of Business Research*, 57: 913–921.
- Churchill, G.A.Jr. (1979): "A paradigm for developing better measures of marketing constructs", *Journal of Marketing Research*, 16 (1): 64–73.
- Coltman, T.; Devinney, T.M.; Midgley, D.F.; Venai, S. (2008): "Formative versus reflective measurement models: Two applications of formative measurement", *Journal of Business Research*, 61(12): 1250–1262.
- Cronin, J.J.; Taylor, S.A. (1992): "Measuring Service Quality: a reexamination and extension", *Journal of Marketing*, 56: 55–68.
- Cupani, M. (2012): "Análisis de Ecuaciones Estructurales: conceptos, etapas de desarrollo y un ejemplo de aplicación", *Revista Tesis*, 1: 186–199.
- Dabholkar, P.A.; Sheperd, C.D.; Thorpe, D.I. (2000): "A comprehensive framework for service quality: an investigation of critical conceptual and measurement issues through a longitudinal study", *Journal of Retailing*, 76 (2): 139–173.
- Dabholkar, P.A.; Thorpe, D.I.; Rentz, J.O. (1996): "A measure of service quality for retail stores", *Journal of the Academy of Marketing Science*, 24: 3–16.
- Diamantopoulos, A. (2008): "Formative indicators: Introduction to the special issue", *Journal of Business Research*, 61(12): 1201–1202.
- Domínguez, M.; Blancas, F.J.; Guerrero, F.M.; González, M. (2011): "A Critical Review to Construct Composite Indicators", *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 11: 41–70.

- Fedriani, E.M.; Martín, A.M. (2011): “A Multidimensional Poverty Indicator Based on Euclidean Geometry”, *Revista de Ciencias Sociales (RCS)*, XVII (4): 625–639.
- García, M.A. (2011): “Análisis causal con ecuaciones estructurales de la satisfacción ciudadana con los servicios municipales”. Proyecto Fin de Máster. Universidad de Santiago de Compostela.
- Grönroos, C. (1984): “A service quality model and its marketing implications”, *European Journal of Marketing*, 18 (4): 36–44.
- Howell, R.D.; Breivik, E.; Wilcox, J.B. (2007): “Is Formative Measurement Really Measurement? Reply to Bollen (2007) and Bagozzi (2007)”, *Psychological Methods*, 12 (2): 238–245.
- Janda, S.; Trocchia, P.J.; Gwinner, K.P. (2002): “Consumer perceptions of internet retail service quality”, *International Journal of Service Industry Management*, 13 (5): 412–431.
- Jarvis, C.B.; MacKenzie, S.B.; Podsakoff, P.M. (2003): “A critical review of construct indicators and measurement model misspecification in marketing and consumer research”, *Journal of Consumer Research*, 30:199–218.
- Johnson, R.A.; Wichern, D.W. (1998): “Applied multivariate statistical analysis”. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Kahn, J.H. (2006): Factor analysis in Counseling Psychology research, training and practice: Principles, advances and applications. *The Counseling Psychologist*, 34, 1–36.
- Kline, R.B. (2005): Principles and practice of structural equation modeling. New York: Guilford.
- Ladhari, R. (2008): “Alternative measures of service quality: a review”, *Managing Service Quality*, 18 (1): 65–86.
- Ladhari, R. (2009): “Service quality, emotional satisfaction, and behavioral intentions: A study in the hotel industry”, *Managing Service Quality*, 19 (3), 308–331.
- LeBlanc, G.; Nguyen, N. (1997): “Searching for excellence in business education: an exploratory study of customer impressions of service quality”, *International Journal of Educational Management*, 11 (2): 72–79.
- Lin, C.H.; Sher, P.J.; Shih, H.Y. (2005): “Past progress and future directions in conceptualizing customer perceived value”, *International Journal of Service Industry Management*, 16 (4), 318–336.
- Long, J.S. (1983): “Covariance structure models: an introduction to LISREL”, Sage University Paper Series on Quantitative Applications in the Social Sciences, N° 07-034, Newbury Park, CA: Sage.
- Markovic, S. (2006): “Students’ expectations and perceptions in Croatian tourism and hospitality higher education: SERVQUAL versus UNIQUAL”, *South East European Journal of Economics and Business*, 1 (1): 78–88.
- Martínez, R. (1995): “Psicometría: teoría de los test psicológicos y educativos”. Madrid: Síntesis Psicología S.A.
- Martínez-López, F.J.; Gázquez-Abad, J.C.; Sousa, C.M.P. (2012): “Structural Equation Modeling in Marketing and Business Research: Critical Issues and Practical Recommendations”, *European Journal of Marketing*, 47 (1): 1–33.

- Oh, H. (1999): "Service quality, customer satisfaction and customer value: a holistic perspective", *International Journal of Hospitality Management*, 18: 67–82.
- Parasuraman, A.; Zeithaml, V.A.; Berry, L.L. (1985): "A conceptual model of service quality and its implications for future research", *Journal of Marketing*, 49 (4): 41–50.
- Parasuraman, A.; Zeithaml, V.A.; Berry, L.L. (1988): "SERVQUAL: a multiple-item scale for measuring consumer perceptions of service quality", *Journal of Retailing*, 64 (1): 12–40.
- Parasuraman, A.; Zeithaml, V.A.; Berry, L.L. (1991): "Refinement and reassessment of the SERVQUAL scale", *Journal of Retailing*, 67 (4): 420–450.
- Podsakoff, N.; Shen, W.; Podsakoff, P.M. (2006): "The role of formative measurement models in strategic management research: review, critique and implications for future research". En Ketchen, D.J.; Bergh, D.D. (eds.): "*Research Methodology in Strategic Management*", Vol. 3. JAI Press, Amsterdam, pp. 197–252.
- Poza, C.; Fernández, J.A. (2011): "What Factors Explain the Multidimensional Poverty in Spain? An Approach by Means of Structural Equation Models", *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 12: 81–110.
- Sharma, S. (1996): "Applied multivariate techniques". Nueva York: John Wiley & Sons, Inc.
- Snipes, R.L.; Thomson, N.F.; Oswald, S.L. (2006): "Gender bias in customer evaluations of service quality: an empirical investigation", *Journal of Services Marketing*, 20/4: 274–284.
- Spreng, R.A.; Mackoy, R.D. (1996): "An empirical examination of a model of perceived service quality and satisfaction", *Journal of Retailing*, 722: 201–214.
- Taylor, S.A.; Baker, T.L. (1994): "An assessment of the relationship between service quality and customer satisfaction in the formation of consumers' purchase intentions", *Journal of Retailing*, 70 (2): 163–178.
- Taylor S.A.; Nicholson, J.D.; Milan, J.; Valencia Martinez, R. (1997): "Assessing the roles of service quality and customer satisfaction in the formation of the purchase intentions of Mexican consumers", *Journal of Marketing: Theory and Practice*, 5 (1): 78–90.
- Teas, R.K. (1993): "Expectations, performance evaluation, and consumers' perceptions of quality", *Journal of Marketing*, 57 (4): 18–34.
- Ullman, J.D. (1996): "Structural equation modeling". En Tabachnick B.G. y Fidell L.S. (eds.): "Using multivariable statistics", New York: HarperCollins, 709–780.
- Uriel, E.; Aldás, J. (2005): "Análisis multivariante aplicado". Madrid: Thomson.
- Wang, Y.; Lo H.P. (2002): "Service quality, customer satisfaction and behavior intentions", *Info*, 4 (6): 50–60.
- Wilcox, J.B.; Howell, R.D.; Breivik, E. (2008): "Questions about formative measurement", *Journal of Business Research*, 61 (12): 1219–1228.
- Zeithaml, V.A.; Berry, L.L.; Parasuraman, A. (1996): "The behavioral consequences of service quality", *Journal of Marketing*, 60 (2): 31–46.

## ANEXOS

### A.1. BATERÍA PARA LA MEDICIÓN DE LA CALIDAD DE SERVICIO PERCIBIDA DE DOCENCIA

N°	<b>Calidad de servicio percibida de docencia</b>
<b>Tangibles</b>	
CS1	La modernidad y condiciones técnicas del equipo del aula son adecuadas para el desarrollo de la clase ( <i>data show</i> , computadora y accesorios, retroproyector, video, TV, etc.)
CS3	Las condiciones y elementos del aula son adecuados y funcionales para la docencia (pupitres, pizarrón, cortinas, enchufes, marcadores, borrador, etc.)
<b>Seguridad</b>	
CS18	El docente fomenta y respeta la expresión y participación de los estudiantes (Seguridad)
CS20	El docente es consistentemente cortés y respetuoso conmigo (Seguridad)
CS21	El docente mantiene un trato y respeto igualitario (Seguridad)
CS23	El docente promueve la comunicación docente-alumno (Seguridad)
CS24	El docente me da atención individualizada y personalizada (Empatía)
CS25	El docente es muy paciente y tolerante para explicar la materia (Empatía)
<b>Resultado</b>	
CS35	El grado de destrezas adquiridas (cognitivas, actitudinales, volitivas y conductuales) en la clase fue alto
CS36	El docente impartió la materia con un grado de complejidad adecuado
CS38	Los objetivos, la cobertura y profundidad de los temas han sido alcanzadas
CS39	Adquirí competencias profesionales (conceptuales, técnicas, humanas y competitivas) que puedo aplicar para resolver problemas y tomar mejores decisiones
CS40	La clase estuvo orientada al éxito, ya que se incrementaron mis capacidades de liderazgo y emprendedoras

### A.2. BATERÍAS PARA LA MEDICIÓN DE CONSTRUCTOS RELACIONADOS A LA CALIDAD DE SERVICIO DE DOCENCIA

N°	<b>Calidad de servicio global de docencia</b>
CSG1	El docente otorgó un excelente servicio de docencia global
CSG2	El docente otorgó un servicio de docencia de muy alta calidad
CSG3	El docente otorgó un alto estándar de servicio de docencia
CSG4	El docente otorgó un servicio de docencia superior en todos los sentidos
N°	<b>Valor percibido del servicio de docencia</b>
VAL1	La enseñanza que recibí del docente ha sido muy valiosa y útil
VAL2	Lo que recibí en esta clase vale más de lo que pagué
VAL3	Valió la pena dedicar mi tiempo a esta clase, por la enseñanza que recibí
VAL4	Valió la pena gastar mi energía y esfuerzo en esta clase, porque recibí una enseñanza de calidad
N°	<b>Satisfacción global del servicio de docencia</b>
SAT1	Estoy satisfecho de haber pasado clases con el docente
SAT2	Mi elección de pasar clases con el docente fue sabia
SAT3	Creo que hice lo correcto al cursar esta materia con el docente
SAT4	Creo que mi experiencia con este docente ha sido agradable
N°	<b>Intenciones de comportamiento de postdocencia</b>
IC1	Asistiría a otro curso (materia) impartido por el mismo docente
IC2	Recomendaría y animaría a mis compañeros a pasar clases con el docente
IC3	Diré cosas positivas acerca del docente a mis compañeros
IC4	Si fuera una autoridad académica, premiaría al docente por su desempeño
IC6	Permanecería en esta universidad hasta concluir mis estudios, si todos los docentes otorgaran el servicio de calidad que recibí en la clase



UNIVERSIDAD  
PABLO DE  
OLAVIDE  
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA  
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (16). Páginas 121–142.  
Diciembre de 2013. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.  
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=81>

## The Compound DGL/Erlang Distribution in the Collective Risk Model

GÓMEZ DÉNIZ, EMILIO

Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión  
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (Spain)  
Correo electrónico: [egomez@dmc.ulpgc.es](mailto:egomez@dmc.ulpgc.es)

CALDERÍN OJEDA, ENRIQUE

Centre for Actuarial Studies, Department of Economics  
The University of Melbourne (Australia)  
Correo electrónico: [enrique.calderin@unimelb.edu.au](mailto:enrique.calderin@unimelb.edu.au)

### ABSTRACT

In this paper the analysis of the collective risk model assuming Erlang loss, when the claim frequency follows the discrete generalized Lindley distribution, is considered. After providing some new results of this discrete model, analytical expressions for the aggregate claim size distribution in general insurance in the case that the discrete generalized Lindley distribution is assumed as the primary distribution while claim size, the secondary distribution, is modeled using an Erlang( $r$ ) distribution ( $r = 1, 2$ ). Comparisons with the compound Poisson and compound negative binomial are developed to explain the viability of the new compound model in two examples in automobile insurance.

**Keywords:** automobile insurance; collective risk model; Lindley distribution.

**JEL classification:** C13; M20.

**MSC2010:** 97M10; 97M30.

# La distribución compuesta DGL/Erlang en el modelo de riesgo colectivo

## RESUMEN

En este artículo se analiza el modelo de riesgo colectivo asumiendo que la cantidad individual reclamada sigue una función de densidad Erlang y el número de reclamaciones es una variable aleatoria cuya función masa de probabilidad es la generalizada discreta Lindley. En la primera parte de este trabajo se presentan nuevas propiedades de esta distribución discreta; seguidamente, se calculan expresiones analíticas para la cantidad total reclamada en seguros generales cuando la distribución primaria es la generalizada discreta Lindley, asumiendo la densidad Erlang( $r$ ) ( $r = 1, 2$ ) como distribución secundaria. En la ilustración numérica, el nuevo modelo expuesto en este artículo se compara con los modelos compuestos Poisson y Binomial Negativa en dos ejemplos, en el contexto de seguros de automóviles, para mostrar su efectividad.

**Palabras clave:** seguro de automóviles; modelo de riesgo colectivo; distribución Lindley.

**Clasificación JEL:** C13; M20.

**MSC2010:** 97M10; 97M30.



# 1 Introduction

One of the most significant goals of any insurance risk activity is to achieve a satisfactory model for the probability distribution of the total claim amount. The classical collective theory of risk is based on the assumption that the counting process representing the number of claims (known as primary distribution) is a Poisson process and the associated cumulative or compound process representing the total claim amount is thus compound Poisson. Nevertheless, it has been considered in many instances that the number of automobile claims process is not necessarily of Poisson type. It is well-known that collective claim frequencies are characterized by over-dispersion, i.e., the variance is greater than the mean (see Dionne and Vanasse (1989) and Meng *et al.*, (1999)). A key restriction of the Poisson distribution is that the variance equals the mean and, therefore, it seems not suitable for modeling automobile claim frequencies. Therefore, alternative assumptions need to be made concerning the primary distribution in the setting of the collective risk model.

In this paper the discrete generalized Lindley distribution proposed recently by Calderín-Ojeda and Gómez-Déniz (2013) is considered. This model can be viewed as a generalization of the geometric distribution and, thus, an alternative to the negative binomial distribution and the Poisson-inverse Gaussian distribution (see Willmot (1987)). The new distribution is unimodal with the possibility of a zero vertex or a mode greater than zero, depending on the values of the parameters of the distribution. These two features, zero vertex (high percentage of zero values in the empirical distribution (Boucher *et al.* (2007))) and over-dispersion are omnipresent in automobile insurance portfolios. Therefore, the new distribution can be considered as a useful alternative for modeling phenomena of this nature in the context of insurance.

When addressing the aggregate amount of claims for a compound class of policies, and when the new distribution acts as the primary one, a closed expression for the probability density function (pdf) of the total claim amount is obtained assuming that the secondary distribution is *Erlang*( $r, \gamma$ ). This family of loss distributions may arise in insurance settings when the individual claim amount is the sum of exponentially distributed claims. For example, in catastrophe insurance the aggregate claim size of a portfolio of  $r$  insured properties in a particular region where each property is prone to the same risk (e.g. storms, fires) and claim amounts follow an exponential

distribution with parameter  $\gamma$ , would follow an Erlang distribution with parameters  $r$  and  $\gamma$ . Apart from that, by choosing this family of distributions more flexibility is achieved when fitting empirical loss data. Additionally, from the numerical results obtained, it can be considered as alternative to compound Poisson and compound negative binomial models, traditionally used in actuarial literature. See Freifelder (1974), Rolski *et al.* (1999), Nadarajah and Kotz (2006a and 2006b) and Klugman *et al.* (2008) among others, for a comprehensive study of the compound models in the collective risk theory.

After reviewing some of its properties, we consider the question of parameter estimation when both, the moments and maximum likelihood method are considered. Then, the expected frequencies are calculated in two examples based on automobile claim frequencies, and the estimated values are used to plot the right-tail of the probability density function of the aggregate claim size of the compound discrete generalized Lindley distribution for different values of the parameter  $\gamma$ . Next, the results are compared with those obtained by using the compound Poisson and compound negative binomial models.

The rest of the paper is structured as follows. In Section 2, we give some properties of the discrete generalized Lindley distribution such as moments and inverse moments, among other characteristics. Then, parameters are estimated via moments and maximum likelihood methods. In Section 3, analytical expressions for the compound collective risk model are obtained by using the discrete generalized Lindley distribution and the *Erlang*( $r, \gamma$ ) (with  $r = 1, 2$ ) distribution as primary and secondary distributions, respectively. Next in Section 4, the performance of the discrete generalized distribution is evaluated by using two examples in the context of automobile insurance claiming. Later, the obtained results are used to plot the density function of the aggregate claim size of the compound model. Finally, conclusions are given in the last Section.

## 2 DGL as primary distribution

The discrete generalized Lindley distribution (DGL), introduced not long ago by Calderín-Ojeda and Gómez-Déniz (2013), is obtained by discretizing the continuous generalized Lindley distribution proposed in Zakerzadeh and



Dolati (2009) whose survival function is given by

$$\bar{F}(x) = \frac{\alpha(1 + \theta x) + \theta}{\alpha + \theta} \exp(-\theta x), \quad x > 0, \quad (1)$$

for  $\theta > 0$  and  $\alpha \geq 0$ , which generalizes the continuous Lindley distribution (Lindley (1958)) when  $\alpha = 1$  and the classical exponential distribution is obviously obtained when  $\alpha = 0$ .

The DGL distribution has been built by discretizing the continuous survival function (1). This methodology has been used before in reliability and other fields of science and engineering. For instance, Nakagawa and Osaki (1975) derived the discrete Weibull distribution; Roy (2004) studied the discrete Rayleigh distribution; Gómez-Déniz (2010) analyzed a generalization of the geometric distribution using the Marshall and Olkin (1997) scheme; and Gómez-Déniz and Calderín-Ojeda (2011) deduced the discrete Lindley distribution. Properties of this distribution can be seen in Calderín-Ojeda and Gómez-Déniz (2013). The probability mass function (pmf) of the DGL distribution is given by

$$\Pr(X = x) = \lambda^x \frac{\alpha \lambda \log \lambda + \bar{\lambda}(\alpha - \log \lambda^{\alpha x + 1})}{\alpha - \log \lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

for  $\alpha \geq 0$ ,  $0 < \lambda < 1$ ,  $\bar{\lambda} = 1 - \lambda$  and where the reparameterization  $\lambda = \exp(-\theta)$  has been considered. Observe that when  $\alpha = 0$  equation (2) reduces to the geometric distribution and when  $\alpha = 1$  we obtain the discrete Lindley distribution in Gómez-Déniz and Calderín-Ojeda (2011).

The cumulative distribution function is given by

$$\Pr(X \leq x) = 1 - \frac{\alpha - (1 + \alpha(1 + x)) \log \lambda}{\alpha - \log \lambda} \lambda^{1+x}.$$

In addition to the results provided by Calderín-Ojeda and Gómez-Déniz (2013), moments can be easily derived from the probability generating function, which is given by

$$G_X(z) = \frac{\alpha \bar{\lambda}(1 - z\lambda) - [1 - \lambda(1 + \alpha + z(1 - \alpha - \lambda))] \log \lambda}{(1 - \lambda z)^2(\alpha - \log \lambda)}, \quad |z| < 1. \quad (3)$$

The mean and second factorial moment can be obtained from (3) and are given by

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\lambda[\alpha \bar{\lambda} - (\bar{\lambda} + \alpha) \log \lambda]}{\bar{\lambda}^2(\alpha - \log \lambda)}, \quad (4)$$

$$\mathbb{E}(X(X - 1)) = \frac{2\lambda^2[\alpha \bar{\lambda} - (\bar{\lambda} + 2\alpha) \log \lambda]}{\bar{\lambda}^3(\alpha - \log \lambda)}. \quad (5)$$

Successive computation of the factorial moments provides the general expression of the factorial moment of order  $r > 0$

$$\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = \frac{r!\lambda^r[\alpha\bar{\lambda} - (\bar{\lambda} + r\alpha)\log\lambda]}{\bar{\lambda}^{r+1}(\alpha - \log\lambda)},$$

for  $r = 1, 2, \dots$ , which can be proven by induction on  $r$ .

Using Equation (4) together with Equation (5) we obtain, after some computations, the variance of the distribution,

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \frac{\lambda}{\bar{\lambda}^4(\alpha - \log\lambda)^2} [\alpha^2\bar{\lambda}^2 - \alpha\bar{\lambda}(2 + \alpha - (2 - \alpha)\lambda)\log\lambda \\ &+ (\alpha + \bar{\lambda}^2 - \alpha^2\lambda - \alpha\lambda^2)\log^2\lambda]. \end{aligned} \quad (6)$$

Furthermore, it can be easily seen that the mean increases with  $\alpha$  and  $\lambda$  since

$$\frac{\partial\mathbb{E}(X)}{\partial\alpha} = \frac{\lambda\log^2\lambda}{\bar{\lambda}^2(\alpha - \log\lambda)^2} > 0$$

and

$$\frac{\partial\mathbb{E}(X)}{\partial\lambda} = \frac{\log\lambda}{\bar{\lambda}^3(\alpha - \log\lambda)^2} [(\bar{\lambda} + \alpha(1 + \lambda))\log\lambda - \alpha(2\bar{\lambda} + \alpha(1 + \lambda))] > 0.$$

Besides, the ratio of successive probabilities is given by

$$\frac{\Pr(X = x)}{\Pr(X = x - 1)} = \lambda \left( 1 - \frac{\alpha\bar{\lambda}\log\lambda}{\alpha\lambda\log\lambda + \bar{\lambda}(\alpha - (\alpha(x - 1) + 1)\log\lambda)} \right), \quad (7)$$

for  $x = 1, 2, \dots$  where  $\Pr(X = 0) = 1 + \frac{\lambda((1 + \alpha)\log\lambda - \alpha)}{\alpha - \log\lambda}$ .

On the other hand, it is straightforward to see that as  $x$  increases, (7) decreases, and hence, the distribution is unimodal. In addition to this, from (7) it can be shown that the mode is at the origin if  $M(\alpha, \lambda) < 0$ , where

$$M(\alpha, \lambda) = \frac{1}{\log\lambda} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1 + \lambda}{\bar{\lambda}}.$$

When  $M(\alpha, \lambda) > 0$  the mode is at  $[M(\alpha, \lambda)]$ , where  $[\cdot]$  denotes the integer part. If  $[M(\alpha, \lambda)]$  is an integer, then there are joint modes at  $M(\alpha, \lambda) - 1$  and  $M(\alpha, \lambda)$ . Finally, if  $M(\alpha, \lambda) < 0$  then the mode is at zero.

The ratio between the variance and mean has been calculated for different values of the parameters and they are shown in Table 1. As it can be observed, the ratio is larger than one for the considered values of  $\alpha$  and  $\lambda$ . Therefore, it seems that the coefficient of variation is always larger than 1.

Table 1: Ratio between variance and mean of the DGL distribution for different values of  $\alpha$  and  $\lambda$ .

$\alpha \backslash \lambda$	0.25	0.50	0.75	1.00	2.00	5.00	10.00	25.00
0.10	1.1278	1.1300	1.1270	1.1220	1.0997	1.0579	1.0301	1.0066
0.20	1.2889	1.2922	1.2852	1.2749	1.2349	1.1713	1.1338	1.1045
0.30	1.4975	1.4998	1.4865	1.4698	1.4122	1.3324	1.2897	1.2579
0.40	1.7773	1.7743	1.7516	1.7267	1.6505	1.5575	1.5116	1.4888
0.50	2.1700	2.1540	2.1171	2.0816	1.9850	1.8806	1.8327	1.8000
0.60	2.7553	2.7139	2.6556	2.6063	2.4870	2.3722	2.3231	2.2903
0.70	3.7247	3.6260	3.5356	3.4681	3.3228	3.1986	3.1488	3.1165
0.80	5.6090	5.3982	5.2591	5.1676	4.9925	4.8594	4.8093	4.7777
0.90	10.9914	10.5434	10.3292	10.2056	9.9960	9.8544	9.8042	9.7733

Similarly, in Figure 1, the pmf (2) has been plotted for different values of  $\lambda$  and  $\alpha$ . As it can be observed from the graphs, the distribution has longer right-tail when the parameter  $\lambda$  is close to 1 and  $\alpha$  increases. Furthermore, the charts confirm that the distribution is always unimodal and the mode moves to the right when both parameters increase, showing a great versatility. On the other hand, for smaller values of  $\alpha$ , there is a substantial effect on the probabilities and, of course, on the values of the mean, mode and variance.

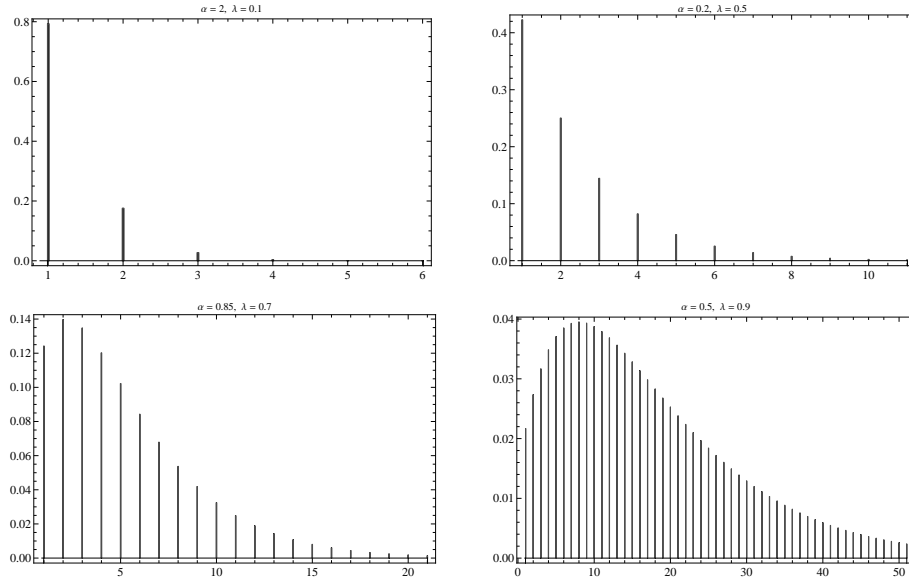


Figure 1: Probability mass function of DGL distribution for different values of  $\alpha$  and  $\lambda$

## 2.1 Parameter estimation

Moment estimators can be easily obtained by using equations (4) and (5). They are achieved by equating expression (4) to the sample mean  $\bar{x}_1$ ; then, by isolating  $\alpha$  in this equation and plugging its expression into equation (5), we obtain after some algebra that

$$\frac{2\lambda}{\bar{\lambda}^2}(2\bar{x}_1\bar{\lambda} - \lambda) = \bar{x}_2, \quad (8)$$

where  $\bar{x}_2$  is the sample second factorial moment. Now, by solving the latter equation for  $\lambda$  we obtain the moment estimator of  $\lambda$  which is given by

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \frac{2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \sqrt{4\bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_2}}{\bar{x}_2 + 4\bar{x}_1 + 2}, \\ \hat{\lambda}_2 &= \frac{2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \sqrt{4\bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_2}}{\bar{x}_2 + 4\bar{x}_1 + 2}. \end{aligned}$$

As it can be seen, it might not be unique. Finally, by replacing  $\lambda$  by  $\hat{\lambda}$  in (8) the moment estimator for  $\alpha$  is achieved.

Next, these moment estimators can be used as starting values to calculate maximum likelihood estimators. For that reason, let us assume that  $\underline{x} =$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$  is a random sample of size  $n$  from the pmf (2) with sample mean  $\bar{x}$ . The log-likelihood function is

$$\ell(\alpha, \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i \log \lambda - n \log[\alpha - \log \lambda] + \sum_{i=1}^n \log[\alpha \lambda \log \lambda + (1 - \lambda)(\alpha - \log \lambda^{\alpha x_i + 1})]. \quad (9)$$

The normal equations are obtained by taking first derivative with respect to both parameters. They are given by

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} &= -\frac{n}{\alpha - \log \lambda} \\ &+ \sum_{x=1}^n \frac{1 + \lambda(\log \lambda - 1) + (x_i(\lambda - 1)) \log \lambda}{\alpha \lambda \log \lambda + (1 - \lambda)(\alpha - (\alpha x_i + 1) \log \lambda)} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{\bar{x}}{\lambda} + \frac{n}{\lambda(\alpha - \log \lambda)} \\ &+ \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda \log \lambda(\alpha(x_i + 1) + 1) - (1 - \lambda)(\alpha x_i + 1)}{\alpha \lambda \log \lambda + (1 - \lambda)(\alpha - (\alpha x_i + 1) \log \lambda)} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

The solutions of the normal equations (10) and (11) provide the maximum likelihood estimates of  $\alpha$  and  $\lambda$ . These values can be easily obtained by a numerical method or direct numerical search for the global maximum of the log-likelihood surface given in (9). The second partial derivatives can be used to approximate standard errors of these estimates. They are provided in the Appendix.

### 3 Distribution of the total claim amount

As mentioned above, one of the primary targets of any insurance risk activity is to obtain a satisfactory model for the probability distribution of the total claim amount. The collective theory of risk is based on the assumption that the counting process representing the number of claims is a Poisson process and the associated cumulative or compound process representing the total claim amount is thus compound Poisson.

The classical collective risk model is described as follows. A distribution for the number of claims in the time interval  $(0, t]$  which is denoted as  $N(t)$ ,  $t > 0$ , and it is assumed that  $N(0) = 0$ . And the distribution of the total claim amount in the interval  $(0, t]$ , denoted by  $S(t)$  if  $t > 0$  and  $S(0) = 0$ .

In general, it is assumed that  $S(t)$  has only step sample functions (i.e., the sample paths of  $S(t)$  only change vertically at times of claims). Thus,  $\{N(t), t \geq 0\}$  is a counting process, and  $\{S(t), t \geq 0\}$  the associated cumulative process.

A relaxed simple form for the distribution of the total claim amount may be obtained if the individual claim size distribution is independent of time. Let us now denote by  $X_i$  the amount of the  $i^{\text{th}}$  claim for  $i = 1, 2, \dots$ . It is also assumed that  $N$  and  $X_i$  are independent (conditional on distribution parameters). There is an extensive body of literature on modeling the risk process. For instance, Freifelder (1974), Rolski *et al.* (1999), Nadarajah and Kotz (2006a and 2006b) and Klugman *et al.* (2008) among others. Estimation of the annual loss distribution by modeling the frequency and severity of losses is a well-known actuarial technique. It is also used for modeling solvency requirements in the insurance industry (Sandström (2006) and Wüthrich (2006)).

Then, the total claim amount  $S$  is the sum of the individual claim sizes, that is,  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  for  $N > 0$  while  $S = 0$  for  $N = 0$ . Traditionally, collective risk theory assumes Poisson and exponential distributions as primary and secondary distributions, respectively. In addition to this, it is well-known (see Klugman *et al.* (2008) and Rolski *et al.* (1999); among others) that the pdf of the sum  $S$  is given by

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N = n) f^{n*}(x), \quad (12)$$

where  $\Pr(N = n)$  denotes the probability of  $n$  claims (primary distribution) and  $f^{n*}(x)$  is the  $n^{\text{th}}$  fold convolution of  $f(x)$ , the pdf of the claim amount (secondary distribution). Recall that the convolution of two densities  $f$  and  $g$  on the positive real line is

$$(f * g)(z) = \int_0^z f(\tau)g(z - \tau) d\tau.$$

Erlang loss distributions may arise in insurance settings when the individual claim amount is the sum of exponentially distributed claims. For example, in catastrophe insurance the aggregate claim size of a portfolio of  $r$  insured properties in a particular region where each property is prone to the same risk (e.g. storms, fires) and claim amounts follows an exponential distribution with parameter  $\gamma$ , would follow an Erlang distribution with parameters  $r$  and  $\gamma$ .

**Result 1** Let  $X_1, \dots, X_n$  be  $n$  independent and identically distributed random variables following an Erlang( $r, \gamma$ ) distribution. Then, the  $n^{\text{th}}$  fold convolution of exponential distribution has a closed-form expression and it is given by

$$f^{*n}(x) = \frac{\gamma^{rn}}{(rn-1)!} x^{rn-1} e^{-\gamma x}, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Proof.** The result follows by summing  $n$  independent and identically distributed random variables with pdf  $Erlang(r, \gamma)$ . ■

In this regard, the compound Poisson model has been traditionally considered when the size of a single claim is modeled by an exponential distribution (e.g.  $Erlang(1, \gamma)$ ), chiefly because of the complexity of the collective risk model under other probability distributions such as Pareto and log-normal distributions.

In the compound Poisson/exponential case (see Rolski *et al.* (1999) and Hernández-Bastida *et al.* (2009); among others) the density of the random variable aggregate claim size is given by

$$f_s(x) = \sqrt{\frac{\gamma\theta}{x}} e^{-(\theta+\gamma x)} I_1\left(2\sqrt{\theta\gamma x}\right), \quad x > 0, \quad (13)$$

while  $f_s(0) = e^{-\theta}$ . Here,  $\theta > 0$  and  $\gamma > 0$  are the parameters of the Poisson and exponential distributions, respectively and

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}, \quad z \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{R},$$

represents the modified Bessel function of the first kind.

Additionally, the negative binomial distribution with parameters  $r > 0$  and  $0 < p < 1$  could also be assumed as primary distribution. In this case, the pdf of the random variable total claim amount (see Rolski *et al.* (1999)) is now given by the expression

$$f_s(x) = \gamma r p^r (1-p) e^{-\gamma x} {}_1F_1(1+r; 2; \gamma(1-p)x), \quad x > 0, \quad (14)$$

where  ${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$  is the confluent hypergeometric function and  $f_s(0) = p^r$ .

Our goal is to develop an alternative to the compound Poisson and negative binomial models by considering the DGL distribution proposed in this manuscript.

The next result shows that a closed-form expression is obtained when the DGL and exponential distributions are assumed as primary and secondary distributions, respectively.

**Proposition 1** *If we assume a DGL distribution with parameters  $0 < \lambda < 1$  and  $\alpha \geq 0$  as primary distribution and an exponential distribution with parameter  $\gamma > 0$  as secondary distribution, then the pdf of the random variable  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  is given by*

$$f_S(x) = \frac{\gamma\lambda}{\alpha - \log \lambda} [\alpha\bar{\lambda} - (\bar{\lambda} + \alpha(1 - (2 - x\gamma\bar{\lambda})\lambda)) \log \lambda] e^{-\gamma\bar{\lambda}x}, \quad x > 0, \quad (15)$$

while  $f_S(0) = 1 + \frac{\lambda((1+\alpha)\log \lambda - \alpha)}{\alpha - \log \lambda}$ .

**Proof.** By assuming that the claim amount follows an exponential distribution with parameter  $\gamma > 0$ , then the  $n^{\text{th}}$  fold convolution of exponential distribution is given by (see Klugman *et al.* (2008) and Rolski *et al.* (1999))

$$f^{*n}(x) = \frac{\gamma^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\gamma x}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Then, the pdf of the random variable  $S$  is given by

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{\alpha\lambda \log \lambda + \bar{\lambda}(\alpha - \log \lambda^{\alpha n+1})}{\alpha - \log \lambda} \frac{\gamma^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\gamma x} \\ &= \frac{e^{-\gamma x}}{\alpha - \log \lambda} \left[ (\alpha\lambda \log \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\gamma)^n}{(n-1)!} x^{n-1} \right. \\ &\quad \left. + \bar{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - \log \lambda^{\alpha n+1}) \frac{(\lambda\gamma)^n}{(n-1)!} x^{n-1} \right] \\ &= \frac{\gamma\lambda e^{-\gamma\bar{\lambda}x}}{\alpha - \log \lambda} [\alpha\lambda \log \lambda + \bar{\lambda}(\alpha - (1 + \alpha + x\alpha\gamma\lambda) \log \lambda)]. \end{aligned}$$

Then, after some algebra, the proposition holds. ■

Observe that the pdf of the aggregate claim amount has a jump of size  $\Pr(S = 0)$  at the origin.

In the compound Poisson/*Erlang*(2,  $\gamma$ ) the density of the random variable aggregate claim size is given by

$$f_s(x) = x\gamma^2 \lambda e^{-\lambda - \gamma x} {}_0F_2(; 3/2, 2; 1/4 x^2 \gamma^2 \lambda), \quad x > 0, \quad (16)$$

while  $f_S(0) = e^{-\theta}$ . Here,  $\theta > 0$  and  $\gamma > 0$  are the parameters of the Poisson and *Erlang*(2,  $\gamma$ ) distributions respectively and  ${}_0F_2(\cdot; \cdot; \cdot)$  the generalized hypergeometric function.

Moreover, in the compound negative binomial/*Erlang*(2,  $\gamma$ ) the pdf of the random variable total claim amount is now given by the expression

$$f_s(x) = \gamma^2 r p^r (1-p) e^{-\gamma x} {}_1F_2(1+r; 3/2, 2; 1/4 \gamma^2 (1-p)x^2), \quad x > 0, \quad (17)$$



where  ${}_1F_2(\cdot; \cdot; \cdot)$  is the generalized hypergeometric function and  $f_S(0) = p^r$ .

The next result shows that a closed-form expression is obtained when the DGL and  $Erlang(2, \gamma)$  are assumed as primary and secondary distributions, respectively.

**Proposition 2** *If we assume a DGL distribution with parameters  $0 < \lambda < 1$  and  $\alpha \geq 0$  as primary distribution and an  $Erlang(2, \gamma)$  distribution with parameter  $\gamma > 0$  as secondary distribution, then the pdf of the random variable  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  is given by*

$$f_S(x) = \frac{e^{-x\gamma}}{2(\alpha - \log \lambda)} \left[ x \alpha \gamma^2 (-1 + \lambda) \lambda \cosh(x \gamma \sqrt{\lambda}) + \gamma \sqrt{\lambda} \sinh(x \gamma \sqrt{\lambda}) (-2\alpha(-1 + \lambda) + (-2 - \alpha + 2\lambda + 3\alpha\lambda) \log \lambda) \right],$$

$$x > 0, \quad (18)$$

$$\text{while } f_S(0) = 1 + \frac{\lambda((1+\alpha)\log \lambda - \alpha)}{\alpha - \log \lambda}.$$

**Proof.** Again, by assuming that the claim amount follows an  $Erlang(2, \gamma)$  distribution with parameter  $\gamma > 0$ , then its  $n^{\text{th}}$  fold convolution is given by

$$f^{*n}(x) = \frac{\gamma^2 n}{(2n-1)!} x^{2n-1} e^{-\gamma x}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Then, the pdf of the random variable  $S$  is given by

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{\alpha \lambda \log \lambda + \bar{\lambda}(\alpha - \log \lambda^{\alpha n+1})}{\alpha - \log \lambda} \frac{\gamma^{2n}}{(2n-1)!} x^{2n-1} e^{-\gamma x} \\ &= \frac{e^{-\gamma x}}{\alpha - \log \lambda} \left[ (\alpha \lambda \log \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \gamma^2)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} \right. \\ &\quad \left. + \bar{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - \log \lambda^{\alpha n+1}) \frac{(\lambda \gamma^2)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} \right] \\ &= \frac{e^{-\gamma x}}{\alpha - \log \lambda} \left[ (\alpha \lambda \log \lambda) \gamma \sqrt{\lambda} \sinh(x \gamma \sqrt{\lambda}) - \bar{\lambda} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\gamma \sqrt{\lambda}}{2} ((\alpha + 2) \log \lambda - 2\alpha) \sinh(\gamma \sqrt{\lambda} x) + \alpha \gamma \sqrt{\lambda} x \log \lambda \cosh(\gamma \sqrt{\lambda} x) \right] \end{aligned}$$

Then, after some algebra, the proposition holds. ■

Again, note that the pdf of the aggregate claim amount has a jump of size  $\Pr(S = 0)$  at the origin.

## 4 Numerical applications

In this section, two set of real data based on a portfolio of automobile insurance claims are considered. These data were taken from a sample of 298 automobile liability policies (Klugman *et al.*, 1998, pp. 244) for the first example and, from a sample of 7842 automobile liability policies that appeared in Seal (1982) for the second case. The number of claims for each policy and the corresponding observed frequency are given in the first two columns (from left to right) of Table 2 and Table 3, respectively. These data are over-dispersed and right skewed; besides, the proportion of zeros in the sample is about one third and two thirds of the total number of claims for the first and second example respectively. Additionally, the first set shows a long and thick right-tail. Expected frequencies are also provided for the Poisson ( $\mathcal{P}o$ ) distribution and the negative binomial (NB) distribution obtained after estimating parameters by maximum likelihood. As it can be inferred from the results, the DGL distribution provides a slightly better fit to data than NB distribution as judged by maximum of the log-likelihood ( $\ell_{max}$ ) function ( $-528.619$  as opposed to  $-528.769$ ) for the first data set and similar fit for the second one. As expected, the results obtained for the Poisson distribution are worse than the previous ones since this model is unable to capture the over-dispersion phenomenon.

Table 2: Fit to data for automobile insurance claims. Klugman *et al.* (2008)

Claim number	Observed	Fitted		
		$\mathcal{P}_o$	NB	DGL
0	99	54.00	95.85	96.65
1	65	92.24	75.83	74.29
2	57	78.77	50.35	50.23
3	35	44.85	31.29	31.71
4	20	19.15	18.79	19.17
5	10	6.54	11.04	11.26
6	4	1.86	6.39	6.47
7	0	0.45	3.66	3.66
8	3	0.09	2.08	2.04
9	4	0.01	1.17	1.13
10	0	0.00	0.66	0.61
11	1	0.00	0.37	0.33
12	0	0.00	0.20	0.18
Total	298	298	298	298

Table 3: Fit to data for automobile insurance claims. Seal (1982)

Claim number	Observed	Fitted		
		$\mathcal{P}_o$	NB	DGL
0	5147	4783.18	5147.94	5149.94
1	1859	2364.75	1859.84	1852.33
2	595	584.55	586.33	591.902
3	167	96.33	175.85	177.28
4	54	11.90	51.39	50.96
5	14	1.17	14.78	14.24
6	5	0.09	4.20	3.90
7	0	0.00	1.18	1.05
8	0	0.00	0.33	0.28
9	0	0.00	0.09	0.07
10	0	0.00	0.02	0.02
11	1	0.00	0.00	0.00
Total	7842	7842	7842	7842

A summary of results for each example is exhibited in Table 4. The standard errors of the parameters have been approximated from Fisher's information matrix.

Table 4: Summary of results

	Table 1	Table 2
Estimators		
$\hat{\theta}$	1.708 (0.075)	0.494 (0.007)
$(\hat{r}, \hat{p})$	(1.473, 0.463) (0.259, 0.046)	(1.341, 0.730) (0.098, 0.015)
$(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$	(0.501, 0.695) (0.396, 0.031)	(0.239, 0.621) (0.148, 0.011)
$(\chi^2, \text{d.f.}, p - \text{value})$		
$\mathcal{P}o$	(151.73, 5, 0.000)	(809.59, 5, 0.000)
NB	(3.14, 4, 0.533)	(0.75, 4, 0.944)
DGL	(2.64, 4, 0.618)	(0.90, 4, 0.923)
$\ell_{\max}$		
$\mathcal{P}o$	-577.002	-7608.77
NB	-528.769	-7429.60
DGL	-528.619	-7429.85

The estimates displayed in the latter Table have been used to plot the right tail of the probability density function of equations (16), (17) and (18) to calculate the right-tail cumulative probabilities for different values of  $\gamma$ . The graphs are displayed in Figure 2 and 3 for the first and second data set respectively. From the examples considered and the values of the parameter  $\gamma$  chosen, the compound DGL model provides higher probabilities in the right tail of the distribution than the compound NB and compound Poisson models

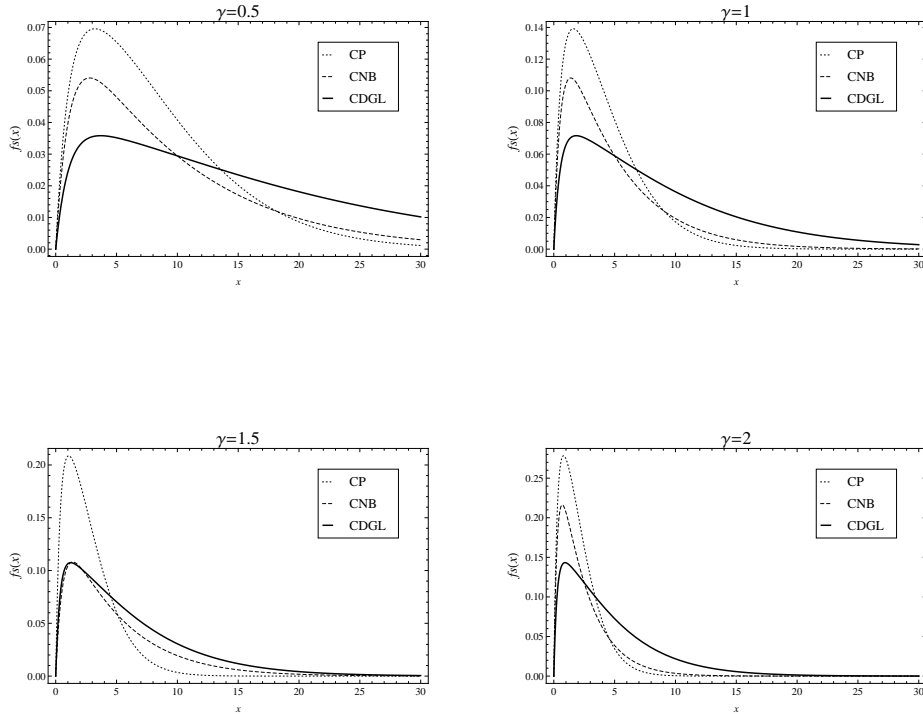


Figure 2: Right tail of the pdf of the aggregate claim size for different values of  $\gamma$  for Compound Poisson (CP), Compound Negative Binomial (CNB) and Compound DGL (CDGL) models. Dataset 1.

The compound model introduced in this paper seems suitable for modeling extreme data when the severity component follows an  $Erlang(2, \gamma)$  distribution. This result will surely be improved if the same analysis is conducted with more heavy-tailed distributions to model the severity component. Likewise, distribution (15) seems a feasible model to be used in the framework of collective risk theory.

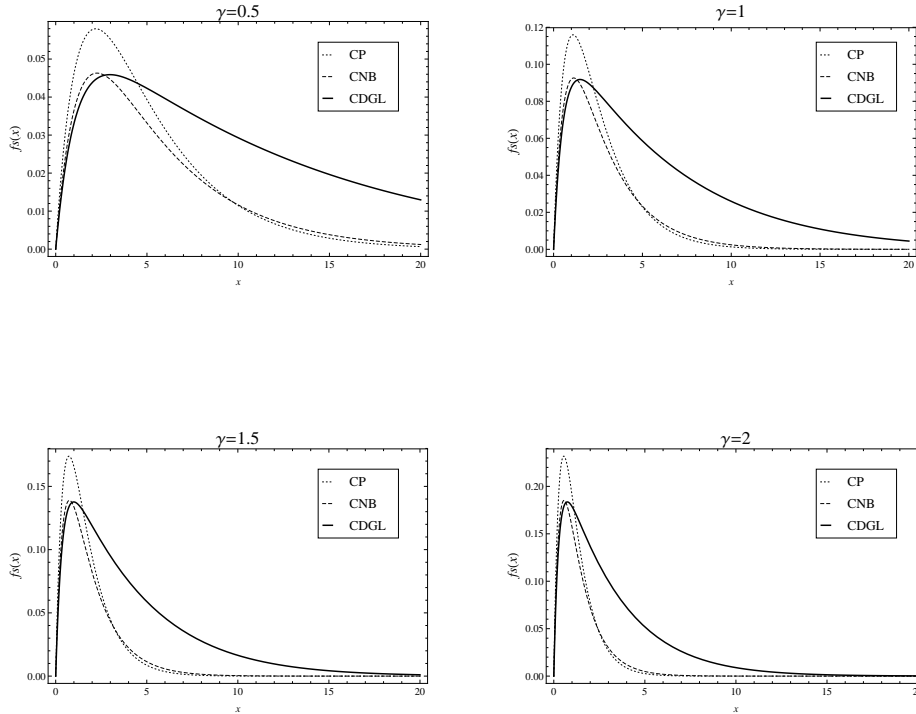


Figure 3: Right tail of the pdf of the aggregate claim size for different values of  $\gamma$  for Compound Poisson (CP), Compound Negative Binomial (CNB) and Compound DGL (CDGL) models. Dataset 2.

## 5 Conclusions

In this paper we have shown the applicability of the discrete generalized Lindley (DGL) distribution as a feasible model to describe the number of claims in automobile insurance framework. In addition to this, this discrete model seems appropriate to be used as a primary distribution in collective risk theory when the  $Erlang(2, \gamma)$  distribution acts as secondary distribution. The compound model obtained holds no additional complications since its closed-form expression can be deduced analytically. From the numerical results obtained, it can be considered as alternative to the compound Poisson and compound negative binomial models.

## Acknowledgements

EGD was partially funded by ECO2009-14152 (MICINN, Spain).

## References

- Boucher, J.P., Denuit, M. and Guillén, M. (2007). Risk classification for claim counts: a comparative analysis of various zero-inflated mixed Poisson and hurdle models. *North American Actuarial Journal*, 11, 4, 110–131.
- Calderín-Ojeda, E. and Gómez-Déniz, E. (2013). An Extension of the Discrete Lindley Distribution with Applications. *Journal of the Korean Statistical Society*, 42, 3, 371–373.
- Dionne, G. and Vanasse, Ch. (1989). A generalization of automobile insurance rating models: the negative binomial distribution with a regression component. *Astin Bulletin*, 19, 2, 199–212.
- Freifelder, F. (1974). Statistical decision theory and procedures, in *Credibility theory and applications*, P.M. Kahn, ed., Academic Press, New-York, 71–88.
- Gómez-Déniz, E. (2010). Another generalization of the geometric distribution. *Test*, 19, 399-415.
- Gómez-Déniz, E. and Calderín-Ojeda, E. (2011). The discrete Lindley distribution: properties and applications. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81, 11, 1405–1416.
- Hernández-Bastida, A., Gómez-Déniz, E. and Pérez-Sánchez, J.M. (2009). Bayesian Robustness of the Compound Poisson Distribution under Bidimensional Prior: an Application to the Collective Risk Model. *Journal of Applied Statistics*, 36, 8, 853–869.
- Klugman, S.A., Panjer, H.H. and Willmot, G.E. (2008). *Loss Models: From Data to Decisions*. Third Edition. Wiley.
- Lindley, D.V., (1958). Fiducial distributions and Bayes' theorem. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 20, 3, 102–107.



- Marshall, A.W. and Olkin, I. (1997). A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, 84, 3, 641–652.
- Meng, S., Wei, Y. and Whitmore, G. A. (1999). Accounting for individual over-dispersion in a bonus-malus system. *Astin Bulletin*, 29, 2, 327–337.
- Nadarajah, S. and Kotz, S. (2006a). Compound mixed Poisson distributions I. *Scandinavian Actuarial Journal*, 3, 141–162.
- Nadarajah, S. and Kotz, S. (2006b). Compound mixed Poisson distributions II. *Scandinavian Actuarial Journal*, 3, 163–181.
- Nakagawa, T. and Osaki, S. (1975). The discrete Weibull distribution. *IEEE Trans. Reliab.*, 24, 5, 300–301.
- Rolski, T., Schmidli, H. Schmidt, V. and Teugel, J. (1999). *Stochastic processes for insurance and finance*. John Wiley & Sons.
- Roy D. (2004). Discrete Rayleigh distribution. *IEEE Trans. Reliab.*, 53, 5, 255–260.
- Sandström, A. (2006). *Solvency: Models, Assessment and Regulation*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- Seal, H.L. (1982). Mixed Poisson-an ideal distribution of claim number? *MVSV*, 293–295.
- Willmot, G.E. (1987). The Poisson-inverse Gaussian distribution as an alternative to the negative binomial. *Scandinavian Actuarial Journal*, 113-127.
- Wüthrich, M.V. (2006). Premium liability risks: Modelling small claims. *Bull. Swiss Association Actuaries*, 1, 27–38.
- Zakerzadeh, Y. and Dolati, A. (2009). Generalized Lindley Distribution. *Journal of Mathematical Extension*, 3, 2, 13–25.

## Appendix

Here we show the second partial derivatives of the log-likelihood function. They are as follows.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha^2} &= \frac{n}{(\alpha - \log \lambda)^2} - \sum_{x=1}^n \left[ \frac{\bar{\lambda} + (\lambda - \bar{\lambda}x_i) \log \lambda}{\alpha \lambda \log \lambda + \bar{\lambda}(\alpha - (\alpha x_i + 1) \log \lambda)} \right]^2, \\
\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda^2} &= -\frac{\bar{x}}{\lambda^2} - \frac{n(\alpha - \log \lambda - 1)}{\lambda^2(\alpha - \log \lambda)^2} \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda \log \lambda (\alpha(x_i + 1) + 1) - \bar{\lambda}(\alpha x_i + 1)}{\alpha \lambda \log \lambda + \bar{\lambda}(\alpha - (\alpha x_i + 1) \log \lambda)} \\
&\quad + \frac{1}{\bar{\lambda}} \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha(x_i + 1) + 1)(1 + \log \lambda) + \alpha x_i + 1}{\alpha \lambda \log \lambda + \bar{\lambda}(\alpha - (\alpha x_i + 1) \log \lambda)} \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda \log \lambda (\alpha(x_i + 1) + 1) - \bar{\lambda}(\alpha x_i + 1)}{\alpha \lambda \log \lambda + \bar{\lambda}(\alpha - (\alpha x_i + 1) \log \lambda)} \\
&\quad \times \frac{\alpha(\log \lambda + 1) - \alpha + (\alpha x_i + 1) \log \lambda - \bar{\lambda}(\alpha x_i + 1)}{\alpha \lambda \log \lambda + \bar{\lambda}(\alpha - (\alpha x_i + 1) \log \lambda)}, \\
\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda \partial \alpha} &= -\frac{n}{\lambda(\alpha - \log \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda \log \lambda - \bar{\lambda}x_i + \lambda x_i \log \lambda}{\alpha \lambda \log \lambda + \bar{\lambda}(\alpha - (\alpha x_i + 1) \log \lambda)} \\
&\quad + \frac{1}{\bar{\lambda}} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\lambda} + (\lambda - \bar{\lambda}x_i) \log \lambda}{\alpha \lambda \log \lambda + \bar{\lambda}(\alpha - (\alpha x_i + 1) \log \lambda)} \\
&\quad \times \frac{(1 + \alpha(x_i + 1)) \log \lambda - \bar{\lambda}(1 + \alpha x_i)}{\alpha \lambda \log \lambda + \bar{\lambda}(\alpha - (\alpha x_i + 1) \log \lambda)},
\end{aligned}$$

from these expressions Fisher's information matrix can be approximated in the conventional way.



## Recuperación de información automática de ofertas de empleo: estudio de las competencias de los profesionales de recursos humanos en el mercado de trabajo español

VALENCIA GARCÍA, OLGA

Departamento de Economía Aplicada

Universidad de Burgos (España)

Correo electrónico: oval@ubu.es

### RESUMEN

El acceso a la información sobre las competencias demandadas por las empresas puede realizarse mediante un estudio prospectivo de las ofertas de empleo publicadas por los empleadores. Ahora bien, éstas incluyen una gran cantidad de datos de naturaleza cuantitativa y cualitativa, pero principalmente de carácter textual, por lo que han de ser analizadas con un enfoque apropiado para obtener un conocimiento detallado de competencias en determinadas áreas y perfiles profesionales.

El objetivo de este trabajo es proporcionar evidencia empírica de las competencias requeridas a los profesionales del área de recursos humanos tanto a nivel general como a nivel de diferentes perfiles de puestos dentro del área. La identificación de sus competencias se realiza mediante la aplicación de métodos estadísticos a textos procesados automáticamente, lo cual prescinde de categorizaciones previas de las competencias con el fin de preservar los textos en su formato original.

El estudio se realiza a partir del corpus textual *Competencias Soft*, construido mediante la recopilación de cientos de ofertas de empleo para profesionales del área, publicadas por reclutadores o empleadores directos en el mercado de trabajo español. Después de un proceso de homogeneización y lematización del corpus textual, se han extraído los términos clave de las competencias *soft* en Recursos Humanos, determinando así las competencias globales más solicitadas. Asimismo, la combinación de la información textual sobre las competencias requeridas con los datos cualitativos referentes a categorías de puestos ha permitido determinar los textos modales y esbozar las competencias ligadas a perfiles profesionales específicos. Finalmente, la visualización de las asociaciones entre ciertas competencias y determinados puestos se ha realizado mediante el Análisis de Correspondencias de una tabla léxica agregada.

**Palabras clave:** competencias; recursos humanos; estadística textual; mercado de trabajo.

**Clasificación JEL:** J240; C38.

**MSC2010:** 62H30; 62P25.

Artículo recibido el 15 de octubre de 2013 y aceptado el 26 de noviembre de 2013.

# Automatic Information Retrieval of Job Offers: Case Study on Competencies of HR Professionals in Spanish Labor Market

## ABSTRACT

Access to information on competencies demanded by companies may be performed by a prospective study of job offers posted by employers. But, these include a large amount of quantitative and qualitative but mainly textual data, so an appropriate approach should be chosen in order to obtain a detailed knowledge of competencies in certain areas and professional profiles.

The aim of this paper is to provide empirical evidence of the competencies required to HR professionals both generally and in terms of different job profiles in this area. The identification of competencies is accomplished by the application of statistical methods to automatically processed texts, which dispenses with previous categorization of competences in order to preserve the texts in their native format.

The research is based on a textual corpus on ‘Soft Competencies’, which has been built from hundreds of job offers for HR professionals, posted by either recruitment consultants or direct employers within the labor Spanish market. After a process of standardization and lemmatization of the textual corpus, the key terms on HR soft competencies has been drawn and thus the overall most requested competencies. Likewise, combining the textual information about competencies with qualitative data concerning job profiles, modal texts may be determined and different competency profiles can be outlined. Finally, the visualization of the associations between soft competencies and HR job profiles has been carried out by means of a Correspondence Analysis of an aggregated lexical table.

**Keywords:** competencies; human resources; textual statistics; labor market.

**JEL classification:** J240; C38.

**MSC2010:** 62H30; 62P25.



## **1. INTRODUCCIÓN**

El actual contexto económico presenta enormes retos a los profesionales de Recursos Humanos (RRHH), que deben desarrollar nuevas funciones y tareas en relación con negociaciones restrictivas de salarios y condiciones laborales, reducciones de costes de personal reteniendo a las personas clave para la organización, atracción de nuevo talento, motivación y mantenimiento de un buen clima laboral, todo ello en un entorno complejo. En este trabajo se pretende ahondar en el conocimiento de las competencias que solicitan las empresas a los profesionales del área para superar estos desafíos.

Los análisis sobre competencias profesionales se elaboran frecuentemente a partir de encuestas de opinión a expertos, en las que se solicita la valoración de los ítems de listados de competencias establecidos previamente por los investigadores. En ocasiones, la utilización de entrevistas o de cuestionarios con preguntas abiertas permite contar con datos textuales que, generalmente, son categorizados como fase preliminar del tratamiento estadístico.

En este estudio, la investigación de las competencias demandadas por el mercado español a los profesionales de RRHH utiliza la información proporcionada por las propias empresas en las ofertas de empleo como fuente de datos y las herramientas de Estadística Textual como metodología de análisis. El estudio se centra en las competencias no técnicas o emocionales y extrae competencias clave para el conjunto de la profesión y perfiles de competencias por tipos de puestos. Pretende aportar evidencia de la aplicación del análisis estadístico a datos textuales para extraer información del mercado directamente, sin tratamientos ni categorizaciones previas.

El trabajo comienza con una delimitación de conceptos que comprende la noción de competencia, tipos de competencias, competencias no técnicas o emocionales y una breve revisión de los estudios sobre competencias en el ámbito de RRHH. A continuación, se describe con detalle la investigación empírica realizada sobre las competencias de los profesionales de RRHH demandadas por las empresas en España, incluyendo tanto la configuración de la base de datos cualitativos y textuales, como la metodología de análisis estadístico de los textos aplicada. Finalmente, se presentan los resultados de la investigación, es decir, los términos que denotan las competencias, tanto a nivel global del área, como de perfiles específicos. La exposición concluye con algunos elementos para la discusión.

## **2. DELIMITACIÓN CONCEPTUAL**

Desde los estudios pioneros de McClelland (1973), Boyatzis (1982) y Spencer y Spencer (1993), el concepto de competencia se revela complejo y con multitud de dimensiones, que incluyen aspectos del saber, saber hacer, saber ser, querer hacer y poder hacer. A pesar de tratarse de una noción en un proceso continuo de construcción, es posible referirse a una competencia como una capacidad humana medible que puede estar compuesta por conocimientos, habilidades o destrezas y características personales o cualquier combinación de dos o más de los atributos mencionados (Hoge, Tondora y Marrelli, 2005). Los conocimientos implican concienciación, información y comprensión de los

hechos, reglas, principios, pautas, conceptos, teorías o procesos necesarios para desarrollar una tarea de forma excelente. Se adquieren mediante el aprendizaje y la experiencia. Las habilidades tienen que ver con la capacidad física o cognitiva demostrada para desarrollar con éxito una tarea con un amplio abanico de resultados posibles. Son más difíciles de desarrollar y suelen tener un componente de capacidad innata. Por último, las características personales son capacidades de naturaleza emocional derivadas de actitudes, valores, motivaciones o rasgos de personalidad, con elevada influencia en los hábitos de trabajo, en las formas de interactuar con otros y en la manera de conducirse que dan lugar a un resultado excelente.

La literatura ha utilizado una gran diversidad de términos para referirse a las competencias –características subyacentes, comportamientos observables, cualidades latentes–, pero muchos autores coinciden en conceptualizarlas como una integración de atributos relacionados causalmente con un desempeño superior (Hofrichter y Spencer (1996); Levy-Levoyer, 1997; Sanchez y Levine (2009); Pereda y Berrocal, (2011)). Los modelos de competencias como herramienta de gestión de las organizaciones no suelen hacer referencia a los requisitos relativos a los puestos de trabajo (titulación, conocimientos específicos, experiencia concreta), sino que identifican un reducido número de competencias menos tangibles aplicables a múltiples funciones o familias de puestos, que parecen tener mayor capacidad explicativa del desempeño excelente (HayGroup (2000); Sánchez y Levine (2009); Campion *et al.* (2011)). Este tipo de competencias, que en nuestro trabajo referiremos como competencias “no técnicas o emocionales”, ha recibido distintas denominaciones. En la tipología de Bunk (1994), donde se diferencian cuatro tipos de competencias englobaría las competencias metodológicas, sociales y participativas. Buckley y Monks (2004) las denomina “meta-cualidades”, y Buller y McEvoy (2012) se refieren a capacidades no técnicas. El desarrollo de la teoría de la Inteligencia Emocional de Goleman (2006) y su conexión con la noción de competencia de Boyatzis (1982) ha supuesto un impulso del papel de estas competencias no técnicas o emocionales. Dado que la inteligencia emocional determina la capacidad para aprender a manejar el entorno personal y social, si el dominio de esa capacidad se refleja en el ámbito profesional puede transformarse en competencias.

Investigaciones recientes han encontrado evidencia que relaciona competencias con resultados, mostrando la relevancia de este tipo de competencias no vinculadas a los conocimientos técnicos. Goleman (2006), Boyatzis (2008), Boyatzis (2009), Guillén, Saris y Boyatzis (2009) y Boyatzis *et al.* (2012) demuestran que las competencias relacionadas con la inteligencia cognitiva, emocional y social son buenos predictores de la eficiencia en roles de liderazgo, ejecutivos, profesionales y comerciales en muchos sectores de actividad.

Los modelos de gestión por competencias tienen como propósito influir en los comportamientos de los empleados en su trabajo diario, de acuerdo con las líneas estratégicas de la organización. Una de las claves para que esto se produzca es la inteligibilidad del modelo, lo que supone delimitar una lista

corta de competencias claramente redactadas que puedan ser comprendidas e interiorizadas por todos. En este sentido, Levy-Levoyer (1997) subraya que el vocabulario seleccionado para presentar las competencias debe corresponder a las actividades, a las estrategias y a la cultura de la organización. En la misma línea, Sánchez y Levine (2009) señalan que los modelos de competencias válidos conforman una especie de “lenguaje interno” o “jerga” en la organización. Sin embargo, en muchos casos las empresas optan por soluciones estandarizadas ofrecidas por el mercado, más o menos flexibles y adaptables. Los diccionarios de competencias –como por ejemplo el de Alles (2006)– suelen ser el fruto de la experiencia de empresas consultoras en muchos sectores y organizaciones. Aunque no siempre están respaldados por una investigación suficiente, su utilización evita el coste del desarrollo de un modelo personalizado, facilita la homogeneización del lenguaje en la organización y asegura que cualquier competencia potencialmente relevante sea considerada. Cuando las competencias se usan con fines de reclutamiento y selección, la ausencia de términos comunes y de un vocabulario homogéneo puede representar una barrera: los candidatos pueden enfrentarse a un lenguaje confuso y malinterpretarlo, especialmente si se trata de candidatos con experiencia más vinculados a su profesión que a organizaciones concretas.

La valoración de las competencias genéricas en un proceso de selección está basada en la metodología de la entrevista conductual o de incidentes críticos. Como explican Pereda y Berrocal (2011), ésta se basa en el principio de que el mejor predictor de la conducta futura es la conducta pasada y pretende obtener ejemplos conductuales de la vida laboral, académica y personal del candidato, susceptibles de ser utilizados como predictores de su comportamiento en el trabajo. Su eficacia requiere una planificación rigurosa a partir del perfil de exigencias del puesto e incluye preguntas basadas en definiciones operativas de las competencias y en los comportamientos relacionados con un desempeño superior. Por ello, es necesaria la elaboración de escalas de valoración cuantitativa para cada competencia, es decir, el establecimiento de niveles con sus correspondientes descriptores en cada una de ellas. De este modo, el entrevistador recaba información suficiente para determinar si el candidato posee cada competencia clave y establece el nivel en el que ésta se presenta.

En cuanto a las competencias relativas a los profesionales de RRHH, Brewster, Farndale y Van Ommeren (2001) dirigen una encuesta a las Asociaciones de Dirección de Personal de varios países para analizar las competencias clave que se demandan a estos profesionales. Más recientemente se han presentado las conclusiones de un exhaustivo estudio empírico de ámbito internacional sobre competencias en niveles directivos (Brockbank *et al.*, 2013). En él se indica que los responsables de RRHH deben dar respuesta a los equilibrios inherentes a las actuales empresas globales:

- Externo/Interno: traducir tendencias expectativas externas en acciones internas.
- Empresa/Personas: centrarse en resultados de negocio y en mejora del capital humano.
- Individuo/Organización: mejorar capacidades individuales y de la organización.

- Acción/Sostenibilidad: considerar RRHH no como una actividad aislada (un programa de capacitación, de retribución o de formación) sino como un conjunto de soluciones sostenibles e integradas.
- Pasado/Futuro: respetar lo conseguido pero configurar el futuro.
- Administrativos/Estratégicos: atender tanto los procesos administrativos del día a día como la estrategia a largo plazo.

Para alcanzar estos equilibrios, se identifica una serie de competencias integradas en seis dimensiones que combina tres perspectivas (Tabla 1). En primer lugar, desde la perspectiva del contexto, el responsable de RRHH debe ser “socio estratégico del negocio” (interpreta el contexto global, descifra las expectativas de los grupos de interés, colabora en la elaboración de la estrategia empresarial). En segundo lugar, desde la perspectiva de la organización, debe ser un profesional “impulsor de capacidades”, “líder del cambio”, “innovador e integrador de RRHH” y “promotor de la tecnología”. Finalmente, desde la perspectiva individual, se trata de un profesional que debe gozar de “credibilidad personal”, que hace lo que promete, construye relaciones personales de confianza, ejerce una influencia positiva y está comprometido con la profesión. Como puede apreciarse, todas ellas, especialmente la “credibilidad personal”, constituyen buenos predictores del desempeño individual e inciden en los resultados del negocio.

Perspectiva	Dimensiones	Puntuación media (1 a 5)	Impacto en efectividad percibida	Impacto en resultados empresariales
Contexto	<i>Strategic Positioner</i>	3,89	17%	15%
Organización	<i>Capability Builder</i>	3,97	16%	18%
	<i>Change Champion</i>	3,93	16%	16%
	<i>HR Innovator and Integrator</i>	3,90	17%	19%
	<i>Technology Proponent</i>	3,74	12%	18%
Individual	<i>Credible Activist</i>	4,23	22%	14%
$R^2$ múltiple			42,5%	8,4%

Tabla 1. Dimensiones de las competencias de los responsables de RRHH.  
Elaboración propia a partir del estudio de competencias de Brockbank *et al.* (2013)

A nivel nacional, cabe mencionar el estudio de Romeo, Yepes y Carro (2010) sobre las competencias que determinan la inserción laboral en áreas afines al ámbito de los RRHH. En él se analiza la opinión de una muestra de egresados de la titulación de Relaciones Laborales junto a la de una muestra de empresas en la que éstos han realizado prácticas. Los autores construyen un modelo integrado de competencias dividido en tres bloques (“Saber”, “Saber hacer”, “Saber ser”) y elaboran cuestionarios con listados de competencias que son valoradas por los egresados y por los empleadores. La comparación de las puntuaciones otorgadas por cada uno de los dos grupos a cada uno de los ítems propuestos revela una considerable coincidencia en las valoraciones a nivel general, pero también



destacadas diferencias en algunas competencias. Las discrepancias más relevantes son, por un lado, las existentes en el bloque de competencias del “Saber” (especialmente, en conocimientos académicos y conocimientos de gestión de personas) en el que las puntuaciones de los egresados son superiores a las de las empresas y, por otro lado, en algunas competencias del bloque “Saber ser” (autonomía y asertividad, iniciativa, actitud disposicional), donde las empresas otorgan una valoración más elevada. Se aprecia, en suma, una sobrevaloración relativa de algunas competencias técnicas por parte de los egresados y una mayor valoración de determinadas competencias no técnicas o emocionales por parte de las empresas. El presente trabajo, enfocado en el mercado nacional, se centra en las competencias requeridas por los empleadores pero con una metodología diferente a la de los estudios citados anteriormente: se trata de un análisis estadístico exploratorio que prescinde de categorizaciones previas de competencias y extrae las competencias de los textos originales publicados por las empresas en sus procesos de reclutamiento.

### **3. PROSPECCIÓN DE LA INFORMACIÓN Y MÉTODOLÓGÍA DE ANÁLISIS: ESTUDIO EMPÍRICO DE LAS COMPETENCIAS DEMANDADAS EN LAS OFERTAS DE EMPLEO**

El estudio de las competencias demandadas por el mercado español se ha efectuado a partir de la información proporcionada por las propias empresas a través de sus ofertas de trabajo. Dado que la información incluida en estas ofertas es, en gran medida, de naturaleza textual, hemos acudido a diversas herramientas de análisis estadístico de datos textuales.

La Estadística Textual realiza un estudio cuantitativo de los textos a través de sus unidades léxicas, sean formas gráficas, lemas o segmentos repetidos (Lebart, Salem y Bécue, 2000). Para identificarlas, se requiere efectuar una segmentación previa del texto conforme a la aplicación de criterios bien definidos. Posteriormente, se efectúa una selección de las unidades léxicas más repetidas mediante la aplicación de un umbral de frecuencia. Las unidades léxicas así seleccionadas se someten al tratamiento estadístico. En algunos casos, la información textual se cruza con la de variables cualitativas asociadas, con el fin de realizar comparaciones de vocablos entre modalidades de individuos. Las herramientas de Estadística Textual utilizadas se caracterizan por respetar el texto en su formato original, sin realizar categorizaciones previas. En esta investigación se ha trabajado con glosarios de los vocablos más frecuentes, inventarios de segmentos repetidos, concordancias, vocablos característicos, textos modales, tablas léxicas y Análisis de Correspondencias de tablas léxicas agregadas.

#### **3.1 Configuración de la base de datos**

La base de datos original está constituida por 1715 ofertas de empleo de la categoría RRHH. Las ofertas fueron publicadas en el periodo de febrero a mayo y de octubre a diciembre de 2011 en algunos de los principales portales de empleo en España: Infojobs, Infoempleo, Servicio Estatal Público de Empleo, Monster, Laboris y Expansión y Empleo. Para cada oferta se ha registrado información relativa a la fecha de la oferta, fuente de publicación, título y tipo de puesto, tipo de empresa, experiencia requerida, tipo y duración del contrato, formación requerida –tipo de titulación

universitaria, en su caso, conocimiento de idiomas y manejo de *software* específico–, funciones del puesto y competencias requeridas.

Esta investigación se centra en el estudio de la variable textual “Competencias”, que ha sido asociada a la variable cualitativa “Tipo de puesto”. La obtención de la variable “Competencias” se ha realizado a partir del corpus textual “Competencias”, constituido por la yuxtaposición de todas las competencias recogidas en las ofertas: tanto las competencias técnicas (estudios y titulaciones requeridas, conocimientos específicos, idiomas, *software*, experiencia técnica) como las competencias no técnicas o emocionales. El análisis pormenorizado de cada oferta ha permitido extraer el texto correspondiente a estas últimas y configurar el corpus “Competencias Soft”. Este corpus se obtiene mediante la yuxtaposición de los textos relativos a las competencias no técnicas o emocionales de las 595 ofertas de trabajo que incluyen expresamente este tipo de competencias. El corpus “Competencias Soft” se ha sometido a un proceso de depuración, homogeneización y lematización previo a la identificación de las unidades léxicas que se analizan con métodos de Estadística Textual.

La depuración –corrección de posibles errores– precede a la homogeneización de los textos, que pretende que dos palabras idénticas pero escritas de diferente manera no cuenten como dos, sino como una única palabra. Este procedimiento cuenta con algunas pautas generales (reconversión de fechas en una única expresión, evitar las abreviaturas, etc.), pero requiere también considerar las características del texto, el campo y la finalidad de la investigación (Bécue, 2000). La lematización del texto consiste en establecer unas reglas de identificación que permitan reagrupar las formas gráficas correspondientes a diferentes flexiones de una misma raíz en las mismas unidades, denominadas lemas. Algunas de las operaciones realizadas son la agrupación de las formas verbales en infinitivo, los sustantivos en singular y los adjetivos en masculino singular. En definitiva, en nuestro caso, las unidades léxicas que se someten a análisis son formas, lemas o segmentos repetidos que en adelante denominaremos “vocablos”. La información de estos vocablos se ha cruzado con la variable cualitativa de la tipología de puestos. El estudio detallado de las ofertas de trabajo ha permitido el establecimiento de seis modalidades de puestos para el área de RRHH: Directivo, Responsable de área(s), Técnico, Administrativo, Consultor o Formador y Otros.

### **3.2. Metodología de análisis**

Las principales herramientas de Estadística Textual aplicadas en este estudio se exponen a continuación.

#### *3.2.1. Vocablos característicos o especificidades*

Esta técnica tiene un fundamento probabilístico. Las especificidades son vocablos excepcionalmente frecuentes en los textos relativos a una modalidad de individuos. Pueden ser especificidades positivas, si están sobre-representadas en un grupo de individuos o especificidades negativas, en el caso de que estén infra-representadas en dicho grupo. A estos vocablos están asociados unos "valores-test" que miden la desviación existente entre la frecuencia relativa de un vocablo en una modalidad de individuos y la frecuencia relativa global calculada sobre el conjunto de individuos. Esta desviación es

normada para poder ser considerada como una realización de variable normal centrada reducida, en la hipótesis de distribución aleatoria del vocablo estudiado en las modalidades. Bajo esta hipótesis, el valor-test tiene un 95% de posibilidades de estar comprendido entre -1,96 y 1,96. El cálculo se basa en una aproximación asintótica de la distribución hipergeométrica a la normal (Lebart, Salem y Berry, 1998). Sean:

$n_{ij}$ : frecuencia del vocablo  $i$  en el texto  $j$  (competencias de la oferta de trabajo  $j$ );

$n_i$ : frecuencia del vocablo  $i$  en el corpus textual (“Competencias Soft”);

$n_j$ : frecuencia de los vocablos del corpus textual en el texto  $j$  (competencias de la oferta de trabajo  $j$ );

$N$ : frecuencia total, es decir, número de vocablos en el corpus textual (“Competencias Soft”).

La frecuencia observada  $n_{ij}$  de la celda  $(i, j)$  sigue un modelo hipergeométrico cuya esperanza matemática  $m(i, j)$  y cuya varianza  $s^2(i, j)$ , se estiman bajo la hipótesis de independencia como:

$$m(i, j) = \frac{n_{ij}}{N} \quad s^2(i, j) = n_{ij} \left(1 - \frac{n_i}{N}\right) \left(\frac{N - n_j}{N - 1}\right)$$

Por lo tanto, el valor-test para la celda  $(i, j)$  se calcula como:

$$t(i, j) = \frac{n_{ij} - m(i, j)}{s(i, j)}$$

y converge a una distribución normal estandarizada bajo la hipótesis de distribución aleatoria de los vocablos en los distintos textos (competencias *soft* de las ofertas de trabajo).

### 3.2.2 Textos modales

Los textos modales son los textos (“competencias soft” de las ofertas de trabajo) más representativos de una modalidad de individuos. Permiten observar los vocablos en su contexto y caracterizar partes del texto voluminosas por porciones más pequeñas. La representatividad se determina a través de criterios estadísticos. Siguiendo a Lebart, Salem y Berry (1998), hemos empleado dos criterios:

- El criterio I se basa en una ordenación de los vocablos característicos desde el más característico (mayor valor-test positivo) hasta el más anti-característico (menor valor-test negativo). El rango es menor cuando el vocablo es más característico. A partir de esto, se asocia a cada texto el rango medio de los vocablos característicos que contiene: si ese rango medio es pequeño significa que dicho texto contiene muchos vocablos característicos del grupo.
- El criterio II considera un grupo de textos como un conjunto de vectores-fila y el perfil léxico medio de ese grupo se obtiene calculando la media de los correspondientes vectores-fila. Como se observa en la Figura 1, si denominamos  $T$  a la tabla léxica (tabla que cruza los  $k$  textos con los  $v$  vocablos seleccionados) y  $L$  a la tabla léxica agregada (tabla que cruza los  $v$  vocablos con las  $p$  modalidades de individuos), es posible calcular distancias entre los textos (filas de  $T$ ) y los agrupamientos de textos por modalidades (columnas de  $L$  o filas de  $L'$ ) dado que ambos están representados por vectores de un mismo espacio. Esas distancias expresan la desviación entre el perfil de un texto y el perfil medio de la modalidad a la que pertenece.

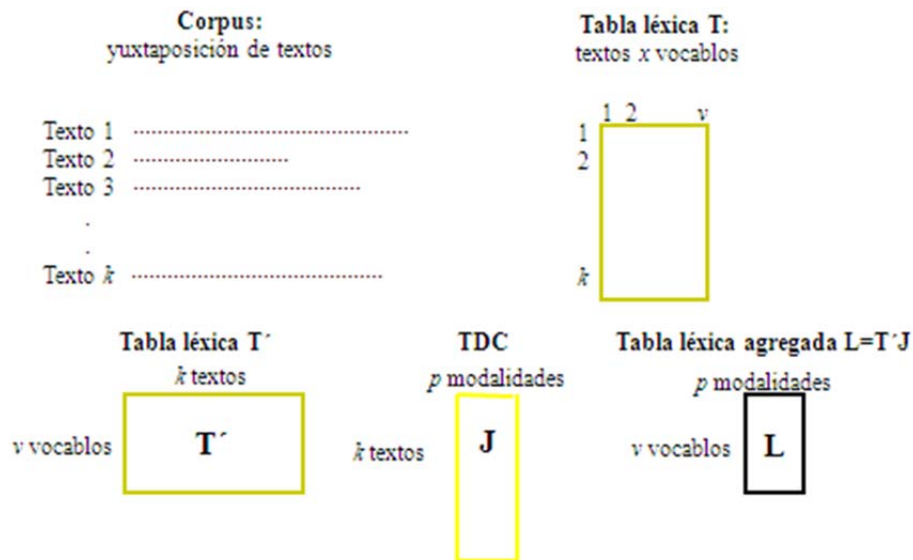


Figura 1: Corpus textual, tabla léxica (T), tabla disyuntiva completa (J) y tabla léxica agregada (L)  
Elaboración propia a partir de Lebart, Salem y Berry (1998)

La distancia elegida entre perfiles de frecuencias es la distancia Chi-2, por sus propiedades distribucionales. La distancia entre la fila  $i$  de T y la columna  $m$  de L se expresa del modo siguiente:

$$d^2(i, m) = \sum_{j=1}^v \frac{t_{..}}{t_{.j}} \left( \frac{t_{ij}}{t_{i.}} - \frac{l_{jm}}{l_{.m}} \right)^2,$$

siendo:

$t_{..}$  el número total de vocablos de la tabla T;

$t_{.j}$  la frecuencia del vocablo  $j$  en la tabla T (suma de las frecuencias de la columna  $j$  de T);

$t_{i.}$  la frecuencia del texto  $i$  en la tabla T (suma de las frecuencias de la fila  $i$  de T);

$l_{jm}$  la frecuencia del vocablo  $j$  en la modalidad de individuos  $m$  (elemento  $j$ -ésimo de la columna  $m$  de L);

$l_{.m}$  la frecuencia total de la modalidad de individuos  $m$ .

Para cada tipo de puesto definido, se realiza una ordenación creciente de distancias, de manera que las competencias más representativas de cada tipo de puesto corresponderán a las distancias más pequeñas.

### 3.2.3. Análisis Factorial de Correspondencias de una tabla léxica agregada

La información de la tabla léxica agregada L, que como hemos visto (Figura 1) es una tabla de contingencia de vocablos  $\times$  partes del texto (en nuestro caso, textos relativos a modalidades de puestos), puede ser analizada mediante un Análisis Factorial de Correspondencias. El análisis se centra en los perfiles de frecuencias de los vocablos, es decir, en los vectores cuyas componentes son cada una de los vocablos utilizados por un grupo de individuos, poniendo de manifiesto las diferencias de perfiles entre los distintos vocablos.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Considerando que la interpretación de un perfil puede ser compleja -por qué un grupo de individuos utiliza ciertos vocablos con ciertas frecuencias-, la interpretación de las diferencias entre perfiles es más fácil (por ejemplo, podemos observar que ciertos grupos de individuos tienen perfiles próximos entre sí y alejados de los de otros).

La extracción de un sub-espacio factorial permite explicar gran parte de la variabilidad global y proyectar sobre él cada uno de los elementos (filas y columnas) de L, la tabla léxica agregada.<sup>2</sup> De esta manera, se obtiene una representación esquemática de la información de la tabla léxica agregada, a partir de la cual se pueden visualizar las asociaciones. Eso significa conseguir una tipología de individuos, en función del vocabulario que emplean, una tipología de vocablos en función de los tipos de individuos que las utilizan y relacionar ambas. En nuestro caso, se trata de visualizar tipologías de puestos, en función de las “competencias soft” que requieren, tipologías de vocablos sobre “competencias soft”, en función de las modalidades de puesto que los solicitan y relacionar ambas.

#### **4. RESULTADOS: COMPETENCIAS DEMANDADAS A LOS PROFESIONALES DE RRHH EN ESPAÑA**

##### **4.1. Competencias generales en el área de RRHH**

El vocabulario de las competencias no técnicas o emocionales retenido aplicando un umbral de frecuencia de cinco consta de 223 formas/lemas. La Tabla 2 presenta un extracto del glosario de los sustantivos, adjetivos y verbos con mayores frecuencias:

<b>Sustantivos</b>		<b>Adjetivos</b>		<b>Verbos</b>	
CAPACIDAD	298	ACOSTRUMBRADO	36	TRABAJAR	97
PERSONA	196	DINÁMICA	35	VIAJAR	56
EQUIPO	165	COMUNICATIVO	26	BUSCAR	37
TRABAJO	153	ORIENTADO	24	TENER	18
ORIENTACIÓN	114	INTERNO	23	DESARROLLAR	16
HABILIDADES	95	INMEDIATA	21	APORTAR	13
COMUNICACIÓN	91	CAPAZ	20	APRENDER	12
DISPONIBILIDAD	91	ANALÍTICO	19	ADAPTARSE	10
CLIENTE	80	COMERCIAL	19		
INICIATIVA	76	HABITUADO	17		
NEGOCIACIÓN	50	AUTÓNOMO	16		
RESULTADOS	50	FLEXIBLE	16		
ORGANIZACIÓN	47	METÓDICO	16		
PERSONAS	42	INTERPERSONAL	14		
NIVEL	34	HUMANO	13		
FLEXIBILIDAD	33	ORGANIZATIVA	12		
PROACTIVIDAD	32	TRABAJADOR	12		
AUTONOMÍA	30	CLARA	11		
PROFESIONAL	30	EMPÁTICA	11		
DOTES	29	ENTUSIASTA	11		
SERVICIO	29	ACTIVO	10		
EXPERIENCIA	26	COMPROMETIDO	10		
GESTIÓN	26	CREATIVO	10		
PRESENCIA	26	INTERNACIONAL	10		
LIDERAZGO	25	MOTIVADO	9		
PRESIÓN	25	COMUNICADOR	8		

Tabla 2. Vocabulario de las “Competencias Soft” en RRHH

<sup>2</sup> La exposición detallada del Análisis Factorial de Correspondencias, incluyendo la extracción del sub-espacio factorial y el cálculo de coordenadas, contribuciones absolutas y relativas tanto de filas como de columnas, puede verse en Lebart, Morineau y Piron (2006).

Para interpretar cada vocablo de manera más precisa, se pueden recuperar los contextos en los que aparece con más frecuencia. A continuación, se muestran los contextos del adjetivo “acostumbrado/a”:

<b>acostumbrada</b>	a trabajar en equipo
<b>acostumbrada</b>	a gran volumen de rotación
<b>acostumbrada</b>	a trabajar en entornos dinámicos
<b>acostumbrada</b>	a trabajar por objetivos
<b>acostumbrada</b>	al trato a todos los niveles tendrá visión estratégica
<b>acostumbrada</b>	a trabajar con plazos de tiempo estipulados
<b>acostumbrada</b>	a gestionar gran volumen de trabajo
<b>acostumbrada</b>	a manejar un alto nivel de información
<b>acostumbrada</b>	a trabajar bajo presión y a priorizar funciones
<b>acostumbrado</b>	a la consecución de objetivos
<b>acostumbrado</b>	a trabajar con volumen y en entornos dinámicos
<b>acostumbrado</b>	a trabajar en equipo y a liderar
<b>acostumbrado</b>	a manejar gran carga administrativa
<b>acostumbrado</b>	a viajar frecuentemente
<b>acostumbrado</b>	al trato diario con trabajadores sindicatos e institución
<b>acostumbrado</b>	a la interlocución en comités de dirección
<b>acostumbrado</b>	a trabajar con fechas límites
<b>acostumbrado</b>	a relacionarse a nivel institucional y con interlocutores
<b>acostumbrado</b>	a la interacción directa con los clientes externos

Del mismo modo, los contextos del sustantivo “orientación”, que permiten desentrañar su significado, son los siguientes:

<b>orientación</b>	al cliente y dotes comerciales
<b>orientación</b>	al cliente interno
<b>orientación</b>	a la calidad y excelencia en el trabajo
<b>orientación</b>	al logro
<b>orientación</b>	hacia las personas
<b>orientación</b>	al cliente y resultados
<b>orientación</b>	a consecución de objetivos
<b>orientación</b>	al detalle y preocupación por el orden
<b>orientación</b>	comercial, habilidades de comunicación
<b>orientación</b>	al trabajo con personas

Además de la repetición de determinados términos, existen expresiones o segmentos cuya utilización es muy frecuente. Los segmentos permiten también contextualizar las formas analizadas y una mejor interpretación de éstas. Presentamos los más repetidos con su frecuencia:

persona dinámica	36
buena presencia	26
gran capacidad	24
cliente interno	20
persona proactiva	19
incorporación inmediata	13
habilidades comunicativas	12
capacidad analítica	12
dotes comerciales	12
trabajar bajo presión	11
clara orientación	9
habilidades sociales	8
capacidad organizativa	8
habilidades comerciales	7
visión estratégica	5

Estas sencillas herramientas, cuya utilización es posible después de la segmentación y cuantificación del corpus textual, nos ofrecen una primera visión de las competencias requeridas en el área de RRHH.

#### 4.2 Competencias por modalidades de puestos en el área de RRHH

Para profundizar en las competencias según la tipología de puestos sugerida, es necesario extraer las especificidades y las respuestas modales de cada tipo de puesto. Cada modalidad de puesto presenta ciertos vocablos característicos, es decir, determinados términos que se incluyen en los textos relativos a ese tipo de puesto en una proporción significativamente superior (especificidades positivas) o significativamente inferior (especificidades negativas). La interpretación de las especificidades se complementa con la lectura de los textos modales que recuperan los contextos. Ambos resultados permiten conformar un cierto perfil de competencias para cada modalidad de puesto.

Las Tablas 3 a 8 contienen el análisis de los términos característicos o especificidades de cada uno de los seis tipos de puesto considerados, tanto las especificidades positivas –se señalan en negrita– como las especificidades negativas. Para complementar este análisis y contextualizar los términos más característicos, se puede consultar el Anexo, que presenta las tablas con los correspondientes textos modales de cada uno de los tipos de puestos (Tablas 3A a 8A).

La lectura de la Tabla 3 indica que las competencias específicas de los “directivos” abarcan actuaciones en el *ámbito internacional*, con capacidad de *visión* –se repite el segmento *visión estratégica*–, *gestión* y organización del *equipo*, con *cualidades* de *comunicación*, que tienen presente y conocen el *negocio* de la empresa. Estos resultados concuerdan con la visión del directivo de RRHH de Ulrich *et al.* (2008) y Brockbank *et al.* (2013) como socio estratégico del negocio que interpreta el contexto global de éste y participa en la definición de la estrategia de la organización.

Especificidades	Porcentaje interno	Porcentaje global	Frecuencia interna	Frecuencia global	Valor-Test	Probabilidad
<b>NIVEL INTERNACIONAL</b>	0,66	0,09	4	4	3,394	0,000
<b>CAPAZ</b>	1,49	0,45	9	20	3,234	0,001
<b>NEGOCIO</b>	0,83	0,16	5	7	3,174	0,001
<b>EQUIPO</b>	6,14	3,71	37	165	3,073	0,001
<b>GESTIÓN</b>	1,66	0,59	10	26	3,001	0,001
<b>COMUNICADOR</b>	0,83	0,18	5	8	2,915	0,002
<b>CUALIDADES</b>	0,66	0,14	4	6	2,651	0,004
<b>VISIÓN</b>	1,33	0,50	8	22	2,507	0,006
PRESENCIA	0,00	0,59	0	26	-2,008	0,022
SERVICIO	0,00	0,65	0	29	-2,187	0,014
PERSONA	2,49	4,41	15	196	-2,506	0,006
RESPONSABLE	0,00	0,90	0	40	-2,765	0,003

Tabla 3. **DIRECTIVO**: especificidades

Los perfiles de competencias de los “responsables de área” o coordinadores de varias áreas del departamento de RRHH destacan por la presencia de *liderazgo*, *tolerancia* (se repite la tolerancia a situaciones de *estrés*), *influencia* y por ser un *profesional proactivo* y *metódico* con *habilidades interpersonales* (Tabla 4). Haciendo de nuevo alusión a las dimensiones de los profesionales de RRHH citadas por Brockbank et al. (2013), se trata de competencias más relacionadas con el resto de dimensiones, particularmente las de credibilidad personal, líder del cambio e impulsor de capacidades.

Especificidades	Porcentaje interno	Porcentaje global	Frecuencia interna	Frecuencia global	Valor-Test	Probabilidad
<b>LIDERAZGO</b>	1,83	0,56	12	25	3,773	0,000
<b>COMITÉ</b>	0,76	0,20	5	9	2,560	0,005
<b>TOLERANCIA</b>	1,22	0,45	8	20	2,555	0,005
<b>INFLUENCIA</b>	0,61	0,14	4	6	2,540	0,006
<b>PROFESIONAL PROACTIVO</b>	0,61	0,14	4	6	2,534	0,006
<b>HABILIDADES INTERPERSONALES</b>	0,46	0,09	3	4	2,271	0,012
<b>PERSONA METÓDICO</b>	0,46	0,09	3	4	2,271	0,012
<b>ESTRATÉGICA</b>	0,61	0,18	4	8	2,050	0,020
<b>ESTRÉS</b>	0,61	0,18	4	8	2,050	0,020
<b>FRUSTRACIÓN</b>	0,61	0,18	4	8	2,050	0,020
PERSONA	2,89	4,41	19	196	-2,026	0,021
TRABAJO	1,83	3,44	12	153	-2,494	0,006
CLIENTE	0,61	1,80	4	80	-2,567	0,005

Tabla 4. **RESPONSABLE DE ÁREA(S):** especificidades

Las competencias no técnicas o emocionales para puestos “técnicos” resaltan el *cliente interno*, la *información*, el *compromiso* y aluden al *trabajo*, el *entorno* y a una *persona flexible* y con *iniciativa* (Tabla 5). Dicho perfil no requiere liderazgo ni aptitudes comerciales sino que se trata más bien de un perfil con proyección interna dentro de la organización.

De la misma manera, las competencias de los “administrativos” (Tabla 6) destacan por el *aprendizaje* y la capacidad de *aprender*, haciendo referencia a la *persona organizada* y *polivalente* y se insiste en las cualidades tanto de la *persona* como de su trabajo en *equipo*.

En cuanto a los puestos de “consultor o formador” (Tabla 7), se trata de personas externas a la organización con cierto enfoque *comercial* y de *venta*, que destaquen por su *experiencia*, su capacidad de *interlocución* y de *integración*.



Especificidades	Porcentaje interno	Porcentaje global	Frecuencia interna	Frecuencia global	Valor-Test	Probabilidad
<b>CLIENTE INTERNO</b>	0,97	0,45	16	20	3,693	0,000
<b>FLEXIBLE</b>	0,73	0,36	12	16	2,847	0,002
<b>INFORMACIÓN</b>	0,37	0,14	6	6	2,803	0,003
<b>TRABAJO</b>	4,45	3,44	73	153	2,688	0,004
<b>ENTORNO</b>	0,73	0,38	12	17	2,577	0,005
<b>PERSONA</b>	5,42	4,41	89	196	2,410	0,008
<b>COMPROMISO</b>	0,55	0,27	9	12	2,392	0,008
<b>INICIATIVA</b>	2,31	1,71	38	76	2,228	0,013
<b>INCORPORACIÓN</b>	0,61	0,34	10	15	2,082	0,019
GESTIÓN	0,18	0,59	3	26	-2,656	0,004
PROPIO	0,00	0,32	0	14	-2,958	0,002
COMERCIALES	0,12	0,59	2	26	-3,167	0,001
COMERCIAL	0,00	0,43	0	19	-3,610	0,000
LIDERAZGO	0,06	0,56	1	25	-3,617	0,000

Tabla 5. **TÉCNICO**: especificidades

Especificidades	Porcentaje interno	Porcentaje global	Frecuencia interna	Frecuencia global	Valor-Test	Probabilidad
<b>APRENDIZAJE</b>	1,41	0,36	8	16	3,394	0,000
<b>ORGANIZADO</b>	3,16	1,55	18	69	2,875	0,002
<b>PERSONA</b>	6,85	4,41	39	196	2,780	0,003
<b>FORMA</b>	0,88	0,20	5	9	2,778	0,003
<b>POLIVALENTE</b>	0,70	0,16	4	7	2,470	0,007
<b>PERSONAL</b>	1,05	0,34	6	15	2,421	0,008
<b>APRENDER</b>	0,88	0,27	5	12	2,246	0,012
<b>EQUIPO PERSONA</b>	0,53	0,11	3	5	2,113	0,017
ORIENTACIÓN	1,23	2,57	7	114	-2,153	0,016

Tabla 6. **ADMINISTRATIVO**: especificidades

Especificidades	Porcentaje interno	Porcentaje global	Frecuencia interna	Frecuencia global	Valor-Test	Probabilidad
<b>COMERCIAL</b>	1,85	0,43	13	19	4,951	0,000
<b>VENTA</b>	0,71	0,11	5	5	3,726	0,000
<b>TÉCNICA</b>	0,57	0,11	4	5	2,782	0,003
<b>INTEGRACIÓN</b>	0,57	0,11	4	5	2,782	0,003
<b>EXPERIENCIA</b>	1,42	0,59	10	26	2,626	0,004
<b>COMERCIALES</b>	1,42	0,59	10	26	2,626	0,004
<b>INTERLOCUCIÓN</b>	1,00	0,34	7	15	2,591	0,005
<b>SERIA</b>	0,57	0,16	4	7	2,184	0,014
<b>BUEN NIVEL</b>	0,57	0,16	4	7	2,178	0,015
INTERNO	0,00	0,52	0	23	-2,076	0,019
EQUIPO	2,14	3,71	15	165	-2,423	0,008

Tabla 7. **CONSULTOR / FORMADOR**: especificidades

Especificidades	Porcentaje interno	Porcentaje global	Frecuencia interna	Frecuencia global	Valor-Test	Probabilidad
<b>INTERESADO</b>	1,85	0,14	5	6	4,433	0,000
<b>COMERCIALES</b>	2,58	0,59	7	26	3,195	0,001
<b>RESULTADOS</b>	3,69	1,13	10	50	3,194	0,001
<b>DON</b>	1,48	0,18	4	8	3,164	0,001
<b>GENTES</b>	1,48	0,18	4	8	3,164	0,001
<b>ACTITUD</b>	1,85	0,43	5	19	2,601	0,005
<b>PERFIL</b>	1,11	0,16	3	7	2,482	0,007
<b>MOTIVADO</b>	1,11	0,20	3	9	2,189	0,014
<b>CLARA ORIENTACIÓN</b>	1,11	0,20	3	9	2,179	0,015
<b>HABILIDADES</b>	0,00	2,14	0	95	-2,835	0,002

Tabla 8. **OTROS**: especificidades

La vocación comercial es aún más acusada en las competencias requeridas especialmente para los puestos que hemos englobado como “Otros”, en los que se requiere personas con *don de gentes*, *interesados* o *motivados* a trabajar por *resultados* y un *perfil* y una *actitud comercial*, dado que se trata en muchos casos de puestos con funciones de venta.

#### 4.3 Visualización de competencias y tipología de puestos

La tabla léxica agregada consta de 223 filas (unidades léxicas que superan el umbral de frecuencia establecido) y 6 columnas (tipos de puestos mencionados). El análisis de los patrones de asociación de filas (términos) y columnas (tipos de puestos) se ha efectuado a través de un Análisis Factorial de Correspondencias (AFC). El AFC extrae ejes factoriales en los que se proyecta la variabilidad total en orden decreciente.

La Tabla 9 recoge los resultados del análisis para los dos primeros factores: las coordenadas de cada tipo de puesto en los factores, las contribuciones absolutas de cada tipo de puesto a la formación de los factores y las contribuciones relativas o calidades de representación de los tipos de puestos en los factores. También se indica el peso (o frecuencia relativa) de cada puesto en el análisis y su distancia al origen de los ejes (distancia euclídea calculada a partir de las coordenadas sobre todos los ejes principales).

El primer factor, que absorbe más de un 28% de la variabilidad total, representa el patrón de comportamiento más relevante de la tabla léxica analizada. Los tipos de puesto que más contribuyen a su formación son los de “Otros”, “Técnico”, “Directivo” y “Administrativo” (mayores contribuciones absolutas). En él se oponen los grupos de “Otros” y “Directivo”, con coordenada positiva, a los grupos de “Administrativo” y “Técnico”, con coordenadas negativas. Teniendo en cuenta además las calidades de representación más elevadas, se puede indicar que el primer factor representa la oposición entre las competencias de “Directivos” y “Otros” frente a las de “Administrativos” y “Técnicos”.



La representación gráfica de los resultados del Análisis Factorial de Correspondencias visualiza una tipología de términos en función de tipos de puestos considerados y cierta tipología de puestos según los términos que definen sus competencias. Como se puede apreciar, los tipos de puesto “Directivo” y “Responsable” se encuentran próximos en el plano, lo que revela perfiles de competencias similares. Del mismo modo, la proximidad entre los grupos “Administrativo” y “Técnico” señala cierta semejanza entre sus perfiles de competencias en el marco general de todos los grupos estudiados. Por el contrario, los perfiles de Directivos y Responsables se encuentran alejados del grupo “Otros” –con muchos puestos comerciales– y también de los grupos de Administrativos y Técnicos.

En suma, los análisis efectuados y la observación del plano factorial permiten concluir que las definiciones de las competencias de los puestos recurren a términos que se repiten con mucha frecuencia, tales como: *equipo, negocio, visión, liderazgo, influencia, o negocio* en los perfiles directivos. En los perfiles técnicos y administrativos, predominan la *flexibilidad, el trabajo, el compromiso, el aprendizaje, la polivalencia* o el *entorno*. Finalmente, para los asesores externos, consultores y formadores, se habla de *experiencia, interlocución, integración* y de la *orientación comercial* y de *venta*. Esta última característica es aún más destacada para el grupo de Otros, que incluye muchos puestos de comerciales, que requieren *don de gentes, interés, motivación y resultados*.

## 5. DISCUSIÓN

La segmentación previa del texto y su cuantificación posibilitan la aplicación de herramientas sencillas de Estadística Textual, como glosarios de formas/lemas y segmentos repetidos, que ofrecen una visión global de las competencias generales requeridas para un profesional de RRHH.

El análisis del vocabulario extraído mediante las herramientas citadas a partir de la información de los procesos de reclutamiento y selección permite apreciar una cierta homogeneización del lenguaje. Además de las elevadas frecuencias de los términos más repetidos, mencionados a lo largo de la exposición, también se aprecia el carácter habitual de ciertas expresiones como *tolerancia al estrés, trabajo bajo presión, cliente interno, visión estratégica, habilidades interpersonales* entre otras, que parecen formar parte del vocabulario de las organizaciones.

La calificación de algunos de los términos extraídos como “competencias” puede dar lugar a cierta discusión, pues aunque algunos autores las incluyen en sus estudios, no siempre quedan bien encuadradas en las definiciones más ampliamente aceptadas. Por ejemplo, términos como “disponibilidad para viajar” y “disponibilidad horaria” son considerados por algunos autores como competencias emocionales (actitud disposicional del sujeto), mientras que otros discuten su consideración como competencia. Lo mismo puede aplicarse al término “buena presencia”, que algunos estudios catalogan como competencia incluida en las relativas a habilidades sociales.

Asimismo, dado que la extracción automática de los textos modales posibilita observar las expresiones utilizadas por las empresas, podemos encontrar denominaciones particulares –por ejemplo, “pasión por las personas” – que no aparecen en los diccionarios de competencias pero pueden identificarse con

denominaciones más estandarizadas –en este caso, habilidades interpersonales–. Teniendo en cuenta que una misma competencia puede tener distintas interpretaciones, la metodología utilizada se muestra útil para extraer los contextos reales de cada vocablo, dado que no se ha realizado ningún tratamiento previo de los textos. Ello contribuye a interpretar adecuadamente el significado de los términos y el contenido de las competencias requeridas por los empleadores.

La combinación de datos textuales y variables cualitativas permite aplicar otras herramientas de Estadística Textual como el Análisis Factorial de Correspondencias de tablas léxicas. Esto facilita la determinación de los términos característicos por tipos de puestos, de modo que pueden configurarse perfiles de competencias más específicos. La representación gráfica visualiza los principales patrones de diferenciación de los datos, como la oposición entre ciertos perfiles (Directivos frente a Técnicos) y la proximidad entre otros (Técnicos y Administrativos), así como los términos que son más propios de las competencias de cada grupo.

El análisis estadístico de textos requiere “cortar” la cadena textual, delimitar las unidades léxicas y cuantificarlas. En nuestro trabajo, hemos aplicado un método que no interfiere en el texto más allá de las reglas establecidas por la lematización. La alternativa de cortar la cadena textual realizando un proceso de codificación previo, que implica el establecimiento de categorías y la asignación de partes de la cadena textual a dichas categorías, supone una mayor intervención y la consiguiente pérdida de los textos originales.

## REFERENCIAS

- AGGARWAL, C.C.; ZHAI, C. (Eds.). (2012): *Mining text data*. Springer.
- ALLES, M.A. (2006): *Dirección estratégica de RRHH. Gestión por competencias*. Ed. Granica. Buenos Aires.
- BÉCUE, M. (Ed.) (2000): *Instrumentos metodológicos para el Estudio de las Instituciones*. Grup de Recerca I d'Estudis Sociojurídics, UAB-UPC. Barcelona.
- BOYATZIS, R. (1982): *The Competent Manager: A model Analysis for Effective Performance*. Wiley & Sons, New York.
- BOYATZIS, R. (2008): Competencies in the 21st century. *Journal of Management Development*, 27 (1): 5–12
- BOYATZIS, R. (2009): Competencies as a behavioral approach to emotional intelligence. *Journal of Management Development*, 28 (9): 749 – 770
- BOYATZIS, R. *et al.* (2012): Emotional, Social, and Cognitive Intelligence and Personality as Predictors of Sales Leadership Performance. *Journal of Leadership & Organizational Studies*, 19 (2): 191–201.
- BREWSTER, C.; FARNDALE, E.; VAN OMMEREN, J. (2001): Competencias y estándares profesionales para la dirección de personal/RRHH. *Documento de AEDIPE*. [http://www.fundipe.es/archives/COMPETENCIAS\\_Seguro.pdf](http://www.fundipe.es/archives/COMPETENCIAS_Seguro.pdf).
- BROCKBANK, W. *et al.* (2013): *Global HR Competencies: Mastering Competitive Value from the Outside in*. McGraw-Hill.

- BUCKLEY, F.; MONKS, K. (2004): The implications of meta-qualities for HR roles. *Human Resource Management*, 14 (4): 41–56.
- BULLER, P.; McEVOY, G. (2012): Strategy, human resources management and performance: Sharpening line of sight. *Human Resource Management Review*, 32: 43–56.
- BUNK, G.P. (1994): La transmisión de competencias en la formación y perfeccionamiento profesionales de la RFA. *Revista Europea de Formación Profesional*, 1: 8–14.
- CAMPION, M. *et al.* (2011): Doing competencies well: best practices in competency modeling. *Personnel Psychology*, 64 (1): 225–262
- GOLEMAN, D. (2006): *Inteligencia emocional*. Kairós. Barcelona.
- GUILLÉN, L.; SARIS, W.E.; BOYATZIS, R. (2009): The impact of social and emotional competencies on effectiveness of Spanish executives. *Journal of Management Development*, 28 (9): 771–793.
- LEBART, L.; SALEM, A.; BÉCUE, M. (2000): *Análisis estadístico de textos*. Milenio. Lleida.
- LEBART, L.; SALEM, A.; BERRY, L. (1998): *Exploring Textual Data*. Kluwer Academic Publishers. The Netherlands.
- LEBART, L. MORINEAU, A., PIRON, M. (2006): *Statistique exploratoire multidimensionnelle*. 6ème édition. Dunod. Paris.
- LEVY-LEBOYER, C. (1997): *Gestión de las competencias: Cómo analizarlas, cómo evaluarlas, cómo desarrollarlas*. Gestión 2000.
- HAYGROUP (2000): *Factbook RRHH*. Elcano, Aranzadi & Thomson.
- HOFRICHTER, D.A.; SPENCER, L.M. (1996): Competencies: The right foundation for effective human resources management. *Compensation and Benefits Review*, 28, 6.
- HOGUE, M.; TONDORA, J.; MARRELLI, A. (2005): The Fundamentals of Workforce Competency: Implications for Behavioral Health. *Administration and Policy in Mental Health*, 32(5-6), 509–531.
- McCLELLAND, D. (1973): *Testing for Competence Rather than for Intelligence*. American Psychologist Journal, 20: 321–333.
- PEREDA S.; BERROCAL, F. (2011): *Dirección y gestión de RRHH por competencias*. Ed. Ramón Areces, Madrid.
- ROMEO, M.; YEPES, M.; CARRO, D. (2010): Requerimientos de competencias del profesional de RRHH: ajuste entre las percepciones de empleadores y graduados. *Estudios financieros. Revista de trabajo y seguridad social: Comentarios, casos prácticos. RRHH*, 326: 127–150.
- SÁNCHEZ, J.I.; LEVINE E.L. (2012): The Rise and Fall of Job Analysis and the Future of Work Analysis. *Annual Review of Psychology*, 63: 397–425
- SPENCER, L.M.; SPENCER, S.M (1993): *Competence at Work: Models for Superior Performance*. Wiley & Sons, New York.
- SIRMAKISSIS, S. (Ed.) (2004): *Text mining and its applications: results of the NEMIS Launch Conference*, Vol. 138. Springer. New York.
- ULRICH, D. *et al.* (2008): *HR Competencies. Mastery at the intersection of people and business*. Society for Human Resource Management. United States of America.

## ANEXO. TEXTOS MODALES DE CADA TIPO DE PUESTO

Tabla 3A. **DIRECTIVO:** textos modales

<b>Criterio I</b>	<b>Textos modales</b>
3,161	ACTUACIONES EN ÁMBITO INTERNACIONAL
1,818	HABILIDADES SOCIALES, INTERÉS Y HABILIDADES EN LA GESTIÓN DE EQUIPO HUMANO
1,714	VISIÓN GLOBAL DEL NEGOCIO, BUEN GESTOR DE EQUIPOS, CAPACIDAD DE NEGOCIACIÓN
1,712	ALTA CAPACIDAD DE TRABAJO INDIVIDUAL Y EN EQUIPO, VISIÓN EMPRESARIAL Y DE NEGOCIO
1,638	EXCELENTE COMUNICADOR Y HÁBIL NEGOCIADOR
<b>Criterio II</b>	<b>Textos modales</b>
0,834	TIENE UN BUEN NIVEL DE INTELIGENCIA EMOCIONAL EN TÉRMINOS AUTOREGULACIÓN DE PROPIAS EMOCIONES, CAPAZ DE MOTIVAR, EMPATIZAR CON OTRAS PERSONAS, TIENE BUENAS HABILIDADES CON LA GENTE, ADAPTAR ESTILO DE DIRECCIÓN AL INDIVIDUO, AL EQUIPO Y A LA TAREA, CAPAZ DE ENTENDER Y TAMBIÉN UN COMUNICADOR CLARO CON EQUIPO DE LOS OBJETIVOS DE LA COMPAÑÍA, CAPAZ DE DEFINIR Y DE REPASAR OBJETIVOS, CAPACIDAD DE ASEGURAR UN EQUILIBRIO ENTRE EL MANEJO DEL EQUIPO EN SUS TAREAS (ASIGNACIÓN DEL TRABAJO AL EQUIPO) Y LLEVANDO AL EQUIPO, ENTRENANDO GENTE, ESCUCHANDO, MOTIVANDO, UN ENCARGADO DEL TIEMPO EFICAZ CON SU PROPIO TIEMPO Y EL DEL EQUIPO, CAPAZ DE DAR LA REGENERACIÓN CONSTRUCTIVA AL EQUIPO Y CAPAZ DE ACEPTAR LA REGENERACIÓN DADA CON RESPECTO A SU PROPIO FUNCIONAMIENTO, LA CAPACIDAD DE INFLUENCIAR, NEGOCIA Y SE COMPROMETE CON EL EQUIPO, CAPACIDAD DE COMUNICARSE CON EFICACIA CON EL EQUIPO CON RESPECTO A LOS CAMBIOS LAS POLÍTICAS Y EL CLIENTE, CAPAZ DE CONSTRUIR UN INFORME CON EL CLIENTE EN UNA RELACIÓN DE RESPETO
0,872	PERSONA CON MUCHA VISIÓN ESTRATÉGICA, CAPACIDAD DE LIDERAZGO, PERSONA EMPRENDEDORA Y PROACTIVA, VISIÓN DE NEGOCIO, DISPONIBILIDAD PARA VIAJAR A NIVEL INTERNACIONAL

Tabla 4A. **RESPONSABLE DE ÁREA(S):** textos modales

<b>Criterio I</b>	<b>Textos modales</b>
1,676	PERSONALIDAD ORGANIZADA Y RIGUROSA, CON CAPACIDAD DE LIDERAZGO, TOLERANCIA A LAS SITUACIONES DE ESTRÉS
1,347	PASIÓN POR LAS PERSONAS
1,270	EXPERIENCIA EN NEGOCIACIÓN CON COMITÉ DE EMPRESA, Y COMITÉ SEGURIDAD Y SALUD
<b>Criterio II</b>	<b>Textos modales</b>
0,857	VISIÓN DIRECTIVA, RESOLUTIVA Y CON LIDERAZGO, APTITUDES PARA LA NEGOCIACIÓN COLECTIVA Y LA GESTIÓN ESTRATÉGICA DE PERSONAS Y DE EQUIPOS, HABITUADO A TRABAJAR BAJO PRESIÓN, HABILIDAD PARA SOLUCIÓN

Tabla 5A. **TÉCNICO:** textos modales

<b>Criterio I</b>	<b>Textos modales</b>
1,903	MOVILIDAD PARA DESPLAZAMIENTOS PUNTUALES
1,877	POSIBILIDAD DE INCORPORACIÓN INMEDIATA
<b>Criterio II</b>	<b>Textos modales</b>
0,855	PERSONA FLEXIBLE, CON INICIATIVA, ORIENTACIÓN AL CLIENTE Y CAPACIDAD DE COMUNICACIÓN
0,860	PERSONA PROACTIVA, AUTONOMÍA, ALTA CAPACIDAD DE TRABAJO, INICIATIVA, BUENA PRESENCIA

Tabla 6A. **ADMINISTRATIVO:** textos modales

<b>Criterio I</b>	<b>Textos modales</b>
2,084	PERSONA DINAMICA, CON INCIATIVA, CAPACIDAD DE APRENDIZAJE
1,823	PERSONA RESOLUTIVA Y MUY POLIVALENTE
<b>Criterio II</b>	<b>Textos modales</b>
0,818	PERSONA RESPONSABLE, ORGANIZADO, PARTICIPATIVO, CON CAPACIDAD DE TRABAJO PARA TRABAJAR EN EQUIPO,
0,838	CAPACIDAD DE COMUNICACIÓN Y DE TRABAJO EN EQUIPO, PERSONA DINÁMICA, EMPÁTICA, CAPACIDAD DE APRENDIZAJE Y ADAPTACIÓN

Tabla 7A. **CONSULTOR / FORMADOR:** textos modales

<b>Criterio I</b>	<b>Textos modales</b>
2,233	MOTIVACIÓN POR EL TRABAJO COMERCIAL,
2,169	DOMINIO DE LAS TÉCNICAS DE VENTA Y NEGOCIACIÓN
1,894	EXPERIENCIA COMERCIAL Y HABILIDADES PARA DESARROLLARLA
<b>Criterio II</b>	<b>Textos modales</b>
0,870	BUENA PRESENCIA Y BUEN NIVEL DE INTERLOCUCIÓN HABILIDADES COMERCIALES, TÉCNICAS DE VENTA, NEGOCIACIÓN, ATENCIÓN AL CLIENTE
0,892	VOCACIÓN COMERCIAL, CON CAPACIDAD DE ORGANIZACIÓN Y PLANIFICACIÓN, PERSONA RESPONSABLE, SERIA Y ORGANIZADA

Tabla 8A. **OTROS:** textos modales

<b>Criterio I</b>	<b>Textos modales</b>
2,723	AFÁN DE SUPERACIÓN, DON DE GENTES
2,685	ACTITUDES COMERCIALES, INTERESADA EN TRABAJAR POR RESULTADOS
<b>Criterio II</b>	<b>Textos modales</b>
0,798	CON PERFIL Y ACTITUDES COMERCIALES, QUE TENGA Y PUEDA APROVECHAR CONTACTOS PROPIOS, INTERESADA EN TRABAJAR POR RESULTADOS





UNIVERSIDAD  
**PABLO DE OLAVIDE**  
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA  
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (16). Páginas 165–199.  
Diciembre de 2013. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.  
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=83>

## Ecuaciones diferenciales y en diferencias aplicadas a los conceptos económicos y financieros

TENORIO VILLALÓN, ÁNGEL F.

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica  
Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla (España)  
Correo electrónico: [aftenorio@upo.es](mailto:aftenorio@upo.es)

MARTÍN CARABALLO, ANA M.

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica  
Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla (España)  
Correo electrónico: [ammarcar@upo.es](mailto:ammarcar@upo.es)

PARALERA MORALES, CONCEPCIÓN

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica  
Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla (España)  
Correo electrónico: [cparmor@upo.es](mailto:cparmor@upo.es)

CONTRERAS RUBIO, IGNACIO

Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica  
Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla (España)  
Correo electrónico: [iconrub@upo.es](mailto:iconrub@upo.es)

### RESUMEN

Este trabajo versa sobre la utilidad de las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones en diferencias finitas para la resolución de distintos problemas en el ámbito de la economía y la empresa.

En Economía es frecuente estudiar la evolución de los valores de una misma variable en distintos instantes temporales. Si la variable “tiempo” se considera como algo continuo, la evolución se estudia mediante ecuaciones diferenciales. Sin embargo, si el “tiempo” es tratado de manera discreta, se utilizan entonces ecuaciones en diferencias finitas.

Concretamente, nuestro objetivo no solo es exponer la evolución que han sufrido las nociones de ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias finitas sino también dar una visión (no exhaustiva) de sus múltiples aplicaciones a cuestiones relativas a fenómenos económicos y financieros.

**Palabras clave:** ecuaciones diferenciales; ecuaciones en diferencias finitas; Matemática Empresarial y Financiera.

**Clasificación JEL:** A12; A22; C02; C60.

**MSC2010:** 35Q91; 91G80; 91B99; 91-02.

Artículo recibido el 4 de marzo de 2013 y aceptado el 27 de noviembre de 2013.

# Differential and Difference Equations Applied to Economic and Financial Concepts

## ABSTRACT

This paper deals with the use of differential equations and finite difference methods for solving several problems in the field of Economics and Business Administration.

Economics usually needs to study the evolution of the values which are taken by a given variable in different moments. If the time variable works in a continuous way, its evolution is studied by differential equations. Otherwise, time is a discrete variable and finite difference methods must be used.

In addition, to expound the evolution of the notions of differential and difference equations, the goal of this paper is to show a general view (but not comprehensive) of their many applications for explaining economical and financial phenomena.

**Keywords:** differential equations; finite-difference equations; Mathematical Economics and Finance.

**JEL classification:** A12; A22; C02; C60.

**MSC2010:** 35Q91; 91G80; 91B99; 91-02.

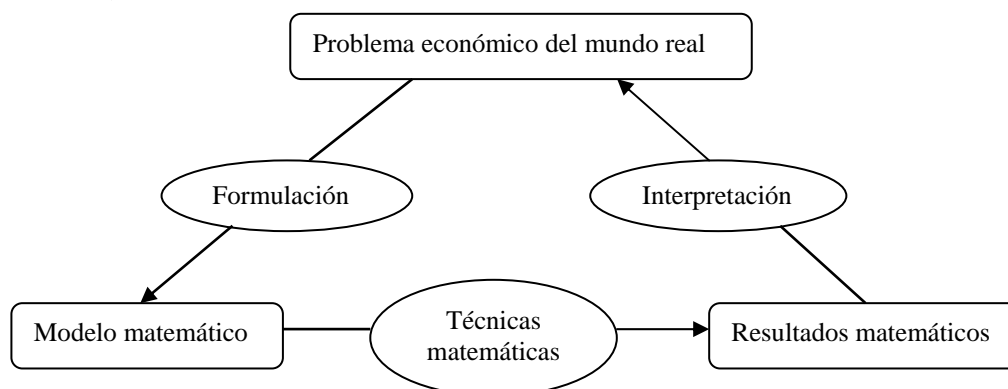


## 1. INTRODUCCIÓN

La aplicación de las matemáticas a problemas económicos, esencialmente, consta de tres fases:

1. Traducir la información económica a lenguaje matemático para obtener de esta forma un modelo económico (este modelo puede ser una ecuación diferencial, una ecuación en diferencias, un sistema lineal o cualquier otra expresión matemática).
2. Tratamiento del modelo obtenido mediante métodos matemáticos, lo que lleva a una solución (o soluciones) en forma matemática del problema original.
3. Interpretar los resultados obtenidos en términos económicos.

Intentar dar una solución a problemas económicos utilizando modelos matemáticos es una tarea difícil y bastante compleja ya que existen numerosos factores (tanto endógenos como exógenos) que rodean a los problemas económicos. Al ser la economía una disciplina social, en la mayoría de los casos se trabaja con “seres vivos” que son muy sensibles a variables no explicativas dentro de los modelos matemáticos utilizados, por tanto, tales modelos requieren ser validados y ajustados permanentemente ya que están sometidos a un fuerte grado de incertidumbre (Box and Jenkins, 1970).



En Economía es de interés conocer cuál será el comportamiento futuro que tendrán los distintos objetos de estudio para poder así tomar decisiones o conocer los montantes de gastos, beneficios o riesgo que se tendrán a lo largo del tiempo que se esté considerando un producto concreto. Este tipo de situaciones se reduce matemáticamente a estudiar un sistema dinámico y la evolución del mismo a lo largo de su duración. Precisamente, las soluciones de dichos sistemas vienen dadas por las soluciones de las denominadas *ecuaciones diferenciales*, que relacionan la expresión de una función (que da los valores de la variable estudiada en función de los factores pertinentes, como pueden ser tiempo, mano de obra, capital, etc.) y de alguna de sus derivadas (de primer orden o incluso de orden superior).

El uso de las ecuaciones diferenciales presupone que conocemos el comportamiento del sistema dinámico para cada valor de los factores que influyen sobre él (las denominadas variables independientes) y que, en la mayoría de los casos, incluye la variable tiempo. No obstante, no

siempre podemos conocer los valores que debe tomar la función con la que se modeliza la situación en cada instante de tiempo, sino que solo sabemos lo que ocurre para determinados valores de las variables independientes de nuestra función. Tal situación la encontramos por ejemplo, cuando en el ámbito de la Matemática Financiera se estudian empréstitos u operaciones de constitución de capital en los que no es necesario conocer qué ocurre en cada instante de tiempo sino solo el resultado al final de cierto período de tiempo establecido. En tales casos, el modelo matemático se puede simplificar y reducir la resolución de la ecuación diferencial pertinente al cálculo de una aproximación mediante un tratamiento discreto de todas las variables involucradas, tanto las dependientes como las independientes. Este tratamiento discreto del problema conlleva la resolución de lo que se denomina una *ecuación en diferencias finitas* (también llamado método de diferencias finitas).

Nuestro principal objetivo en el presente trabajo es mostrar cómo surgen las ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias para el estudio de los problemas relativos a sistemas dinámicos y, posteriormente, enfatizar las razones por las que la investigación en Economía y Finanzas debe encontrar interesante estos temas y su tratamiento para resolver problemas relativos a estas cuestiones. En lo que nos ocupa hablaremos de diversos conceptos en los que las ecuaciones en diferencias finitas y las ecuaciones diferenciales son utilizadas para trabajar y resolver el problema partiendo del hecho de que la variable tiempo es la variable de la que depende el problema. Con esto veremos la necesidad del uso de técnicas de análisis dinámico trabajando tanto en un marco de variables discretas como de variables continuas. Debe tenerse en cuenta que el tratamiento de los problemas económicos desde una perspectiva dinámica permite una modelización más próxima a la realidad que otras basadas en modelos estáticos y/o estáticos-comparativos.

## 2. ECUACIONES DIFERENCIALES: QUÉ SON Y SUS ORÍGENES

El concepto de *ecuación diferencial* se reduce a una ecuación algebraica en la que la incógnita es una función de variable(s) real(es) y en la que intervienen: la función, la(s) variable(s) independiente(s) y alguna(s) derivada(s) de la función incógnita. Ejemplos de ecuaciones diferenciales son las siguientes:

$$y' = x \cdot \cos(x) \qquad y' - 2y = 2x \qquad y'' - y' = x^2$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3x - \cos(x)$$

Los tres primeros ejemplos solo presentan una variable independiente ( $x$ ) y la función  $y = f(x)$ . A las ecuaciones que solo dependen de una variable independiente se las denomina *ecuaciones diferenciales ordinarias* (abreviadas como EDO). Si solo aparece la derivada primera (como ocurre en los dos primeros casos), la ecuación se denomina *de primer orden*. El

orden de la ecuación diferencial consiste en el orden de derivación más alto que aparece en la misma. Así, el tercer ejemplo es una ecuación diferencial de segundo orden por aparecer la derivada segunda.

Los últimos dos ejemplos que aparecen, corresponden a una función que depende de más de una variable independiente. En tal caso, se denominan *ecuaciones en derivadas parciales* (abreviadas como EDP). De estos dos ejemplos, el primero es una ecuación en derivadas parciales de primer orden, mientras que el otro lo es de segundo orden por aparecer una derivada segunda.

También existen las denominadas *ecuaciones diferenciales estocásticas*, las cuales consisten en ecuaciones diferenciales en las que algunos de sus términos es un proceso browniano. La ecuación diferencial estocástica sigue habitualmente la siguiente expresión:

$$d\mathbf{X}_t = \mu(\mathbf{X}_t, t)dt + \sigma(\mathbf{X}_t, t)d\mathbf{B}_t,$$

donde  $t$  pertenece a un intervalo  $[0, T]$ ,  $\mathbf{B}$  es un proceso browniano,  $\mathbf{X}$  es un proceso estocástico con condición inicial una variable aleatoria vectorial  $\mathbf{X}_0$ , independiente del movimiento browniano  $\mathbf{B}$  y que tiene como coeficientes de tendencia y de difusión a las funciones reales  $\mu(\mathbf{x}, t)$  y  $\sigma(\mathbf{x}, t)$ , que vienen a significar el valor esperado y la desviación típica del proceso  $\mathbf{X}$ . Este tipo de ecuaciones diferenciales permiten modelizar fenómenos en los que aparecen fluctuaciones basadas en el azar (i.e. probabilidad). En este sentido, el modelo puede ser tan simple como que tanto  $\mu$  como  $\sigma$  sean constantes (la ecuación del denominado modelo de Black-Scholes del que hablaremos en la Sección 5) o más complejas sin más que permitir que en las funciones  $\mu$  y  $\sigma$  también intervenga como factor valores previos del proceso distintos del instante actual  $t$ . También existe la noción de ecuación estocástica en derivadas parciales, consistentes en imponer términos y coeficientes que tienen una componente aleatoria, pero carecen de una expresión regular que las caracterice. Véase Oksendal (1985) y Prévôt y Röckner (2007) para más información sobre ecuaciones diferenciales estocásticas y ecuaciones estocásticas en derivadas parciales.

La noción de ecuación diferencial, como concepto matemático, consiste en una generalización del concepto de integral. Calcular la integral de una función  $f(\mathbf{x})$  respecto de la variable  $\mathbf{x}$  consiste en determinar cuál es la función  $F(\mathbf{x})$  tal que  $F'(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ . Es decir, queremos calcular la función incógnita  $y = F(\mathbf{x})$  que satisface  $y' = f(\mathbf{x})$ . Por tanto, las integrales son ecuaciones diferenciales de primer orden en la que no aparece la función incógnita sino solo su derivada (tal y como pasaba en el primero de los ejemplos que mostramos al principio de esta sección).

Sin embargo, cuando resolvemos una integral, no podemos encontrar una única función primitiva  $F(x)$  que satisfaga  $F'(x) = f(x)$ , sino que también sería solución de la ecuación el resultado de sumarle a la función  $F(x)$  una función constante cualquier. Para fijar el valor de dicha constante y obtener una única solución de la integral, solemos fijar unos valores reales  $x_0$  e  $y_0$  e imponemos la condición adicional  $F(x_0) = y_0$ , que se denomina condición inicial. En el caso de las ecuaciones diferenciales, la solución tampoco es única *a priori* y son familias de soluciones lo que se obtiene. Por tanto, para fijar la unicidad de la solución también debemos añadir unas condiciones adicionales sobre la función solución. Las dos opciones más habituales son las siguientes: a) un problema de condición inicial, que consiste en fijar el valor de la función solución  $F(x)$  y de todas sus derivadas en un valor  $x_0$  del dominio de  $f(x)$  hasta un grado menos que el orden de la ecuación diferencial; y b) un problema de contorno, que consiste en hacer lo mismo que antes pero en todos los puntos existentes en la frontera del dominio anteriormente indicado.

Siendo estrictos, preguntarse cuándo aparece por primera vez el concepto de ecuación diferencial en la historia corresponde a preguntarse cuándo surge la noción de integral. En ese sentido, la respuesta es bien sencilla: prácticamente desde los orígenes de las matemáticas la noción de integral (y por ende de ecuación diferencial) ha estado presente; eso sí, solamente mediante procedimientos para el cálculo de áreas y volúmenes y no como una noción y procedimiento formal rigurosamente justificado y demostrado (habría que esperar a Newton y Leibniz para esto último). La primera referencia a la resolución de volúmenes aparece en el papiro de Moscú (datado hacia el 1890 a.C.) con el cálculo del volumen de tronco piramidal. Historiadores como Kline (1972a) dudan de su aplicación como método sistemático similar al de integración y afirman que pudiera ser un cálculo obtenido por ensayo-error.

El primer método sistemático de integración, aunque sin rigor y formalismo, fue el *método exhaustivo* de Antifonte de Atenas (480-411 a.C.) usado al estudiar la cuadratura del círculo mediante circunscripción e inscripción de polígonos a una circunferencia para obtener así cotas superiores e inferiores del número  $\pi$ . Esta información nos ha llegado por Aristóteles y sus comentaristas tal y como puede verse en Gow (2010) o Heath (1921). Aunque Arquímedes (2005) atribuyó el método a Eudoxo de Cnidos (408-355 a.C.), el mérito de este último se limitó a formalizar y sistematizar el procedimiento de Antifonte, dándole tal nivel de rigurosidad que Euclides (1994) lo insertaría como la Proposición 1 del Libro X en sus *Elementos* (circa 300 a.C.), siendo uno de los métodos centrales en los cálculos de áreas incluidos en el Libro XII. Posteriormente, Arquímedes (1993, 2005) también usaría este método para calcular áreas de figuras planas, introduciendo en el s.III el *método heurístico* al considerar “las figuras planas como constituidas por el conjunto de todas las rectas en ellas trazadas paralelamente a una cierta

dirección, y a las figuras sólidas como «llenas» de sus secciones planas paralelas a una determinada posición” (Gibson, 1983); aunque esto lo haría sin demostración formal y en el ámbito de la intuición. Este planteamiento resulta ser el precedente (incluso se podría tildar de primera aparición) de lo que posteriormente Cavalieri y Leibniz denominarían indivisibles e infinitésimos, respectivamente.

Paralelamente, Liu Hui (1999) explicó en el s. III d.C. una versión del método exhaustivo al calcular el área del círculo. Esto apareció en sus comentarios a la edición que realizó de la obra *Jiuzhang Suanshu* (a traducir como *Los nueve capítulos del arte matemático*) obra colectiva china gestada entre los s. X y II a.C. y concluida el s. I d.C. El hindú Bashkara II escribió el *Siddhanta Shiromani* en el 1150 mostrando unos amplios conocimientos sobre la noción de *infinitesimal* y de *integración* para estimar el área y volumen esférico (siglos antes de que Cavalieri introdujera los indivisibles).

En Europa no se volvería a tratar el método exhaustivo hasta el siglo XVII. Así, Cavalieri (1635) introdujo su teoría de los *indivisibles* para el cálculo de integrales mediante una aproximación geométrica. De este modo, las áreas y volúmenes eran calculados mediante un indefinido número de segmentos paralelos y de áreas planas paralelas, respectivamente. La teoría de los indivisibles fue combinada exitosamente con el cálculo en diferencias finitas para formalizar y dar rigor al cálculo integral. Esto se logró paulatinamente gracias a los aportes de múltiples autores como Wallis (1656), Barrow (1916) o Gregory (1667). Finalmente, Newton (1687, 1736) y Leibniz (1684, 1686) fueron los que formalizaron el cálculo integral con la formulación del Teorema Fundamental del Cálculo (demostrándolo ambos de manera independiente). Además, el desarrollo que realizaron cada uno al respecto del cálculo infinitesimal permitió la evolución al cálculo moderno y, especialmente en el caso de Leibniz, el sistema de notación y terminología del cálculo diferencial e integral (que es el usado actualmente). Precisamente, ese sistema resultó ser uno de los mejores ejemplos existentes en las ciencias por su perfecta adaptación a su objeto de estudio. Es más, Leibniz también sistematizó todo el cálculo de infinitesimales introduciendo reglas claras para manipular infinitesimales, lo que conllevó también la formalización en todos los sentidos del cálculo infinitesimal y diferencial.

Newton no solo tuvo un papel importante en las integrales, que resultan ser las ecuaciones diferenciales más sencillas; sino que también fue él quien introdujo las primeras ecuaciones diferenciales distintas de las integrales al estudiar el movimiento de los planetas y otras cuestiones físicas. Por este motivo, la argumentación y explicación de Newton para dichos conceptos se basaba en el movimiento y la dinámica de los cuerpos, viendo las variables como algo cambiante que fluía con el tiempo (y que denominó *fluente*) y calcular así sus razones de cambio con respecto al tiempo (que denominó *fluxiones*). En función de estos dos términos

fluente/fluxión, su interés principal era estudiar las relaciones entre fuentes y sus fluxiones: el cálculo de las fluxiones a partir de los fuentes correspondía al cálculo diferencial, mientras que la obtención de los fuentes a partir de las fluxiones correspondía al cálculo integral y la resolución de las ecuaciones diferenciales. En lugar de hablar en esos términos, él se refería a las *ecuaciones fluxionales* que se corresponden con las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden; las cuales clasificó en 1671, año en el que finalizó su obra magna, *Method of fluxions and infinite series* (Newton, 1736), sobre esta temática, pero que no vería la luz hasta 1736 cuando se publicó directamente en inglés y no en latín como estaba el manuscrito original. Su siguiente gran obra *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Newton, 1687), que fue publicada antes de su *Method of fluxions*, estableció las bases matemáticas para el cálculo de razones de cambio (fluxiones) mediante una teoría geométrica usando cantidades finitas e infinitesimales. El uso de cantidades geométricas se debió a su reticencia a usar el lenguaje algebraico por el que abogaba Leibniz y al que acusaba de plagiarle su trabajo sobre fluxiones. Esto también hizo que sus trabajos quedasen en un segundo plano para los científicos continentales hasta que sus resultados fueron reformulados en términos de la formulación leibniziana.

Con respecto a Leibniz, hay que empezar indicando que hoy día se reconoce que llegó de manera paralela e independiente a las mismas conclusiones de Newton sobre el cálculo integral y diferencial. Ambos, Newton y Leibniz, son reconocidos como los padres del cálculo integral y de las ecuaciones diferenciales, sobre las que Leibniz (1684, 1686) también trabajó activamente. De hecho, fue Leibniz quien les dio su nombre en 1676 (Gerhardt, 1849; Ince, 1956) y descubrió entre 1691 y 1693 el método de separación de variables, la reducción de ecuaciones homogéneas a separables y el procedimiento de resolución de ecuaciones lineales de primer orden (Ince, 1956).

A finales del s. XVII Leibniz alcanzó una estrecha colaboración con varios matemáticos que vieron la importancia del sistema introducido por él para el cálculo, pero que resultaban oscuras para la gran mayoría. Concretamente, los hermanos Jacob y Johann Bernoulli se dedicaron a pulir y hacer más comprensibles los trabajos de Leibniz aportando múltiples resultados y propiedades e introduciendo la terminología “integrar una ecuación diferencial”. Ellos dos fueron esenciales para la consolidación del cálculo integral y de las ecuaciones diferenciales en las matemáticas (Kline, 1972b).

En 1690 Jacob Bernoulli demostró que la resolución del cálculo de la curva isócrona era equivalente a la resolución de una ecuación diferencial no lineal de primer orden. Esta curva fue previamente estudiada por Huygens en 1687 y por Leibniz en 1689. La resolución de la ecuación diferencial se basó en el uso de la metodología que hoy en día se denomina separación



de variables, siendo uno de los primeros problemas así atacado. También se usó por primera vez en dicho trabajo la palabra “integral” para referirse al resultado de la integración (Ince, 1956).

Desde 1694, Johann Bernoulli empezó a tener grandes avances en la integración (resolución) de ecuaciones diferenciales cuando empezó a emplear la metodología de Leibniz pero siguiendo la filosofía de Newton y entendiendo la integral como la operación inversa de la derivación (Kline, 1972b).

Los trabajos que se llevaron a cabo durante el s. XVII llevaron a pensar a los matemáticos de la época que la solución de cualquier ecuación diferencial proveniente de la geometría y la física eran expresables mediante funciones elementales. Por ello, se esforzaron en desarrollar múltiples técnicas de resolución (algunas de las cuales ya hemos comentado) usando recursos sencillos y aplicadas un número finito de veces a dichas funciones elementales.

Durante el siglo XVIII (denominado por múltiples autores como “el siglo del Análisis Matemático”), se consolidó el cálculo (infinitesimal y diferencial) y sus múltiples aplicaciones a las distintas ciencias naturales (siendo especialmente relevante el caso de la Mecánica). En lo que nos ocupa, este siglo vio el nacimiento de nuevas ramas de las matemáticas, incluida la teoría de ecuaciones diferenciales. En este sentido, el primer libro con las ecuaciones diferenciales como su único objeto de estudio y finalidad se remonta al año 1707 cuando Manfredi (1707) publicó su *De constructione aequationum differentialium primi gradus*, en el que seguía la notación y formalismo de Leibniz y los Bernoulli.

Precisamente, seguir la visión y metodología de los autores anteriores será la tónica en prácticamente la totalidad de los trabajos presentados en el s. XVIII, siendo sus principales referentes Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange y Laplace. La mayoría de los trabajos de este siglo sobre estos temas fueron o bien presentados en las Academias de París, Berlín y San Petersburgo entre otras ya menos importantes, o bien mediante tratados expositivos que los autores publicaban de forma independiente (Kline, 1972b).

Euler, el más prolífico de los matemáticos del siglo XVIII, tocó todas las ramas existentes en las matemáticas de su época, incluidas las ecuaciones diferenciales. En este campo, Euler (1728) introdujo dos nuevas técnicas: la primera consistente en el uso de una sustitución que reducía ciertas ecuaciones diferenciales en otra ecuación que permitía el uso de la separación de variables; y la segunda, consistente en una versión equivalente a lo que hoy se denomina el método de los coeficientes indeterminados. Dentro de esa misma obra, pero bajo la apariencia de un ejemplo, Euler también descubrió el método de resolución de ecuaciones diferenciales lineales mediante multiplicación de un factor de integración sobre el que se sustenta la actual teoría de las ecuaciones diferenciales lineales. Posteriormente, Euler (1743) dio un método para la resolución de las ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden. Además, de los resultados previamente indicados, Euler profundizó en la teoría de las ecuaciones diferenciales

realizando su obra *Institutionum calculi integralis* (Euler, 1768-1770) en la que recogía todos los descubrimientos que hizo sobre el tema, incluido el método numérico que lleva su nombre para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden. Son varias las ecuaciones diferenciales que llevan su nombre por ser él uno de los que primero las trató.

Euler trabajó conjuntamente con Lagrange mediante correspondencia entre 1754 y 1756 (Rouse Ball, 1960) y dicha colaboración acabó siendo el inicio del denominado cálculo de variaciones (Lagrange, 1804). Usando dicho cálculo de variaciones, Lagrange (1804) ideó el método de los multiplicadores que lleva su nombre e inventó el método de variación de parámetros para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas, método por el que fue premiado en 1766 y 1782 por la Academia de Ciencias de París (Lagrange, 1766; 1785).

Entre las aportaciones realizadas por Laplace a las ecuaciones diferenciales parciales, ha quedado para la historia la transformada de Laplace que posteriormente sería adaptada ampliamente a múltiples problemas en ingeniería durante el s. XX. Este operador permitía convertir ecuaciones diferenciales con una condición inicial en una ecuación más sencilla a resolver con la simple manipulación algebraica. Aunque este operador fue introducido en 1737 por Euler (1744), sería Laplace (1785) quien establecería el marco con el que usar dicha transformada.

Debe tenerse en cuenta además que el primer trabajo de Laplace (1771) versó precisamente sobre las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones en diferencias. En este sentido, Laplace (1777) introdujo un método general que permitía la resolución de ecuaciones en derivadas parciales que devolvía la integral cuando esta podía ser calculada y que además permitía identificar las ecuaciones que no eran resolubles. Con esta metodología dio la solución de estas ecuaciones siendo de segundo orden.

Con el s. XIX finalizamos este recorrido histórico, pues fue entonces cuando se llegó a la fase de necesitar demostrar hechos que habían sido dados por válidos hasta ese momento sin justificación teórica (Kline, 1972b). Será ahora cuando las ecuaciones diferenciales serán objeto de una teoría matemática que busca el rigor y la generalidad. Con ellos surge el interés en demostrar la existencia y unicidad de las soluciones de dichas ecuaciones (que son el principal interés en la actualidad). De esta época, resaltamos las figuras de Abel, Cauchy, Jacobi, Picard y Poincaré. Por su parte, Cauchy (1825; 1827) fundamentó y estableció la teoría de variable compleja (Smithies, 1997) y la aplicó a las ecuaciones diferenciales. En este sentido, Cauchy (1842a; 1842b) probó la existencia de solución analítica para aquellas ecuaciones diferenciales que tenían coeficientes y condiciones iniciales analíticas. Para ello, introdujo el *método de funciones mayorantes* (que él denominó *calcul des limites*) y que aplicó eficientemente tanto a las ecuaciones diferenciales ordinarias como a otras ecuaciones en derivadas parciales (las denominadas quasi-lineales de primer orden). Además, demostró que cualquier EDP de orden

mayor que 1 podía reducirse a un sistema de EDPs. La generalización de este resultado junto con la unicidad da lugar al Teorema de Cauchy-Kovalewski.

Cuando Cauchy (1842c; 1842d) intentó demostrar su teorema de existencia para sistemas de ecuaciones diferenciales, introdujo la notación vectorial que actualmente se utiliza. Gracias a esta generalización, Jacobi (1865; 1866) resolvería los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes cuando la matriz del sistema es diagonalizable. Sería Jordan (1870) quien introduciría la forma canónica que lleva su nombre para resolver aquellos sistemas lineales cuya matriz no era diagonalizable. Posteriormente, Picard (1893) estableció un método de aproximaciones sucesivas para establecer con precisión el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales de orden  $n$ . Finalmente, las investigaciones de Poincaré (1890) sobre la estabilidad y periodicidad de las soluciones del sistema solar le condujeron al inicio del estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales.

### 3. ECUACIONES EN DIFERENCIAS: QUÉ SON Y SUS ORÍGENES

Una *ecuación en diferencias* o *relación de recurrencia* se reduce a una ecuación algebraica en la que la incógnita es una sucesión de modo que aparecen varios de los términos de la sucesión en la ecuación. Ejemplos de ecuaciones en diferencias son las siguientes:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n \cdot (1 + \mathbf{x}_n) \qquad \mathbf{c}_0(n) \cdot \mathbf{x}_n + \mathbf{c}_1(n) \cdot \mathbf{x}_{n-1} + \cdots + \mathbf{c}_k(n) \cdot \mathbf{x}_{n-k} = \mathbf{f}(n)$$

El *orden de la ecuación en diferencias* consiste en el número de veces que aparecen términos inferiores al calculado en la sucesión incógnita. De este modo, el primer ejemplo es una ecuación en diferencias de primer orden y el segundo, de orden  $k$ . Precisamente, este segundo ejemplo corresponde a la expresión general de una ecuación en diferencias lineal, ya que todos los términos de la sucesión solución aparecen con grado 1. El primer ejemplo no es lineal ya que el término  $\mathbf{x}_n$  aparece con grado 2.

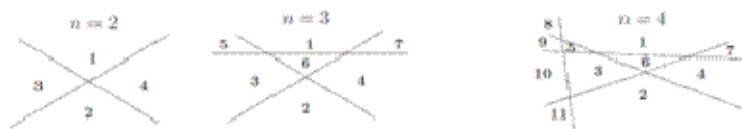
Al igual que nos pasaba con las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones en diferencias no tienen una única solución. Cualquier sucesión  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \geq 0}$  que satisface la ecuación en diferencias se denomina solución particular de la misma. En cambio, si consideramos el conjunto de todas sus soluciones particulares, lo que obtenemos es la solución general de la ecuación en diferencias. Este hecho conlleva nuevamente que haya que considerar condiciones iniciales para obtener la solución particular, si existe, que satisfaga dichas condiciones. Concretamente, las condiciones iniciales consisten en fijar el valor de los primeros términos de la sucesión  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \geq 0}$ , tantos como indique el orden de la ecuación.

Las ecuaciones en diferencias responden a las mismas cuestiones que buscan resolver las ecuaciones diferenciales, pero teniendo en cuenta que las primeras deben usarse para funciones discretas y las segundas para funciones continuas. Por tanto, los fenómenos que pueden

representar cada una de ellas deben ser también de tal tipo. De este modo, tal y como nos pasó en el caso de las ecuaciones diferenciales, podemos encontrarnos con ecuaciones en diferencias estocásticas que no son más que ecuaciones en diferencias lineales en las que el término independiente sigue un proceso aleatorio.

Las ecuaciones en diferencias aparecen en la antigüedad en la forma de los números poligonales. Si consideramos un polígono de lado  $n$ , sus correspondientes números poligonales  $p_n$  vienen dados por la ecuación  $p_{n+1} = p_n + 2n + 1$ , que es una ecuación en diferencias de primer orden. Este tipo de ecuaciones fueron estudiadas por los pitagóricos, por Arquímedes y por Euclides antes de nuestra era.

También ambientada en la geometría clásica, tenemos otra ecuación en diferencias que proviene del número de regiones que se forman al añadir una recta a otro conjunto de rectas de modo que no sean paralelas dos a dos y no se corten tres rectas en el mismo punto. Como puede verse en el gráfico siguiente:



Para 2 rectas, se obtienen 4 regiones, para 3 el número de regiones es  $7=4+3$  y para 4 rectas, las regiones resultan ser  $11=7+4$ . Por tanto, el número de regiones que se obtienen sigue la ecuación en diferencias  $r_{n+1} = r_n + n + 1$  que resulta ser del mismo tipo que la anterior. Las ecuaciones en diferencias de primer orden y lineales se resuelven por medio de una serie aritmética, geométrica o una combinación de ambas, ya que solo hay que ir sustituyendo, por lo que su resolución es bien conocida desde la antigüedad.

También de la Antigua Grecia, viene Herón de Alejandría y su fórmula para aproximar el valor de la raíz de un número positivo  $a$  (Heath, 1921):

$$x_{n+1} = \frac{\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)}{2}$$

Diofanto (s. III a.C.) además de trabajar también con los números poligonales, fue el causante de la aparición de las ecuaciones diofánticas en su *Arithmetica*. En esa obra se dan soluciones numéricas (enteras positivas) a ecuaciones con una o varias soluciones. Incluso resolvía algunos sistemas de ecuaciones diofánticas. Todo ello usando el análisis diofántico que se basa en la resolución de ecuaciones en diferencias. Como la mayoría de las ecuaciones resultantes eran cuadráticas, Diofanto y su obra inspiraron a Fermat a postular su Último Teorema en 1637, que afirma la inexistencia de solución para la ecuación  $x^n + y^n = z^n$  con  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $n$  enteros no nulos y  $n$  mayor que 2. El caso  $n = 2$  corresponde al Teorema de Pitágoras y sus soluciones son

las ternas pitagóricas a quien tradicionalmente se le atribuye este resultado (Heath, 1921). Las ecuaciones diofánticas han sido desde siempre un entretenimiento matemático, aunque en la actualidad también se les hayan encontrado aplicaciones prácticas en las distintas ciencias. En concreto, Diofanto probó que la ecuación del tipo  $a \cdot x + b \cdot y = c$  tiene solución si y solo si  $m.c.d.(a,b)$  divide a  $c$ . Este criterio de existencia (que también conlleva un criterio de resolución) es el que se sigue utilizando en la actualidad para resolver estas ecuaciones diofánticas, cuya solución es:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t \quad \text{e} \quad y = y_0 + \frac{a}{d}t,$$

con  $x_0$  e  $y_0$  soluciones particulares de la ecuación y  $t$  un parámetro.

Posteriormente, Brahmagupta encontró reglas para la resolución de distintos tipos de ecuaciones cuadráticas sencillas, incluidas algunas con infinitas soluciones como resulta ser  $a \cdot x^2 + 1 = y^2$ , la cual también estudio en profundidad Bhaskara II (Bhanu Murthy, 1994). Las soluciones de estas ecuaciones (se puede tomar cualquier otro valor en lugar de 1) reciben el nombre de *polinomios de Brahmagupta*.

La primera ecuación en diferencias que se trabajó con dos índices fue  $b_{n+1,r} = b_{n,r} + b_{n,r-1}$ , cuya

solución son los coeficientes binomiales  $\binom{n}{r}$  y que se remontan a dos obras orientales. La

primera es la perdida *Huangdi Jiuzhang Suanjing Xicao* de Jia Xian (1022-1054) de la que tenemos constancia de sus contenidos gracias al *Xiangjie Jiuzhang Suanfa* de Yang Hui (1261). En este último se describía el conocimiento de Xian sobre el triángulo de Pascal. Sin embargo, habría que esperar al *Siyuan yujian* de Zhu Shijie (1303) para encontrar un dibujo del triángulo de Pascal indicando el uso ancestral de este método. La segunda obra es de origen persa y se corresponde a una obra perdida de Omar Khayyam (c. 1100) a la que se hace referencia en su *Tratado sobre Demostración en Problemas de Álgebra* y que versaba sobre cómo se calculaban las ecuaciones antes referidas (Rashed, 1994); aunque previamente fue tratado por al-Karaji (953-1029), el cual usó el triangulo de Pascal para calcular varios binomios y, en palabra de escritos posteriores de al-Samawal (Rashed, 1994), hizo una preciosa construcción del triángulo que corresponde al gráfico siguiente:

Col1	Col2	Col3	Col4	Col5	...
1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...
	1	3	6	10	...
		1	4	10	...
			1	5	...
				1	...

En cualquier caso, la matemática europea no llegó a obtener el citado triángulo hasta el s. XVI con la variante de Petrus Apianus (1527) en el frontispicio de su obra sobre aritmética comercial. Posteriormente aparecería la versión publicada por Cardano (1545), aunque se le acredita a su coetáneo y enemigo Tartaglia. Pero el nombre recibido se debe al estudio realizado por Pascal (1665) en su obra *Traité du triangle arithmétique*, recolectando todos los resultados conocidos sobre el triángulo y empleándolos en problemas relativos a la teoría de relatividad. Debido a esta obra, de Montmort (1708) y de Moivre (1730) le dieron el nombre de triángulo de Pascal.

Continuando en Europa, el ejemplo clásico de ecuación en diferencias es la sucesión de Fibonacci cuya expresión es  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  con  $a_0 = 0$  y  $a_1 = 1$ . Esta ecuación en diferencias la presentó Fibonacci, sobrenombre de Leonardo de Pisa (2003), cuando estudiaba la velocidad de la cría de conejos en condiciones ideales en 1202, trasladando este problema ya conocido en el mundo árabe. Curiosamente la solución de esta ecuación se expresa en términos del número áureo y su conjugado, fórmula que se conoce con el sobrenombre de Binet (1843), aunque ya había sido publicada por De Moivre (1730) con anterioridad.

Finalmente, las ecuaciones en diferencias finitas pueden usarse para obtener estimaciones de las soluciones de ecuaciones diferenciales. Ese uso genera los denominados *métodos de diferencias finitas* en los que trabajaron los autores que ya mentamos en la sección anterior y sobre algunos de estos métodos ya hicimos en su momento algunas consideraciones.

#### **4. USO DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN FINANZAS**

El uso de las ecuaciones diferenciales en el contexto de las finanzas es múltiple y variado, ya que este tipo de ecuaciones permiten modelizar cualquier situación o fenómeno que presenta variaciones en función de sus factores (por ejemplo, cambios y alteraciones a partir del tiempo). En este sentido, las ecuaciones diferenciales son especialmente útiles para la fijación de precios de las opciones europeas y de las americanas, amén de para las calibraciones. Los métodos numéricos basados en ecuaciones en derivadas parciales no suelen ser muy populares en finanzas primándose el uso de los métodos estocásticos debido a que los algoritmos usando estos últimos suelen ser más fáciles de implementar. Sin embargo, los métodos numéricos pueden llegar a tener una mejor eficiencia si son discretizables y, lo que es más importante, el obtener la solución de la ecuación diferencial provee de una mayor información.

En el caso de las opciones, se considera un dominio acotado temporal  $(0, T)$  con una condición final singular en el instante  $t = T$ . Los métodos de discretización a utilizar con las ecuaciones en derivadas parciales deben ser suficientemente rápidos y exactos para que tenga sentido su uso y mejore la respuesta dadas por los procesos estocásticos.

No se pretende indicar todas las posibilidades de las ecuaciones en derivadas parciales en el ámbito de las finanzas, aunque sí queremos dejar patente el uso que se puede dar de las ecuaciones en derivadas parciales.

En referencia a la fijación de precios de las opciones, una primera aproximación al problema consiste en considerar el modelo Black-Scholes (Black y Scholes, 1973; Merton, 1973). Este modelo se centra en trabajar una ecuación en derivadas parciales sin disponer de todas las hipótesis requeridas sobre los datos para proceder a su derivación. En el modelo estándar se considera un activo de riesgo y otro libre de riesgo cuyos precios en el instante  $t$  son  $S_t$  y  $S_t^0$  satisfaciendo dos ecuaciones diferenciales:

$$dS_t = S_t \cdot (\mu dt + \sigma dB_t) \quad \text{y} \quad dS_t^0 = r \cdot S_t^0 \cdot dt,$$

con  $B_t$  un movimiento browniano estándar,  $\mu$  la media de retorno de la inversión,  $r$  la tasa de interés y  $\sigma$  la volatilidad. Cuando estos últimos tres valores no son constantes, sino que dependen de  $t$  y  $S$ , entonces se trabaja con un proceso estocástico que viene determinado por una ecuación diferencial estocástica con una expresión similar a la anteriormente indicada. Esta aproximación se ha usado en opciones europeas, americanas y asiáticas, en opciones *basket* y de barrera, y en opciones sobre máximo y sobre promedio. En el caso de las opciones europeas, el problema de contorno que se obtiene para la función de precios  $p(t,S)$  para las opciones corresponde a la siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + r \cdot S \cdot \frac{\partial p}{\partial S} + \frac{\sigma^2 \cdot S^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} - r \cdot p = 0 \\ \text{sujeto a } p(T, S) = \phi(S) \end{cases}$$

donde  $\phi$  es la función de reembolso y  $T$  es un instante temporal dado, denominado madurez. Dependiendo del tipo de opción la EDP y la condición inicial en este problema de contorno va modificándose (Achdou *et al.*, 2012).

En el caso de las opciones, una vez se tiene establecida la ecuación diferencial, se suelen utilizar los siguientes métodos de resolución: a) el método de diferencias finitas, que reduce la ecuación diferencial a una ecuación en diferencias gracias a la aproximación de las derivadas por diferencias finitas y traduce el problema continuo a uno discreto; y b) el método del elemento finito, más flexible que el anterior y que permite un mejor refinamiento. Todo ello utilizando los correspondientes criterios de estabilidad y convergencia que permitan asegurar que el método de discretización funciona correctamente. Es más, por lo general no se procede a la resolución exacta de la ecuación diferencial (estocástica o no), sino que se hace una estimación numérica de la solución de la misma y en ese sentido van los dos métodos de resolución anteriormente indicados, que obviamente no son los únicos empleados, aunque sí los más habituales por ser los más elementales.

El uso de las ecuaciones en derivadas parciales (y su resolución exacta usando técnicas algebraicas de Lie) es actualmente empleado en la resolución de problemas de *screening* multidimensional para combatir la selección adversa en la toma de decisiones de información asimétrica. En este sentido, Basov (2004) analiza la resolución de problemas de *screening* multidimensional que pueden representarse mediante problemas de contorno en los que el método hamiltoniano es aplicable. Con esta técnica, Basov consigue información sobre la estructura que pueden tener las soluciones del problema e incluso en ocasiones soluciones particulares del mismo.

El problema de *screening* multidimensional matemáticamente se formula como sigue: un monopolio que produce  $n$  bienes tiene una función de costes convexa y las preferencias de un consumidor sobre tales bienes se parametrizan con un vector  $m$ -dimensional, mientras que la tipología de los consumidores sigue una distribución con función de densidad  $f$  continuamente diferenciable sobre un conjunto  $\Omega$  convexo y acotado de  $\mathbb{R}^m$  y extensible por continuidad a su clausura. El monopolista quiere maximizar sus beneficios mediante la elección de una tarifa de precios adecuada para sus bienes. Hallar dicha tarifa se traduce de manera natural en resolver un sistema de EDPs no lineales. Es de importancia reflejar que no existen métodos generales para resolver tales problemas y que solo en caso de aparición de simetrías, dicho problema puede ser simplificado e incluso resuelto mediante la asociación de la ecuación en derivadas parciales con un grupo de Lie. Esta es la aproximación que usa Basov en su trabajo en el que traduce la resolución del problema de *screening* a la resolución de EDPs de primer y segundo orden con la siguiente expresión:

$$\Phi(\alpha, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}, D^2 \mathbf{u}) = 0,$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  es el vector de inputs,  $\Phi$  es una función continuamente diferenciable y la función  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  es dos veces diferenciable con gradiente  $\nabla \mathbf{u}$  y matriz hessiana  $D^2 \mathbf{u}$ .

Otro problema en Finanzas en el que se aplican las EDPs fue realizado por Polidoro (2003). Concretamente, este autor estudió una EDP no lineal sobre  $\mathbb{R}^3$  que permitía obtener la solución del modelo propuesto por Antonelli *et al.* (2001) para la toma de decisiones bajo riesgo en el marco de las funciones de utilidad; las cuales, aunque siguen un proceso estocástico y se resolverían mediante el planteamiento de la correspondiente ecuación diferencial estocástica, podía resolverse mediante un problema de contorno basado en una ecuación diferencial no estocástica al considerar la correspondiente condición inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{xx} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \partial_y \mathbf{u} - \partial_t \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ \text{sujeto a } \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{array} \right.$$

Este problema de contorno, Polidoro también lo resuelve mediante el uso de técnicas algebraicas de Lie y obteniendo condiciones para la existencia de soluciones globales.



Desde una perspectiva más matemática, Sauer (2012) realiza un trabajo en el que muestra la situación actual de la resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas como modelo para representar dinámicas de difusión y muestra sus múltiples cualidades en los fenómenos económicos que vienen dados por dichos fenómenos como pueden ser la fijación de precios financieros en productos derivados y cómo los sistemas diferenciales y su resolución proveen de unos mecanismos para simular el fenómeno de una manera más eficiente de lo que permiten los procedimientos puramente estocásticos que tradicionalmente se vienen empleando. Concretamente, un proceso de difusión en finanzas tiene una parte determinística y otra que corresponde a un proceso de Wiener y representaría la parte de difusión y en la que entra en juego el proceso estocástico. En este sentido, estaríamos hablando de una ecuación diferencial como la que sigue:

$$dX = a(t, X) \cdot dt + b(t, X) \cdot dW_t,$$

siendo  $W_t$  la expresión del movimiento browniano. Un ejemplo de este tipo de fenómenos es el modelo de Black-Scholes que corresponde también a una expresión de este tipo donde las funciones  $a$  y  $b$  son lineales con respecto a  $X$  e independientes de  $t$  y del que ya hemos hablado al exponer las cuestiones de la fijación de precio de las opciones y cuya resolución mediante ecuaciones diferenciales estocásticas es expuesto en ese trabajo por Sauer. Igualmente, Sauer muestra cómo las ecuaciones diferenciales estocásticas pueden emplearse para trabajar modelos multifactoriales como pueden ser los derivados financieros mediante su representación por un proceso de Wiener multidimensional, pudiendo incluso incluir la correlación existente entre los distintos factores tenidos en cuenta.

Pero las EDPs estocásticas también pueden usarse en el campo de las finanzas para resolver problemas de selección de *portfolio* óptimo. En este sentido, Musiela y Zariphopoulou (2010) usaron dichas EDPs para el cálculo de soluciones explícitas de dos diferentes formulaciones del problema de inversión óptima: a) la maximización de la utilidad esperada para la riqueza terminal y b) la elección de un *portfolio* en base al criterio del rendimiento progresivo de las inversiones.

Para el primero de los dos problemas, el uso de la EDP estocástica de rendimiento de las inversiones ofrece un procedimiento alternativo que permite examinar la evolución del proceso con mayor profundidad que otros existentes (por ejemplo, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (Bellman, 1954, 1957)) ya que permite obtener tanto el rendimiento esperado máximo de las inversiones como la estrategia óptima para la inversión en la forma de retroalimentación estocástica.

Con respecto al segundo problema, la técnica que proponen Musiela y Zariphopoulou (2010) permite al inversor no tener que decidir el riesgo en un único instante temporal, sino que puede revisar dicho riesgo de manera dinámica a lo largo de todo el proceso. Esto flexibiliza el modelo

clásico, en el que el inversor no puede revisar ni sus preferencias ni extender su utilidad una vez se fija el horizonte de mercado. Concretamente, la flexibilidad del modelo se recoge en la componente de volatilidad del proceso de rendimiento progresivo, representando su inseguridad sobre cambios futuros y sus preferenciales actuales de riesgo.

Para ello, los autores parten de un modelo de inversión con un activo sin riesgo y otros  $k$  con riesgo cuyos precios siguen un modelo de difusión. De este modo, el precio  $S_t^i$  del activo de riesgo  $i$  en el instante  $t$  viene dado por la ecuación diferencial estocástica de tipo browniano:

$$dS_t^i = S_t^i \cdot \left( \mu_t^i \cdot dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ji} \cdot dW_t^j \right)$$

donde  $S_0^i > 0$  para todo  $i$  y  $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$  es un proceso browniano estándar de dimensión  $d$  definido en un espacio de probabilidad con filtración  $\mathfrak{F}_t = \sigma(W_s : 0 \leq s \leq t)$  y  $\sigma_t$  denotando la matriz de volatilidad del proceso. Por tanto, la ecuación diferencial estocástica en su expresión vectorial:

$$dS_t^i = S_t^i \cdot (\mu_t^i \cdot dt + \sigma_t^i \cdot dW_t)$$

con  $\sigma_t^i$  la columna  $i$  de la matriz  $\sigma_t$ . Por otro lado, el precio  $B_t$  del activo sin riesgo también sigue una EDP dada por

$$dB_t = r_t \cdot B_t \cdot dt$$

con  $B_0 = 1$  y tasa de interés  $r_t$  en el instante  $t$ .

Con el modelo anterior, Musiela y Zariphopoulou (2010) retoman la formulación regresiva del problema de elección basada en el criterio tradicional de maximizar la utilidad esperada acorde a como lo introdujo Merton (1969). En esta formulación, tras la elección del horizonte de mercado  $[0, T]$  y de la utilidad  $u_T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  del inversor en el instante final  $T$ , se maximiza la utilidad esperada de riqueza final sobre las estrategias de inversión admisibles y que denotan  $V(x, t; T)$  con  $x \in \mathbb{R}^+$  y  $t \in [0, T]$  que debe verificar la ecuación diferencial estocástica (la descomposición de Itô) con unos coeficientes  $a$  y  $b$  satisfaciendo unas determinadas propiedades:

$$dV(x, t; T) = b(x, t; T) \cdot dt + a(x, t; T) \cdot dW_t$$

Bajo ciertas condiciones de convexidad, monotonía y diferenciabilidad, la ecuación diferencial anterior lleva al problema de contorno siguiente para cualquier estrategia  $\pi$  admisible de inversión

$$\left\{ \begin{array}{l} dV(x, t; T) = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{V}_x(x, t; T) \cdot \lambda_t + \sigma_t \cdot \sigma_t^+ \cdot \mathbf{a}_x(x, t; T)|^2}{V_{xx}(x, t; T)} dt + a(x, t; T) \cdot dW_t \\ \text{sujeto a } V(x, T; T) = u_T(x) \end{array} \right.$$

La volatilidad  $a(x,t;T)$  está presente en la expresión ya que representa la parte de difusión estocástica de la oportunidad de inversión y que dependiendo del modelo estocástico seguido lleva a una u otra solución del problema tal y como aparece en el trabajo comentado.

Pero, además de esta modelización mediante una EDP estocástica, Musiela y Zariphopoulou (2010) introducen por primera vez una formulación del problema de elección del *portfolio* óptimo mediante el rendimiento progresivo de la inversión y que, al contrario del modelo anterior, el inversor puede ir revisando sus preferencias de riesgo durante todo el tiempo de mercado de manera dinámica. De este modo, se busca maximizar la utilidad esperada sobre las estrategias de inversión admisibles, que ahora se denota  $U(x,t)$  con  $x \in \mathbb{R}^+$  y  $t \geq 0$  y que satisface también una serie de restricciones sobre convexidad, monotonía y diferenciabilidad, siendo la EDP estocástica obtenida similar a la de la formulación regresiva, pero permitiendo un análisis más rico del rendimiento progresivo de la inversión ya que se formula a futuro en lugar de a tiempo pasado. Posteriormente los propios Musiela y Zariphopoulou (2011) mostraron también el uso de este tipo de EDPs estocástica para la selección de *portfolio* usando un criterio de rendimiento monótono en el tiempo.

También en el ámbito de la selección de un *portfolio* óptimo, pero ahora bajo condiciones de riesgo sobre la liquidez y su impacto sobre el precio, podemos referir el trabajo de Ly Vath *et al.* (2007) en el que plantearon un modelo financiero con un activo libre de riesgo y otro de riesgo bajo tales restricciones, pudiéndose transferir fondos entre ambos activos en tiempo discreto. En el estudio llevado a cabo no solo se usan ecuaciones diferenciales de tipo Black-Scholes para modelar el proceso de precios, sino definen operadores diferenciales expresados en términos de las derivadas parciales de primer y segundo orden y que son esenciales para el planteamiento y resolución del problema.

En el caso de Platen y Schweizer (1998), usan las ecuaciones diferenciales estocásticas para trabajar numéricamente las distorsiones en el precio de las opciones debido a efectos de retroalimentación por estrategias de coberturas a la hora de buscar una nueva explicación para los efectos de la sonrisa y asimetría en la volatilidad. En este modelo el tiempo actúa como un continuo y los precios dependen de las estrategias por medio de una función de reacción. Concretamente, Platen y Schweizer (1998) utilizan un modelo para construir el precio de los activos de modo que puedan estudiarse las estrategias de cobertura para los derivados en función de la evolución de los instrumentos financieros subyacentes. Todo ello buscando la dinámica del activo implícitamente a partir de la condición de equilibrio del mercado. En una variable temporal continua  $t$  para un único activo de riesgo se tiene un precio  $S_t$  en dicho instante, denotando por  $L_t$  al logaritmo de dicho precio. Para un precio (en logaritmo)  $l$  en el instante  $t$ , se denota por  $D(t,l,U_t)$  a la demanda de ese activo hasta el instante  $t$  teniendo en cuenta a todos los aceptadores de precio y donde  $U_t$  engloba a todos los demás factores distintos

de  $l$  que pueden influir en la demanda (es decir,  $U$  representa un proceso estocástico que distorsiona la situación de manera exógena). A partir de la situación de equilibrio de mercado  $D(t, L_t, U_t) = k$ , se puede obtener la expresión del precio del activo  $L_t$  como la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dL_t = -\frac{1}{D_L} \left( D_U \cdot dU_t + D_t \cdot dt + \frac{1}{2} \left( D_{LL} \cdot \left( \frac{D_U}{D_L} \right)^2 - 2D_{LU} \cdot \frac{D_U}{D_L} + D_{UU} \right) \cdot d\langle U \rangle_t \right)$$

Aplicando exponencial a esta ecuación, se obtiene la evolución del precio  $S_t$ . Este estudio no limitan al caso simple de que la función demanda sea una constante escalar, sino que también consideran el caso en el que dicha función demanda sea de la forma:

$$D(t, L_t, U_t) = U_t + k \cdot (L_t - L_0) + \xi(t, L_t),$$

siendo  $U_t = \nu \cdot W_t + m \cdot t$  un movimiento browniano con tendencia  $m$  y volatilidad  $\nu$ , que representa el error aleatorio no explicable por otras causas; el sumando  $k \cdot (L_t - L_0)$  representa la demanda acumulativa de los especuladores y  $\xi(t, L_t)$  la parte de la demanda resultante de la estrategia de cobertura usada. En dicho caso, la ecuación diferencial estocástica a resolver resulta ser

$$dL_t = -\frac{\nu}{k + \frac{d\xi}{dt}(t, L_t)} dW_t - \left( \frac{m + \frac{d\xi}{dt}(t, L_t)}{k + \frac{d\xi}{dt}(t, L_t)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu^2 \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2}(t, L_t)}{\left(k + \frac{d\xi}{dt}(t, L_t)\right)^3} \right) \cdot dt$$

y que, obviamente, puede también expresarse en términos del precio  $S_t$  en lugar de su expresión logarítmica.

También son utilizadas las ecuaciones diferenciales a la hora de trabajar seguros sobre personas. En los seguros sobre personas, se genera un flujo de pagos entre la compañía aseguradora y el asegurado a lo largo de la vida del último. Por ello, la valoración temporal del dinero es esencial para disponer de una medición de los pagos pasados y futuros. Sobre esta temática, Steffensen (2007) realizó un interesante trabajo recopilatorio sobre esta temática. Más concretamente, plantea el estudio de la ecuación diferencial ordinaria que Thiele descubrió en 1875 para la reserva de un contrato de seguro sobre personas con pagos determinados. Aunque nunca la publicó, Gram (1910) la hizo pública en un obituario sobre su persona y ésta fue generalizada posteriormente por Hoem (1969) y Norberg (1991).

El modelo de Thiele parte de una póliza de seguros contratada en tiempo 0 y finalizando en un tiempo finito fijo  $n$  y siendo  $Z(t)$  el estado de la póliza en el instante  $t$ , dentro de un conjunto finito de estados de la póliza, comenzando en un estado inicial  $Z(0)=0$  y representado por un proceso de Markov en tiempo continuo con algunas restricciones adicionales. En tales

condiciones, la cantidad total  $B(t)$  de beneficios contractuales menos recargas a pagar durante el período  $[0, t]$  sigue la dinámica

$$dB(t) = dB^{Z(t)}(t) + \sum_{k \neq Z(t-)} b^{Z(t)k}(t) \cdot dN^k(t),$$

con  $N^k(t)$  representando el número de transiciones en el estado  $k$ ;  $Z(t-)$  denotando el límite a izquierda de  $Z$  en  $t$ ; y las funciones  $B^j$  y  $b^{jk}$  son deterministas y suficientemente regulares que especifican los pagos debidos durante la permanencia en estado  $j$  y por la transición del estado  $j$  al estado  $k$ , respectivamente. Los propios procesos  $B^j$  siguen un proceso de difusión  $dB^j(t) = b^j(t) \cdot dt + (B^j(t) - B^j(t-))$  que tienen una parte continua (ecuación diferencial) y otra discreta (ecuación en diferencias). Una vez establecidos los beneficios, el asegurador debe poder estimar las obligaciones futuras que está contratando y suele establecerse esa cantidad asegurando un gran número de contratos similares con flujos de pagos asociados a vidas independientes y se procura la diversificación del riesgo para valor esperado presente condicionado a tales beneficios. Ese valor esperado es la reserva que viene dada por la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial V^j}{\partial t}(t) = r \cdot V^j(t) - b^j(t) - \sum_{k \neq j} \mu^{jk}(t) \cdot R^{jk}(t),$$

en los instantes con  $B^j(t) - B^j(t-) = 0$ , siendo  $r$  la tasa de interés constante del *portfolio* de inversión de la aseguradora,  $\mu^{jk}(t)$  un proceso de intensidad estocástica para  $N^k$  y  $R^{jk}(t)$  la suma en riesgo. En los instantes restantes del período de contrato, se considera la ecuación  $B^j(t) - B^j(t-) + V^j(t) - V^j(t-) = 0$ . La condición inicial del problema resulta ser  $V^j(n) = 0$ .

Al aparecer la teoría de fijación de precios de opciones, se ha trabajado en este campo para los productos de aseguradoras a sugerencia de Brennan y Shewartz e incluso se crearon ecuaciones híbridas entre las correspondientes a los modelos Black-Scholes y Thiele, siendo el primero de tales trabajos realizado por Aase y Persson (1994). Las ecuaciones diferenciales para la reserva interrelacionando los trabajos de Heom y Aase y Persson las obtuvo el propio Steffensen (2000) derivando la ecuación híbrida entre tales modelos. La diferencia de este modelo con respecto al anterior es que las funciones  $B^j$  y  $b^{jk}$  se consideran ahora no solo dependientes de la variable temporal sino también del índice de stock  $X(t)$  en el instante  $t$  y, por tanto, el pago acumulado debería seguir el proceso dinámico:

$$dB(t) = dB^{Z(t)}(t, X(t)) + \sum_{k \neq Z(t-)} b^{Z(t)k}(t, X(t)) \cdot dN^k(t)$$

con el mismo proceso de difusión para la función  $B^j$  pero con todos los sumandos dependiendo de mencionado índice de stock, que es una cadena de Markov continua en el tiempo y siguiendo la ecuación diferencial estocástica bajo un proceso de Wiener  $W$ :

$$\begin{cases} d\mathbf{X}(t) = \alpha \cdot \mathbf{X}(t) \cdot dt + \sigma \cdot \mathbf{X}(t) \cdot d\mathbf{W}(t) \\ \mathbf{X}(0) = 0 \end{cases}$$

El valor contractual de los futuros pagos se puede representar mediante la ecuación diferencial:

$$0 = \frac{\partial V^j}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \sum_{k \neq j} \mu^{jk}(t) \cdot (V^k(t, \mathbf{x}) - V^j(t, \mathbf{x}) + \mathbf{b}^{jk}(t, \mathbf{x})) + \frac{\partial V^j}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{x} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2}(t, \mathbf{x}) \cdot \sigma^2 \cdot \mathbf{x}^2 + \mathbf{b}^j(t, \mathbf{x}) - r \cdot V(t, \mathbf{x})$$

en los instantes con  $\mathbf{B}^j(t, \mathbf{x}) - \mathbf{B}^j(t-, \mathbf{x}) = 0$ , siendo  $r$  la tasa de interés constante del *portfolio* de inversión de la aseguradora. En los instantes restantes del período de contrato, se considera la ecuación  $\mathbf{B}^j(t, \mathbf{x}) - \mathbf{B}^j(t-, \mathbf{x}) + V^j(t, \mathbf{x}) - V^j(t-, \mathbf{x}) = 0$ . La condición inicial del problema resulta ser  $V^j(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = 0$ . Bajo ciertas condiciones, la ecuación diferencial anteriormente indicada puede simplificarse aún más.

Siguiendo en productos correspondientes a seguros sobre personas, las ecuaciones diferenciales también permiten realizar un estudio sobre la distribución de dividendos y excedentes. En este sentido, Norberg (1999; 2001) utilizó ecuaciones diferenciales ordinarias estocásticas basadas en cadenas de Markov para poder simular el comportamiento del excedente técnico sobre un contrato de seguro para su pago como bonificación y poder pronosticar posibles bonificaciones futuras a partir de la parte endógena del proceso. Posteriormente, Steffensen (2006) estudió el problema de valoración de dividendos mediante la resolución de sistemas de EDPs incluyendo ciertas restricciones al mercado financiero subyacente, pudiéndose llegar incluso a soluciones semi-implícitas para ciertos casos particulares. Para ejemplificar este uso de las ecuaciones diferenciales mostramos el sistema obtenido por Steffensen en su trabajo para el cálculo de la reserva de un seguro sobre personas con pago de dividendos enlazados a excedentes:

$$0 = \frac{\partial V^j}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \sum_{k \neq j} \mu^{jk}(t) \cdot (V^k(t, \mathbf{x} + \mathbf{c}^{jk}(t)) - \delta^{jk}(t, \mathbf{x})) - V^j(t, \mathbf{x}) + \mathbf{b}^{jk}(t) + \delta^{jk}(t, \mathbf{x}) \\ + \frac{\partial V^j}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}^j(t) - \delta^j(t, \mathbf{x})) + \frac{\partial^2 V^j}{\partial \mathbf{x}^2}(t, \mathbf{x}) \cdot \pi^2(t, \mathbf{x}) \cdot \sigma^2 \cdot \mathbf{x}^2 + \mathbf{b}^j(t) + \delta^j(t, \mathbf{x}) - r \cdot V^j(t, \mathbf{x})$$

donde las nuevas funciones que intervienen en la expresión son  $\delta^j$  y  $\delta^{jk}$  que son los análogos en la función  $D$  de corriente de pagos de dividendos para los  $\mathbf{b}^j$  y  $\mathbf{b}^{jk}$  en la función de pago acumulado, respectivamente; mientras que  $\mathbf{c}^j$  y  $\mathbf{c}^{jk}$  son los respectivos análogos en el proceso de contribución de excedente  $C$ . Esta ecuación diferencial corresponde a los instantes con  $\mathbf{B}^j(t) - \mathbf{B}^j(t-) = 0$ , pero en los instantes restantes del contrato se toma la ecuación  $\mathbf{B}^j(t) - \mathbf{B}^j(t-) + D^j(t, \mathbf{x}) - D^j(t-, \mathbf{x}) + V^j(t, \mathbf{x} + C^j(t) - C^j(t-) + D^j(t, \mathbf{x}) - D^j(t-, \mathbf{x})) - V^j(t-, \mathbf{x}) = 0$ . La condición inicial del problema resulta ser  $V^j(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = 0$ .

Pero para hablar de la aplicación de las ecuaciones ordinarias no es necesario irse a conceptos ni estudios sumamente complejos como los que hemos expuesto anteriormente. Por ejemplo, como

puede verse en Bellaïche (2010), un medida macroeconómica tan conocida como el producto interior bruto (PIB) consiste en la solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal  $\frac{\partial x}{\partial t}(\mathbf{t}) = \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{t})$ , en la que la tasa de cambio del estado actual  $x(t)$  en el instante temporal  $t$  se expresa de manera proporcional al estado en dicho instante (con  $g$  una constante de proporcionalidad). Obviamente, se ha de introducir una condición inicial indicando un valor  $x(0)$  de estado para el instante inicial  $t = 0$ .

Del mismo modo, cuando una empresa gestionada racionalmente en una industria competitiva quiere maximizar el valor actual  $V$  de todos los flujos netos futuros de dinero en efectivo se hace necesario la resolución de las siguientes ecuaciones diferenciales (Gould, 1968):

$$e^{-R(t)} \cdot (P(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) - w(t)) = 0$$

$$e^{-R(t)} \cdot (P(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial K}(K, L) - (r + \delta) \cdot \frac{dC}{dI}(I) + (\frac{d^2K}{dt^2}(t) + \delta \cdot \frac{dK}{dt}(t)) \frac{d^2C}{dI^2}(I)) = 0,$$

donde  $P(t)$  representa el precio de la producción en el instante  $t$ ,  $w(t)$  denota el salario medio en  $t$ ,  $L(t)$  es el factor mano de obra en  $t$ ,  $K(t)$  es el factor capital en  $t$ ,  $C(I)$  denota el coste asociado a invertir en capital social a la tasa  $I$  de inversión bruta y  $F(K, L)$  es la función de producción en términos de capital y mano de obra.

Bajo los supuesto habituales para los conceptos indicados en el párrafo anterior, las dos ecuaciones diferenciales arriba descritas llevan a una tercera ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea de primer orden para la tasa de inversión bruta  $I(t)$ . Del mismo modo, Chen *et al.* (2007) estudian la estructura de capitales y su administración por medio de la resolución de un problema de contorno dado por la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial S}{\partial V}(V, L) = \frac{\partial v}{\partial V}(V, L) - \frac{\partial D}{\partial V}(V, L)$$

y la condición inicial  $\frac{\partial S}{\partial V}(V, L)|_{V=L} = 0$  de tipo *smooth pasting*, donde  $V$  es el valor de los activos de la empresa,  $L$  es el nivel de activación estándar,  $D(V, L)$  representa el valor presente de todas las deudas,  $v(V, L)$  denota el valor presente de la empresa y  $S(V, L)$  es el valor de patrimonio de las acciones de la empresa. Esto se debe a que la solución del problema de contorno anteriormente planteado consiste en la obtención del nivel óptimo de activación estándar  $L^*$ , que permite deducir la estructura de capital óptimo de una empresa.

Finalizamos la exposición de problemas y temas en los que emplear las ecuaciones diferenciales en el ámbito de las finanzas haciendo referencia al modelo de Heston (1993) basado en describir la evolución de la volatilidad de un activo subyacente. El modelo básico parte del hecho de que el precio  $S_t$  del activo en el instante  $t$  evoluciona en el tiempo siguiendo un proceso estocástico determinado por la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu \cdot S_t \cdot dt + \sqrt{v_t} \cdot S_t \cdot dW_t^S,$$

con

$$d v_t = \kappa \cdot (\theta - v_t) \cdot dt + \xi \cdot \sqrt{v_t} \cdot v_t \cdot dW_t^v,$$

siendo  $W_t^S$  y  $W_t^v$  dos procesos de Wiener,  $v_t$  la volatilidad en el instante  $t$ ,  $\mu$  la tasa de rendimiento del activo,  $\theta$  la varianza del precio promedio a largo plazo,  $\kappa$  es la tasa a la que  $v_t$  revierte a  $\theta$ , y  $\xi$  es la volatilidad de  $v_t$ . Este modelo fue empleado por Piché y Kannianen (2007) para el estudio de valores derivados de precio con volatilidad estocástica. Concretamente, la ecuación diferencial de partida en el problema a considerar era:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = r \cdot U - \frac{1}{2} \cdot v \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} - r \cdot S \cdot \frac{\partial U}{\partial S} - \rho \cdot \sigma \cdot v \cdot S \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot v \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} - \kappa \cdot (\theta - v) \cdot \frac{\partial U}{\partial v},$$

siendo la condición final dada por  $U(S, v, T) = \max\{S - E, 0\}$  y las condiciones de borde por  $U(0, v, t) = 0$  y  $U(S, v, t) \approx S - E \cdot e^{-r \cdot (T-t)}$  para  $S$  suficientemente grande. En la fórmula anterior,  $U(S, v, t)$  denota el valor de la opción con precio  $S$  del activo,  $v$  es la volatilidad cuadrada,  $\sigma$  la volatilidad de la volatilidad,  $\rho$  la correlación entre el proceso de volatilidad y el precio corriente,  $r$  la tasa de interés,  $\theta$  la volatilidad a largo plazo,  $\kappa$  la tasa de reversión a la media de la volatilidad y  $\lambda \cdot v$  el precio de mercado del riesgo de volatilidad absorbido en  $\kappa$  y  $\sigma$ .

## 5. ALGUNAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS EN FINANZAS

Las ecuaciones en diferencias finitas se pueden aplicar en diferentes ámbitos económicos y financieros. Son múltiples los ejemplos de modelos microeconómicos y macroeconómicos que se plantean a partir de esta formulación (en general, cualquier modelo dinámico en el que los períodos temporales quieran representarse de manera discreta). Igualmente, pueden encontrarse aplicaciones de ecuaciones en diferencias en el ámbito de la Matemática Financiera para el estudio de determinados productos financieros; piénsese que la estructura de estas ecuaciones encaja perfectamente con la valoración temporal que se realiza de los productos financieros en función de un tanto o tasa de descuento. Un estudio detallado de tales aplicaciones puede verse, entre otros, en García (2008).

Con las ecuaciones en diferencias finitas, se dispone de una forma alternativa que permite abordar los problemas característicos de la Matemática Financiera afrontando situaciones más complejas que aquellas a las que se les pueden aplicar las técnicas clásicas usando factores de capitalización y descuento. De este modo, la resolución de ecuaciones en diferencias puede considerarse una herramienta complementaria (y alternativa, en algunos casos) a los factores de descuento clásicos.

El cálculo de la solución (general y particular) de las ecuaciones en diferencias finitas y su posterior interpretación pueden ser de gran utilidad en un contexto financiero, ya que la variable tiempo es determinante en todas las valoraciones financieras y ésta puede modelizarse



fácilmente como una variable en diferencias. Lo determinante en la valoración financiera será el número de períodos transcurridos desde el momento de valoración, que puede cuantificarse como una variable con valores positivos y enteros e incluirse en la ecuación como la variable en diferencias. La función sobre dicha variable dependerá del caso particular que se estudie.

La resolución de ecuaciones lineales en diferencias finitas resulta ser fundamental para esta aproximación porque gran parte de los ejemplos financieros básicos pueden ajustarse a la resolución de una ecuación de este tipo, en particular de grado uno o dos. A la hora de enfocar la obtención de productos y valoraciones financieras mediante el planteamiento y resolución de ecuaciones en diferencias finitas, ha de hacerse un tratamiento e interpretación diferente de los datos de partida, pero que llevan a la misma resolución cuando se aplican las técnicas clásicas de la Matemática Financiera. Entre los temas que pueden trabajarse bajo esta perspectiva de las ecuaciones en diferencias finitas están los siguientes: la valoración de rentas financieras, el valor de depósitos bancarios y el saldo de préstamos según diferentes sistemas de amortización, en particular los sistemas de amortización francés y uniforme (García, 2008).

En la valoración de rentas financieras, si se considera un conjunto de aportaciones constantes  $a$  en una cuenta remunerada al tanto de interés  $i$ , se llega a la siguiente ecuación en diferencias lineal para el cálculo del valor final:

$$S_{t+1} = (1+i) \cdot S_t + a,$$

con valor inicial  $S_0 = 0$  y donde  $S_t$  representa el valor de la renta en el instante  $t$ .

Por otro lado, si el conjunto de aportaciones es variable siguiendo una progresión geométrica de razón  $q$  y comenzando con una aportación inicial  $a$ , entonces la ecuación en diferencias que se tiene para una tasa de interés  $i$  sería  $S_{t+1} = (1+i) \cdot S_t + a \cdot q^t$ , donde el valor inicial nuevamente es  $S_0 = 0$  y con  $S_t$  representando el valor de la renta en el instante  $t$ .

También aparecen las ecuaciones en diferencias en las valoraciones de depósitos. Por ejemplo, si consideramos una cuenta de ahorros en la que se hacen aportaciones constantes de cuantía  $a$  con saldos que se remuneran con tasa de interés  $i$ , la expresión que explica este fenómeno correspondería a la siguiente ecuación en diferencias:

$$S_{t+1} = (1+i) \cdot S_t + a,$$

donde el valor inicial corresponderá al capital  $S_0 = C$  con el que se abre la cuenta de ahorros y con  $S_t$  representando el valor del depósito en el instante  $t$ . Si en lugar de hacer un ingreso en la cuenta tras un período temporal fijado, lo que se lleva a cabo es un reintegro de valor  $a$ , entonces la ecuación en diferencias resulta ser:

$$S_{t+1} = (1+i) \cdot S_t - a,$$

con el mismo valor inicial que antes y el mismo significado para la variable  $S_t$ . Obviamente, pueden considerarse situaciones intermedias a la descritas (ingresos de determinada cuantía y reintegros de otra, reintegros de un porcentaje del saldo de cada año...).

También se resuelve mediante ecuaciones en diferencias el saldo de préstamos siguiendo distintos sistemas de amortización. En este modelo, también usaremos la notación  $S_t$ , pero para representar el saldo del préstamo en el periodo  $t$ . De este modo, si se concede un préstamo por una cuantía  $C$  a amortizar en  $n$  años con una tasa de interés  $i$ , siguiendo el sistema uniforme o de cuotas de amortización constante de cuantía  $m$ , la ecuación en diferencias lineal que se ha de resolver es:

$$S_{t+1} = S_t - m,$$

tomando como valor inicial la cuantía del préstamo  $S_0 = C$  y en el que la tasa de interés  $i$  no aparece explícitamente en la ecuación sino que se ha usado previamente para determinar el valor de la cuota  $m$ .

En caso de considerar el sistema francés de amortización, se tienen en cuenta anualidades constantes de cuantía  $a$ , pero la tasa de interés interviene explícitamente en la ecuación en diferencias lineal  $S_{t+1} = (1+i) \cdot S_t - a$ , para ir actualizando los intereses anualmente y manteniendo como antes el mismo valor inicial  $S_0 = C$ .

Las ecuaciones en diferencias finitas (de primer y segundo orden) aparecen a la hora de trabajar problemas de optimización dinámica partiendo del supuesto de que el tiempo es una variable discreta y el horizonte es finito. Así, un primer ejemplo puede tenerse en el modelo lineal-cuadrático de “beneficio permanente” (Obstfeld y Rogoff, 1996: pp. 82–84), olvidando temporalmente el consumo e inversión del gobierno se presupone que el producto doméstico bruto  $Y$  sigue un proceso estocástico exógeno en función del tiempo, expresado por la siguiente ecuación en diferencias lineal de primer orden:

$$Y_{t+1} - \bar{Y} = \rho \cdot (Y_t - \bar{Y}) + \varepsilon_{t+1},$$

donde  $\varepsilon_t$  es una perturbación serialmente incorrelada (i.e.  $E_t(\varepsilon_{t+1}) = 0$ ) y  $\rho \in [0, 1]$ . La solución general del producto  $Y_t$  para la expresión anterior conlleva que los efectos de choque decaigan geoméricamente respecto al tiempo cuando  $\rho < 1$ .

Si, por el contrario, en este tipo de problemas se desea considerar el producto doméstico bruto como una variable aleatoria no estacionaria, bastaría considerar que el proceso seguido corresponde a la siguiente ecuación en diferencias lineal de segundo orden:

$$Y_{t+1} - Y_t = \rho \cdot (Y_t - Y_{t-1}) + \varepsilon_{t+1}.$$

Esta modificación de la expresión significa que el producto permanente fluctúa más que el producto actual, a excepción de  $\rho = 0$  que correspondería a que ambos productos sufren la misma fluctuación.

Otra ecuación en diferencias lineal que aparece en problemas económico-financieros corresponde al estudio del cociente deuda/producción en estado estacionario. Concretamente, para estudiar la dinámica de los activos exteriores, se dispone de la siguiente ecuación en diferencias lineal de primer orden para el cociente entre los activos exteriores netos y la producción  $\frac{B_s}{Y_s}$ , cuya expresión es del tipo:

$$\frac{B_{s+1}}{Y_{s+1}} = a \cdot \frac{B_s}{Y_s} + b,$$

en función de dos parámetros con una determinada significación económica (Obstfeld y Rogoff, 1996: pp. 116–117).

Continuando con las cuestiones de estado estacionario y dentro del denominado modelo de solape generacional (Weil, 1989) para la búsqueda de equilibrios generales, la tasa común  $k_t^w$  entre capital y mano de obra en el modelo de equilibrio comparando la economía del país (Interior) con el resto del mundo (Exterior) se puede expresar mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$k_{t+1}^w = \frac{\beta \cdot (1 - \alpha)}{(1 + n) \cdot (1 + \beta)} (k_t^w)^\alpha,$$

en la que interviene la tasa neta de crecimiento  $n$  de ambas economías y tanto  $\alpha$  como  $\beta$  son parámetros del modelo. Todo esto bajo la hipótesis de que las tecnologías productivas de ambos países siguen el mismo modelo de Cobb-Douglas y las mismas preferencias (Obstfeld y Rogoff, 1996: pp. 168–169).

Varios modelos de crecimiento económico a largo plazo se fundamentan en hipótesis de que los motores del crecimiento económico son la productividad  $E$  y la mano de obra  $L$ , que vienen dadas por ecuaciones en diferencias finitas lineales, a partir de los cuales se obtiene la acumulación de capital como una ecuación diferencial un poco más complicada que las anteriores. De este modo, siguiendo el modelo de Solow con tasas de ahorro fijo (Solow, 1956), se parte del hecho de que el cambio tecnológico exógeno viene dado por el nivel de productividad  $E$  neutra de Harrod (expresado por  $E_{t+1} = (1 + g) \cdot E_t$ ), mientras que la mano de obra  $L$  sigue el comportamiento de la población ( $L_{t+1} = (1 + n) \cdot L_t$ ). Como resultado la acumulación de capital  $K$  puede expresarse por la ecuación en diferencias:

$$K_{t+1} - K_t = s \cdot F(K_t, E_t \cdot L_t) - \delta \cdot K_t,$$

donde  $\delta$  es la tasa de depreciación,  $n$  es la tasa de crecimiento poblacional,  $g$  es la tasa de crecimiento de la producción,  $s$  es una fracción fija de los beneficios actuales y  $F$  es la función de producción. La ecuación en diferencias anterior puede normalizarse por la eficiencia de la oferta de trabajo  $E \cdot L$ , obteniéndose una ecuación en diferencias que explica el comportamiento del cociente  $k^E = \frac{K}{E \cdot L}$  entre el capital y la eficiencia y mano de obra:

$$k_{t+1}^E - k_t^E = \frac{1}{1+z} (s \cdot F(k_t^E, 1)) - (z + \delta) \cdot k_t^E,$$

siendo  $1+z = (1+n) \cdot (1+g)$ . Se pueden considerar modelos más complicados de crecimiento económico a largo plazo que conllevan el manejo y resolución de ecuaciones en diferencias de mayor complejidad. Por mentar algún ejemplo, se puede considerar el caso del modelo Ramsey-Cass-Koopmans de crecimiento económico (Ramsey, 1928; Cass, 1965; Koopmans, 1965), en las que el mundo se supone poblado por generaciones que viven infinitamente con tamaño  $L$ , siguiendo  $L$  la ecuación en diferencias anteriormente indicada en base a la tasa exógena  $1+n$  y el avance tecnológico  $E$  aumentando la mano de obra sigue también la ecuación en diferencias mostrada en el modelo de Solow. Para resolver el problema, se presupone que cada generación tiene su propia función de producción de rendimientos a escala constante. Tomando como una simplificación que la depreciación es  $\delta = 0$ , la restricción presupuestaria del período de la generación representativa viene dada por:

$$K_{t+1} = K_t + F(K_t, E_t \cdot L_t) - C_t,$$

donde  $C_t$  denota el consumo en el período  $t$ . Si se consideran los datos en términos *per capita*, entonces la ecuación en diferencias quedaría como sigue, sin más que dividir por  $L_t$ :

$$k_{t+1} - k_t = \frac{F(k_t, E_t) - c_t}{1+n} - \frac{n \cdot k_t}{1+n},$$

donde  $k_t = \frac{K_t}{L_t}$  y  $F(k, E) = \frac{F(K, E \cdot L)}{L}$ . También, en el ámbito de los modelos de

convergencia de solape generacional y en presencia de imperfecciones del mercado de crédito, el stock de capital *per capita* puede ser descrito mediante la siguiente ecuación en diferencias bajo ciertas hipótesis de equilibrio:

$$k_{t+1} = (1-\alpha) \cdot \left( \frac{\beta \cdot (1+\eta)}{1+\beta} - \frac{(1+r) \cdot \eta}{(1+\beta) \cdot \alpha \cdot k_{t+1}^{\alpha-1}} \right) \cdot k_t^\alpha,$$

donde  $r$  denota la tasa de interés mundial al que se enfrenta la economía (Obstfeld y Rogoff, 1996: p. 471).

En el análisis monetario y de precios, Cagan (1956) definió y estudió las hiperinflaciones como períodos en los precios de los bienes se incrementan con una tasa promedio mensual de al

menos un 50%. El modelo que Cagan utilizó en su análisis es, en general, una ecuación en diferencias estocástica, pero que si se considera desde un punto de vista no estocástico en equilibrio, ésta correspondería a la ecuación en diferencias:

$$m_t - p_t = -\eta \cdot (p_{t+1} - p_t),$$

donde  $m$  y  $p$  son los logaritmos neperianos de la provisión de dinero  $M$  de un país y su nivel de precios  $P$ , mientras que  $\eta$  representa la semielasticidad de la demanda para balances reales con respecto a la inflación esperada. La resolución del modelo estocástico solo se diferencia del no estocástico en la sustitución de las provisiones monetarias previstas perfectamente por sus valores esperados, siempre y cuando la dotación de dinero futura es incierta.

Otro uso de las ecuaciones en diferencias finitas se puede observar en el estudio de las políticas fiscales y monetarias de una economía abierta. Concretamente, el paradigma seguido en tales políticas es esencialmente keynesiano desde principios de la década de 1960 en base al marco teórico establecido por Mundell (1963, 1964) y Fleming (1962). Entre sus muchas variantes, podemos considerar la extensión de la perfecta previsión debida a Dornbusch (1976) para el modelo de Mundell y Fleming, la cual comparte algunas similitudes con el análisis monetario de Cagan. Concretamente, si un país afronta una tasa de interés (para cambio de divisas) exógena  $i^*$ , supuesta constante en el tiempo, entonces se tiene la siguiente ecuación en diferencias para determinar la paridad de interés de descubierto:

$$i_{t+1} = i^* + e_{t+1} - e_t,$$

donde  $i_{t+1} = \log(1+i_{t+1})$  es el logaritmo de la tasa de interés nominal interior bruta entre los períodos  $t$  y  $t+1$ ,  $i = \log(1+i^*)$  y  $e$  es el logaritmo de la tasa de cambio, definido como el precio interior de la divisa extranjera. Bajo las hipótesis dadas por Mundell, Fleming y Dornbusch, se puede obtener una segunda ecuación en diferencias para el (logaritmo del) nivel de precios  $p$  de la divisa interior, (el logaritmo de) la tasa de cambio  $e$ , el (logaritmo del) nivel de precios extranjero  $p^*$  medido en la divisa extranjera y la tasa real  $q$  en equilibrio en términos de la demanda agregada  $y_t^d$  de la producción nacional y de la tasa natural  $\bar{y}$  de la producción:

$$p_{t+1} - p_t = \psi \cdot (y_t^d - \bar{y}) + (e_{t+1} - e_t + p_{t+1}^* - p_t^* - q_{t+1} + q_t),$$

pudiéndose interpretar el valor de  $e_t + p_t^* - q_t$  como el nivel de precios que prevalecería en el mercado de producción. El primer término de la ecuación anterior viene a representar la inflación de los precios causada por un exceso en la demanda y el segundo el ajuste en el nivel de precios que se hace necesario para mantener la inflación esperada o el crecimiento de producción.

Otro ejemplo del uso de las ecuaciones en diferencias en el campo de la economía correspondería al modelo monetario de equilibrio general para dos países en previsión perfecta, introducido por Obstfeld y Rogoff (1995). En dicho modelo, las restricciones presupuestarias

$B^j$  de un productor monopolista individual  $j$  (que produce un único bien distinguible y reside tanto en el país en cuestión como en el extranjero) visto desde el territorio nacional sería:

$$P_t \cdot B_{t+1}^j + M_t^j = P_t \cdot (1 + r_t) \cdot B_t^j + M_{t-1}^j + p_t(j) \cdot y_t(j) - P_t \cdot C_t^j - P_t \cdot \tau_t,$$

donde  $r_t$  denota la tasa de interés real para bonos entre los instantes  $t$  y  $t+1$ ,  $y_t(j)$  y  $p_t(j)$  representan la producción del bien  $j$  y su precio en la moneda nacional,  $M_{t-1}^j$  corresponde al balance monetario nominal del productor  $j$  al comenzar el período  $t$ ,  $P_t$  indica el nivel del precio del dinero nacional y  $\tau_t$  denota los impuestos globales a pagar en el bien de consumo  $C_t^j$  del que forma parte, viniendo dada esta última por una función CES de dos bienes en términos del consumo del productor  $j$  nacional en el período  $t$ . Según Woodford (1996), se puede presuponer que en este modelo el gobierno satisface un equilibrio presupuestario y que todos los impuestos por acuñamiento de moneda son reembolsados al sector público por medio de transferencia con la siguiente ecuación en diferencias:

$$0 = \tau_t + \frac{M_t - M_{t-1}}{P_t}.$$

Pero, además de en las premisas para la resolución del problema, para buscar la utilidad óptima en el productor nacional  $j$  se hace necesaria también la resolución de la ecuación en diferencias  $C_{t+1} = \beta \cdot (1 + r_{t+1}) \cdot C_t$  o la versión en linealización logarítmica de las ecuaciones de consumo

de Euler: 
$$c_{t+1} = c_t + \frac{\delta}{1 + \delta} \frac{dr_{t+1}}{\delta}.$$

Por último, entre los productos que no podrían resolverse con las técnicas tradicionales y requieren del planteamiento y resolución de ecuaciones en diferencias se encuentran, entre otros, la valoración de carteras en la que los flujos de entrada y salida no responden a un esquema regular (progresión aritmética o geométrica), o los planes de ahorro con ingresos y/o reintegros que siguen una ley compleja. Este tipo de productos muestra cómo la resolución de ecuaciones en diferencias finitas puede ser una herramienta potente en el contexto financiero a usar de manera complementaria a las herramientas clásicas.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha hecho referencia a la importancia de la aplicación tanto de las ecuaciones diferenciales como de las ecuaciones en diferencias para la resolución de problemas económicos. Por otro lado, el uso de las ecuaciones diferenciales facilita la modelización e interpretación de numerosos problemas económicos, como aquéllos relacionados con la oferta y la demanda, en problemas de índole financieros; también nos ayudan a determinar las condiciones de estabilidad dinámica en modelos microeconómicos de equilibrios de mercado o nos permiten

trazar la trayectoria de tiempo de crecimiento en diversas condiciones macroeconómicas, etc. Con ánimo de mostrar cómo los modelos basados en ecuaciones diferenciales son empleados hoy día en la investigación económica, el lector puede consultar Duffy (2006) y Hernández *et al.* (2009), donde se apuntan algunas de las tendencias actuales.

También podemos encontrar ejemplos de procesos en tiempo discreto, tales como las sucesiones que surgen en matemáticas financieras. Aunque estos procesos evolucionan con el tiempo, hay que tratarlos desde un punto de vista discreto; por ello, se utilizan ecuaciones en diferencias, porque las variables implicadas cambian solo en ciertos momentos concretos de tiempo. Por ejemplo, si consideramos el valor de una inversión que se compone mensualmente, ésta solo cambia al final de cada mes, por lo que la sucesión de valores de tal inversión es un proceso discreto (no puede ser continuo ya que el valor no cambia de un instante de tiempo a otro).

Por último, con los ejemplos dados en los distintos apartados de este trabajo (que por supuesto, no son todos los existentes) se ha querido poner de manifiesto que las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones en diferencias nos ayudan a resolver problemas importantes dentro de la economía y la administración de empresas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- K.K. Aase, S.A. Persson (1994): Pricing of unit-linked life insurance policies. *Scandinavian Actuarial Journal* **1994**, pp. 26–52.
- Y. Achdou, O. Bokanowski, T. Lelievre (2012): Partial Differential Equations in Finance. En F. Fabozzi (ed.): *The Encyclopedia of Financial Models Vol. 2*. Wiley: Hoboken.
- F. Antonelli, E. Barucci, M. Mancino (2001): Asset pricing with a forward–backward stochastic differential utility. *Economic Letters* **72**, pp. 151–157.
- P. Apianus (1527): *Ein neue und wolgegründete unterweisung aller Kauffmanns Rechnung in dreyen Büchern, mit schönen Regeln und fragstücken begriffen*, Ingolstadt.
- Arquímedes / Eutocio (2005): *Tratados I / Comentarios*, Editorial Gredos: Madrid, pp. 99–234. Traducción al castellano del tratado “Sobre la esfera y el cilindro” (escrito hacia 225 a.C.).
- Arquímedes (1993): *El método relativo a los teoremas mecánicos*, Universidad Autónoma de Barcelona: Barcelona. Traducción al castellano del original escrito en s. III a.C.
- I. Barrow (1916): *Geometrical Lectures*, Open Court Publishing: Londres. Traducción al inglés de la obra original publicada en 1670.
- S. Basov (2004): Lie groups of partial differential equations and their application to the multidimensional screening problems. En *Econometric Society 2004 Australasian Meetings*, 44.
- J. Bellaïche (2010): On the path-dependence of economic growth. *Journal of Mathematical Economics* **46**, pp. 163–178.
- R.E. Bellman (1954): Dynamic Programming and a new formalism in the calculus of variations. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **40**, pp. 231–235.
- R.E. Bellman (1957): *Dynamic Programming*. Princeton University Press: Princeton.
- T.S. Bhanu Murthy (1994): *A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics*, Wiley Eastern: Nueva Deli.

- J. Binet (1843): Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies d'un ordre quelconque, à coefficients variables. *Comptes Rendus Acad. Sci.* **XVII**, pp. 559–567.
- F. Black, M. Scholes (1973): The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* **81**, pp. 637–654.
- G. Box, G. Jenkins (1970): Time Series Analysis, Forecasting and Control. *Holden Day*. San Francisco.
- P. Cagan (1956): *The monetary dynamics of hyperinflation*. En M. Friedman (ed.): Studies in the quantity theory of money, University of Chicago Press: Chicago, pp. 25–43.
- G. Cardano (1545): *Artis magna, sive de regulis algebraicis*, Nuremberg.
- D. Cass (1965): Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. *Review of Economic Studies* **32**, pp. 233–240.
- A.L. Cauchy (1825): *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires*, De Bure Frères: Paris.
- A.L. Cauchy (1827): Mémoire sur les intégrales définies. *Mém. Acad. Sci. Inst. France* **1**, pp. 599–799. Presentada originalmente en 1814.
- A.L. Cauchy (1842a): Mémoire sur un théorème fondamental, dans le calcul intégral. *Comptes Rendus Acad. Sci.* **XIV**, pp. 1020–1026.
- A.L. Cauchy (1842b): Mémoire sur l'emploi du calcul des limites dans l'intégration des équations aux dérivées partielles. *Comptes Rendus Acad. Sci.* **XV**, pp. 44–59.
- A.L. Cauchy (1842c): Mémoire sur l'application du calcul des limites à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles. *Comptes Rendus Acad. Sci.* **XV**, pp. 85–101.
- A.L. Cauchy (1842d): Mémoire sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, et sur leur réduction à des systèmes d'équations linéaires du premier ordre. *Comptes Rendus Acad. Sci.* **XV**, pp. 131–138.
- B. Cavalieri (1635): *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Ex-typo-graphia de Ducii: Bolonia.
- Y.T. Chen, C.F. Lee, Y.C. Sheu (2007): An ODE approach for the expected discounted penalty at ruin in a jump-diffusion model. *Finance and Stochastics* **11**, pp. 323–355.
- A. de Moivre (1730): *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, Tonson and J. Watts: Londres.
- P.R. de Montmort (1708): *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Quillau: Paris.
- L. de Pisa (2003): *Liber Abaci*, Springer: Nueva York. Traducción al inglés del original de 1202.
- R. Dornbusch (1976): Expectations and exchange rate dynamics. *Journal of Political Economy* **84**, pp. 1161–1176.
- D.J. Duffy (2006): *Finite Difference Methods in Financial Engineering: A Partial Differential Equation Approach*. John Wiley & Sons: Chichester.
- Euclides (1994): *Elementos. Libros V-XIII*, Editorial Gredos: Madrid. Traducción al español del original datado hacia 300 a.C.
- L. Euler (1728): Nova methodus innumerabiles aequationes differentials secundi gradus reducendi ad aequationes differentials primi gradus. *Comm. Acad. Scient. Imp. Petrop.* **3**, pp. 134–137. [Fecha real de publicación 1732].
- L. Euler (1743): De integratione aequationum differentialium altiorum graduum. *Misc. Berolin.* **7**, pp. 193–242.



- L. Euler (1744): De constructione aequationum. *Comm. Acad. Scient. Petrop.* **9**, pp. 85–97.
- L. Euler (1757): Principes généraux du mouvement des fluides. *Mém. Acad.Sci. Berlin* **11**, pp. 274–315.
- L. Euler (1768-1770): *Institutionum calculi integralis. Vol. I-III*, Imp. Acad. Imper. Scient.: San Petersburgo.
- J.M. Fleming (1962): Domestic financial policies under fixed and under floating exchange rates. *International Monetary Fund Staff Papers* **9**, pp. 369–379.
- J. García (2008): *Matemáticas Financieras con ecuaciones de diferencia finita (5ª Ed.)*. D.C: Pearson Educación de Colombia, Bogotá.
- C.I. Gerhardt (1849): *Leibnizens Mathematische Schriften” Vol. I*, Verlag: Berlín, carta XLII (a Oldenburg).
- I. Gibson (1983): *Protagonistas de la civilización: Arquímedes*, Editorial Debate: Madrid.
- J.P. Gould (1968): Adjustment costs in the theory of investment of the firm. *Review of Economic Studies* **35**, pp. 47–55.
- J. Gow (2010): *A Short History of Greek Mathematics*, Cambridge University Press: New York. Reimpresión del original de 1884.
- J.P. Gram (1910): Professor Thiele som aktuar. *Dansk Forsikrings Arbog* **1910**, pp. 26–37.
- J. Gregory (1667): *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura*, Holden: Londres.
- T.L. Heath (1921): *A History of Greek Mathematics. Vol I*, Oxford University Press: Oxford.
- I. Hernández, C. Mateos, J. Núñez, A.F. Tenorio (2009): Lie Theory: Applications to problems in Mathematical Finance and Economics. *Applied Mathematics and Computation* **208**, pp. 446–452.
- S.L. Heston (1993): A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies* **6**, pp. 327–343.
- J.M. Hoem (1969): Markov chain models in life insurance. *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik* **9**, pp. 91–107.
- L. Hui (1999): *The Nine Chapters on the Mathematical Art*. Oxford University Press: Oxford. Traducción al inglés del texto original publicado en el s. III d.C.
- C.G.J. Jacobi (1865): De investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujuscunque. *Journal Borchardt Journal für die reine und angewandte Mathematik* **64**, pp. 297–320.
- C.G.J. Jacobi (1866): *De aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocando*. En A. Clesch (ed.): *Vorlesungen über Dynamik von C.G.J. Jacobi nebstes fünf hinterlassenen Abhandlungen desselben*”, Druck und Verlag von Georg Reimer: Berlin, pp. 550–578.
- C. Jordan (1870): *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthiers-Villars: París.
- E.L. Ince (1956): *Ordinary Differential Equations*, Dover: New York.
- M. Kline (1972a): *Mathematical thought from ancient to modern times Vol. I*, Oxford University Press: New York.
- M. Kline (1972b): *Mathematical thought from ancient to modern times Vol. II*, Oxford University Press: New York.
- T. Koopmans (1965): *On the concept of optimal economic growth*. *Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia* **28**, pp. 225–300.

- J.L. Lagrange (1766): Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter causées par leur attraction mutuelle. *Pièces de prix de l'Acad. de Sc. de Paris*. **T. 9. Mem.**, pp. 6–29.
- J.L. Lagrange (1785): *Recherches sur la theorie des perturbations que les comètes peuvent éprouver par l'action des planètes*, Moutard: Paris.
- J.L. Lagrange (1804): Leçons sur le calcul des fonctions. *J. École Polytech.* **5**, pp. 1–90.
- P.S. Laplace (1771): Recherches sur le calcul intégral aux différences infiniment petites, et aux différences finies. *Mél. Phil. Math. Soc. Roy. Turin, années 1766-1769 (Miscellanea Taurensia IV)*, pp. 273–345.
- P.S. Laplace (1777): Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles. *Histoire Acad. Royale Sci. Paris année 1773*, pp. 341–402.
- P.S. Laplace (1785): Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres. *Mém. Acad. Royale Sci. Paris*, année **1782**.
- G.W. Leibniz (1684): Nova methodus pro maximis et minimis, itemquetangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare proillis calculi genus. *Acta Eruditorum Lipsiae MDCLXXXIV*, pp. 467–473.
- G.W. Leibniz (1686): De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum. *Acta Eruditorum Lipsiae MDCLXXXVI*, pp. 292–300.
- V. Ly Vath, M. Mnif, H. Pham (2007): A model of portfolio selection under liquidity risk and price impact. *Finance and Stochastics* **11**, pp. 51–90.
- G. Manfredi (1707): *De constructione aequationum differentialium primi gradus*, C. Pifarii: Bolonia.
- R. Merton (1969): Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case. *Review of Economics and Statistics* **51**, pp. 247–257.
- R.C. Merton (1973): Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* **4**, pp. 141–183.
- R.A. Mundell (1963): Capital mobility and stabilization policy under fixed and flexible exchange rates. *Canadian Journal of Economics and Political Science* **29**, pp. 475–485.
- R.A. Mundell (1964): A reply: Capital mobility and size. *Canadian Journal of Economics and Political Science* **30**, pp. 421–431.
- M. Musiela, T. Zariphopoulou (2010): Stochastic Partial Differential Equations and Portfolio Choice. En C. Chiarella, A. Novikov (eds.): *Contemporary Quantitative Finance*. Springer-Verlag: Berlín, pp. 195–216.
- M. Musiela, T. Zariphopoulou (2011): Initial investment choice and optimal future allocations under time-monotone performance criteria. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **14**, pp. 61–81.
- I. Newton (1687): *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Pepys: Londres.
- I. Newton (1736): *Method of fluxions and infinite series*, Woodfall: Londres.
- R. Norberg (1991): Reserves in life and pension insurance. *Scandinavian Actuarial Journal* **2013**, pp. 3–24.
- R. Norberg (1999): A theory of bonus in life insurance. *Finance and Stochastics* **3**, pp. 373–390.
- R. Norberg (2001): On bonus and bonus prognoses in life insurance. *Scandinavian Actuarial Journal* **2001**, pp. 126–147.

- M. Obstfeld, K. Rogoff (1995): Exchange rate dynamics redux. *Journal of Political Economy* **103**, pp. 624–660.
- M. Obstfeld, K. Rogoff (1996): *Foundations of International Macroeconomics*, MIT Press: Massachusetts.
- B. Oksendal (1985): *Stochastic Differential Equations*, Springer: Berlin.
- B. Pascal (1665): *Traité du triangle*, Desprez: Paris.
- E. Picard (1893): *Traité d'Analyse. Tome II*, Gauthiers-Villars: Paris.
- R. Piché, J. Kannianen (2007): Solving financial differential equations using differentiation matrices. En: S.I. Ao, L. Gelman, D.W.L. Hukins, A. Hunter, A.M. Korsunsky (eds.): *Proceedings of the World Congress on Engineering 2007 Vol. II*. Newswood Limited: Londres, pp. 1016–1022.
- E. Platen, M. Schweizer (1998): On feedback effects from hedging derivatives. *Mathematical Finance* **8**, pp. 67–84.
- H.J. Poincaré (1890): Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica* **13**, pp. 1–270.
- S. Polidoro (2003): A nonlinear PDE in Mathematical Finance. En F. Brezzi, A. Buffa, S. Corsaro, A. Murli (eds.): *Numerical Mathematics and Advanced Applications*. Springer: Milán.
- C. Prévôt, M. Röckner (2007): *A concise course on Stochastic Partial Differential Equations*. Springer: Berlin.
- F.P. Ramsey (1928): A mathematical theory of savings. *Economic Journal* **38**, 543–559.
- R. Rashed (1994): *The development of Arabic mathematics: between arithmetic and algebra*, Kluwer Academic: Londres.
- W.W. Rouse Ball (1960): *A short account of the History of Mathematics*, Dover Publications: New York.
- T. Sauer (2012): Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations in Finance. En J.C. Duan, W.K. Härdle, J.E. Gentle (ed.): *Handbook of Computational Finance*. Springer: Berlín, pp. 529–550.
- F. Smithies (1997): *Cauchy and the Creation of Complex Function Theory*, Cambridge University Press: Cambridge.
- R.M. Solow (1956): A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics* **70**, pp. 65–94.
- M. Steffensen (2000): A no arbitrage approach to Thiele's differential equation. *Insurance: Mathematics and Economics* **27**, pp. 201–214.
- M. Steffensen (2006): Surplus-linked life insurance. *Scandinavian Actuarial Journal* **2006**, pp. 1–22.
- M. Steffensen (2007): Differential Equations in Finance and Life Insurance. En B.S. Jensen, T. Palokangas (eds.): *Stochastic Economic Dynamics*. CBS press: Gylling.
- J. Wallis (1656): *Arithmetica Infinitorum*, Thomas Robinson: Oxford.
- P. Weil (1989): Overlapping families of infinitely lived agents. *Journal of Public Economics* **38**, pp. 183–198.
- M. Woodford (1996): Control of the public debt: A requirement for price stability? *NBER Working Paper Series* 5684, 35 pp.



UNIVERSIDAD  
PABLO DE  
OLAVIDE  
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA  
LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (16). Páginas 200–215.  
Diciembre de 2013. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.  
URL: <http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=84>

## Predicción de quiebras empresariales en economías emergentes: uso de un modelo logístico mixto

CARO, NORMA PATRICIA

Facultad de Ciencias Económicas

Universidad Nacional de Córdoba (Argentina)

Correo electrónico: [pacaro@eco.unc.edu.ar](mailto:pacaro@eco.unc.edu.ar)

DÍAZ, MARGARITA

Facultad de Ciencias Económicas

Universidad Nacional de Córdoba (Argentina)

Correo electrónico: [mdiazlujan@gmail.com](mailto:mdiazlujan@gmail.com)

PORPORATO, MARCELA

School of Administrative Studies (SAS)

York University, Toronto (Canadá)

Correo electrónico: [porpomar@yorku.ca](mailto:porpomar@yorku.ca)

### RESUMEN

Este trabajo replica y adapta el modelo de Jones y Hensher (2004) a los datos de una economía emergente con el propósito de evaluar su validez externa. Se compara el desempeño del modelo logístico estándar en relación con el modelo logístico mixto para predecir el riesgo de crisis en el periodo 1993-2000, utilizando estados contables de empresas argentinas y ratios definidos en estudios de Altman y Jones y Hensher. Como en estudios anteriores, rentabilidad, rotación, endeudamiento y flujo de fondos operativos explican la probabilidad de crisis financiera. La contribución de esta nueva metodología reduce la tasa de error del tipo I a un 9 %. Se demuestra que el modelo logístico mixto, que tiene en cuenta la heterogeneidad no observada, supera ampliamente el desempeño del modelo logístico estándar.

**Palabras clave:** modelo logístico mixto; estados contables; ratios financieros; crisis financiera; predicción de quiebra; Argentina.

**Clasificación JEL:** M4; C4.

**MSC2010:** 62P25.

# Bankruptcy Prediction in Emerging Economies: Use of a Mixed Logistic Model

## ABSTRACT

This study is a replication and adaptation of Jones and Hensher (2004) model in an emerging economy with the purpose of testing its eternal validity. It compares the logistic standard model's performance with the logistic mixed model to predict bankruptcy risk of Argentinean companies between 1993-2000 by using financial statements and ratios defined in previous studies by Altman and Jones and Hensher. Similar to previous studies, profitability, asset turnover, debt and cash flow from operations explain financial distress' probability. The main contribution of this new methodology is the important reduction of error type I to the 9 %. This study asserts that the logistic mixed model, that considers the effect of non-observed heterogeneity, significantly improves the performance of the logistic standard model.

**Keywords:** mixed logistic model; financial statements; accounting ratios; financial distress; bankruptcy prediction; Argentina.

**JEL classification:** M4; C4.

**MSC2010:** 62P25.



## 1. INTRODUCCIÓN

La crisis financiera de las empresas ha sido un tema de preocupación por las importantes consecuencias económicas y sociales que acarrea. La estrecha relación existente entre los indicadores económicos-financieros construidos a partir de los informes financieros de las empresas y su situación futura justifican la construcción de modelos de pronóstico de riesgo de crisis financiera, ya que estos proveen información valiosa y adecuada para el diseño de políticas públicas y privadas que contribuyen a atenuar este fenómeno. Este trabajo se inscribe en el último grupo, que trata de predecir si una empresa entrará en crisis financiera (quiebra) en el futuro próximo valiéndose de los datos públicamente disponibles en los estados contables.

Ante la necesidad de contar con este tipo de modelos, comenzaron a realizarse, en la década de 1960 (Altman, 1968) los primeros estudios. En ellos la metodología seguida se basa en un diseño apareado de muestras no aleatorias y la aplicación de métodos de discriminación lineal y cuadrático. En la década de 1980 aparecen los primeros cuestionamientos al diseño no aleatorio (Ohlson, 1980; Zmijewski, 1984), acompañado de la modelación con regresión logística o modelo probit binarios (Ohlson, 1980; Jones, 1987; Maddala 1991). Una extensión de estos modelos son los de variable respuesta cualitativa multinomial u ordinal (Leclere, 1999). El modelo logístico mixto, que tiene en cuenta la heterogeneidad no observada entre unidades, es uno de los últimos modelos econométricos de elección discreta que ha sido desarrollado (Trian, 2003). Jones y Hensher (2004) demuestran que el modelo logístico mixto supera ampliamente el desempeño del modelo logístico estándar. El uso de datos longitudinales, tiene varios beneficios, tales como que permiten controlar la heterogeneidad no observada entre las unidades de análisis, reducen la multicolinealidad entre las variables y se obtienen estimadores más eficientes (Baltagi, 1995).

En Argentina, se aplicaron varios métodos estadísticos para predecir quiebras en periodos de tiempo considerados estables dadas las condiciones macroeconómicas. Swanson y Tybout (1988), Díaz *et al.* (2001) y Sandin y Porporato (2007) en la década de 1990 emplearon modelos de corte transversal para clasificar empresas según su condición. El objetivo de estos estudios fue determinar si la información disponible en los estados financieros de las empresas que cotizan en la bolsa de Buenos Aires permitía predecir qué empresas tenían mayor probabilidad de presentar una situación de crisis financiera. Concretamente los modelos construidos en base a ratios financieros permitieron predecir la quiebra en un periodo de estabilidad en una economía emergente, como fue el caso de Argentina en la década de 1990. En aquellos modelos los ratios de rentabilidad y solvencia jugaban un rol principal.

Este estudio contribuye a la literatura la aplicación por primera vez de un método avanzado que incorpora la dimensión temporal en el estudio del fenómeno aplicado a una muestra de empresas de una economía emergente. Este modelo utiliza un mínimo de dos y un máximo de cuatro estados contables por cada empresa para estimarlo con un método que

incorpora la correlación inducida por la información longitudinal, esto es, una misma empresa observada en varios años. Específicamente, este trabajo elabora un modelo logístico mixto para predecir el riesgo de crisis en el periodo 1993-2000, utilizando la información contenida en los estados contables de las empresas y los ratios definidos por Altman (1993) y Jones y Hensher (2004), tales como ratios de rentabilidad, rotación, endeudamiento, flujo de fondos generados por las operaciones, nivel de efectivo y capital de trabajo. Este trabajo aplica la misma metodología para cuantificar el efecto de los ratios contables en la crisis financiera de empresas que cotizan en la Bolsa de Valores de Buenos Aires, clasificadas en estado de crisis y sanas; resultando significativos los índices de rentabilidad, de rotación, de endeudamiento y de flujo de fondos operativos. La contribución más notable de la nueva metodología empleada en la estimación es la importante reducción de la tasa de error, en relación con el modelo logístico estándar, arribando a una tasa de error tipo I del 9,26 %; una segunda contribución es reforzar la idea de Jones y Hensher (2004) de superioridad del método inclusive cuando se lo aplica a una economía emergente. El buen desempeño del modelo, permitiría utilizar su expresión para predecir la probabilidad de crisis de empresas no incluidas en el estudio. En este sentido, cabe señalar que una línea de investigación de gran relevancia que ha surgido en los últimos años, es la predicción del valor del efecto aleatorio en unidades no incluidas en el ajuste de un Modelo Mixto. Este término, más la expresión de la componente fija del modelo, permite calcular la probabilidad de fracaso de esas observaciones, en un horizonte temporal cercano al periodo de los datos utilizados en la estimación (Tamura y Giampaoli, 2013).

El resto del trabajo se organiza en cinco secciones además de esta introducción. La segunda sección ofrece una sucinta revisión de la literatura sobre predicción de quiebra; la tercera sección cubre los aspectos fundamentales del entorno macroeconómico de Argentina y su efecto en la calidad de la información reportada en los estados contables. La cuarta sección se enfoca en la metodología donde no solo se explica el modelo empleado sino que también se detalla la selección de la muestra. La quinta sección presenta los resultados y la última sección ofrece las conclusiones del trabajo.

## **2. REVISIÓN DE LA LITERATURA: MODELOS DE PREDICCIÓN DE QUIEBRA**

Siguiendo la evolución histórica de las investigaciones y la aplicación de los diferentes métodos estadísticos, se diferencian dos etapas claves en el desarrollo de los mismos: la etapa descriptiva, alrededor de la década de 1930 y hasta un poco antes de la década de 1960 y la etapa predictiva alrededor que comienza a finales de la década de 1960, la cual llega hasta nuestros días con un importante avance en los métodos cuantitativos aplicados (Tascon y Castaño, 2012). En ambas etapas se emplearon ratios calculados con datos contables, con el objetivo de investigar en qué medida los mismos representan herramientas válidas para el

análisis financiero. En la etapa descriptiva, Fitzpatrick (1932), Winakor y Smith (1935) y Merwim (1942) presentan sus investigaciones con el objetivo de describir las empresas clasificadas en dos grupos (sanas y con falencia), en función del uso de los ratios financieros, lo que constituye un antecedente valioso en esta línea. En la Tabla 1 se sintetiza este primer grupo de investigaciones.

Tabla 1. Etapa descriptiva en los modelos de predicción de crisis

Investigaciones	Empresas de la muestra	Periodo de análisis	Ratios significativos	País de origen de la empresas analizadas
Fitzpatrick (1932)	19 sanas y 19 quebradas	1920-1929	Rentabilidad del patrimonio neto y endeudamiento	Estados Unidos
Winakor y Smith (1935)	183 con dificultades	1922-1931	Liquidez	Estados Unidos
Merwim (1942)	939 entre sanas y quebradas	1926-1936	Liquidez y endeudamiento	Estados Unidos

Fuente: Ibarra (2001, pp. 117)

En la etapa predictiva, Beaver (1966, 1968) y Altman (1968) comienzan a predecir la crisis financiera a través del método discriminante lineal, encontrando que los ratios contables son una fuente apropiada de información para esta cuestión. Favorecido por el avance tecnológico y el uso de técnicas estadísticas avanzadas, Altman fue perfeccionando su modelo de evaluación de riesgos aplicándolo en países desarrollados tales como Alemania, Australia, Francia, Italia, Japón y el Reino Unido, entre otros (Altman, 1993). Con base en estos trabajos, se aplicaron estos modelos en economías emergentes con una serie de limitaciones, como es el hecho de no contar con los balances de las empresas en tiempo real o bien la existencia de otros riesgos que impiden trabajar en forma adecuada con la información financiera. En Latinoamérica se aplicaron estos modelos en Brasil (Altman *et al.*, 1979), Argentina (Swanson y Tybout, 1988), Uruguay (Pascale, 1988), México (Altman *et al.*, 1995), y Perú (Mongrut *et al.*, 2011), entre otros. Desde aquellos años hasta nuestros días son numerosas las aplicaciones de su modelo en diferentes países y periodos de tiempo. Las críticas fundamentales a estos estudios se refieren a la forma de seleccionar la muestra, ya que la misma no es aleatoria; y al uso de metodología de corte transversal, que no es adecuada cuando se tienen datos a través del tiempo. En esta temática también se aplicaron otros modelos basados en el análisis factorial, la regresión logística y redes neuronales (Tascon y Castaño, 2012). Todos estos modelos tienen la característica de ignorar la dependencia de los datos, ya que una misma empresa presenta sus balances al cierre de ejercicio en un periodo de tiempo considerado para el análisis y el efecto empresa hace que se trate de un mismo individuo medido en el tiempo (datos longitudinales).

Fue Train (1986) quien comenzó a presentar nuevos métodos de elección discreta y luego Train (2003) explica el comportamiento de una variable respuesta categórica en función de covariables con fundamento en la Teoría de la Utilidad, la que puede ser expresada como una



función de las distintas alternativas que pueden ser elegidas. Este trabajo se extiende a cualquier tipo de variable respuesta categórica y los objetivos de estos métodos son la especificación del modelo de comportamiento y la estimación de los parámetros, donde la simulación como metodología juega un rol importante en ambos objetivos (Train, 2003). El modelo logístico mixto, que tiene en cuenta la heterogeneidad no observada entre unidades (empresas, en este caso), es uno de los modelos econométricos de elección discreta recientemente desarrollado. Jones y Hensher (2004) demuestran, entre otras cosas, que el modelo logístico mixto supera ampliamente el desempeño del modelo logístico estándar.

Centrando la atención en el contexto argentino, como fruto de investigaciones realizadas con datos de empresas que cotizan sus acciones en dicho mercado, Swanson y Tybout (1988) concluyen que las fluctuaciones en los costos financieros afectan tanto a los resultados reales (negativamente) como al riesgo de quiebra, en relación directa. A su vez, las variables macroeconómicas son muy significativas dentro del proceso de quiebra y la falta de liquidez con la insolvencia podría empeorar el crecimiento de la economía en general.

Varios estudios emplearon datos de empresas argentinas con variados modelos y resultados. Swanson y Tybout (1988) usaron análisis discriminante y luego probit permitiendo así contar con dos métodos para predecir la probabilidad de crisis financiera en Argentina en un periodo donde la inflación era importante. Díaz *et al.* (2001) aplicaron métodos de clasificación supervisada para separar las empresas sanas de las en situación de crisis financiera, este trabajo también introdujo la primera aplicación de regresión logística en empresas argentinas. Sandin y Porporato (2007) emplearon el análisis discriminante y construyeron un nuevo modelo de corte transversal, que comparado con el de Altman obtuvo mejores resultados. La Tabla 2 refleja una síntesis de los trabajos publicados realizados en el mercado argentino.

Tabla 2. Modelos de predicción de crisis financiera en empresas argentinas

Investigación	Muestra y periodo de análisis	Ratios significativos	Metodología	Resultados
Swanson y Tybout, (1988)	No consta la cantidad de empresas 1972 - 1984	Variables macros y ratios de liquidez e insolvencia	Se utilizó análisis discriminante y probit.	Los costos financieros afectan a los resultados reales y al riesgo de quiebra. Una dificultad importante fue la disponibilidad de datos.
Díaz, Ferrero, Díaz, Stimolo y Caro (2001)	25 pares de empresas 1995 - 2000	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Índice de liquidez</li> <li>- Solvencia</li> <li>- Propiedad del activo</li> <li>- Pasivo no corriente sobre activo</li> <li>- Autofinanciación</li> <li>- Inmovilización del activo</li> </ul>	Análisis discriminante regularizado, que incluye los casos particulares de análisis discriminante lineal y cuadrático; luego se aplicó regresión logística.	Se determinan dos modelos alternativos como los mejores para clasificar a las empresas en sanas o fallidas. La tasa de error utilizando clasificación cruzada fue del 22%.
Sandin y Porporato (2007)	11 pares de empresas 1991 - 1998	13 ratios clasificados en: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Rentabilidad</li> <li>- Liquidez</li> <li>- Solvencia</li> </ul>	Se utiliza análisis discriminante con ratios financieros.	Se obtiene una menor tasa de error un año antes de la quiebra.

### 3. CONTEXTO DE ARGENTINA EN LA DÉCADA DE 1990<sup>1</sup>

Durante la década de 1990 Argentina se embarcó en un programa de reforma macroeconómica enfocado en la desregulación, la estabilización financiera y la liberalización del comercio. El programa resultó en una década de privatizaciones de empresas estatales, aumento del desempleo, presión fiscal, baja inflación y crecimiento sostenido (ver la Tabla 3). Es normal en economías emergentes que después de un periodo de crecimiento se contraiga el nivel de actividad en la economía y hasta se llegue a una recesión, y Argentina no fue una excepción. En Argentina se experimentó una fuerte desaceleración de la economía entre 1998 y 2000, coincidentemente, el pico de quiebras y reorganizaciones preventivas fue observado en el mes de junio de 2001 (<http://ar.datariskglobal.com> consultada el 23 de marzo de 2006). Por ello, este trabajo se enfoca en el periodo de estabilidad, porque el objetivo es proporcionar un modelo de predicción de quiebras que pueda ser aplicado en economías emergentes cuando se toman la mayoría de las decisiones de la inversión. Este estudio se enfoca en la década de 1990 porque el objetivo principal es evaluar si el modelo logístico mixto es superior a los demás modelos que previamente se usaron y cuyos resultados fueron publicados.

Tabla 3: Indicadores de la economía argentina<sup>a</sup>

<b>Año</b>	<b>Inflación<sup>b</sup></b>	<b>PBI<sup>c</sup></b> en millones de pesos de 1993	<b>Tipo de cambio<sup>d</sup></b> 1 EE.UU.\$ = pesos
1988	343,0%		
1989	3.079,4%		
1990	2.314,0%		
1991	171,7%		
1992	24,9%		1
1993	10,6%	236	1
1994	4,2%	250	1
1995	3,4%	243	1
1996	0,2%	256	1
1997	0,5%	277	1
1998	0,9%	288	1
1999	-1,2%	278	1
2000	-0,9%	276	1
2001	-1,1%	264	1
2002	25,9	235	3,3625

a. Fuente del cuadro: Sandin y Porporato (2007): 297

b. Índice de Precios al Consumidor, Nivel General, índice base año 1988 = 100. Fuente: INDEC

c. Producto Bruto Interno a precios de mercado de 1993. Fuente: INDEC

d. Tipo de cambio efectivo a partir del 30 de diciembre. Fuente: BCRA

La apertura de la economía argentina y la globalización cambiaron radicalmente el ambiente de negocios argentino durante la década de 1990. Nuevas inversiones, tanto de capitales locales como internacionales, cambiaron el aspecto de la economía local. El mercado

<sup>1</sup> Agradecemos la colaboración de Ariel Sandin y Marcela Porporato en la preparación de esta sección, que comparte elementos similares a su artículo del año 2007.

de capitales comenzó a cambiar su rol de un mercado especulativo a un mercado de fuentes de financiamiento. Esta tendencia se revirtió parcialmente en la década del 2000 con la renacionalización de empresas privatizadas y la contracción de la inversión extranjera. Sin embargo, el efecto sobre la profesionalización de la gestión empresarial se mantuvo (Sandin y Porporato, 2007: 297): *“Las organizaciones locales experimentaron una tendencia hacia una gestión profesional y una separación entre la gestión y la propiedad que resultó en una diversificación de la organización jurídica del negocio, las operaciones y las fuentes de financiamiento”*. La dinámica de la década de 1990 cambió la fisonomía de los estados contables. La gran disminución de la inflación tuvo un efecto muy positivo en los estados financieros ya que desde 1970 hasta 1991 la principal preocupación de los profesionales contables era cómo se debería reflejar la inflación. El enfoque sobre la inflación dio lugar a modelos de valoración híbridos, estudios insuficientes y deformación de numerosas cuestiones contables, pero esto se revirtió a partir del inicio de la década de 1990 y culminó con la profesión contable de Argentina adhiriendo a las IFRS en años más recientes.

Altman (1984) y Swanson y Tybout (1988) concluyeron en sus estudios que los datos financieros de Brasil y Argentina podían proveer información útil para la toma de decisiones. La globalización, la disminución de la inflación y la influencia de las normas internacionales de contabilidad hicieron que los estados contables se volvieran más complejos y de mayor calidad en Argentina a partir de la década de 1990. Esto mejoró el contenido informacional de los estados contables y por consiguiente la utilidad de los ratios financieros como herramientas analíticas. Estos factores hacen que los estados contables de la década de 1990 sean una buena base de datos a utilizar para la investigación de empresas fallidas que cotizan en la Bolsa de Valores de Buenos Aires empleando un nuevo y avanzado método estadístico.

## **4. METODOLOGÍA**

### **4.1. Selección de la muestra**

A los fines de la estimación de la función clasificatoria, las empresas se consideraron según presenten crisis financiera (Código 1) o no presenten (Código 0). En este trabajo las empresas en estado de crisis son aquellas que cotizan sus acciones en ronda reducida<sup>2</sup>, es decir, empresas que están en cesación de pagos y han pedido la apertura de su concurso preventivo, o bien han obtenido pérdidas que absorben parte de sus ganancias o de su capital. La fecha en la que las empresas ingresan a este estado es publicado en los Boletines de la Bolsa de Comercio de Buenos Aires. Para cada una de las empresas en crisis que conforman la muestra, se tomaron entre dos y cuatro estados contables inmediatos anteriores al año de ingreso a rueda reducida. Para las empresas sanas se tomó una muestra incluyendo hasta cuatro balances en el periodo

---

<sup>2</sup> Según se define en el Capítulo XIV del Reglamento de la Bolsa de Comercio de Buenos Aires, Argentina.

considerado. De esta forma, para el periodo 1993-2000 la base de datos quedó conformada con los estados contables anuales de 47 empresas, 30 sanas y 17 en crisis, lo que totalizan 150 observaciones. La Tabla 4 ofrece el listado de empresas incluidas en este estudio.

Tabla 4. Empresas y periodos anuales considerados en el análisis

EMPRESAS SANAS		EMPRESAS EN CRISIS	
Empresa	Periodo	Empresa	Periodo
Compañía Industrial Cervecera S.A.	1993-96	Grafex S.A.	1993-96
Boldt. S.A.	1993-96	Alpargatas S.A.	1994-97
Grimoldi S.A.	1994-97	Gottuzzo S.A.I.y C	1993-95
García Reguera S.A.	1993-95	Bonafide S.A.	1993-94
Cinz S.A.	1993-94	Panizza S.A.	1993-95
Midland Comercial S.A.	1993-96	Casa América S.A.	1993-94
Importadora y Exportadora de la Patagonia S.A.	1993-94	Decker Indelqui S.A.	1993-95
Tecnometal S.A.	1993-95	Ind. Siderúrgicas Grassi S.A.	1993-94
Antonio Griego y Cía S.A.	1993-94	Hidroeléctrica Alicurá S.A.	1995-98
Electromac S.A.	1993-94	A.C.E.C. Argentina S.A.I	1993-95
Bodegas Esmeralda S.A.	1993-95	Neroli S.A.	1993-94
Astra Cía Argentina de petróleo S.A.	1993-95	Solvay Indupa S.A.	1993-95
Angel Estrada y Cía S.A.	1994-97	Massuh S.A.	1994-97
Renault Argentina S.A.	1996-98	Sevel S.A.	1995-98
Dycasa S.A.	1993-96	S.A. Protto Hnos	1993-96
Disco S.A.	1993-95	Buenos Aires Emboelladora S.A.	1993-95
Leyden S.A.	1993-96	P. Galimberti y Cía S.A.	1993-96
Ediar S.A. Editora	1993-96		
Inta Industria Textil Argentina S.A.	1993-95		
Sniafa S.A.	1993-95		
Bagley S.A.	1993-94		
Bgh S.A.	1993-94		
Acindar S.A.	1993-94		
Central Costanera S.A.	1995-98		
Central Puerto S.A.	1995-98		
Empresa Distribuidora Sur S.A.	1995-98		
Carbochlor S.A.	1993-95		
Celulosa Argentina S.A.	1994-97		
Mirgor S.A.	1994-96		
Caputto S.A.	1993-96		

#### 4.2. Selección de covariables

Se partió considerando un total de trece ratios, tal como los definieron los trabajos de Jones y Hensher (2004) y Altman (1993). Algunos de los ratios requerían contar con datos de los que la normativa contable de Argentina no obliga informar, por lo que no fue posible replicarlos. Varios modelos fueron intentados y en todos aquellos que mostraban resultados promisorios contaban en mayor o menor medida con seis covariables. La Tabla 5 presenta los ratios seleccionados para presentar los resultados en este trabajo. Dichos ratios se calcularon en base a la información contenida en los estados contables anuales publicados por la Bolsa de Buenos Aires.

Tabla 5. Covariables: ratios financieros

Etiqueta	Ratio	Definición
FF_AT	Flujo de fondos originado por las operaciones dividido por el activo total	Mide la posición de efectivo respecto al total de los recursos de la empresa.
E_AT	Activos líquidos (o recursos de efectivo) divididos por el activo total	Mide la proporción de los recursos más líquidos de la empresa sobre el total de sus recursos.
V_AT	Ventas divididas por el activo total	Es el coeficiente que mide cuántas veces el activo total gira en las ventas totales (rotación).
D_PN	Deudas divididas por el patrimonio neto	Medida del endeudamiento de la empresa.
CT_AT	Capital de trabajo dividido sobre el activo total	Expresa el grado de fluidez de los activos e indica en qué medida la inmovilización del activo total resulta neutralizada por el capital de trabajo.
GE_AT	Ganancia antes de intereses e impuestos dividido por el activo total	Mide la rentabilidad en función de las ganancias de la explotación.

#### 4.3. Modelos de respuesta binaria: logístico estándar

En este trabajo se aplica un modelo donde la variable respuesta es la variable binaria que indica el grupo al que pertenece la empresa (en crisis = 1 y sanas = 0) y las variables predictoras son indicadores económico-financieros y características de la empresa. Los problemas con respuesta dicotómica son modelados usualmente a través de regresión logística, donde la probabilidad de que la variable respuesta ( $y_i$ ) asuma el valor 1, suponiendo solo una covariable ( $x_i$ ) en el predictor lineal, es:

$$\Pr(y_i = 1 / x_i) = h(\beta_1 + \beta_2 x_i) = h(z_i) \quad i = (1, 2, \dots, n),$$

siendo la transformación logit:

$$\log \text{it} \{ \Pr(y_i = 1 / \mathbf{x}_i) \} = \ln \left\{ \frac{\Pr(y_i = 1 / \mathbf{x}_i)}{1 - \Pr(y_i = 1 / \mathbf{x}_i)} \right\} = z_i.$$

El modelo logístico clásico supone que las respuestas son independientes dadas las covariables, por lo que resulta apropiado cuando los datos no tienen ningún tipo de agrupamiento. Este requisito no se cumple en este trabajo, ya que la estructura de los datos introduce dependencia en las respuestas múltiples dentro de cada unidad, aún condicionando sobre las covariables. Por esta razón, en este trabajo se utiliza un modelo logístico mixto, en el que la referida asociación puede ser modelada al incorporar la ordenada al origen y un coeficiente aleatorio (Rabe-Hesketh y Skrondal, 2005).

#### 4.4. Modelos de respuesta binaria: logístico mixto

El Modelo Marginal, también apropiado para datos agregados, tiene algunas limitaciones comparado con el enfoque de modelos de efectos aleatorios. Ningún *insight* es logrado en relación a las trayectorias (temporal) de cambios individuales, lo que sí es conseguido con los

modelos mixtos. En efecto, la información agregada no es explotada en absoluto, ya que la estimación procede como si los datos se presentaran de manera transversal, incorporando la autocorrelación en la matriz de covarianzas del error. Por ello, se les reconoce el hecho de producir inferencias válidas para los efectos promedios poblacionales siempre que el modelo de posición esté correctamente especificado, aún en el caso de que la estructura de dependencia no sea la correcta. Complementariamente, es evidente que los procesos causales operan necesariamente al nivel de empresa, de manera tal que sus efectos específicos (*subject-specific*) deben ser estimados para hacer inferencias válidas.

El modelo particular que se aplica en esta situación es un modelo logístico mixto con un coeficiente aleatorio en el predictor lineal, cuya formulación es la siguiente:

$$y_{ij} / \pi_{ij} \sim \text{Bernoulli}(\pi_{ij})$$

$$\text{logit}(\pi_{ij}) = \beta_0 + (\beta_1 + b_{1j})FF\_AT_{ij} + \beta_2GE\_AT_{ij} + \beta_3E\_AT_{ij} + \beta_4V\_AT_{ij} + \beta_5D\_PN_{ij} + \beta_6LNA_{ij} + \beta_7CT\_AT_{ij}$$

donde:

$$\pi_{ij} = P(y_{ij} = 1 / \mathbf{x}_{ij}, b_j);$$

$$b_{1j} / \mathbf{x}_{ij} \sim N(0, d_{11});$$

$\beta_k$  : son los coeficientes de cada una de las covariables descritas en la Tabla 4;

$b_j$  : efecto aleatorio;

$d_{11}$  : varianza del efecto aleatorio.

El modelo fue ajustado por máxima verosimilitud, integrando sobre el efecto aleatorio, que se supone con distribución normal. Debido a que no están disponibles expresiones analíticas para resolverla, son necesarias aproximaciones numéricas, entre ellas la de Gauss-Hermite. Se trabajó con la rutina NLMIXED del software SAS. El efecto aleatorio es predicho por postestimación y en función de dichas predicciones se evalúa el modelo, a fin de determinar si las empresas son correctamente clasificadas en el estado correspondiente.

## 5. RESULTADOS

### 5.1. Estimación de parámetros en el modelo logístico mixto

En el modelo estimado se incluyeron como fijos todos los ratios y como aleatorio el índice de flujo de fondos generado por las operaciones respecto al activo total (FF\_AT), resultando significativa la varianza. El nivel de significación utilizado para realizar las estimaciones es del 5 %. Los resultados para los efectos fijos se presentan en la Tabla 6, donde se advierte que los ratios de rentabilidad (GE\_AT), de rotación (V\_AT) y de endeudamiento (D\_PN) son significativos. El signo positivo del coeficiente de D\_PN indica que un incremento en las deudas aumenta la chance de crisis; en tanto que para los restantes ratios, que tienen signo negativo, su incremento producirá una disminución en la probabilidad de crisis. Efectuando un

ordenamiento de los ratios según su capacidad discriminadora, en primer lugar se posiciona el índice que mide rentabilidad (GE\_AT), ya que como lo refleja el *odd ratio* de 0,905, por cada incremento unitario de los ratios, disminuirá la chance de ingresar a una situación de crisis en un 10 %. En segundo lugar, el ratio de ventas (V\_AT), cuyo *odd ratio* (0,975) indica que un incremento unitario disminuirá esa chance en aproximadamente un 2,5%. Por último se ubica el índice que mide el endeudamiento (D\_PN), al que le corresponde un *odd ratio* de 1,014, lo que indica que por cada unidad que aumenta el ratio, la chance de ingresar a un estado de crisis se incrementa en casi un 1,5%.

Tabla 6. Parámetros fijos y aleatorios estimados

Efectos fijos	Coefficiente	Error estándar	P > z	Odd ratios variables significativas
GE_AT	-0,09980	0,04467	<b>0,025</b>	<b>0,905</b>
FF_AT	-0,07936	0,07744	0,305	
E_AT	-0,06376	0,06428	0,321	
V_AT	-0,02485	0,01128	<b>0,028</b>	<b>0,975</b>
D_Pn	0,01365	0,006502	<b>0,036</b>	<b>1,014</b>
CT_AT	0,01955	0,03240	0,546	
Constante	0,1021	0,7121	0,886	
Efecto aleatorio	Varianza	Error estándar	LR test vs. regresión logística Pr (chibar2)	
FF_AT	0,1881	0,1866	<b>0,000</b>	

## 5.2. Validación del modelo

Como se mencionó en la Sección 4.1, se trabajó con todas las empresas en crisis (17) y una muestra de 30 empresas sanas. Si bien la cantidad de empresas consideradas no es grande en el contexto de estudios anglosajones, para las circunstancias de Argentina se puede calificar como una muestra muy representativa. A finales de la década de 1990 cotizaban en la bolsa de Buenos Aires un total de 137 firmas, pero si se excluyen las entidades financieras y de seguros, el número cae por debajo de 100. Lo que *a priori* conforma un reducido tamaño de la muestra, originado en la baja cantidad de empresas que cotizan en bolsa que ingresaron a rueda reducida en el periodo bajo análisis, en realidad no lo es tal, ya que el total de 45 empresas consideradas en este estudio representa casi el 50 % de la población total y el 100 % de la población de empresas en crisis financiera. Esta limitación también está presente en estudios anteriores enfocados en el mercado argentino que trabajaron con 50 (Diaz *et al.*, 2001) o 22 empresas (Sandin y Porporato, 2007). Además, lo que en principio constituiría una limitación en la estimación del modelo, es atenuada a través de la consideración de varios periodos para cada empresa.

La capacidad predictiva del modelo puede ser derivada obteniendo la probabilidad estimada de crisis para cada una de las firmas calculando la tasa de clasificación incorrecta (tasa de error). Una estimación insesgada de esta tasa se obtiene trabajando con el método de validación cruzada, que calcula la proporción de errores que se cometen, usando una función

que omita una observación por vez del conjunto de datos y clasificando la observación omitida. En este trabajo, dada la complejidad del modelo, se clasifican las empresas con la función obtenida para el total de la muestra, llegando a la denominada tasa aparente, que subestima la verdadera tasa de error. Para obtener la probabilidad estimada de crisis, se debe obtener el valor de la siguiente expresión para cada empresa en cada año:

$$\hat{\pi}_{ij} \cong \frac{\exp \left[ \begin{array}{c} \hat{\beta}_0 + (\hat{\beta}_1 + \tilde{b}_{1j}) FF\_AT_{ij} + \hat{\beta}_2 GE\_AT_{ij} + \hat{\beta}_3 E\_AT_{ij} \\ \hat{\beta}_4 V\_AT_{ij} + \hat{\beta}_5 D\_PN_{ij} + \hat{\beta}_6 LNA_{ij} + \hat{\beta}_7 CT\_AT_{ij} \end{array} \right]}{1 + \exp \left[ \begin{array}{c} \hat{\beta}_0 + (\hat{\beta}_1 + \tilde{b}_{1j}) FF\_AT_{ij} + \hat{\beta}_2 GE\_AT_{ij} + \hat{\beta}_3 E\_AT_{ij} \\ \hat{\beta}_4 V\_AT_{ij} + \hat{\beta}_5 D\_PN_{ij} + \hat{\beta}_6 LNA_{ij} + \hat{\beta}_7 CT\_AT_{ij} \end{array} \right]}$$

Como se advierte en la expresión anterior, además de las estimaciones de los coeficientes fijos, se debe contar con la predicción del efecto aleatorio para cada observación. Una vez obtenida la probabilidad, el paso siguiente fue asignar cada observación a uno de los dos grupos bajo análisis. El buen desempeño del modelo se evidencia en la correcta asignación del 91 % de las empresas al grupo de pertenencia para todos los periodos observados *versus* el 74,67 % del logístico estándar (Tabla 7). Adicionalmente, se advierte que solo el 9,26 % de las empresas del grupo de riesgo son mal clasificadas, lo que constituye un error tipo I significativamente menor al resultante de aplicar el modelo logístico estándar (48,15 %), en tanto que la tasa de clasificar empresas sanas como en crisis, error tipo II, es del 7,29 % para el modelo logístico mixto *versus* el 12,50 % para el logístico estándar.

Tabla 7. Tasas de clasificación incorrecta (errores tipos I y II)

		Empresas clasificadas según el modelo logístico estándar		Empresas clasificadas según el modelo logístico mixto	
		Sanas	En crisis	Sanas	En crisis
Empresas en la muestra	Sanas	87,50 %	12,50 %	92,71 %	7,29 %
	En crisis	<b>48,15 %</b>	51,85 %	<b>9,26 %</b>	90,74 %

## 6. CONCLUSIÓN

En este trabajo se analizaron los efectos de seis ratios contables en la probabilidad que tienen las empresas de presentar crisis financieras en Argentina en la década de 1990, usando un modelo logístico mixto con un coeficiente aleatorio. Los resultados indican que los ratios más importantes en cuanto a capacidad discriminadora son los que miden rentabilidad, rotación del activo y endeudamiento de la empresa.

Desde la década de 1960, se han desarrollado diferentes estudios para predecir crisis financieras de empresas, aplicando diversos modelos sobre la información que proporcionan los



ratios financieros, correspondiendo la mayoría para países desarrollados. En Argentina, la mayoría de los trabajos desarrollados hasta el momento para cuantificar la incidencia de ratios financieros en la crisis empresarial aplican modelos de corte transversal (Swanson y Tybout, 1988; Díaz *et al.*, 2001; Sandin y Porporato, 2007), por lo que la construcción de modelos para datos de panel resulta pertinente en tanto incorporan la dimensión temporal en el estudio.

Los modelos usualmente empleados para predecir crisis financieras son el discriminante lineal y el modelo logístico. El segundo permite levantar la normalidad, un supuesto clave que se mantiene es la independencia entre las observaciones, lo que afecta la variabilidad de las estimaciones. Por otro lado, varias mediciones de las mismas unidades permiten captar su heterogeneidad no observable induciendo correlación entre las respuestas, siendo necesario trabajar con modelos que incorporen esa correlación. Esto puede realizarse desde un enfoque promedio poblacional (modelo marginal) o desde los modelos de efectos aleatorios, también denominados mixtos, en los que la asociación puede ser modelada incluyendo ordenada al origen o coeficientes aleatorios (Rabe-Hesketh y Skrondal, 2005).

A partir del desarrollo de los modelos econométricos de elección discreta (Train, 2003), se han realizado numerosos trabajos que utilizan el modelo logístico en sus versiones binaria y multinomial. Entre los trabajos recientes más significativos, puede señalarse el de Jones y Hensher (2004), en el que prueban que el modelo logístico mixto supera ampliamente el desempeño del modelo logístico estándar, resultado que se manifiesta también en este estudio. Este artículo ha sido tomado como referencia para el desarrollo de este trabajo, ya que se incluyeron cinco ratios de los que proponen esos autores, que pudieron calcularse con la información contenida en los estados contables de empresas argentinas, de los cuales tres resultaron significativos: FF\_AT (aleatorio), V\_AT y D\_PN (ambos fijos). El otro índice con coeficiente significativo es el de rentabilidad, GE\_AT, el cual es referido en varios trabajos de Altman así como en el de Sandin y Porporato (2007) para el caso de Argentina.

Este trabajo reconoce algunas limitaciones. Si bien se trabajó con todas las empresas en crisis (17) y una muestra de 30 empresas sanas, el tamaño de la muestra es reducido, lo que redundaría en un sobreajuste de los datos. Esta limitación en la estimación del modelo es atenuada a través de la consideración de varios periodos para cada empresa. Segundo, a pesar de intentar ser una réplica del trabajo de Jones y Hensher (2004), debido a diferencias en normativa contable, no todos los ratios financieros han podido ser replicados. A pesar de esta limitación, el presente trabajo demuestra que con ciertas adaptaciones un modelo logístico mixto tiene excelente capacidad predictora de crisis financieras en economías emergentes, su desempeño es mejor que la de modelos discriminantes, probit y logístico estándar. Este trabajo confirma que el modelo logístico mixto es el más adecuado en esta área de interés, ya que obtuvo una correcta asignación del 91 % de las empresas al grupo de pertenencia para todos los periodos observados, en tanto que el modelo logístico estándar ostenta una tasa de clasificación correcta

de 74,67 % ambos porcentajes surgen de promediar (ponderado por la cantidad de empresas) los porcentajes incluidos en la Tabla 7 (92,71 % y 90,74 % y luego 87,50 % y 51,85 % respectivamente).

## REFERENCIAS

- Altman, E. (1968) “Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy”, *Journal of Finance*, Vol. 23, No. 3, pp. 589–609.
- Altman, E., Baidya, T. y Ribeiro Dias, L. (1979) “Assessing potential financial problems for firms in Brazil”, *Journal of International Business Studies*, Vol. 10, No. 2, pp. 9–24.
- Altman, E. (1984) “The success of business failure prediction models: An international survey”, *Journal of Banking and Finance*, Vol. 8, pp. 171–198.
- Altman, E. (1993) *Corporate financial distress and bankruptcy: A complete guide to predicting & avoiding distress and profiting from bankruptcy*, 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley and Sons, New York, NY.
- Altman, E., Hartzell, J. y Peck, M. (1995) *Emerging markets corporate bonds: A scoring system*, Salomon Brothers Inc., New York, NY.
- Baltagi, B.H. (1995) *Econometric Analysis of Panel Data*. Chichester: John Wiley and Sons.
- Beaver, W. (1966) “Financial ratios as predictors of failures” *Journal of Accounting Research*, *Empirical Research in Accounting Selected Studies 1966*, Vol. 5 (supplement), pp. 71–111.
- Beaver, W. (1968) “Alternative Accounting Measures as Predictors of Failure”, *The Accounting Review*, Vol. 43, No. 1, pp. 113–122.
- Díaz, M., Ferrero, F., Díaz, C., Stímolo, M. y Caro, N. (2001) “Performance del análisis discriminante regularizado y la regresión logística en la predicción de crisis financieras”, *Revista de la Sociedad Argentina de Estadística*, Vol. 5, No. 1-2, pp. 33–45.
- Fitzpatrick, P. (1932) “A comparison of ratios of successful industrial enterprises with those of failed companies”, *The Certified Public Accountant*, Vols. Oct., Nov., Dec., pp. 598–605, 656–662 y 727–731, respectivamente.
- Ibarra, A. (2001) *Análisis de las dificultades financieras de las empresas en una economía emergente: las bases de datos y las variables independientes en el sector hotelero de la Bolsa mexicana de valores*. Unpublished Doctoral Dissertation, Departament d’Economía de l’Empresa, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España. Disponible en <http://ddd.uab.cat/pub/tesis/2001/tdx-1018101-164847/aim1de1.pdf> (última consulta en noviembre de 2013).
- Jones, F. (1987) “Current techniques in bankruptcy prediction”, *Journal of Accounting Literature*, Vol. 6, pp. 131–164.

- Jones, S. y Hensher, D. (2004) “Predicting firm financial distress: A mixed logit model”, *The Accounting Review*, Vol. 79, No. 4, pp. 1011–1039.
- Leclere, M. (1999) “The Interpretation of Coefficients in N-Chotomous Qualitative Response Models”, *Contemporary Accounting Research*, Vol. 16, pp. 711–747.
- Maddala, G. (1991) “A perspective on the use of limited-dependent and qualitative variables models in accounting research”, *The Accounting Review*, Vol. 66, No. 4, pp. 788–807.
- Merwim, C. (1942) *Financing small corporations in five manufacturing industries, 1926-36*, New York National Bureau of Economics Research, New York, NY.
- Mongrut Montalvan, S., Fuenzalida O’Shee, D., Alberti Delgado, F. y Akamine Yamashiro, M. (2011) “Determinantes de la Insolvencia Empresarial en el Perú”, *Academia, Revista Latinoamericana de Administración*, Vol. 47, pp. 126–139.
- Pascale, R. (1988) “A Multivariate Model to Predict Firm Financial Problems: The Case of Uruguay”, *Studies in Banking and Finance*, Vol. 7, pp. 171–182.
- Ohlson, J. (1980) “Financial ratios and the probabilistic prediction of bankruptcy”, *Journal of Accounting Research*, Vol. 18, No. 1, pp. 109–131.
- Rabe-Hesketh, S. y Skrondal, A. (2005) *Multilevel and Longitudinal Modeling Using Stata*, 1<sup>st</sup> edition, Stata Press Books, StataCorp LP, London, UK.
- Sandin, A. y Porporato, M. (2007) “Corporate bankruptcy prediction models applied to emerging economies. Evidence from Argentina in the years 1991-1998”, *International Journal of Commerce and Management*, Vol. 17, No. 4, pp. 295–311.
- Swanson, E. y Tybout, J. (1988) “Industrial bankruptcy determinants in Argentina”, *Journal of Banking and Finance*, Vol. 7, pp. 1–25.
- Tamura, K. y V. Giampaoli (2013) “New prediction method for the mixed logistic model applied in a marketing problem”, *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 66, pp. 202–216. Disponible en [http://www.informatik.uni-trier.de/~ley/pers/hd/t/Tamura:Karin\\_Ayumi.html](http://www.informatik.uni-trier.de/~ley/pers/hd/t/Tamura:Karin_Ayumi.html) (última consulta en noviembre de 2013).
- Tascón Fernández, M. y Castaño Gutiérrez, F. (2012) “Variables y modelos para la identificación y predicción del fracaso empresarial: revisión de la investigación empírica reciente”. *Revista de Contabilidad-Spanish Accounting Review* Vol. 15, N° 1, pp. 7–58.
- Train, K. (1986) *Qualitative Choice Analysis*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Train, K. (2003) *Discrete Choice Methods with Simulation*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Winakor, A. y Smith, R. (1935) “Changes in financial structure of unsuccessful industrial companies”. Bulletin N° 51, Bureau of Business Research, University of Illinois, IL.
- Zmijewski, M.E. (1984) “Methodological issues related to the estimation of financial distress prediction models”, *Journal of Accounting Research*, Vol. 22, No. 1, pp. 59–82.



## Elasticidades de demanda por electricidad e impactos macroeconómicos del precio de la energía eléctrica en Colombia

ESPINOSA ACUÑA, ÓSCAR A.

Grupo IMEMC, Universidad Nacional de Colombia

Correo electrónico: [oaespinosaa@unal.edu.co](mailto:oaespinosaa@unal.edu.co)

VACA GONZÁLEZ, PAOLA, A.

Grupo IMEMC, Universidad Nacional de Colombia

Correo electrónico: [pavacag@unal.edu.co](mailto:pavacag@unal.edu.co)

ÁVILA FORERO, RAÚL, A.

Coalición para la Promoción de la Industria Colombiana

Universidad Nacional de Colombia

Correo electrónico: [raavilaf@unal.edu.co](mailto:raavilaf@unal.edu.co)

### RESUMEN

El presente estudio analiza las elasticidades de demanda e ingreso de la energía eléctrica para uso doméstico e industrial para Colombia (2000-2011), mediante la estimación de ecuaciones de demanda por MCO. Asimismo, se estiman impactos en variables macroeconómicas que generarían variaciones en el precio de la energía eléctrica, mediante un VARX frecuentista y un VARX bayesiano (BVARX), utilizando la metodología apriorística de Sims y Zha (1998). Se concluye que la energía eléctrica es un bien normal para la industria y necesario para la demanda doméstica. Además, se tiene que frente a incrementos en el precio de la energía de aproximadamente un 20 %, el crecimiento trimestral del PIB disminuye hasta en un 1 %, estabilizándose año y medio después de ocurrir el choque positivo.

**Palabras clave:** energía eléctrica; elasticidades; ecuación de demanda; impactos macroeconómicos; MCO; BVARX.

**Clasificación JEL:** C11; C32; Q41; Q43.

**MSC2010:** 62P20; 91B84.

# Elasticity of Electricity Demand and Macroeconomics Impacts of Electricity Price in Colombia

## ABSTRACT

This study analyzes the elasticities of demand and income from electricity for domestic and industrial use, for Colombia (2000-2011), by estimating demand equations by OLS. The impacts on macroeconomic variables, which generate changes in the price of electricity, are also estimated by using a VARX Frequentist and a Bayesian VARX (BVARX) and by using the *a priori* methodology of Sims and Zha (1998). It is concluded that electricity is a normal good for the industry and a necessary good for the domestic demand. Furthermore, when energy prices increase approximately 20 %, the quarterly GDP growth falls to 1 % and it is stabilized one year and a half after the positive shock.

**Keywords:** electric power; elasticities; demand equation; macroeconomic impacts; GLS; BVARX.

**JEL classification:** C11; C32; Q41; Q43.

**MSC2010:** 62P20; 91B84.



## 1. INTRODUCCIÓN

La energía eléctrica<sup>1</sup> es un bien de demanda final (dirigido a las industrias de consumo final) y de demanda intermedia (dirigido a las industrias productivas), cuyo precio en el corto y largo plazo es determinante para la evolución del comportamiento del aparato productivo (Bouille, 2004). En este sentido, la energía eléctrica en el desarrollo económico se convierte en una base que sustenta gran parte de las actividades productivas, comerciales y de fin doméstico, entre otros. Por medio del sistema de generación, distribución, transformación y comercialización, la energía eléctrica se ha vuelto vital para el abastecimiento de los diferentes sectores económicos implicados en la generación de valor agregado. De acuerdo con la Unidad de Planeación Minero Energética –UPME– (2010a), la energía eléctrica es parte integral de la actividad diaria de la sociedad y del proceso productivo de la comunidad, siendo en esta medida imperante para el crecimiento económico y el progreso social, actuando como un elemento fundamental para el logro de los objetivos de desarrollo del milenio en el país.

El propósito principal de este documento es la estimación para el período 2000-2011 de las elasticidades de demanda de energía eléctrica tanto doméstica como industrial en Colombia, y el impacto de incrementos en su precio en la macroeconomía del país, teniendo como razones para la elección de este período dos hechos fundamentales. El primero hace referencia a los importantes cambios en el mercado no regulado (García *et al.*, 2011), debido a que a partir de enero del año 2000, se disminuyó el umbral para la contratación en el mercado de agentes no regulados (estableciéndose 0,55 MWh/mes, (UPME, 2004)), lo cual trajo como consecuencia que el número de usuarios de este segmento creciera en gran medida, al pasar de 2.575 desde comienzos del año 2000 a más de 4.590 en el año 2011 (García *et al.*, 2011). El segundo hecho hace referencia al constante aumento de la cobertura de energía eléctrica (como porcentaje de hogares con servicio de energía eléctrica) que se ha venido dando en la última década, pasando del 87,6 % en el año 2000 al 96,4 %, aproximadamente, en los últimos años<sup>2</sup>, resaltándose la creación del FAZNI (Fondo de Apoyo Financiero para las Zonas no Interconectadas), mediante la Ley 633 del año 2000 (UPME,

---

<sup>1</sup> El suministro de energía eléctrica inició en Colombia bajo un contexto comercial a finales del siglo XIX, con la constitución de la empresa privada *Electric Light Company* en Bogotá, seguido posteriormente por el desarrollo de sistemas de generación y distribución; luego, a mediados del siglo XX, se emprendió un proceso de estatización para poder ampliar la capacidad instalada y el servicio de electricidad en el territorio nacional, mediante la formación del Instituto de Aprovechamiento de Aguas y Fomento Eléctrico Electraguas, para fomentar la creación de empresas del sector, y de Interconexión Eléctrica S.A. (ISA), para desarrollar la infraestructura de interconexión eléctrica, manteniendo este sistema hasta finales del siglo XX, donde el sector eléctrico tuvo una reforma conforme a las nuevas disposiciones de la Carta Magna de 1991 (UPME, 2003).

<sup>2</sup> Cálculos propios a partir de las estadísticas disponibles en la página del Sistema de Información Eléctrico Colombiano (<http://www.siel.gov.co/>).

2003)<sup>3</sup> y el FAER (Fondo de Apoyo Financiero para la Energización de las Zonas Rurales Interconectadas), creado por el Artículo 105 de la Ley 788 de 2002, y reglamentado con el Decreto 1122 de 2008<sup>4</sup>.

Para Colombia, no se encuentran estudios respecto al tema; se han abordado estudios del impacto de los precios del petróleo sobre variables macroeconómicas como el de Perilla (2010) y Sánchez (2010), sobre el impacto del producto nacional y el precio de la electricidad sobre el consumo de energía (Zapata, 2011) o sobre la relación causal entre el consumo de energía y el crecimiento económico (Yoo y Kwak, 2009), pero no específicamente sobre los impactos macroeconómicos del precio de la energía, por lo que esta investigación es novedosa para el caso colombiano y de gran relevancia para futuras decisiones de política en la que se involucre el desarrollo y crecimiento del sector eléctrico en el país.

Dicho esto, en una segunda sección se expondrán los antecedentes históricos y regulatorios más importantes del sector, seguido de una revisión de literatura acerca de las diferentes formas de estimar las elasticidades, como de cálculo de los impactos macroeconómicos del precio de la energía. Posteriormente, se presentarán los estudios de las metodologías elegidas para la estimación, los datos a utilizar y los resultados finales obtenidos. Por último, se darán a conocer las conclusiones del documento.

## **2. MARCO REGULATORIO Y DINAMISMO DEL SECTOR ELÉCTRICO**

La década del 2000 en Colombia se ha caracterizado por un sector minero-energético de gran envergadura que ha asumido un papel relevante en su participación en el PIB, en las exportaciones y en las cuentas fiscales de la economía nacional, contribuyendo a contrarrestar los efectos negativos de la crisis financiera al interior del país (UPME, 2010b). Dado el contexto anterior, la participación de la energía eléctrica en el PIB, con información del Banco de la República<sup>5</sup>, ha sido durante la primera década del siglo XXI del 2,4 % aproximadamente, con una marcada tendencia decreciente a partir del segundo lustro de esta década, debido posiblemente a la coyuntura económica internacional junto con el fenómeno del Niño<sup>6</sup> y al crecimiento de otros sectores como el minero, lo que le resta participación al sector en cuestión (Figura 1).

---

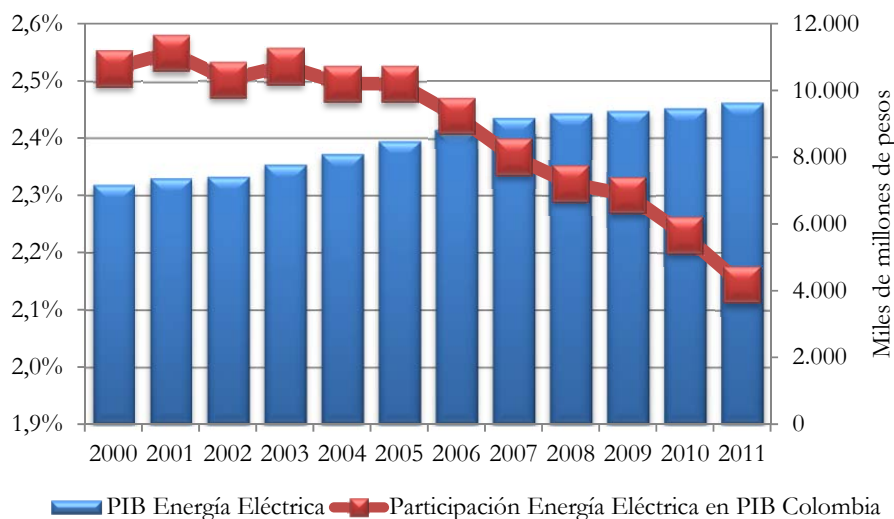
<sup>3</sup> Teniendo como fin ayudarle a las regiones aisladas que no se encuentran dentro del Sistema Interconectado Nacional. Estos proyectos de electrificación son financiados a partir del mercado mayorista.

<sup>4</sup> Siendo su objetivo “(...) *el ampliar la cobertura y procurar la satisfacción de la demanda de energía en las zonas rurales interconectadas, conforme con los planes de ampliación de cobertura que estructurarán cada uno de los Operadores de Red y que deberá contar con la viabilidad de la Unidad de Planeación Minero Energética*” (<http://www.minminas.gov.co/>).

<sup>5</sup> Información extraída de la página web del *Banco de la República de Colombia*, sección *Series Estadísticas*, subsección *Producción, salarios y empleo*, [http://www.banrep.gov.co/series-estadisticas/see\\_prod\\_salar\\_2005.html](http://www.banrep.gov.co/series-estadisticas/see_prod_salar_2005.html).

<sup>6</sup> Este acontecimiento climatológico presenta por lo general periodos de altas temperaturas, reducción de lluvias y escasez de agua, implicando déficits de generación hidráulica por la reducción en la capacidad de los embalses, elevando así el costo de la energía (UPME, 2003; 2004).

**Figura 1. PIB del sector de energía eléctrica y su participación en el agregado nacional (periodo 2000-2011)**



**Fuente:** elaboración propia a partir de información del Banco de la República.

De igual manera, el sector<sup>7</sup> ha mostrado un gran dinamismo en la primera parte de la década, con una tasa de crecimiento en generación, captación y distribución de energía eléctrica de cerca del 2,8 %, y crecimientos superiores al 4 % a mediados de la década del 2000, donde la producción y el consumo intermedio han crecido en promedio un 2,5 % y 2,2 % respectivamente durante este mismo período<sup>8</sup>. Aquel dinamismo también se ha hecho evidente en su articulación con el mercado internacional, al presentar un crecimiento promedio positivo en su exportación a inicios y finales de la primera década del siglo XXI, junto con un crecimiento fluctuante en las importaciones registrando un promedio de -12 % para este mismo período<sup>9</sup>.

De igual forma, el sector eléctrico ha generado dos diferentes pero entrelazadas dinámicas: por un lado ha contribuido al desarrollo del sector productivo del país y, por otro, un progreso social significativo por medio de la prestación del servicio de energía eléctrica, al ser considerado en

<sup>7</sup> El sector eléctrico de Colombia actúa como un sistema conformado por distintas empresas encargadas de generar la energía eléctrica, transportarla, distribuirla y comercializarla a los consumidores finales categorizados éstos en residenciales, industriales y comerciales. Dentro de este sector, también se encuentran aquellas compañías encargadas de la prestación de servicios (empresas de consultoría, diseño, construcción, software, entre otros) y fabricación y comercialización de bienes conexos (como cables y conductores, piezas eléctricas, maquinaria y equipos para abastecer el consumo, y productos intermedios para la construcción de transformadores, motores, generadores, baterías, torres de energía, entre otros suministros) (Analdex y Clúster de Energía Eléctrica, 2009).

<sup>8</sup> Información extraída de la página web del DANE, sección *Cuentas Nacionales*: [http://www.dane.gov.co/index.php?option=com\\_content&view=article&id=127&Itemid=84](http://www.dane.gov.co/index.php?option=com_content&view=article&id=127&Itemid=84).

<sup>9</sup> Información extraída de la página web del DANE, sección *Cuentas Nacionales*: [http://www.dane.gov.co/index.php?option=com\\_content&view=article&id=127&Itemid=84](http://www.dane.gov.co/index.php?option=com_content&view=article&id=127&Itemid=84).



Colombia como un servicio público. Es por ello que para dar cumplimiento a lo dispuesto en la Constitución de 1991 con relación a los servicios públicos<sup>10</sup>, se ha desarrollado en las últimas dos décadas un marco jurídico para este sector por parte del Estado. Esto ha permitido su estructuración y modernización en el país, al estipular como función estatal la planeación, regulación y control del sector, con la finalidad de garantizar la eficiencia y la calidad en la prestación del servicio público, además de propender por su fortalecimiento (Sandoval, 2004). El sector se encuentra regulado principalmente por<sup>11</sup>:

- La Ley 142 de 1994, por la cual se establece el régimen de los servicios públicos domiciliarios y se dictan otras disposiciones<sup>12</sup>. Esta Ley se aplica a los servicios domiciliarios de energía eléctrica, entre otros, los cuales contarán con la participación de empresas públicas, privadas y mixtas<sup>13</sup>.
- La Ley 143 de 1994, por la cual se establece el régimen para la generación, interconexión, transmisión, distribución y comercialización de electricidad en el territorio nacional y se dictan otras disposiciones en materia energética. El Artículo 2° estipula como función del Ministerio de Minas y Energía, la regulación, planeación, coordinación y seguimiento de todas las actividades relacionadas con el servicio público de electricidad, al igual que establecer un

---

<sup>10</sup> La Constitución estipula en el Artículo 365 a los servicios públicos como finalidad social del Estado; y en el Artículo 366 indica que estos servicios estarán sometidos al régimen jurídico que fije la Ley.

<sup>11</sup> También, existen otras normas gubernamentales para la regulación del sector, como: i) la Ley correspondiente por la cual se expide el Plan Nacional de Desarrollo durante cada período de Gobierno; ii) la Ley 99 de 1993, en su Artículo 113, donde se estipula que el Gobierno Nacional procederá a crear un nuevo ente constituido como empresa industrial o comercial del Estado o como sociedad de economía mixta, el cual estará encargado de las funciones de generación, transmisión y distribución de energía; iii) el Decreto 2820 de 2010, en su Artículo 8° estipula como Competencia del Ministerio de Ambiente, Vivienda y Desarrollo Territorial, otorgar o negar de manera privativa la licencia ambiental para los proyectos, obras o actividades en el sector eléctrico; iv) la Ley 141 de 1994 en su Artículo 56, regula las regalías recaudadas por empresas del sector; y v) el Decreto 1766 de 2012 donde se define la facturación de los servicios públicos domiciliarios de energía eléctrica.

<sup>12</sup> De acuerdo con el Artículo 14.25 de la Ley 142 de 1994:

*“SERVICIO PÚBLICO DOMICILIARIO DE ENERGÍA ELÉCTRICA. Es el transporte de energía eléctrica desde las redes regionales de transmisión hasta el domicilio del usuario final, incluida su conexión y medición. También se aplicará esta Ley a las actividades complementarias de generación, de comercialización, de transformación, interconexión y transmisión”.*

Por medio del Artículo 23 de esta Ley se determina que las empresas de servicios públicos pueden operar en igualdad de condiciones en cualquier parte del país, sujetos a lo dispuesto en la reglamentación a lo largo del territorio. También indica que las empresas pueden desarrollar su objeto en el exterior conforme a lo estipulado en las normas cambiarias o fiscales del país. Con respecto a la importación de energía para beneficio de los usuarios en Colombia, este Artículo estipula que la obtención en el exterior no estará sujeta a restricciones o contribución alguna arancelaria o de otra índole, pero sí estará sometida a las normas cambiarias y fiscales comunes.

<sup>13</sup> De igual forma, en los Artículos 5, 7 y 8, indica que: i) el asegurar la prestación de este servicio público bajo los términos de la Ley y otros reglamentos es competencia de los municipios; ii) asegurar la transmisión de energía eléctrica es competencia de los departamentos; y iii) asegurar las actividades de generación e interconexión a las redes de energía eléctrica en el país, es competencia de la Nación.

manejo eficiente y sostenible de los recursos energéticos del país, y la promoción de un buen uso de este servicio por parte de los usuarios.

En el Artículo 3°, se otorga al Estado la función de promover la libre competencia en las actividades del sector y, con esto, disuadir la competencia desleal, vigilar las situaciones de monopolio natural; garantizar los derechos y deberes de los usuarios, la protección ambiental, la cobertura en las diferentes regiones y sectores del territorio nacional, y los recursos necesarios para cubrir los subsidios otorgados a algunos usuarios. A su vez, define como objetivos del Estado: i) abastecer la demanda de electricidad de la comunidad; ii) asegurar la eficiencia, seguridad y confiabilidad en las distintas actividades del sector; y iii) asegurar los niveles de calidad y seguridad establecidos.

Bajo este marco jurídico<sup>14</sup>, la industria de energía eléctrica ha podido incrementar su eficiencia y modernizarse mediante la búsqueda de una mejora en las condiciones de prestación de su servicio público domiciliario. Además, ha permitido la constitución y organización de entidades gubernamentales, encabezadas por el Estado, las cuales se encargan de regular las actividades relacionadas con el sector eléctrico para el desarrollo de la prestación de este servicio (UPME, 2003):

- Departamento Nacional de Planeación (DNP). Mediante la elaboración de los Planes Nacionales de Desarrollo, el DNP define las metas de cobertura del servicio de electricidad. Al respecto, el Documento Conpes 3527 de 2008 estipula la Política Nacional de Competitividad y Productividad, y define al sector de minas y energía como importante para la competitividad del país por su función de provisión de energía eléctrica y de combustibles requeridos para el desarrollo de las actividades productivas, por lo que en esa medida, el DNP identifica como objetivos estratégicos: i) mantener el abastecimiento energético a precios eficientes; y ii) aumentar la cobertura de los servicios de energía eléctrica y gas combustible a precios eficientes y con operaciones ambientalmente sostenibles<sup>15</sup> (DNP, 2008).
- Ministerio de Minas y Energía. Formula las políticas, orienta, controla y evalúa a los organismos adscritos o vinculados en los términos que señala tanto la Constitución como la

---

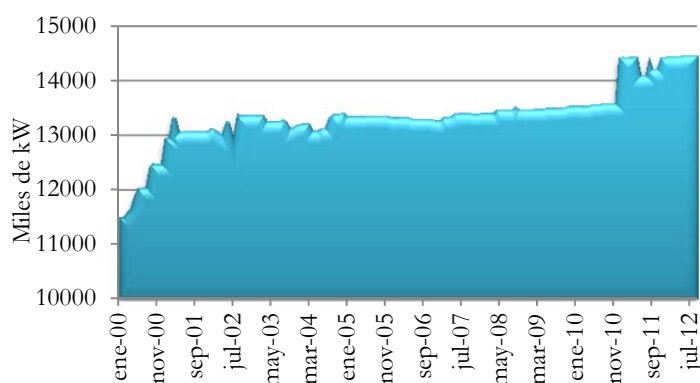
<sup>14</sup> Esta reforma jurídica también ha generado nuevas oportunidades para la inversión extranjera en el sector (Santa María *et al.*, 2009) y ha permitido al Gobierno Nacional, una disminución de la carga fiscal, una caída de la deuda pública y una mejora del sistema tarifario aumentando su nivel de transparencia. No obstante, según Urbiztondo y Rojas (2005) la regulación del sector eléctrico todavía presenta algunas fallas como: i) la interferencia del Gobierno para desviar las decisiones en favor de sus empresas; ii) la falta de sanciones ejemplarizantes a las entidades prestadoras del servicio; y iii) la falta de rapidez para solucionar casos de abuso dominante y competencia desleal, entre otros.

<sup>15</sup> El Documento Conpes 3668 de 2010 condensa el Informe de Seguimiento a la Política Nacional de Competitividad y Productividad en conformidad con lo establecido en la Ley 1253 de 2008, en las que se define que al final e inicio de cada administración se debe efectuar este ejercicio de evaluación (DNP, 2010).

Ley. Para ello cuenta con las entidades: i) Unidad de Planeación Minero Energética (UPME)<sup>16</sup>; ii) Comisión de Regulación de Energía y Gas (CREG)<sup>17</sup>; iii) Superintendencia de Servicios Públicos Domiciliarios (SSPD)<sup>18</sup>; e iv) Instituto de Planificación y Promoción de Soluciones Energéticas (IPSE)<sup>19</sup>.

Dentro de este marco, el sector eléctrico se ha venido desarrollando, llegando a obtener, para finales de la década del 2000, un sistema energético diversificado en el que, del total de capacidad efectiva neta, las plantas hidráulicas conforman el 66,4 %, las térmicas a gas el 27,8 %, las térmicas a carbón el 5,2 %, las térmicas a combustibles líquidos el 0,06 %; la cogeneración 0,4 % y eólicas 0,1 % (UPME, 2010b). De acuerdo con XM (2012, p. 13): “La capacidad efectiva neta instalada en el SIN al finalizar el año 2011 fue 14.420 MW. (...) Comparada con la del 31 de diciembre de 2010, fue superior en el 8,5 %, debido principalmente, a la entrada en operación de la central Porce 3 con su primera unidad (180 MW) el 11 de enero, incrementándose a 370 MW el 2 de mayo, luego a 550 MW el 10 de junio para alcanzar finalmente los 660 MW el 2 de septiembre; y al aumento de la capacidad térmica en un 11,2 % debido a la entrada de flores 4 con 450 MW el 12 de agosto de 2011. En particular, la capacidad con base en gas, tuvo un notorio incremento, ya que creció de 2.478 MW en el 2010, a 3.053 MW en el 2011 (aumento del orden del 23,2 %)” (Figura 2).

**Figura 2. Capacidad efectiva neta (periodo 2000-2012)**



**Fuente:** elaboración propia a partir de información de Neón-XM<sup>20</sup>.

<sup>16</sup> Realiza el planeamiento energético integral y elabora el plan de expansión de la cobertura del servicio público de energía eléctrica, entre otros.

<sup>17</sup> Se encarga de hacer cumplir los principios de eficiencia, equidad, transparencia, suficiencia, calidad y neutralidad en la prestación del servicio, además de resguardar la competencia en el mercado, entre otros.

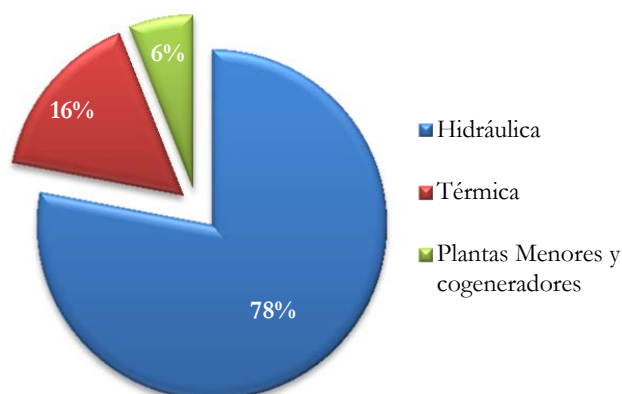
<sup>18</sup> Controla y vigila las empresas prestadoras de servicios públicos con respecto al cumplimiento de la normatividad vigente.

<sup>19</sup> Identifica, planea y promueve proyectos energéticos viables económicamente en Zonas No Interconectadas.

<sup>20</sup> Página web de la Compañía de Expertos en Mercados, <http://sv04.xm.com.co/neonweb/>.

Por su parte, en 2011 la generación anual de energía eléctrica en Colombia registró un crecimiento de 3 % comparado con 2010, al ubicarse en los 58.620,4 GWh, debido al crecimiento de las exportaciones, la demanda y la disponibilidad hídrica (Figura 3).

**Figura 3. Generación de energía en 2011**



**Fuente:** elaboración propia a partir de información de XM (2012).

En la actualidad el mercado eléctrico colombiano cuenta con dos segmentos: el de usuarios regulados y de no regulados. El primero de ellos contempla la demanda de pequeños consumidores residenciales (inferiores a 0,5 MW mensual), como hogares, pequeñas empresas y establecimientos comerciales, a quienes el servicio es prestado por las distribuidoras eléctricas; su estructura tarifaria<sup>21</sup> es generada por la CREG<sup>22</sup> (por normatividades con duración inicial de 5 años). Para el caso de consumo doméstico, se tiene un sistema estratificado de cobro donde los estratos 1, 2 y 3 son subsidiados por los estratos 5 y 6, siendo el estrato 4 el único que paga su verdadero consumo, bajo los condicionamientos reales (Lozano y Rincón, 2010).

En el mercado no regulado, se encuentran los agentes con consumo superior a 0,5 MW/mes en promedio durante los últimos seis meses. Estos pueden libremente negociar, transar y contratar su

<sup>21</sup> El precio de la energía es fundamental para el desarrollo de un país, ya que representa la fuerza base del crecimiento industrial y por tanto una fuente necesaria para el crecimiento económico. De manera que su comportamiento tiene la relevancia de poder distorsionar decisiones sobre proyectos de inversión por su aumento de costos, implicando la no generación de empleo y valor agregado (Santa María *et al.*, 2009). Por otra parte, funciona como incentivo para los inversionistas, generando grandes flujos de capital en proyectos nacionales que permitan aumentar la producción y posible exportación de bienes y servicios nacionales.

<sup>22</sup> Principalmente los componentes que constituyen la tarifa hacen referencia a los costos de la generación, transmisión, distribución, comercialización (componente variable), unas pérdidas reconocidas y unas restricciones que surgen en estas actividades. Para un mayor detalle al respecto ver Lozano y Rincón (2010).

suministro con el comercializador en el mercado mayorista mediante el mercado *spot* en la Bolsa de Valores<sup>23</sup> o contratos bilaterales de corto y largo plazo, por lo que el precio de la energía para este segmento de mercado no está regulado por la CREG, y se determina por la oferta y demanda del servicio.

Dado este contexto, a continuación se realizará una revisión de literatura sobre las diferentes metodologías existentes para estimar las elasticidades de la energía y el impacto de su precio en diferentes agregados macroeconómicos.

### 3. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Con el fin de concebir las diferentes metodologías usadas en la estimación sobre elasticidad de demanda e ingreso (de corto y largo plazo) de la energía eléctrica, se realizó una juiciosa exploración bibliográfica<sup>24</sup>, sobre los diferentes documentos que estudian el tema en cuestión durante los últimos años<sup>25</sup>.

Dentro de los diferentes esquemas propuestos para estimar las elasticidades, se encuentran los planteados por Nerlove (1958), Deaton (1990), Seale *et al.* (1991), Berndt (1991), entre otros, donde las diferentes técnicas aplicadas para estimar las elasticidades son:

- i) Métodos de regresión múltiple a partir de sistemas lineales (Lijesen, 2007), log-lineales (Arthur *et al.*, 2012; Türkekul y Unakitan, 2011; Benavente *et al.*, 2005), log (Lijesen, 2007);
- ii) Datos panel y corte transversal (Arnberg y Bjørner, 2007; Acuña, 2008; Liddle, 2012);
- iii) Modelos de vectores autorregresivos y modelos de corrección de errores (Killian, 2008; Zachariadis y Pashourtidou, 2007);
- iv) Modelos de simulación y de equilibrio general computable (Boonekamp, 2007), entre otros.

---

<sup>23</sup> Definida mediante la Resolución CREG-24 de 1995 (Artículo 1) como un:

*“Sistema de información, manejado por el Administrador del Sistema de Intercambios Comerciales, sometido a las reglas del Mercado Mayorista, en donde los generadores y comercializadores ejecutan actos de intercambio de ofertas y demandas de energía, hora a hora, para que el Administrador del Sistema de Intercambios Comerciales ejecute los contratos resultantes en la bolsa de energía, y liquide, recaude y distribuya los valores monetarios correspondientes a las partes y a los transportadores”.*

Para 2010 el Administrador del Sistema de Intercambios Comerciales, presta servicios: “(...) a 48 generadores, 85 comercializadores, 11 transmisores y a 30 distribuidores (operadores de red)” (Minminas, 2011, p. 146).

<sup>24</sup> En las bases de datos, al buscar sin restricciones de año, lugar o metodología, se encontraron más de 100 artículos referentes a la estimación de elasticidades de la energía, por lo que aquí se muestran solo algunos de ellos.

<sup>25</sup> No obstante, su estudio empezó desde la década de 1950 con escritos como el de Houthakker (1951), y Fisher y Kaysen (1962). Para una revisión sobre documentos realizados en las décadas de 1960, 1970, 1980, 1990 y principios de la década del 2000, ver el artículo de Galetovic y Muñoz (2010).

Para Colombia, estos trabajos empezaron en la década de 1980, donde sus técnicas más utilizadas han sido los modelos de series de tiempo, y han coincidido en determinar la energía como un bien necesario, al obtener como resultado elasticidades precio de la demanda de corto plazo entre -0,3 y -0,8, y elasticidades ingreso de la demanda de corto plazo que oscilan entre 0,02 y 0,9. En general, los trabajos concluyen que frente a cambios en la tarifa de electricidad, los usuarios reducen el consumo de energía (Zapata, 2011) o el consumo de otros bienes para garantizar un consumo de subsistencia (Medina y Morales, 2007; Ramírez y Londoño, 2008), al considerarse un servicio público de primera necesidad con pocos sustitutos (Mendoza, 2010; Gutiérrez, 2011). Esto se observa en el nivel socioeconómico, donde los estratos más bajos poseen una elasticidad precio más inelástica que los estratos altos con respecto al patrón del consumo (Ramírez y Londoño, 2008; Maddock *et al.*, 1992). Asimismo, frente a aumentos en el ingreso, los estudios concluyen que se tiende a elevar el consumo, con mayor grado en los estratos bajos, siendo casi inalterable en estratos altos (Mendoza, 2010; Ramírez y Londoño, 2008). En la Tabla 1 se presenta un resumen de los diferentes valores encontrados en los estudios realizados para el país.

Respecto a las diferentes metodologías utilizadas en la cuantificación de impactos macroeconómicos del precio de la energía, se han aplicado modelos de vectores autorregresivos (García, 2012; Blanchard y Galí, 2007; Edelstein y Kilian, 2007; Bernanke *et al.*, 2004), de cointegración y de corrección de error (Blümel *et al.*, 2009), modelos de insumo producto (Arón, 2006), modelos de equilibrio general poskeynesianos (Alarco, 2009), modelos dinámicos neokeynesianos de política monetaria y de ciclos reales (Carlstrom y Fuerst, 2005), modelos monetarios dinámicos con competencia monopolística (Leduc y Sill, 2001), y enfoques de función de producción agregada (enfoque micro-analítico) y de multivariante macroeconómico (modelo de simulación) para examinar los impactos (Jones y Leiby, 1996), entre otros.

**Tabla 1. Trabajos específicos para Colombia**

Documento	Metodología econométrica	Período de análisis	Cobertura	Elasticidades de demanda (rango o promedio)		Elasticidades ingreso (rango o promedio)	
				Corto plazo	Largo plazo	Corto plazo	Largo plazo
Econometría (1982)	Series de tiempo y corte transversal.	1965-1978	Regional y sectorial	---	(-1,564; -4,618)	---	(-0,001; 0,841)
APEX (1985)	Series de tiempo.	---	Sectorial	-0,032	-0,09	0,433	1,25
Pérez y Acosta (1987)	Series de tiempo y corte transversal.	1972-1983	Regional y sectorial	-0,12	-0,55	0,9	---
Ramírez (1991)	MCP con efectos fijos y aleatorios.	---	Regional	(-0,024; -0,709)	---	(0,021; 0,484)	---

Vélez <i>et al.</i> (1991)	Series de tiempo para la estimación de la demanda y mínimos cuadrados no lineales para las elasticidades.	1970-1983	Regional (Medellín, Bogotá)	(-0,10; -0,12)	---	0,23	---
Maddock <i>et al.</i> (1992)	Método de Hausman (estimación de función log con un error aditivo <sup>26</sup> y distribuido normalmente).	Mayo-junio 1986	Regional (Medellín) Estratos 1-2 Estratos 3-4 Estratos 5-6 Estratos Total	-0,166 -0,508 -0,791 -0,466	---	0,356 0,200 0,517 0,301	---
Medina y Morales (2007)	Metodología de alternativa discreta continua, con simulación Montecarlo.	2003	Regional (Medellín, Bogotá, Cali, Bucaramanga, Pasto, Pereira, Cartagena y Barraquilla)	-0,45	---	0,31	---
Ramírez y Londoño (2008)	Método generalizado de momentos.	2003-II Trim. - 2006-IV Trim.	Regional (Dpto. Antioquia) Estrato 1 Estrato 2 Estrato 3 Estrato 4 Estrato 5 Estrato 6 Promedio	(-0,043; -0,038) (-0,185; -0,172) (-0,458; -0,445) (-0,664; -0,565) (-0,821; -0,436) (-0,663; -0,454) -0,36	-0,11 -0,35 -0,75 -0,96 -1,05 -0,78 ---	(0,772; 0,913) (1,194; 1,335) (0,562; 0,678) (-0,02; 0,572) --- --- 0,72	2,34 2,51 1,02 0,43 --- --- ---
Mendoza (2010)	Panel balanceado con análisis de regresión.	1998-2006	Regional (Santa Marta)	-0,007	---	0,52	---
Gutiérrez (2011)	Método generalizado de momentos, con desviaciones ortogonales.	Enero de 2005 - marzo de 2010	Nacional	-0,067	-0,111	---	---
Zapata (2011)	Series de tiempo.	Enero de 2003 - agosto de 2010	Nacional	-0,12	---	---	---

Fuente: elaboración propia.

<sup>26</sup> De acuerdo con Maddock *et al.* (1992, pp. 351-352): “Our specification of an additive error in this form allowed us to use least squares in the loss function and avoid complicated integral expressions of the sort considered in Hausman (1985a) and suggested in his (1985b) article”.

## 4. METODOLOGÍA

### 4.1 Elasticidades de demanda

Para estimar las diferentes elasticidades, se plantea una ecuación de demanda de la energía doméstica a nivel nacional, incluyendo entre sus variables explicativas factores que influyen en su comportamiento, como: i) incremento del número de usuarios; ii) aumento del ingreso real por familia; iii) cambios en el precio real del bien energético en cuestión (electricidad para este caso), y iv) cambios en el precio de bienes sustitutos cercanos (Bouille, 2004). Con base en ello, se plantea el siguiente modelo de demanda doméstica para Colombia<sup>27</sup>:

$$QED_{Dom} = \beta_{11} + \beta_{12}PTE_{t-1} + \beta_{13}IRPC_{t-2} + \beta_{14}QED_{Dom_{t-1}} + \beta_{15}PGN_{t-1} + u_t,$$

donde  $QED_{Dom}$ , tomada como variable exógena, hace referencia a la cantidad de demanda de energía doméstica a nivel nacional; y como endógenas se define  $PTE_{t-1}$  como el precio tarifario de la energía<sup>28</sup> (rezagado un período),  $IRPC_{t-2}$  el ingreso real per-cápita del consumidor del servicio (rezagado dos períodos),  $QED_{Dom_{t-1}}$  la cantidad de demanda de energía doméstica (rezagada un período),  $PGN_{t-1}$  el precio del bien sustituto<sup>29</sup> (rezagado un período), y  $u_t$  las innovaciones.

Por otra parte, para el consumo industrial de energía los factores determinantes son: i) incremento del número de firmas que demandan el servicio; ii) aumento del producto real por empresa; iii) cambios en el precio real del bien energético en cuestión; y iv) cambios en el precio de bienes sustitutos cercanos (Santa María *et al.*, 2009; UPME, 2004). Por lo que la ecuación a estimar se comporta así:

$$QED_{Ind} = \beta_{21} + \beta_{22}PBE_{t-1} + \beta_{23}IRPI_{t-1} + \beta_{24}QED_{Ind_{t-1}} + \beta_{25}PGN_{t-1} + u_t,$$

donde  $QED_{Ind}$  es la cantidad de demanda industrial de energía en todo el país,  $PBE_{t-1}$  es el precio de la energía que se cotiza en Bolsa,  $IRPI_{t-1}$  el índice de producción real de la industria manufacturera en Colombia (tomada como *proxy* del rendimiento económico de las industrias),  $QED_{Ind_{t-1}}$  la cantidad de demanda industrial de energía, y  $PGN_{t-1}$  el precio del bien sustituto, donde todas las variables endógenas están rezagadas un periodo.

Estos modelos, como afirman Guzmán *et al.* (2011, p. 144), están sustentados:

<sup>27</sup> Esta ecuación formulada es similar a la expuesta por Guzmán *et al.* (2011), incluyendo la variable del bien sustituto, que permite estimar mediante su parámetro la elasticidad precio cruzada.

<sup>28</sup> Para esta variable se tomará como proxy el precio Bolsa de la energía, debido a que el precio tarifario de energía se encuentra construido solo desde 2004 por la Superintendencia de Servicios Públicos (<http://www.superservicios.gov.co/>).

<sup>29</sup> El gas natural será el bien sustituto a tener en cuenta, dada su importancia como fuente energética, basándose en los diferentes informes de la UPME donde se indica su uso y relevancia en la economía nacional.



“(…) teóricamente en el modelo de rezagos distribuidos y autorregresivo de Nerlove y el modelo de ajuste de existencias o de ajuste parcial (Gujarati, 2004), así como en evidencia empírica de trabajos desarrollados por Taylor (1979); Smith (1980); Lakshmanan y Anderson (1980); Wills (1981); Huq y Dynes (1982) y Hondroyiannis (2004)”.

Su estimación se hará mediante Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO), técnica estadística robusta que permite hallar los Mejores Estimadores Lineales Insesgados (MELI), cumpliendo con todos los supuestos del teorema de Gauss-Markov<sup>30</sup> y asegurando estimadores óptimos con varianza mínima. Se aplicarán pruebas de raíz unitaria sobre los residuales para estimar si es una regresión espuria, a la vez que se testearán otras pruebas para asegurarse de la confiabilidad de los parámetros.

#### 4.2 Impactos macroeconómicos

Respecto a la estimación de los choques en el precio de la energía eléctrica sobre el PIB, se sigue el artículo de García (2012), con algunos cambios que hacen referencia a la especificidad de la economía colombiana, por lo que se estimará un modelo de vectores autorregresivos con variables exógenas (Bierens, 2004), estructurado de la siguiente manera:

$$Y_t = \mu + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_{t-p} + B_1 X_{t-1} + B_2 X_{t-2} + \dots + B_q X_{t-q} + D_t + \varepsilon_t$$

donde,  $Y_t$  es un vector de observaciones de  $k$  variables en el tiempo  $t$ , con  $t = 1, 2, \dots, k$ ;  $\mu$  es un vector de constantes de dimensión  $k \times 1$ ;  $A_i$  hace referencia a los parámetros que acompañan los rezagos de la propia variable (dinámica propia) y de las demás variables (dinámica cruzada) (Quilis, 2004);  $B_i$  son los coeficientes que acompañan a las variables exógenas que solo dependen de sus rezagos, es decir solo poseen dinámica propia;  $D_t$  son las variables dummy centradas que contemplan la estacionalidad de las series, y  $\varepsilon_t$  son las innovaciones.

Dicho esto, cada ecuación se podría expresar como:

---

<sup>30</sup> Este teorema afirma que la estimación por mínimos cuadrados del modelo teórico de regresión es óptima y no solo en el sentido de que hace mínimo el módulo del vector de residuos, sino también en lo que se refiere a la variabilidad de la estimación del parámetro desconocido  $\beta$ . A continuación se dan los supuestos de Gauss-Markov para la regresión lineal (Gujarati, 2004; Greene, 2011):

1. Debe ser lineal en los parámetros.
2. El modelo debe estar correctamente especificado.
3. El valor de la media condicional es cero y no existe correlación entre las perturbaciones.
4. No hay multicolinealidad perfecta.
5. Hay homocedasticidad en  $u_i$ .
6. Normalidad en los  $u_i$ .
7. La covarianza entre  $u_i$  y  $x_i$  es cero.
8. El número de observaciones es mayor que el de parámetros.
9. Las  $x$  son no estocásticas, es decir, son fijas en muestras repetidas.

$$Y_{i,t} = \mu_i + A_{i,1}^1 Y_{1,t-1} + \dots + A_{i,k}^1 Y_{k,t-1} + A_{i,1}^2 Y_{1,t-2} + \dots + A_{i,k}^2 Y_{k,t-2} + \dots + A_{i,1}^p Y_{1,t-p} + \dots + A_{i,k}^p Y_{k,t-p} + B_{i,1}^1 X_{1,t-1} + B_{i,2}^1 X_{2,t-2} + \dots + B_{i,p}^1 X_{k,t-p} + D_t + \varepsilon_{it}$$

Es así como  $A_{i,j}^z$  denota para la  $i$ -ésima ecuación el parámetro que hace referencia a la  $j$ -ésima variable del rezago  $z$ . Para el presente estudio, las variables incluidas en el VARX a estimar, hacen referencia a su importancia como indicadores fundamentales en el ámbito de los sectores macroeconómico, financiero, externo y energético, siendo:

$$Y_t = \begin{bmatrix} PIB \\ \% Desempleo \\ IPC \\ Tasa de interés \\ Índice de tasa de cambio real \\ Precio de la Energía \\ IGBC \\ Índice de producción industrial \\ Demanda total de Energía \\ \% Aporte hídrico \\ \% Aporte termodinámico \\ Inv. Nac. Servicios \end{bmatrix}, \quad X_t = \begin{bmatrix} PIB E. U. \\ Precio WTI \\ PIB Venezuela \\ IED \\ Volumen caudal \end{bmatrix},$$

$\mu = [\text{Vector de constantes del modelo}]$ ,  $D_t = [\text{Dummies centradas}]$ , y

$\varepsilon_t = [\text{Innovaciones del sistema}]$ , donde:

$$E(\varepsilon_{j_t}) = 0, \forall t, \quad E(\varepsilon_{j_t} \varepsilon_{j_{t-i}}) = 0, \forall t \neq t-i,$$

$$E(\varepsilon_{j_t} | \varepsilon_{j'_t}) = 0, \forall j \neq j', \text{ con } j \wedge j' = 1, \dots, 14., \quad \varepsilon_{j_t} \sim N(0, \sigma_j^2) \quad \text{y}$$

$$\text{Var}(\varepsilon_{i_t}) = \Sigma_\varepsilon, \forall t.$$

Esta técnica estadística aplicada tiene su inicio en la macroeconomía empírica de Sims (1980) a mediados de la segunda mitad del siglo XX, al plantearse una línea de investigación para crear una alternativa a las metodologías comunes en su época, con la que se pudiera especificar sistemas mínimamente restringidos en los que las variables económicas asumieran un tratamiento endógeno (Lütkepohl, 2005). A partir de allí, nacen los vectores autorregresivos, técnica que en el transcurso de los años ha sido usada comúnmente en la literatura relacionada con el estudio de impactos de diferentes variables agregadas de gran relevancia para el crecimiento económico.

No obstante, al ser modelos no parsimoniosos (disminuyendo los grados de libertad de los estimadores (Sims, 1980)), se puede incurrir en problemas de sobre-identificación y correlación en sus regresores (Quilis, 2004). Una de las posibles propuestas a este inconveniente es el enfoque bayesiano iniciado por autores como Litterman (1979; 1984), Todd (1984), y Doan, Litterman y Sims (1984). Este tipo de técnicas en las series multivariadas de tiempo plantean según Quilis (2004, pp. 4-5): “(...) restricciones de naturaleza probabilística orientadas a mejorar la calidad de

la estimación y de las predicciones”. Así, debido a que tienen fundamentos no basados en la teoría económica y son naturalmente ateóricos, se les denomina aproximaciones *a priori* (existiendo diferentes análisis como el de Litterman-Minessota, Brown, Fearn y Vannucci, Sims y Zha, entre otros), al ser nociones de tipo netamente estadístico.

#### 4.2.1 Enfoque bayesiano<sup>31</sup>

Formalmente, si se tiene a una matriz de datos denominada  $\mathbf{Y}$ , y  $\boldsymbol{\theta}$  se toma como un vector de parámetros del modelo, su representación bayesiana es  $\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}) = [\mathbf{p}(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{p}(\mathbf{y})^{-1})]$ , donde  $\boldsymbol{\theta}$  simboliza una variable aleatoria expresándose bajo la misma regla de probabilidades (dado los datos  $\mathbf{y}$ , qué se sabe sobre  $\boldsymbol{\theta}$ ), por lo que el término  $\mathbf{p}(\mathbf{y})$  se puede obviar. El término  $\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})$  hace referencia a la función de densidad *a posteriori*;  $\mathbf{p}(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})$  es la función de densidad de las variables dados los parámetros, siendo esta la función de verosimilitud; y  $\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})$  se le conoce como la función de densidad *a priori*, independiente de los datos.

Dicho esto, el método bayesiano, al suponer que los parámetros ( $\boldsymbol{\theta}$ ) son variables aleatorias comportadas bajo una distribución normal multivariada con conocimiento de su media ( $\boldsymbol{\theta}^*$ ) y matriz de covarianzas ( $V_{\boldsymbol{\theta}}$ ), su densidad *a priori* puede ser descrita como:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-\frac{k^2 p}{2}} |V_{\boldsymbol{\theta}}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}^*)V_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}^*)}{2}\right],$$

donde  $\mathbf{k}$ , es el número de variables de estudio, y  $\mathbf{p}$  es el número de rezagos óptimos del modelo. Para el proceso gaussiano la función de verosimilitud resulta ser:

$$\mathbf{L}(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-\frac{kT}{2}} |I_T \otimes \Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{Y} - (\mathbf{X} \otimes I_k)\boldsymbol{\theta})'(I_T \otimes \Sigma^{-1})(\mathbf{Y} - (\mathbf{X} \otimes I_k)\boldsymbol{\theta})}{2}\right]$$

A su vez, la función *a posteriori* es:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}) \propto \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})' \bar{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}})}{2}\right]$$

Sabiendo que la media ( $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ ), y matriz de covarianza ( $\bar{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}$ ) de la distribución *a posteriori* son respectivamente:

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} = [V_{\boldsymbol{\theta}}^{-1} + (\mathbf{X}'\mathbf{X} \otimes \Sigma^{-1})]^{-1} [V_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}\boldsymbol{\theta}^* + (\mathbf{X}' \otimes \Sigma^{-1})\mathbf{Y}]$$

$$\bar{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}} = [V_{\boldsymbol{\theta}}^{-1} + (\mathbf{X}'\mathbf{X} \otimes \Sigma^{-1})^{-1}]$$

Es por ello que, desde este enfoque de análisis, la información *a priori* tiene como fundamentos básicos que: i) los rezagos más recientes contienen mayor información sobre la evolución futura de

<sup>31</sup> Esta parte del documento se basa en Jaramillo (2009).

la serie; ii) los rezagos de una serie contienen más información sobre su comportamiento que los rezagos de otras variables; y iii) la mejor predicción de una serie es su valor presente (Ballabriga *et al.*, 1998; Sims y Zha, 1998); teniendo así por objetivo final, reducir el riesgo de sobreajuste sin reducir la generalidad de la representación del modelo.

Para este escrito se tomará la aproximación *a priori* de Sims y Zha (1998), que “*utiliza ponderadores a la información prior que es gobernada por siete hiper-parámetros para la matriz de varianzas y covarianzas de  $\theta$ , que se asume diagonal (...)*” (Jaramillo, 2009, p. 109). Estos hiper-parámetros que dependen del primer y segundo momento *a priori* de los coeficientes del modelo, son definidos en la Tabla 2. Luego, hecho el análisis de la información, al realizar el ejercicio de calibración y basándose en estudios para la economía colombiana como el de Zárate *et al.* (2012), en la estimación del modelo se usaron los siguientes valores:  $\lambda_0 = 0,5$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_3 = 1$ ,  $\lambda_4 = 2$ ,  $\lambda_5 = 2$ ,  $\mu_5 = 0$ ,  $\mu_6 = 0$ ,  $v = 4$ .

**Tabla 2. Interpretación de los hiper-parámetros de la *prior* de Sims y Zha**

Parámetros	Interpretación	Valores
$\lambda_0$	Estrechez ( <i>tightness</i> ) global de la <i>prior</i> (descuento de la escala <i>a priori</i> ).	[0,1]
$\lambda_1$	Desviación estándar de la <i>prior</i> alrededor de los parámetros AR(1).	[0,1]
$\lambda_3$	Decaimiento de rezagos.	> 0
$\lambda_4$	Desviación estándar o estrechez del intercepto, controlando el ajuste de la <i>prior</i> a las constantes.	> 0
$\lambda_5$	Desviación estándar o estrechez alrededor de los coeficientes de las variables exógenas.	> 0
$\mu_5$	Suma ponderada <i>a priori</i> de los coeficientes, controlando a <i>prior</i> raíz unitaria.	$\geq 0$
$\mu_6$	Observaciones <i>dummy</i> iniciales o desfase <i>a priori</i> , controlando a <i>prior</i> cointegración.	$\geq 0$
$v$	Grados de libertad <i>a priori</i> .	> 0

**Fuente:** elaboración propia a partir de Zárate *et al.* (2012) y Jaramillo (2009).

## 5. DATOS

La periodicidad de análisis para las dos ecuaciones de demanda es mensual y para los modelos multivariados trimestral, todos comprendidos entre enero del 2000 y diciembre del 2011. Todas las variables de medición monetaria tienen como base el año 2005 y las que corresponden a Productos

Internos Brutos están desestacionalizadas<sup>32</sup>. En la Tabla 3 se muestran las estadísticas descriptivas de los datos utilizados. En las gráficas del Anexo 2 se muestran las diferentes variables en niveles. Es de resaltar la evolución de los precios Bolsa de la Energía desde principios del siglo XXI, debido a la rebaja en los límites de demanda obligatorios para poder estar en el mercado no regulado, generando que los precios de los contratos tuvieran una tendencia creciente como afirma García *et al.* (2011), a razón del aumento de demanda por el incremento de usuarios en ese tipo de mercado eléctrico. Como es de esperar, tanto la demanda total de energía, la regulada, la no regulada y el índice real de producción manufacturera han venido en aumento.

**Tabla 3. Estadísticas descriptivas de las series utilizadas en las diferentes estimaciones**

Modelo	Serie <sup>33</sup>	Fuente	Media	Desv. estándar	Mínimo-Máximo
			En niveles		
MCO (Dom.)	Demanda regulada <sup>34</sup> (en GWh).	XM	2.844,479	232,548	2.364,415 – 3.258,843
	Precio Bolsa de la Energía Eléctrica (\$/kWh).	Superintendencia de Servicios Públicos	78,703	34,914	32,300 – 201,090
	Ingreso per cápita del consumidor del servicio <sup>35</sup> .	Banco de la República	685.576,442	77.240,911	588.256,413 – 822.317,112
	Precio del gas natural (\$/KPC <sup>36</sup> ).	Ecopetrol	2,503	1,307	0,767 – 5,812
MCO <sup>37</sup> (Ind.)	Demanda no regulada <sup>38</sup> (en GWh).	XM	1.250,765	222,625	733,495 – 1.604,666
	Índice real de producción manufacturera.	Banco de la República	102,834	14,043	73,294 – 130,412

<sup>32</sup> Para los crecimientos del PIB de los diferentes países, se hace referencia a la tasa de crecimiento de un trimestre respecto al mismo trimestre del año anterior.

<sup>33</sup> Las variables que se indican en %, en la tabla se encuentran como fracción de una unidad (1), representando 1 el 100 %.

<sup>34</sup> Tomada como proxy de la demanda doméstica.

<sup>35</sup> Esta información se encuentra anual, por lo que se procedió a mensualizar teniendo en cuenta que esta variable no tiene cambios drásticos en el corto plazo y su comportamiento no es tan variable (para conocer el método matricial utilizado ver el Anexo 1).

<sup>36</sup> Miles de pies cúbicos.

<sup>37</sup> En este modelo también se incluye el precio Bolsa de la energía eléctrica (\$/kWh) y el precio del gas natural (\$/KPC), de manera que sus estadísticas son las que están dadas en el modelo MCO (Dom.).

<sup>38</sup> Tomada como proxy de la demanda industrial.

Modelo	Serie	Fuente	Media		Desv. estándar		Estacionariedad <sup>39</sup>	
			Nivel	Crec.	Nivel	Crec.	Nivel	Crec.
VARX y BVARX	Producto Interno Bruto de Colombia <sup>40</sup> (en miles de millones de \$).	DANE	94.982,208	0,104	32.443,153	0,029	NO	SÍ (3)
	Desempleo <sup>41</sup> (%).	DANE	0,129	-0,006	0,019	0,104	SÍ (1,2)	SÍ (1,2,3)
	IPC	DANE	101,313	0,057	17,994	0,002	SÍ (1,3)	NO (3)
	Tasa de interés de colocación <sup>42</sup> (%).	Banco de la República	0,136	-0,012	0,028	0,077	NO (3)	SÍ (2,3)
	Índice de tasa de cambio real (ITCR)	Banco de la República	116,455	-0,003	10,810	0,037	NO	SÍ (1,2,3)
	Precio Bolsa de la Energía Eléctrica (en \$/kWh).	XM	78,703	0,044	33,582	0,225	NO (3)	SÍ (1,2,3)
	IGBC (en puntos).	Banco de la República	6760,940	0,054	4.809,270	0,118	NO	SÍ (1,2,3)
	Índice real de producción manufacturera.	Banco de la República	102,834	0,037	13,467	0,054	SÍ (1,3)	NO
	Demanda total de Energía (en GWh).	XM	12.449,800	0,027	1.268,050	0,015	SÍ (2,3)	SÍ (1,2,3)
	Aporte hídrico (%).	XM	0,753	0,003	0,065	0,084	SÍ (1,3)	SÍ (1,2)
	Aporte termodinámico (%).	XM	0,204	0,026	0,070	0,247	SÍ (1,3)	SÍ (1,2)
	Inversión Extranjera Directa (en millones de US\$).	Banco de la República	1.464,120	0,282	1.056,960	1,023	SÍ (1,2,3)	SÍ (1,2,3)
	Inversión nacional de servicios públicos en el extranjero (en millones de US\$).	Banco de la República	57,055	5,827	157,454	47,191	SÍ (1,2)	SÍ (2,3)

<sup>39</sup> En estas dos columnas se indica si las series son estacionarias a un nivel de significación del 5 %. Para ello se aplican tres tests: (1) Dickey Fuller “DF”, (2) Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin “KPSS”, y (3) Phillips-Perron “PP”. Se toma la decisión de afirmar que son estacionarias si al menos en dos de las pruebas anteriores existe evidencia estadística para afirmar que no hay raíz unitaria (entre paréntesis se encuentran las pruebas que dieron estacionariedad, de acuerdo con la enumeración mencionada a inicios de este inciso).

<sup>40</sup> La serie se encuentra desde el año 2000, por lo que para hallar su tasa de crecimiento, se debió estimar los valores de 1999, mediante un modelo ARIMA (11,1,11), en el cual sus residuales tuvieron un comportamiento de ruido blanco.

<sup>41</sup> Con la nueva metodología aplicada por el DANE para medir el desempleo, éste se encontró sólo desde el año 2001 al 2011; para los datos faltantes, se estimó una modelo ARIMA (1,1,4), donde sus residuales se comportaron bajo los supuestos de ruido blanco.

<sup>42</sup> La tasa de colocación del Banco de la República se calcula como el promedio ponderado por monto de las tasas de crédito de consumo, preferencial, ordinario y tesorería para los días hábiles de cada mes.

Volumen embalse (nacional, en GWh) <sup>43</sup> .	XM	34.928,290	4.964,128	0,019	0,165	SÍ (1,2,3)	SÍ (1,2,3)
Producto Interno Bruto de EE.UU. (en billones “norteamericanos” de US\$).	Bureau of Economic Analysis (BEA)	12.437,500	0,018	745,896	0,020	NO	SÍ (1,3)
Precio del petróleo referencia WTI (en US\$).	Ecopetrol	57,133	0,040	26,993	0,145	NO (3)	SÍ (1,2,3)
Producto Interno Bruto de Venezuela <sup>44</sup> (en millones de bolívares).	Banco Central de Venezuela	12.130,142	0,037	2.161,800	0,091	SÍ (1,2,3)	SÍ (1,3)

**Fuente:** elaboración propia.

Por otra parte, tanto el aporte hídrico como el termodinámico para la generación de energía eléctrica, han permanecido en un intervalo relativamente constante, entre un 68 %-84 % y un 10 %-30 %, respectivamente. Solo se presentó un período atípico de dos trimestres (2009Q1 y 2010Q4) donde el aporte hídrico disminuyó a niveles del 50 % y el aporte termodinámico aumentó a un 45 % en promedio. Con respecto al nivel de embalse, el cual depende primordialmente de factores netamente exógenos como las precipitaciones fluviales, ha variado sobre un promedio histórico de 34.928.290,74 GhW por trimestre.

En referencia a las variables macroeconómicas, el PIB de los tres países tiene en común el choque negativo entre 2008-2009 causado por la crisis financiera internacional que incidió en sus tasas de crecimiento. Por su parte, el índice de precios al consumidor ha tenido un comportamiento estable, con tasas de crecimiento no tan variables, representando una inflación menor a dos dígitos<sup>45</sup>. La IED ha tenido una tendencia creciente, aunque con alta volatilidad, al igual que el índice general de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC), principalmente en el período de la crisis y post-crisis (2007-2009).

La inversión nacional en servicios públicos en el extranjero no presenta ninguna tendencia, sin embargo ha aumentado sus montos en el transcurso del tiempo. Las variables con tendencia a la baja son: i) la tasa de interés de colocación (con un período al alza en la fase de la crisis ya

<sup>43</sup> Entendida como la reserva de energía de todo el sistema nacional de embalses de acuerdo con la cantidad de agua almacenada en los mismos.

<sup>44</sup> Esta serie se encontraba a precios constantes de 1997, por lo que se tuvo que buscar la serie de índice de precios al consumidor, y a partir de esta, realizar la transformación a precios constantes base 2005.

<sup>45</sup> Regulada bajo el enfoque de política de Inflación Objetivo ejecutado por el Banco de la República.

mencionada); ii) el desempleo (de órdenes del 16 % al 11 % en promedio); y iii) el índice de tasa de cambio real (debido a la constante apreciación del peso colombiano en los últimos años).

Para la siguiente sección, que corresponde al cálculo y evaluación de los modelos, se utilizarán las variables en niveles para las ecuaciones de demanda; y para la estimación de los sistemas multivariados se utilizarán las tasas de crecimiento, donde todas son estacionarias a un nivel de significación del 5 % (Tabla 3).

## 6. ESTIMACIÓN Y RESULTADOS

Los coeficientes estimados del modelo correspondiente a demanda de energía doméstica y sus pruebas sobre los residuales, se encuentran en las Tablas 4 y 5, respectivamente:

**Tabla 4. Estimación de parámetros del modelo de demanda de energía doméstica**

Parámetro	Valor	Desviación estándar	P-valor
$\beta_{11}$	1.022,808	180,2545	0,0000
$\beta_{12}$	-0,663244	0,312038	0,0335
$\beta_{13}$	0,002846	0,000380	0,0000
$\beta_{14}$	-0,056066	0,085410	0,5126
$\beta_{15}$	-8,928841	15,98748	0,5774

Fuente: elaboración propia.

**Tabla 5. Pruebas sobre residuales**

Prueba	P-valor
<b>Test de heterocedasticidad</b>	
White	0,2390
Glejser	0,7964
<b>Test de autocorrelación</b>	
Breusch-Godfrey	0,2275
<b>Test de normalidad</b>	
Jaque Bera	0,82

Fuente: elaboración propia.

Respecto a la ecuación de demanda industrial<sup>46</sup>, sus resultados se encuentran en las Tablas 6 y 7.

<sup>46</sup> Para la estimación de este modelo, se suavizaron las variables  $PBE_{t-1}$  y  $QED_{Ind,t-1}$ , mediante el filtro de Hodrick y Prescott (con un  $\lambda = 14.400$ ), debido a que la estimación con las variables sin suavizar generaba problemas en los residuales.



**Tabla 6. Estimación de parámetros del modelo de demanda de energía industrial**

Parámetro	Valor	Desviación estándar	<i>P-valor</i>
$\beta_{21}$	-124,6860	31,31590	0,0001
$\beta_{22}$	-0,475169	0,268078	0,0785
$\beta_{23}$	3,085837	0,447035	0,0000
$\beta_{24}$	0,890068	0,036722	0,0000
$\beta_{25}$	-5,051685	4,376788	0,2504

Fuente: elaboración propia.

**Tabla 7. Pruebas sobre residuales**

Prueba	<i>P-valor</i>
<b>Test de heterocedasticidad</b>	
White	0,16
Glejser	0,09
<b>Test de autocorrelación</b>	
Breusch-Godfrey	0,29
<b>Test de normalidad</b>	
Jaque Bera	0,14

Fuente: elaboración propia.

Los *p-valores* arrojados en los dos modelos afirman que los residuos cumplen con los supuestos de ruido blanco, dando así confiabilidad a los resultados obtenidos. Asimismo, se realiza la prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller sobre los residuales de los modelos, comprobándose que no son estimaciones espurias (*p-valor* de 0,29 y 0,54 para la demanda doméstica e industrial respectivamente). En la Tabla 8 se presenta un resumen con las elasticidades calculadas.

**Tabla 8. Elasticidades de corto y largo plazo<sup>47</sup> 2000-2011**

	Elasticidad precio de la demanda		Elasticidad ingreso de la demanda	
	Corto plazo	Largo plazo	Corto plazo	Largo plazo
<b>Energía doméstica</b>	-0,663244 ( $\beta_{11}$ )	-1,969509	0,002846 ( $\beta_{21}$ )	0,008451
<b>Energía industrial</b>	-0,475169 ( $\beta_{12}$ )	-0,905375	3,286153 ( $\beta_{22}$ )	6,261354

Fuente: elaboración propia.

Se observa que los signos de las dos ecuaciones estimadas para los consumos de energía eléctrica doméstica e industrial, se comportan de acuerdo a los fundamentos de la teoría económica.

<sup>47</sup> Las elasticidades de largo plazo se calcularon a partir de las elasticidades de corto plazo divididas por su respectivo coeficiente de ajuste (Gujarati, 2004; Guzmán *et al.*, 2011).

### 6.1 Elasticidades de corto plazo

Al observar los coeficientes estimados para corto plazo, que miden los cambios de magnitud de la demanda de energía ante los cambios en las variables explicativas del modelo de regresión, se encuentra, *ceteris paribus*, que para el mercado de demanda doméstica de la energía el valor de la elasticidad precio calculado es de -0,66, lo que indica que el servicio de la energía eléctrica en Colombia es inelástico, es decir, que la cantidad demandada por los hogares de todo el país disminuiría en 0,66 %, si el precio de la tarifa eléctrica se incrementa en un 1 %. A su vez, la elasticidad ingreso, afirma que el consumo de este servicio en los hogares aumentaría en 0,002 %, si el ingreso per cápita aumenta en 1 %, catalogándose así, como un servicio de carácter necesario (Tabla 8). En la demanda industrial del servicio de energía, su elasticidad indica que si el precio aumenta en 1 %, la cantidad demandada caerá en 0,48 %, comportándose como un bien inelástico; asimismo la elasticidad ingreso resulta ser de 3,29, clasificándose como un servicio de tipo normal. Estos resultados concuerdan con las investigaciones indicadas en la revisión de literatura del presente documento.

### 6.2 Elasticidades de largo plazo

Las elasticidades de largo plazo son definidas como variables para explicar las tendencias de la demanda en un amplio período de tiempo (siendo el resultado de ajustes frente a cambios de gustos, necesidades e ingresos de los agentes que consumen el bien o servicio). En el caso de la elasticidad precio de la energía, se obtiene que ante aumentos del 1 % en el precio, la demanda doméstica caería en 1,97 %, mientras la industrial disminuirá en 0,91 %. A su vez, se tiene que para la elasticidad ingreso, por cada aumento del 1 % en los ingresos de personas o empresas, la cantidad demandada aumentará en 0,008 % para el caso doméstico, siendo un servicio necesario, y crecerá 6,26 % para el caso industrial, comportándose como un servicio normal. Las elasticidades de sustitución para los dos segmentos de mercado dieron no significativas, dando a conocer el débil y poco impacto que tienen bienes sustitutos cercanos sobre el mercado agregado de la energía eléctrica en Colombia.

### 6.3 Impactos macroeconómicos del precio de la energía

Ahora, en lo referente a la estimación de los modelos VARX<sup>48</sup> y BVARX, se realizó para ambos un análisis de impulso-respuesta<sup>49</sup>, donde se estudiaron los efectos de un aumento de una desviación

---

<sup>48</sup> A partir de los criterios de información HQ y AIC, para la selección óptima de rezagos, se estableció que este VARX necesitaba de dos rezagos. A su vez, se utilizó la descomposición de Cholesky para su cálculo. Por otra parte, al aplicarse el test de normalidad multivariada, el *p-valor* arrojado fue de 0,0564, la prueba de autocorrelación Breusch-Godfrey dio un *p-valor* de 0,07, y la prueba de heterocedasticidad White tuvo un *p-valor* de 0,14. Con esto se define que los residuales del modelo tienen un comportamiento de ruido blanco al cumplir con todos los supuestos fundamentales.

estándar del crecimiento del precio de la energía sobre el crecimiento del Producto Interno Bruto y algunas otras variables macroeconómicas, junto con su causalidad en el sentido de Granger para entender si a partir de este sistema multivariado de series de tiempo, el comportamiento del PIB, está condicionado por la volatilidad del precio de la energía.

**Tabla 9. Impulsos-respuesta del VARX frecuentista y bayesiano a una innovación del crecimiento del precio de la energía**

Período trimestral	Crecimiento del PIB		Crecimiento del IPC		Crecimiento del índice de producción manufacturera		Crecimiento de la tasa de interés		Crecimiento de la demanda de energía		ITCR	
	VARX Frec.	VARX Bay.	VARX Frec.	VARX Bay.	VARX Frec.	VARX Bay.	VARX Frec.	VARX Bay.	VARX Frec.	VARX Bay.	VARX Frec.	VARX Bay.
1	-0,0064	-0,0004	-0,0312	0,0279	-0,1919	-0,9395	-0,0147	0,0101	-0,0036	-0,0001	-0,0097	0,0050
2	-0,0054	-0,0100	-0,0296	0,1651	-0,8598	-1,7848	-0,0041	0,0029	-0,0023	-0,0005	-0,0055	0,0051
3	-0,0080	-0,0096	-0,0903	0,0820	-0,8757	-0,7168	-0,0025	0,0005	-0,0009	-0,0008	-0,0074	-0,0024
4	-0,0055	-0,0005	-0,2049	-0,0466	-0,3368	-0,5183	-0,0145	-0,0035	-0,0010	-0,0009	0,0041	-0,0053
5	-0,0033	-0,0029	-0,2839	-0,0715	-0,4336	-0,4366	-0,0093	-0,0026	-0,0022	-0,0005	0,0011	-0,0040
6	-0,0005	0,0004	-0,1827	-0,0951	-1,0951	-0,4451	-0,0089	-0,0038	-0,0024	-0,0002	-0,0047	-0,0022
7	-0,0014	-0,0010	-0,1541	-0,1074	-1,1119	-0,3545	-0,0001	-0,0021	-0,0011	-0,0001	-0,0028	-0,0006
8	-0,0014	-0,0002	-0,2506	-0,1238	-0,2306	-0,3288	-0,0096	-0,0021	0,0010	-0,0001	0,0017	-0,0001
9	-0,0003	-0,0008	-0,3911	-0,1356	-0,0404	-0,2718	-0,0022	-0,0014	0,0004	-0,0001	0,0017	-0,0001
10	-0,0009	-0,0003	-0,3770	-0,1476	-0,7102	-0,2524	-0,0054	-0,0014	-0,0005	-0,0001	-0,0051	-0,0001
11	-0,0015	-0,0004	-0,3396	-0,1552	-0,6894	-0,2268	0,0009	-0,0010	0,0000	-0,0001	-0,0025	-0,0001
12	-0,0012	-0,0001	-0,3927	-0,1619	-0,0535	-0,2164	-0,0069	-0,0008	0,0010	0,0000	0,0032	0,0000

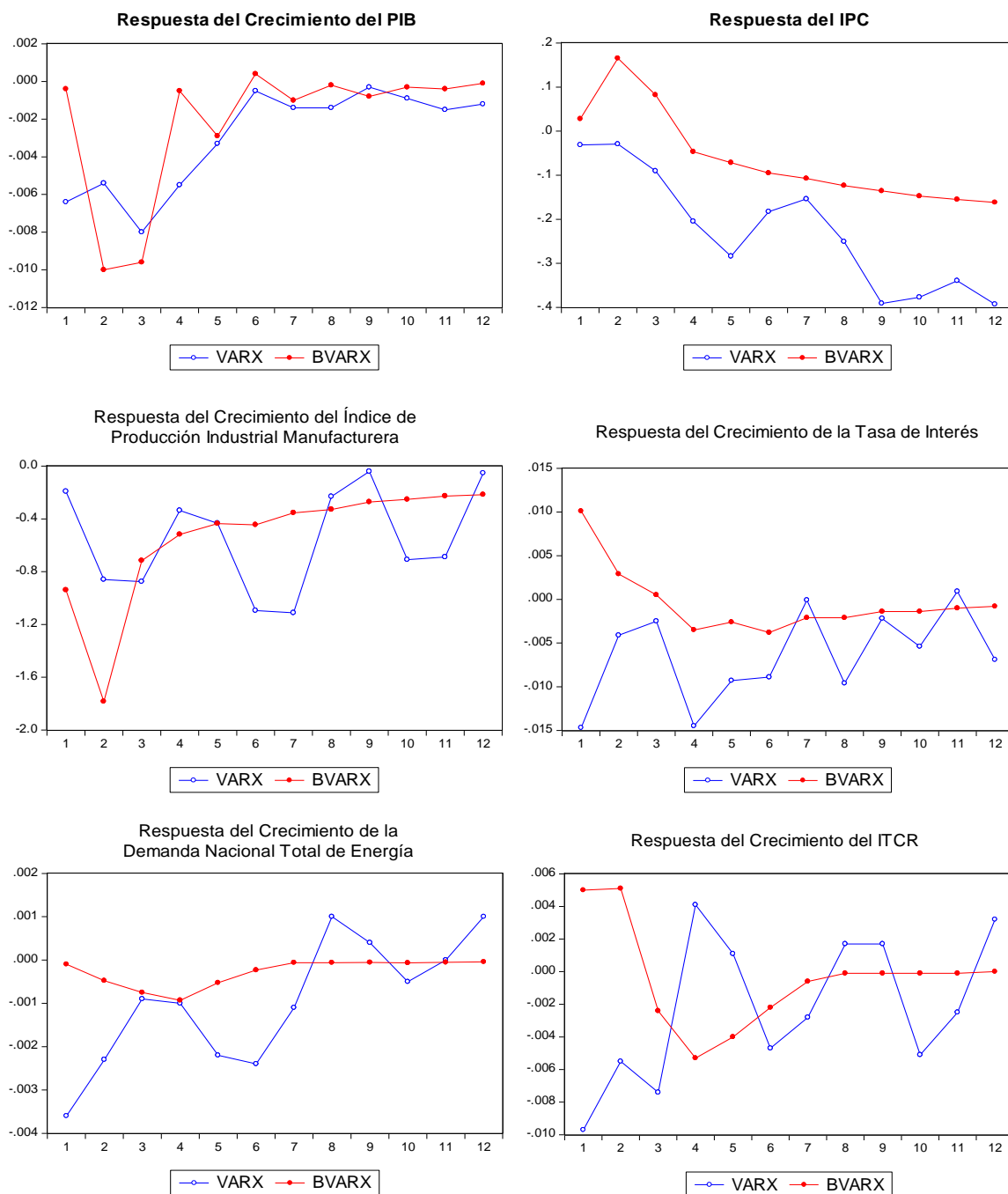
**Fuente:** elaboración propia.

Con base en la Tabla 9, un *shock* positivo en el precio de la energía eléctrica de una desviación estándar (20 %), reduce el crecimiento trimestral del PIB hasta en un 0,8 %, 9 meses después de ocasionada la innovación según el modelo VARX, y hasta en 1 % un semestre después de realizado el mismo choque según el BVARX, lo que equivale para este último, a una disminución aproximada superior a \$1,2 billones (año base 2005). Este efecto se estabiliza aproximadamente año y medio después de presentado el choque, representando así, la incidencia de la energía en el crecimiento económico, y por tanto su relevancia para el progreso y desarrollo de la nación.

Por otro lado, la demanda nacional total de energía disminuye conforme existe un aumento en el precio de la energía, siendo este efecto importante solo en el primer año de sucedido el alza (con menor intensidad en el BVARX), por lo que se confirma el signo de las elasticidades precio halladas en el apartado anterior. A su vez, se resalta la importancia de este servicio en el medio industrial, ya que el índice de producción manufacturera resulta gravemente afectado por la innovación ocurrida, decayendo bajo las dos funciones de impulso-respuesta hasta en una unidad.

<sup>49</sup> Basándose en el enfoque de Pesaran y Shin (1998), donde las funciones de impulso-respuesta no requieren de ortogonalización de las perturbaciones y son invariantes a la ordenación de las variables en el modelo VARX (Espinosa y Vaca, 2013).

**Figura 4. Funciones de impulsos-repuesta a una innovación del crecimiento del precio de la energía**



**Fuente:** elaboración propia.

En la Figura 4 se muestra que las respuestas al choque en el precio de la energía son similares (al tener una misma tendencia) en ambas metodologías, para todas las variables, a excepción del

crecimiento de la tasa de interés y del índice de tasa de cambio real, que en una primera parte (dos primeros trimestres) presentan valores positivos<sup>50</sup> en el modelo BVARX, mientras en el VARX siempre responden con valores negativos. Los resultados del enfoque bayesiano concuerdan más con la teoría económica, ya que el alza en los precios de la energía presiona a las industrias a aumentar su precio de mercado impactando positivamente a la inflación<sup>51</sup> (el IPC aumenta en más una unidad a partir del segundo período), por lo que la Banca Central aumentaría las tasas de interés para frenar un *boom* inflacionario. Por último, al aplicar el test de Granger<sup>52</sup> en el modelo VARX, se obtiene que a un nivel de significación del 5 %<sup>53</sup>, se da solo una causalidad en sentido de Granger y se refiere a la del crecimiento del precio de la energía al índice de producción manufacturera, entendiendo por ello que la primera variable contiene información relevante para predecir el comportamiento de la segunda, mostrando así la importancia del servicio de energía eléctrica para la demanda industrial colombiana.

**Tabla 10. Test de causalidad en el sentido de Granger**

	Variable dependiente			
	Crecimiento del precio de la energía		Crecimiento del PIB	
	Estadístico F	P-valor	Estadístico F	P-valor
<b>Crecimiento del PIB</b>	2,15486	0,0946	-	-
<b>Crecimiento del precio de la energía</b>	-	-	0,72315	0,5820
<b>IPC</b>	1,71510	0,1687	1,95331	0,1234
<b>Índice real de producción industrial manufacturera</b>	<u>3,16016</u>	<u>0,0256</u>	0,99007	0,4258
<b>Crecimiento de la demanda de energía</b>	0,44175	0,7776	0,33541	0,8522 <sup>54</sup>
<b>ITCR</b>	0,62040	0,6510	0,92525	0,4604

Fuente: elaboración propia.

<sup>50</sup> La apreciación de la moneda colombiana se debería al aumento en el IPC, y por ende, a incrementos en la inflación. De manera que frente a aumentos de los precios internos, disminuirá el ITCR, teniendo en cuenta que para el cálculo de éste último se contempla a los primeros en el denominador.

<sup>51</sup> Dado que la fórmula tarifaria convierte los costos de medición, liquidación, facturación, recaudo, atención al cliente y reclamación, en costos que dependen del consumo (UPME, 2004). En este sentido, algunos costos generados en la cadena de la energía se trasladan a los usuarios finales, viéndose así, incrementado el precio final de la energía.

<sup>52</sup> Esta prueba busca mirar si una variable “x” causa en el sentido de Granger a otra “y”, en el concepto de que “x” ayuda a mejorar el pronóstico de “y”, permitiendo saber si “x” posee información importante sobre el comportamiento futuro de “y” (Espinosa y Vaca, 2013).

<sup>53</sup> A un nivel de significación del 10 %, el crecimiento del precio de la energía causa en sentido Granger al crecimiento del PIB.

<sup>54</sup> En la relación inversa, la demanda total de energía sí causa en sentido Granger al PIB con un *p-valor* de 0,0235.

## **7. CONCLUSIONES**

En el presente trabajo se buscó analizar las elasticidades precio y elasticidades ingreso de corto y largo plazo del servicio público de la energía para Colombia a partir del año 2000, fecha referente al cambio de condiciones legales para pertenecer al tipo de usuarios regulados y no regulados. Al estimar los resultados mediante MCO, utilizando como base la ecuación de rezagos retardados de Marc Nerlove, los resultados arrojaron que para el sector doméstico la energía es un bien necesario y para el sector industrial un bien normal. Al revisar sus coeficientes frente a los hallados en épocas anteriores para el país, se puede afirmar que, en lo referente a los agentes domésticos, no se tienen cambios de consideración, aspecto que difiere para el sector industrial en sus elasticidades ingreso en el corto y largo plazo, que presentan valores mayores a 3, resultados atípicos en referencia a los trabajos aplicados para Colombia.

Además de ello, se estimó el impacto del precio de la energía sobre algunas de las principales variables macroeconómicas de la economía nacional; para ello, se utilizó una técnica estadística perteneciente a las series de tiempo multivariadas, VARX, desde un enfoque clásico y bayesiano. Entre los resultados de las estimaciones econométricas más importantes cabe mencionar que, ante aumentos del precio de la energía, el PIB reacciona negativamente decayendo su crecimiento hasta en un 1 %, a la vez que disminuyen el índice de producción industrial manufacturera (única variable que es causada en sentido de Granger por el precio de la energía) y la demanda nacional de energía, donde la innovación pierde su fuerza transcurridos aproximadamente 2 años desde el momento del *shock*.

En este sentido, se concluye la importancia del sector eléctrico en el progreso económico y social del país, al contemplar las incidencias del comportamiento del precio de la energía eléctrica tanto para las actividades diarias de los consumidores finales como para el proceso productivo adelantado por las industrias instaladas en el territorio nacional.

## **AGRADECIMIENTOS**

Los autores agradecen especialmente al profesor Munir Jalil Ph.D. por sus consejos y sugerencias en el transcurso de la investigación. Asimismo, agradecen los comentarios de los profesores Joan-Ramón Borrell Ph.D., Leonardo Duarte M.Sc., Yris Olaya Ph.D. y de los revisores anónimos de la Revista.

## REFERENCIAS

- Acuña, H. (2008). ¿Cambia el consumo eléctrico de los hogares cuando cambia el precio? Sugerencias para el diseño de un subsidio. *Documento de trabajo N° 2, Departamento de Estudios División Social, Ministerio de Planificación (Chile)*, 16 p.
- Alarco, G. (2009). Impactos macroeconómicos de los precios de los energéticos en México con un modelo de equilibrio general poskeynesiano. *Análisis Económico, XXIV, N° 56*, 7–35.
- APEX Consultores. (1985). *Estudio de proyección de demanda de Energía Eléctrica*. Bogotá, Colombia. 68 p.
- Arnberg, S. y Bjørner, T. (2007). Substitution between energy, capital and labour within industrial companies: A micro panel data analysis. *Resource and Energy Economics, 29 (2)*, 122–136.
- Arón, N. (2006). Impacto de cambios exógenos de precios del sector energético en Nuevo León. Un análisis de insumo-producto. *Región y Sociedad, XVIII, N° 36*, 37–67.
- Arthur, M., Bond, C. y Willson, B. (2012). Estimation of elasticities for domestic energy demand in Mozambique. *Energy Economics, Vol. 34 (2)*, 398–409.
- Asociación Nacional de Comercio Exterior (Analdex) y Clúster de Energía Eléctrica de la Cámara de Comercio de Medellín para Antioquia. (2009). *Propuesta de valor sectorial: Energía eléctrica, bienes y servicios conexos*. 42 p.
- Ballabriga, F., Álvarez, L. y Jareño, J. (1998). Un modelo macroeconómico BVAR para la economía Española: Metodología y resultados. *Servicio de Estudios Económicos, Banco de España, N° 64*, 125 p.
- Benavente, J., Galetovic, A., Sanhueza, R. y Serra, P. (2005). Estimando la demanda residencial por electricidad en Chile: El consumo es sensible al precio. *Cuadernos de Economía, 42*, 31–61.
- Bernanke, B., Gertler, M. y Watson, M. (2004). Reply: Oil shocks and aggregate macroeconomic behavior: The role of monetary policy. *Journal of Money, Credit and Banking, 36 (2)*, 287–291.
- Berndt, E. (1991). *The practice of econometrics: Classic and contemporary*. Cambridge, EEUU: MIT Press. 702 p.
- Bierens, H. (2004). VAR models with exogenous variables. *Working paper, Pennsylvania State University*, 6 p.
- Blanchard, O. y Galí, J. (2007). The macroeconomic effects of oil price shocks: Why are the 2000s so different from the 1970s?. *NBER Working Paper Series, N° 13368*, 77 p.
- Blümel, G., Espinoza, R. y Domper, M. (2009). Crecimiento económico, precios de la energía e innovación tecnológica. *Serie Informe Económico Instituto Libertad y Desarrollo, N° 206*, 24 p.
- Boonekamp, P. (2007). Price elasticities, policy measures and actual developments in household energy consumption – A bottom up analysis for the Netherlands. *Energy Economics, 29*, 133–157.
- Bouille, D. (2004). *Economía de la energía*. San Carlos de Bariloche, Argentina: IDEE/FB. 232 p.
- Carlstrom, C. y Fuerst, T. (2005). Oil prices, monetary policy, and counterfactual experiments. *Working Paper, Federal Reserve Bank of Cleveland, N° 10*, 25 p.
- Comisión de Regulación de Energía y Gas (CREG). (1995). *Resolución 24 de 1995*. 88 p.
- Deaton, A. (1990). Price elasticities from survey data: Extensions and Indonesian results. *Journal of Econometrics, 44 (3)*, 281–309.
- Departamento Nacional de Planeación -DNP- (2008). *Documento Conpes 3527. Política Nacional de Competitividad y Productividad*. Bogotá, Colombia: DNP. 87 p.

- Departamento Nacional de Planeación -DNP- (2010). *Documento Conpes 3668. Informe de seguimiento a la Política Nacional de Competitividad y Productividad Ley 1253 de 2008*. Bogotá, Colombia: DNP. 143 p.
- Doan, T., Litterman, R. y Sims, C. (1984). Forecasting and conditional projections using realistic prior distributions. *Econometric Reviews*, 3(1), 1–100.
- Econometría Ltda. (1982). *Modelo econométrico de proyecciones regionales y sectoriales de energía eléctrica en Colombia*. Bogotá, Colombia: Econometría Ltda. 42 p.
- Edelstein, P. y Kilian, L. (2007). Retail energy prices and consumer expenditures. *Centre for Economic Policy Research*, N° 6255, 67 p.
- Espinosa, O. y Vaca, P. (2013). ¿Existe relación alguna entre déficit fiscal e inflación? El antes y el después de la independencia del Banco de la República en Colombia. *Econografos N° 52, Centro Editorial FCE, Universidad Nacional de Colombia*, 35 p.
- Fisher, F. y Kaysen, C. (1962). *A study in econometrics: The demand for electricity in the United States*. Amsterdam, Holland: North Holland Publishing Company, 190 p.
- Galetovic, A. y Muñoz, C. (2010). La elasticidad de la demanda por electricidad y la política energética. *El Trimestre Económico*, LXXVII (2), N° 306, 313–341.
- García, J. (2012). Impacto del costo de la energía eléctrica en la economía chilena: Una perspectiva macroeconómica. *Documento de trabajo. Facultad de Economía y Negocios, Universidad Alberto Hurtado*, 29 p.
- García, J., Gaviria, A. y Salazar, L. (2011). Determinantes del precio de la energía eléctrica en el mercado no regulado en Colombia. *Revista Ciencias Estratégicas*, 19, N° 26, 225–246.
- Greene, W. (2011). *Econometric analysis*. 7ª ed. New York, EE.UU.: Prentice Hall. 1232 p.
- Gujarati, D. (2004). *Econometría*. México D.F., México: McGraw Hill Interamericana. 972 p.
- Gutiérrez, A. (2011). Elasticidad precio-demanda de los usuarios no regulados en Colombia. *Tesis de Maestría en Economía, Universidad EAFIT*, 51 p.
- Guzmán, E., Rodríguez, J., Hernández, J. y Rebollar, S. (2011). Consumo de energía eléctrica para uso doméstico en San Juan del Río, Querétaro. *Análisis Económico*, XXV, N° 61, 139–151.
- Hausman, J. (1985a). The econometrics of nonlinear budget sets. *Econometrica*, N° 53 (6), 1255–1282.
- Hausman, J. (1985b). Taxes and labor supply. En: Auerbach, A., y Feldstein, M. (Eds.). *Handbook of Public Economics, Vol. 1*. Amsterdam, Holland: North-Holland. 484 p.
- Hondroyannis, G. (2004). Estimating residential demand for electricity in Greece. *Energy Economics*, 26 (3), 319–334.
- Houthakker, H. (1951). Electricity tariffs in theory and practice. *The Economic Journal*, 61, N° 241, 1–25.
- Huq, S. y Dynes, G. (1982). The price elasticity of the residential demand for electricity in the Vepco service area. *Energy*, 2, N° 10, 829–837.
- Jaramillo, P. (2009). Estimación de VAR bayesianos para la economía chilena. *Revista de Análisis Económico*, 24(1), 101–126.
- Jones, D. y Leiby, P. (1996). The macroeconomic impacts of oil price shocks: A review of literature and issues. *Draft, Oak Ridge National Laboratory*, 33 p.
- Killian, L. (2008). The economic effects of energy price shocks. *Journal of Economic Literature*, 46 (4), 871–909.



- Lakshmanan, T. y Anderson, W. (1980). Residential energy demand in the United States: A regional econometric analysis. *Regional Science and Urban Economics*, 10 (3), 371–386.
- Leduc, S. y Sill, K. (2001). A quantitative analysis of oil-price shocks, systematic monetary policy, and economic downturns. *Working Paper, Federal Reserve Bank of Philadelphia*, N° 9, 33 p.
- Liddle, B. (2012). The importance of energy quality in energy intensive manufacturing: Evidence from panel cointegration and panel FMOLS. *Energy Economics*, 34 (6), 1819–1825.
- Lijesen, M. (2007). The real-time price elasticity of electricity. *Energy Economics*, 29, 249–258.
- Litterman, R. (1979). Techniques for forecasting with vector autoregressions. *Working Paper, Federal Reserve Bank of Minneapolis*, N° 115, 135 p.
- Litterman, R. (1984). Forecasting and policy analysis with bayesian vector autoregression models. *Federal Reserve Bank of Minneapolis, Quarterly Review*, 8 (4), 30–41.
- Lozano, I. y Rincón, H. (2010). Formación de las tarifas eléctricas e inflación en Colombia. *Borradores de Economía, Banco de la República*, N° 634, 47 p.
- Lütkepohl, H. (2005). *New introduction to multiple time series analysis*. Cambridge, EEUU: Springer, 764 p.
- Maddock, R., Castaño, E. y Vella, F. (1992). Estimating electricity demand: The cost of linearising the budget constraint. *The Review of Economics and Statistics*, 74 (2), 350–354.
- Medina, C. y Morales L. (2007). Demanda por servicios públicos domiciliarios en Colombia y subsidios: Implicaciones sobre el bienestar. *Borradores de Economía, Banco de la República*, N° 467, 38 p.
- Mendoza, J. (2010). Estimación de la demanda de energía eléctrica de la empresa Electricaribe S.A. de la ciudad de Santa Marta, durante el período comprendido entre 1998-2006. *Tesis de Maestría en Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Colombia*, 121 p.
- Ministerio de Minas y Energía, -Minminas- (2011). Sector energía eléctrica. En: *Memorias al Congreso de la República 2010-2011*. (pp. 146–190). Bogotá, Colombia: Minminas.
- Nerlove, M. (1958). Distributed lags and estimation of long-run supply and demand elasticities: Theoretical considerations. *American Journal of Agricultural Economics*, 40 (2), 301–310.
- Pérez, J. y Acosta, C. (1987). Modelos de demanda residencial e industrial para Colombia y estimaciones de elasticidades precio. *Desarrollo y sociedad*, 19, N°1, 67–94.
- Perilla, J. (2010). El impacto de los precios del petróleo sobre el crecimiento económico en Colombia. *Revista de Economía del Rosario*, 13, N° 1, 75–116.
- Pesaran, M. y Shin, Y. (1998). Generalized impulse response analysis in linear multivariate models. *Economics Letters*, 58 (1), 17–29.
- Quilis, E. (2004). BayVAR. Una librería Matlab para el análisis VAR Bayesiano. *Instituto Nacional de Estadística*. 25 p.
- Ramírez, A. y Londoño, E. (2008). Implicaciones de bienestar en el sector residencial de la unificación tarifaria en el servicio de electricidad en el departamento de Antioquia. *Working Paper, Universidad EAFIT*, 34 p.
- Ramírez, G. (1991). La demanda de energía eléctrica en la industria colombiana. *Desarrollo y Sociedad*, 27, 121–139.
- Sánchez, E. (2010). Shocks del precio del petróleo y su impacto en el crecimiento y la inflación de la economía colombiana. *Tesis de Maestría en Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Colombia*, 87 p.

- Sandoval, A. (2004). Monografía del sector de electricidad y gas colombiano: Condiciones actuales y retos futuros. *Archivos de Economía, DNP, N° 272*, 102 p.
- Santa María, M., Von Der Fehr, N., Millán, J., Benavides, J., Gracia, O. y Schutt, E. (2009). El mercado de la energía eléctrica en Colombia: Características, evolución e impacto sobre otros sectores. *Cuadernos de Fedesarrollo*, 30, 53 p.
- Seale, J., Walker, W. y Kim, I. (1991). The demand for energy: Cross-country evidence from the Florida model. *Energy Economics*, 12 (1), 33–40.
- Sims, C. (1980). Macroeconomics and reality. *Econometrica*, 48 (1), 1–48.
- Sims, C. y Zha, T. (1998). Bayesian methods for dynamic multivariate models. *International Economic Review*, 39 (4), 949–968.
- Smith, V. (1980). Estimating the price elasticity of US electricity demand. *Energy Economics*, 2 (2), 81–85.
- Taylor, L. (1979). On modelling the residential demand for electricity by time-of-day. *Journal of Econometrics*, 9 (1-2), 97–115.
- Todd, R. (1984). Improving economic forecasting with bayesian vector autoregression. *Federal Reserve Bank of Minneapolis, Quarterly Review*, 8 (4), 18–29.
- Türkekul, B. y Unakitan, G. (2011). A co-integration analysis of the price and income elasticities of energy demand in Turkish agriculture. *Energy Policy*, 39 (5), 2416–2423.
- UPME (2003). *Plan indicativo de expansión de cobertura del servicio de energía eléctrica*. Bogotá, Colombia: UPME. 98 p.
- UPME (2004). *Una visión del mercado eléctrico colombiano*. Bogotá, Colombia: UPME. 110 p.
- UPME (2010a). *Plan indicativo de expansión de cobertura de energía eléctrica 2010-2014 (Preliminar)*. Bogotá, Colombia: UPME. 110 p.
- UPME (2010b). *Plan de expansión de referencia Generación – Transmisión 2010-2024*. Bogotá, Colombia: UPME. 299 p.
- Urbiztondo, S. y Rojas, J. (2005). La reforma del sector eléctrico en Colombia: Breve análisis y crítica constructiva. *Documento de trabajo, Fundación de Investigaciones Económicas Latinoamericanas, N° 85*, 38 p.
- Vélez, C., Botero, J. y Yáñez, S. (1991). La demanda de energía de electricidad: Un caso colombiano. 1970-1983. *Lecturas de Economía*, 34, 149–189.
- Wills, J. (1981). Residential demand for electricity. *Energy Economics*, 3 (4), 249–255.
- XM (2012). *Informe de administración y operación del mercado 2011*. Medellín, Colombia: XM. 99 p.
- Yoo, S. y Kwak, S. (2009). Electricity consumption and economic growth in seven South American countries. *Energy Policy*, 38 (1), 181–188.
- Zachariadis, T. y Pashourtidou, N. (2007). An empirical analysis of electricity consumption in Cyprus. *Energy Economics*, 29, 183–198.
- Zapata, J. (2011). Impacto del PIB, del gas natural y de los precios de la electricidad, en el Consumo de Energía Eléctrica en Colombia. *Tesis de Maestría en Economía, Universidad EAFIT*, 57 p.
- Zárate, H., Rodríguez, N. y Marín, M. (2012). El tamaño de las empresas y la transmisión de la política monetaria en Colombia: Una aplicación con la encuesta mensual de expectativas económicas. *Borradores de Economía, Banco de la República, N° 721*, 24 p.

## ANEXO 1. MÉTODO MATRICIAL DE CÁLCULO

El cálculo se realizó mediante el método matricial descrito a continuación:

- i) Si se tienen  $k$  datos anuales y se quieren mensualizar para obtener en total  $12k$ , entonces se crea una matriz  $C$ , de dimensión  $(k) \times (12k)$ , donde en la primera fila, las entradas  $a_{1,1}$  a  $a_{1,12}$  se colocan unos (1), y de resto en la fila 1 se colocan ceros (0), en la fila 2, las entradas  $a_{2,13}$  a  $a_{2,24}$  se colocan unos (1), y de resto en esta fila se ponen ceros (0), y así sucesivamente hasta que en la fila  $k$  se tiene que las entradas  $a_{k,1}$  a  $a_{k,k-12}$  son ceros (0), y de la entrada  $a_{k,k-11}$ , a  $a_{k,k}$  se sitúan unos (1).
- ii) Luego, se crea una matriz  $\tilde{N}$  de dimensión  $(12k-1) \times (12k)$ , donde su diagonal  $(a_{i,i})$  es igual a -1 en todas sus entradas, y la diagonal superior que le sigue (correspondiente a las entradas  $a_{i,i+1}$ ) es igual 1 en todas sus entradas.
- iii) Se multiplica la matriz  $\tilde{N}$  traspuesta ( $\tilde{N}^T$ ) por  $\tilde{N}$ , cuyo resultado se denomina  $W$ , que posee dimensión  $(12k) \times (12k)$ .
- iv) Luego se crea una matriz conformada por  $\begin{bmatrix} W_{(12k) \times (12k)} & C^T_{(12k) \times (k)} \\ C_{(k) \times (12k)} & 0_{(k) \times (k)} \end{bmatrix}$ . A esta “gran matriz” de dimensión  $(13k) \times (13k)$  se le calcula la inversa (por lo que debe tener  $\det \neq 0$ ).
- v) El siguiente paso es crear un vector columna de datos anuales  $(13k) \times (1)$ , donde las primeras  $(12k)$  entradas son iguales a 0, y las restantes  $k$  entradas (de  $a_{12k+1,1}$  a  $a_{13k,1}$ ) tienen en orden cronológico el valor de los datos anuales.
- vi) Finalmente, se multiplica la inversa de la “gran matriz  $(13k) \times (13k)$ ” por el vector columna  $(13k) \times (1)$  del punto v), obteniendo de esta forma, un nuevo vector columna de dimensiones  $(13k) \times (1)$ , en donde las primeras  $12k$  entradas (de  $a_{1,1}$  a  $a_{12k,1}$ ) se encuentran los datos mensualizados.

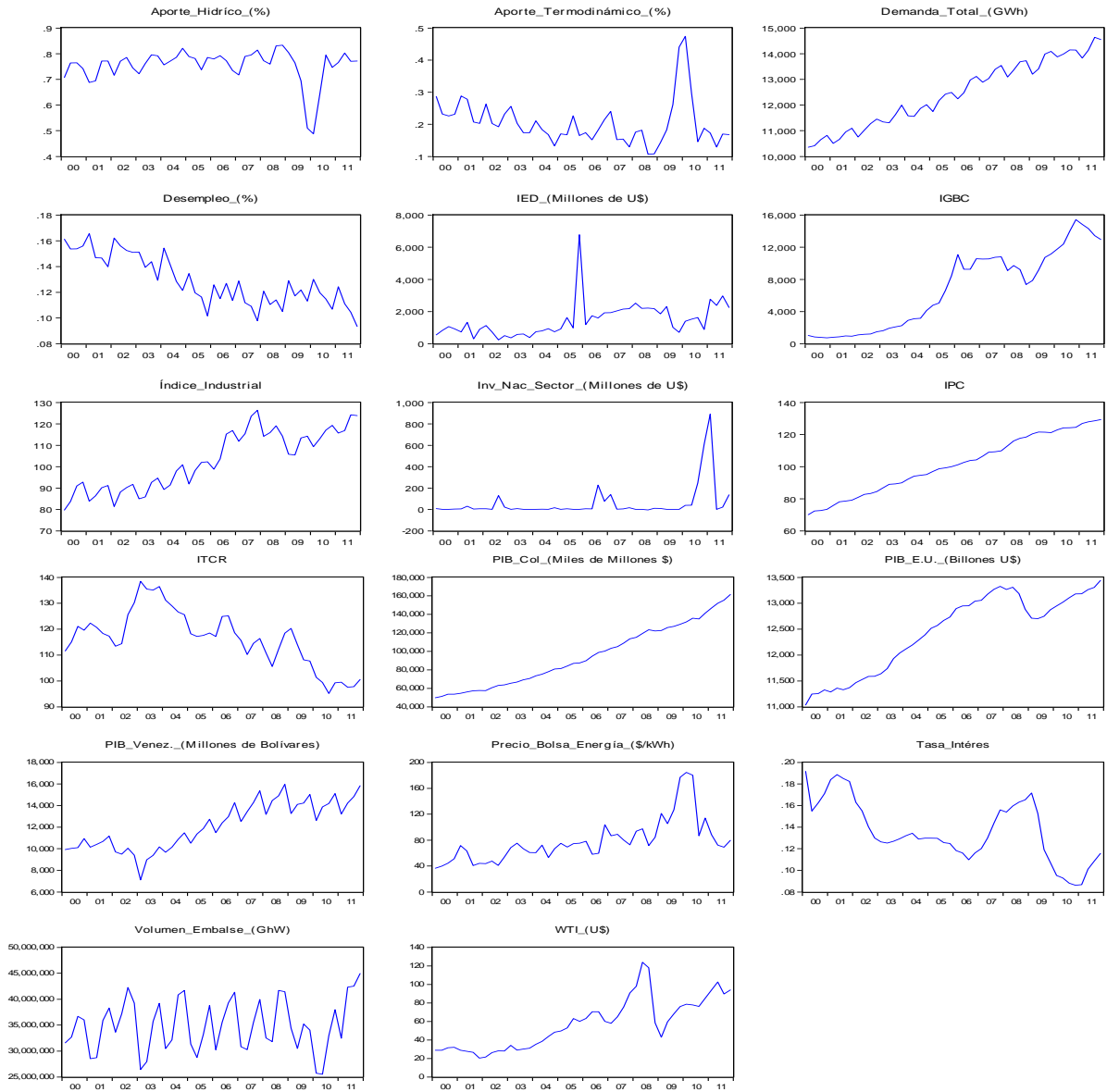
## ANEXO 2. GRÁFICAS DE LAS SERIES DE TIEMPO MODELADAS

### Series mensuales utilizadas para las ecuaciones de demanda



Fuente: elaboración propia.

## Series trimestrales utilizadas en los modelos VARX y BVARX



**Fuente:** elaboración propia.

## **Volumen 16 (diciembre de 2013)**

### **Editorial**

Páginas 3–4

### **Detectando diferencias en la medición de la calidad del resultado: evidencia empírica para empresas españolas**

*Detecting Differences on the Earning Quality Measurement: Empirical Evidence on Spanish Firms*

Ferrer García, Cristina; Láinez Gadea, José Antonio

Páginas 5–28

### **Aplicación de una metodología difusa a la negociación de la reforma laboral**

*Methodology Based on Fuzzy Logic Techniques for Searching a Solution Reached by Consensus about the Labour Reform*

Lozano Gutiérrez, M.<sup>a</sup> Carmen; Fuentes Martín, Federico

Páginas 29–46

### **A Comparison between General Population Mortality and Life Tables for Insurance in Mexico under Gender Proportion Inequality**

*Una comparación entre la mortalidad de la población general y las tablas de vida de los seguros en México ante porcentajes desiguales de género*

Ornelas, Arely; Guillén, Montserrat

Páginas 47–67

### **La escasa relevancia de la información contable sobre los activos intangibles en la valoración de las empresas innovadoras españolas: el caso de los sectores farmacéutico y biotecnológico**

*The Low Impact of Accounting Information about Intangible Assets in the Valuation of Innovative Spanish Companies: The Case of Pharmaceutical and Biotechnology Industry*

Rubio Martín, Gracia; Rodríguez Paredes, Mercedes; Maroto Acín, Juan Antonio

Páginas 68–94

### **Comparación de los modelos formativo, reflexivo y de antecedentes de evaluación estudiantil del servicio de docencia**

*Comparison of Formative, Reflective, and Antecedents Models of Students Evaluation of Teaching Service*

Valdivieso Taborga, Carlos Eduardo

Páginas 95–120

### **The Compound DGL/Erlang Distribution in the Collective Risk Model**

*La distribución compuesta DGL/Erlang en el modelo de riesgo colectivo*

Gómez Déniz, Emilio; Calderín Ojeda, Enrique

Páginas 121–142

**Recuperación de información automática de ofertas de empleo: estudio de las competencias de los profesionales de recursos humanos en el mercado de trabajo español**

*Automatic Information Retrieval of Job Offers: Case Study on Competencies of HR Professionals in Spanish Labor Market*

Valencia García, Olga

Páginas 143–164

**Ecuaciones diferenciales y en diferencias aplicadas a los conceptos económicos y financieros**

*Differential and Difference Equations Applied to Economic and Financial Concepts*

Tenorio Villalón, Ángel F.; Martín Caraballo, Ana M.; Paralera Morales, C.; Contreras Rubio, I.

Páginas 165–199

**Predicción de quiebras empresariales en economías emergentes: uso de un modelo logístico mixto**

*Bankruptcy Prediction in Emerging Economies: Use of a Mixed Logistic Model*

Caro, Norma Patricia; Díaz, Margarita; Porporato, Marcela

Páginas 200–215

**Elasticidades de demanda por electricidad e impactos macroeconómicos del precio de la energía eléctrica en Colombia**

*Elasticity of Electricity Demand and Macroeconomics Impacts of Electricity Price in Colombia*

Espinosa Acuña, Óscar A.; Vaca González, Paola, A.; Ávila Forero, Raúl, A.

Páginas 216–249