REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (22). Páginas 139–163.
Diciembre de 2016. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
www.upo.es/revistas/index.php/RevMetCuant/article/view/2343

Metodología para elaborar leyes de posibilidad de retirada del cliente: una aplicación al sector del vestido

Ortigosa Hernández, Mauricio
Facultad de Economía y Negocios
Universidad Anáhuac México (México)
Correo electrónico: mauricio.ortigosa@anahuac.mx

Gil Lafuente, Anna María
Departamento de Economía y Organización de Empresas
Universidad de Barcelona (España)
Correo electrónico: amgil@ub.edu

RESUMEN

El presente documento pone a prueba en el sector del vestido en el centro del país, una metodología basada en la teoría de la incertidumbre y los subconjuntos borrosos para construir leyes de posibilidad de retirada del cliente con la empresa, con tan sólo la opinión subjetiva de expertos. La aportación del presente trabajo permite obtener un camino alternativo cuando no es posible contar con la información requerida por los modelos identificados en la literatura basados en principios derivados de las leyes del azar, incluso métodos heurísticos. Los resultados muestran la utilidad de los conceptos borrosos en un problema donde la incertidumbre en relación a la permanencia del cliente se hace evidente, permitiendo obtener un elemento necesario (tiempo), cuando se requiera medir el valor econmico del cliente (*Customer Lifetime Value: CLV*) en el campo de la incertidumbre.

Palabras claves: incertidumbre; números borrosos; subconjunto aleatorio borroso; duración del cliente; distancia de Hamming; método heurístico.
Clasificación JEL: C60; C65; M31.
MSC2010: 03E72; 60A86; 68T20; 68T37; 90B60; 91B42.

Artículo recibido el 20 de febrero de 2016 y aceptado el 31 de octubre de 2016.

A Methodology to Elaborate Laws of Possibilities in the Retreat of a Client: An Application to the Dress Sector

ABSTRACT

The current work tests, in the dress sector in the center of the country, a methodology based in the theory of uncertainty and the fuzzy subsets, in order to build laws of possibilities for the retreat of clients only with the subjective opinion given by experts. The contribution of the present work allows to obtain an alternative path when it is not possible to get the required information by the models identified in the literature based in principles derived of the random laws even from heuristic methods. The results show the utility of fuzzy concepts in a problem where the uncertainty in relation to the permanence of the client is evident and allows to obtain a valuable element (time), when the Customer Lifetime Value (CLV) is required to be measured in the field of uncertainty.

Keywords: uncertainty; fuzzy numbers; fuzzy random subset; customer permanence; Hamming distance; heuristic method.
JEL classification: C60; C65; M31.
MSC2010: 03E72; 60A86; 68T20; 68T37; 90B60; 91B42.

1. INTRODUCCIÓN

En marketing, en las últimas décadas se ha despertado el interés por estudiar la duración o vida activa de los clientes en una empresa. Dicho elemento forma tan sólo una parte de otras variables tales como momentos de compra o transacciones, volumen de compra entre otros, que son necesarios para calcular el valor (económico) del cliente *(Customer Lifetime Value: CLV)*. Si la relación entre el cliente y la empresa es a través de un contrato o convenio, la incertidumbre en relación a la vigencia del cliente como un cliente activo o "vivo" es casi inexistente, por tanto, vamos a tratar la permanencia del cliente bajo el esquema no contractual. En estos casos, la incertidumbre de la permanencia del cliente con la empresa se hace evidente, ya que no requiere dar aviso en caso de convertirse en cliente inactivo o "muerto".

En la revisión de la literatura se ha observado que el estudio de la permanencia del cliente con la empresa se ha abordado desde diferentes ópticas. En la presente investigación nos hemos limitado en revisar los esquemas no contractuales. Las investigaciones sobre estos temas han tenido considerables avances; uno de los pioneros en proponer un modelo para calcular la permanencia del cliente con la empresa fue Schmittlein *et al.* (1987) con el modelo Pareto/NBD. El nombre del modelo responde al comportamiento de compra que experimenta un cliente mientras se encuentra activo o "vivo" con la empresa, es decir, en este modelo las compras siguen una Distribución Binomial Negativa (NBD) y las "muertes" o pérdidas de clientes siguen una distribución de Pareto.

Reinartz y Kumar (2000), Reinartz y Kumar (2003), Fader *et al.* (2005) y Abe (2009) han desarrollado modificaciones al modelo de Schmittlein *et al.* (1987) incorporando nuevos elementos. Por su parte, Wübben y Von Wangenheim (2006) realizaron un estudio comparativo entre los modelos estocásticos desarrollados por Schmittlein *et al.* (1987), Schmittlein y Peterson (1994), Fader *et al.* (2005) y un modelo heurístico. Los resultados mostraron que los modelos estocásticos son mejores predictores para el número de transacciones o compras comparado con el modelo heurístico. No obstante, el modelo heurístico funciona mejor para predecir si un cliente es activo o no en una fecha futura con tan sólo analizar la "reciente última compra".

Neslin *et al.* (2006) mencionan la importancia de estudiar los modelos de gestión de rotación de clientes ya que nos ayudan a identificar clientes que son muy propensos a la deserción, en cuyo caso, la empresa debe realizar un esfuerzo de retención más focalizado en ellos y dejar de hacer dicho esfuerzo en otros clientes que sean menos propensos a la deserción. Neslin *et al.* (2006) llevaron a cabo un estudio donde midieron el nivel de precisión con diferentes modelos para predecir la pérdida de clientes. Los resultados muestran hallazgos relevantes: los métodos son importantes; aun habiendo diferencias significativas en la precisión de las predicciones al calibrar los modelos utilizados, los resultados son consistentes a lo largo del tiempo *(staying power)*. Los autores anteriores mencionan que los creadores de modelos predictivos para estimar la vida "activa" de los clientes, utilizan diferentes enfoques metodológicos. En este documento, no será la excepción ya que se utilizan herramientas basadas en la teoría de la incertidumbre y subconjuntos borrosos.

En las últimas décadas, un reducido grupo de investigadores han permitido una nueva reorientación al quehacer científico, surgiendo algunos trabajos cuya base se halla en la teoría de la incertidumbre y subconjuntos borrosos, que en otros campos de la gestión de empresas han permitido un positivo avance en los desarrollos formales. Por las razones anteriores, vamos a plantear una metodología alternativa para resolver el problema de estimar la retirada o el período de vida de un cliente en un esquema no contractual apoyado en los mismos principios. La aportación del presente trabajo radica en el hecho de construir un camino alternativo cuando no contamos con información histórica suficiente que nos permita utilizar los modelos contemplados en la revisión de la literatura tales como el modelo Pareto/NBD, el modelo BG/NBD o el modelo bayesiano jerárquico, entre otros, ya que se basan en información histórica lo que permite utilizar principios derivados de las leyes del azar y todos los razonamientos que con ellas se relacionan.

Para desarrollar lo anterior, se presenta una propuesta metodológica, considerada posiblemente por varios autores como un método heurístico, ya que tratamos de construir un camino alternativo a la solución del problema de estimar la retirada del cliente con un mínimo de información, basada en la percepción de un grupo de personas a las que llamamos expertos por su conocimiento y experiencia sobre el tema. La finalidad es construir un número aleatorio borroso a partir de la opinión agregada de un grupo de expertos, teniendo como producto final una herramienta a la que llamamos "ley de posibilidad", que permita a cada cliente nuevo que llega a la empresa, realizar una estimación de su retirada basada en dicha ley y el uso de dos operadores (máximo y mínimo), que es una valuación para tomar la posición más pesimista ante la incertidumbre. Ponemos a prueba dicha metodología con "expertos" en el sector del vestido: específicamente consultamos empresas que trabajan la línea de producto de uniformes para las empresas.

2. ELEMENTOS PREVIOS AL DESARROLLO DE LA METODOLOGÍA PROPUESTA

Mostramos algunos modelos que son representativos del campo que se ha trabajado previamente sobre la permanencia del cliente con la empresa.

Uno de los pioneros en proponer un modelo para calcular la permanencia del cliente fue Schmittlein *et al.* (1987) con el modelo Pareto/NBD. La aportación central de este modelo es calcular la probabilidad de que un cliente se encuentre activo dado su patrón de compra:

P(El cliente este activo / Información de compra)

Para su aplicación, el modelo requiere de la estimación de ciertos parámetros, en general no fáciles de estimar. Schmittlein y Peterson (1994) validaron empíricamente dicho modelo y sus aplicaciones se han extendido de forma exitosa.

El modelo Pareto/NBD al responder a la pregunta ¿cuáles clientes individuales tienen más probabilidades de ser clientes activos o inactivos para un período futuro?, Reinartz y Kumar (2000) aplicaron dicho modelo para dar respuesta a varias interrogantes sobre la rentabilidad del cliente a largo plazo en relaciones no contractuales. Los mismos autores, Reinartz y Kumar (2003), desarrollaron, en un contexto no contractual, un marco donde incorporan la rentabilidad proyectada de los clientes en el cálculo de la duración de vida, identificando los factores que pueden explicar la variación en la duración de vida rentable. Para lograr lo anterior, los autores proponen dos etapas: primero estiman la duración de vida del cliente con la estructura RFM *(Recency, Frequency, and Monetary Value*) utilizando el modelo Pareto/NBD y, en una segunda etapa, utilizan un modelo *hazard* proporcional para conectar aquellos factores que puedan explicar la duración de vida rentable del cliente.

El modelo Pareto/NBD, a pesar de su demostrable uso, su complejidad al tener que estimar ciertos parámetros, hace que su aplicación no sea fácil en situaciones cotidianas. Por las razones anteriores, Fader *et al.* (2005) proponen un modelo alternativo BG/NBD muy similar al anterior pero más sencillo. Las iniciales responden a las distribuciones de probabilidad involucradas: Beta Geométrica y Distribución Binomial Negativa (NBD). Los autores anteriores mencionan que aunque gran parte de las aplicaciones son iguales, la diferencia radica básicamente al suponer que el cliente puede convertirse en inactivo o “muerto” después de cualquier compra, lo que ocasiona el cambio a la función Beta Geométrica; en cambio, el modelo Pareto/NBD asume que el cliente puede convertirse en inactivo en cualquier momento en el tiempo. De esta forma la probabilidad a calcular es ligeramente diferente.

Otra de las variaciones que ha tenido el modelo Pareto/NBD, fue realizado por Abe (2009), donde flexibiliza varios supuestos del modelo original e incorpora la heterogeneidad del cliente a través de la estimación de parámetros individuales específicos con un marco bayesiano jerárquico. La simplicidad del modelo bayesiano jerárquico permite ser un modelo de fácil estimación; no obstante, una debilidad de dicho modelo es el no poder trabajar con datos dentro del azar y por tanto, no podemos obtener preguntas tales como ¿cuál es la probabilidad de que un cliente se encuentre activo o vivo? o calcular el número esperado de compras futuras. De hecho, Abe (2009) menciona que ambos modelos (Pareto/NBD y bayesiano jerárquico) pueden complementarse uno al otro ya que el primero de ellos puede describir respuestas de clientes de forma agregada y el segundo puede ser efectivo en el *marketing* personalizado.

Por su parte, Fader *et al.* (2010) realizaron una analogía directa al modelo Pareto/NBD dando como resultado el modelo Beta Geométrico/Beta Bernoulli (BG/BB). Este modelo se orienta a analizar situaciones no contractuales, donde las oportunidades para realizar compras ocurren en intervalos regulares fijos o situaciones donde las compras están asociadas a eventos específicos. En definitiva, el modelo BG/BB permite captar bajo el esquema de compras discretas dos comportamientos: patrones de compra futura mientras se encuentra "vivo" el consumidor y el tiempo hasta donde el cliente se aleja de la empresa. Los autores anteriores mencionan varias ventajas al utilizar dicho modelo entre las que destacan su sencilla estructura en la base de datos, su sencilla aplicación y la existencia de menos restricciones comparados con el modelo Pareto/NBD.

En la introducción se menciona que Wübben y Von Wangenheim (2006) realizaron un estudio comparativo entre los modelos estocásticos clásicos y un modelo heurístico; los resultados mostraron que los modelos estocásticos son mejores predictores para el número de transacciones o compras. No obstante, el modelo heurístico funciona mejor para predecir si un cliente es activo o no en una fecha futura con tan sólo analizar la reciente última compra.

Neslin *et al.*, (2006) mencionan la importancia de estudiar los modelos de gestión de rotación de clientes utilizando diferentes enfoques metodológicos. Tan sólo como un ejemplo de las diferentes metodologías que existen en la literatura, Tamaddoni Jahromi *et al.* (2010) llevaron a cabo un estudio empírico en la industria de la telefonía móvil bajo la modalidad de prepago, es decir, en un contexto no contractual. El estudio tuvo como objetivo desarrollar un modelo predictivo para la deserción o muerte de los clientes utilizando un modelo asistido por computadora en dos etapas: la primera de agrupación, utilizando información RFM *(Recency, Frequency, and Monetary Value)* de los clientes para formar cuatro grupos y una definición de "cliente inactivo o muerto" en cada grupo, y la segunda etapa, llamada de clasificación, para predecir en cada grupo la deserción o muerte de los clientes, a través de un algoritmo bajo el esquema de árbol de decisiones.

La importancia de analizar los diferentes enfoques metodológicos para estudiar la vida activa de los clientes, se atribuye al hecho de que el tiempo o permanencia del cliente con la empresa es un componente indispensable para poder calcular el valor (económico) del cliente (CLV). Ejemplo de lo anterior son los trabajos que han realizado autores tales como Figini (2010), Lu (2003) o Neslin *et al.* (2006), entre otros, donde han desarrollado diversas propuestas sobre el análisis de sobrevivencia para estimar la permanencia del cliente, y con ello poder calcular el CLV. Otros ejemplos son los modelos ya mencionados en el presente documento y utilizados por Reinartz y Kumar (2000) y Reinartz y Kumar (2003). Por lo anterior, vamos a proponer una metodología, dentro del campo de la incertidumbre, que permita construir una herramienta para estimar la retirada del cliente con la empresa, en aquellos casos donde no contemos con información histórica que permita utilizar los principios derivados de las leyes del azar, ni los razonamientos que con ellas se relacionan, es decir, con modelos probabilísticos, lo que implica que gran parte de los esquemas descritos anteriormente no serían aplicables por falta de información.

3. PROPUESTA METODOLOGÍA

3.1. Noción de subconjunto borroso y número borroso

Antes de presentar la metodología, consideramos necesario recordar la noción de subconjunto borroso y número borroso. Estos conceptos tienen su origen en la lógica borrosa, donde a diferencia de la lógica booleana o binaria en donde sólo se aceptan 2 niveles de valuación (falso con cero y verdadero con uno), en la lógica borrosa, se dan matices o niveles de verdad, dando lugar a una lógica más cercana a la realidad. En este caso, los valores de valuación se encuentran en el intervalo [0,1] y se sostiene por el "principio de simultaneidad gradual" presentado en el Congreso Internacional SIGEF de Buenos Aires por Gil Aluja (1996):

> "Una proposición puede ser verdadera y falsa a condición de asignar un grado a su verdad y un grado a su falsedad."

Con este recordatorio, podemos construir lo que llamamos un subconjunto borroso. Esa pertenencia se puede ir valuando para cada uno de los atributos, propiedades, características, o cualidades que forman el "conjunto referencial". Gil Aluja (2002) menciona que "un subconjunto borroso actúa, por lo menos en el ámbito de las ciencias sociales, como un descriptor" del conjunto referencial. Dichos elementos pueden ser reales o mentales.

Pongamos como ejemplo al conjunto referencial:

E = {Carlos, Adriana, Jaime, Ricardo, Luis, Pedro}

Si enunciamos la proposición “jóvenes de edad”, podríamos construir un subconjunto borroso de la siguiente manera:

$\underset{\sim}{j} =$

C	A	J	R	L	P
0,8	0,2	1	0,1	0	0,6

En este subconjunto borroso, vemos que Jaime es el más joven de todos, Carlos es muy joven, Adriana y Ricardo no son tan jóvenes y Luis es el menos joven de todos. Así, estas palabras según los hábitos y costumbres ayudan a tener un grado alto de matización que sería imposible bajo el espejo de la lógica booleana o binaria ya que sólo habría dos valuaciones como se mencionó en líneas anteriores (son jóvenes o no lo son).

Una vez presentado el concepto de subconjunto borroso, un número borroso no es más que un caso particular de un subconjunto borroso, si cumple las tres propiedades siguientes:

1. El conjunto referencial o variable objeto de estudio toma valores en los números reales.
2. La función característica de pertenencia es normal; esto es, que por lo menos un valor de la variable en estudio tiene asociado el nivel de máxima presunción que es 1.
3. La función característica de pertenencia es convexa. Esto quiere decir que cualquier desplazamiento a la derecha e izquierda del nivel de máxima presunción, va disminuyendo o se mantiene pero nunca aumenta.

Hay un elemento más que es necesario tener presente: la noción de número aleatorio borroso. Sin embargo reservamos la presentación de este concepto como parte de la descripción de la metodología.

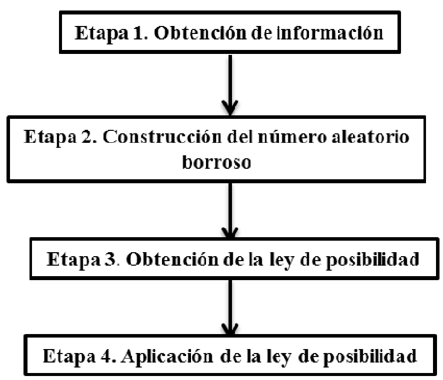
3.2. Descripción general de la metodología

El presente trabajo tiene la finalidad de mostrar una metodología que permita obtener una “ley de posibilidad” que permita comparar a cada cliente nuevo con dicha ley en el ámbito de la incertidumbre. Es conveniente aclarar desde este momento que a pesar de utilizar el término “ley”, dicho resultado representa un caso específico y es posible cualquier otra forma de ley en función de la industria o sector económico en donde nos encontremos. Por las razones anteriores, no es posible tener un modelo teórico representado en una fórmula general aplicable a una gran cantidad de situaciones. No obstante, planteamos una metodología, paso a paso, que se puede implementar en diversas situaciones como se muestra en el sector del vestido en el siguiente epígrafe.

Para iniciar, los autores Kaufmann y Gil Aluja (1992) establecen una clara diferencia entre probabilidad y posibilidad. Mencionan que cuando se establece una medida de probabilidad, ésta es aceptada como objetiva y, por tanto, aceptada por todo el mundo. En cambio, el término posibilidad, definido por el profesor Lotfi A. Zadeh, introductor de la idea borrosa en 1965, es una de las muchas valuaciones propias de la teoría de los subconjuntos borrosos. Una valuación es un dato subjetivo suministrado por una o varias personas cada una de ellas inmersa en sus circunstancias. Por tanto, cuando utilizamos el término posible lo asociamos a la subjetividad en ausencia de una medida objetiva.

Mostramos en la Figura 1 la metodología propuesta para lograr la ley de posibilidad con una descripción en cada uno de los pasos.

Figura 1. Metodología propuesta



Fuente: Elaboración propia

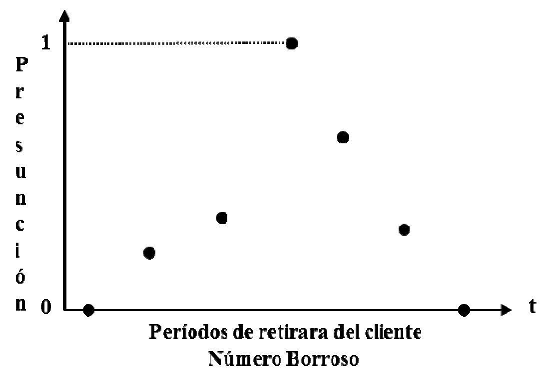
Etapa 1. Obtención de información:

La metodología inicia por solicitar información a un grupo de expertos conocedores de la industria o sector acerca del período o momento de retirada del cliente con la empresa. Esta información se captura para cada experto bajo la forma de un número borroso. El conjunto referencial son los posibles períodos o momentos de retirada del cliente, que son valuados con niveles de presunción $\alpha \in [0,1]$.

Se pide a cada experto determinar el momento más próximo (no antes) y el momento más lejano (no después) para la retirada del cliente con la empresa; en estos dos casos, al no creer que pueda ocurrir, se asigna un nivel de α=0. Si el experto tiene elementos suficientes para sospechar al menos de un momento de mayor posibilidad para que el cliente abandone la empresa, a esos períodos se asigna un valor de α=1 y se les llaman períodos o momentos de máxima presunción.

Adicional a lo anterior, entre los momentos de máxima presunción y los dos extremos anteriores (el momento más próximo y el más lejano), se solicita al experto que determine el nivel de presunción para la retirada del cliente en cada uno de los momentos intermedios (discretos) del tiempo. Teniendo presente que cuanto más cerca al máximo de presunción, es presumiblemente aceptado que exista una mayor posibilidad en la retirada del cliente (única restricción impuesta a los expertos para cumplir el requisito de convexidad de la función característica de pertenencia). Lo anterior se puede ilustrar en la Figura 2 cuando tenemos un momento de máxima presunción.

Figura 2. Forma de solicitar la información a los expertos



Fuente: Elaboración propia

Etapa 2. Construcción del número aleatorio borroso:

Una vez que se tiene la información por parte de los expertos, se procede a elaborar un número aleatorio borroso a través de la opinión agregada de dichos expertos.

Kaufmann y Gil Aluja (1987) definen un subconjunto aleatorio borroso como una generalización del concepto de subconjunto borroso. Esto mismo sucede en el caso de números borrosos. Es decir, un número aleatorio borroso lo definimos formalmente como una generalización del concepto de número borroso.

Por ejemplo, si un experto emite sus opiniones acerca de la retirada del cliente como:

	2	3	4	5	6	7
$\underset{\sim}{E}$ =	0	0,3	1	0,9	0,5	0

Este mismo número se puede representar de la siguiente manera:

$\underset{\dot{\sim}}{E}$ =

Nivel de presunción α	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1
0,1		1	1	1	1	
0,2		1	1	1	1	
0,3		1	1	1	1	
0,4			1	1	1	
0,5			1	1	1	
0,6			1	1		
0,7			1	1		
0,8			1	1		
0,9			1	1		
1			1			

Esto último es lo que llamamos un número aleatorio borroso establecido por un solo experto y se denota con un punto debajo de la tilde. Esta idea la generalizamos para el caso de tener un grupo de expertos, donde se podrá ver con mayor claridad las estadísticas obtenidas en cada momento así como las frecuencias relativas, lo que da lugar a las probabilidades en cada período de tiempo con sus niveles de presunción.

Los mismos autores, Kaufmann y Gil Aluja (1987), mencionan que trabajar con subconjuntos aleatorios borrosos (en nuestro caso números aleatorios borrosos) es una forma muy adecuada de trabajar lo subjetivo con lo objetivo o, si se quiere, lo que es incierto y lo que es aleatorio.

Etapa 3. Obtención de la ley de posibilidad:

Una vez obtenido el número aleatorio borroso (teniendo como conjunto referencial los períodos o momentos de retirada del cliente), se procede a resumir la información obteniendo la media aritmética de los valores en cada período.

Es importante aclarar que las cantidades incorporadas al problema como datos no son resultado de cálculos objetivos y, por tanto, no constituyen “medidas”, sino que son el resultado de estimaciones subjetivas a las que llamamos “valuaciones”. En este sentido, operadores duros como la media aritmética son válidos sólo en el ámbito de la certeza o del azar. Para el tratamiento de la incertidumbre, existe un conjunto de operadores blandos adecuados para trabajar la subjetividad y la imprecisión.

En el caso que nos ocupa y en aras de una simplificación al problema, se recurre a obtener la media para cada período. Con esto, estamos perdiendo información original con todas sus imprecisiones y decimos que estamos reduciendo la incertidumbre para entrar al ámbito de la certeza. Este camino es utilizado con frecuencia, siempre y cuando, se realice lo más tarde posible para conservar hasta el último momento toda la información original, cuando esto sucede, dejamos caer la entropía[1].

Al final del proceso, en la obtención de las medias, al no tener ninguno de los valores medios del referencial el nivel $\alpha=1$, esto sugiere dividir dicho resultado entre el máximo valor de las medias obtenidas para conservar la normalidad. Denotemos por $\pi(t)$ al número borroso normalizado resultante.

Por otro lado, Kaufmann y Gil Aluja (1987) mencionan que si X es una variable aleatoria con su respectiva ley de probabilidad, cuando nos referimos a un subconjunto borroso, se puede obtener algo similar considerando una "ley de posibilidad" $\phi(t)$ que debe cumplir las dos condiciones siguientes:

$$1. \forall \ x \in \phi ; \ \phi(x) \in [0,1] \qquad\qquad 2. \bigvee_{x} \phi(x) = 1$$

donde la expresión $\bigvee_{x}$ se define como el máximo sobre los valores del referencial.

Se verifica fácilmente que el número borroso $\pi(t)$ cumple con estas condiciones para ser llamado "ley de posibilidad". En definitiva, la ley $\pi(t)$ es el número borroso que permite tener una valuación sobre la posibilidad de que un cliente se retire de la empresa en cada uno de los períodos considerados en el referencial.

Etapa 4. Aplicación de la ley de posibilidad:

Kaufmann y Gil Aluja (1987) mencionan que si en la teoría de las probabilidades, la esperanza matemática de una variable aleatoria X se define por:

$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$ (caso discreto) o bien por $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$ (caso continuo).

[1] Entropía: es un término utilizado con frecuencia en el ámbito de la borrosidad para valorar el grado de desorden de los sistemas en general. Decimos que la entropía es nula cuando la certeza es absoluta. Kaufmann y Gil Aluja (1990) mencionan que la vida solo puede manifestarse si los estados de los sistemas llamados vivos no son excesivamente desordenados ni tampoco demasiado ordenados: existe una playa de entropía. De esta forma, cuando decimos la frase "dejamos caer la entropía" significa que toda la información borrosa o con incertidumbre mantenida hasta ese momento, se pierde y pasamos al ámbito de la certeza.

Los mismos autores mencionan que existe algo similar a la esperanza matemática y lo definen como un tipo de "posibilidad" en relación a una ley de posibilidad.

Para la ley de posibilidad π(t), esto se traduce en decir que la posibilidad de un subconjunto borroso $\underset{\sim}{C}$ en relación a la ley π(t) queda determinada por la siguiente expresión:

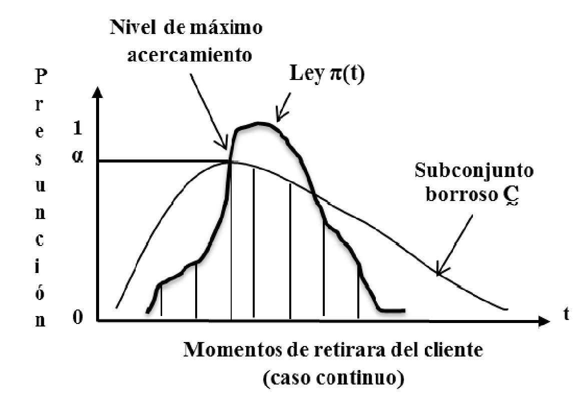
$$Pos_{\pi}(\underset{\sim}{C}) = V(\underset{\sim}{C} \ \Lambda \ \pi)$$

con dos operadores: V que significa el "máximo" entre varios valores y Λ que significa el "mínimo" entre varios valores.

La ley π(t) representa el umbral que no puede traspasar el número borroso $\underset{\sim}{C}$ y decimos que se trata de la posibilidad de $\underset{\sim}{C}$ para dicha ley. Con esto obtenemos el nivel de máximo acercamiento de $\underset{\sim}{C}$ sin traspasar la ley π(t).

Lo anterior se puede apreciar en la Figura 3, haciendo la aclaración que estamos asumiendo continuidad en los números borrosos $\underset{\sim}{C}$ y π(t): existen valores de presunción en la retirada del cliente en todo momento t.

Figura 3. Posibilidad de $\underset{\sim}{C}$ en relación a la ley $\pi(t)$



Fuente: Elaboración propia

Con la presentación de la metodología anterior, se desprende el interés de realizar una aplicación para mostrar con mayor detalle lo expuesto.

4. DESARROLLO DE UNA LEY DE POSIBILIDAD: APLICACIÓN AL SECTOR DEL VESTIDO

Etapa 1. Obtención de información.

Se ha elegido el sector del vestido seleccionando aquellas empresas ubicadas en el centro de México que se dedican a la fabricación de uniformes empresariales, debido a que surten pedidos periódicamente (usualmente de forma anual) y el cliente puede cambiar de proveedor a la siguiente compra sin tener mayores barreras de salida para ello.

Se consultó la Cámara Nacional de la Industria del vestido (CANAIVE), donde se seleccionaron 14 empresas que trabajan la línea de uniformes para empresa. En cada una de ellas, se pidió hablar con el director comercial o director de ventas. A partir de este momento, dicha figura toma el nombre de experto en el ramo. Las entrevistas se realizaron telefónicamente en virtud de la dificultad de localizar a los expertos. Se solicitó a cada individuo información acerca de la retirada de aquel cliente que considere como más incierto para dejar la empresa en cualquier momento. En la entrevista, se mencionaba no tomar en cuenta a los clientes que tengan un contrato establecido superior a un año.

La información acerca de la posibilidad de retirada del cliente se solicitó bajo la forma de número borroso utilizando una escala llamada endecadaria dando valores de presunción dentro del intervalo [0,1]; estando de acuerdo con la correspondiente semántica. En este caso se propuso la siguiente:

0 : nula presunción en la retirada del cliente;
0,1 : escasa presunción en la retirada del cliente;
0,2 : poca presunción en la retirada del cliente;
0,3 : baja presunción en la retirada del cliente;
0,4 : apreciable presunción en la retirada del cliente;
0,5 : mediana presunción en la retirada del cliente;
0,6 : suficiente presunción en la retirada del cliente;
0,7 : alta presunción en la retirada del cliente;
0,8 : mucha presunción en la retirada del cliente;
0,9 : considerable presunción en la retirada del cliente;
1 : máxima presunción en la retirada del cliente.

Por ejemplo, un experto puede tener razones suficientes para emitir su opinión acerca de la retirada de un cliente a través del siguiente número borroso:

	2	3	4	5	6	7	8
$\underset{\sim}{E}$ =	0	0,1	0,6	0,7	1	0,1	0

El anterior número borroso significa que el experto estima que el período o momento más próximo (no antes) para que el cliente abandone la empresa definitivamente es dos; el período o momento más lejano (no después) para que el cliente abandone la empresa definitivamente es ocho y como información adicional también emite su opinión en los períodos intermedios a los anteriores utilizando la escala endecadaria.

En síntesis, se solicitó a cada experto dos tipos de información:

1. El período más próximo (no antes) y el más lejano (no después) para su retirada; en este caso, al no creer que pueda ocurrir, el nivel de presunción es α=0, y el período o número de períodos de máxima presunción para la retirada del cliente es α=1.
2. Además, para cada período (discreto) entre el momento o momentos de máxima presunción y los dos extremos anteriores (el momento más próximo y el más lejano), se solicitó al experto que determinara el nivel de presunción de retirada del cliente. Recordando que cuanto más cerca al máximo de presunción, es presumiblemente aceptado que exista una mayor posibilidad en la retirada del cliente; única restricción impuesta para cumplir el requisito de convexidad de la función característica de pertenencia de un número borroso.

Para respetar el anonimato de cada una de las 14 empresas que aceptaron participar en el estudio, tan sólo se enumerarán de forma consecutiva del 1 al 14.

Ya que no todos los referenciales proporcionados por las empresas inician y terminan en el mismo año, vamos a uniformar el tamaño de los mismos tomando como punto de partida el año cero y el año más alejado mencionado por al menos un experto. Para los años ficticios contemplados antes y después del fijado por cada uno de los expertos, como la persona no cree que pueda ocurrir el evento en esas fechas, asignamos niveles de presunción α=0.

La información recabada de cada empresa se presenta a continuación:

Información emitida por los 14 expertos														
Años:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\underset{\sim}{E}_1$	0	0	1	0,3	0,3	0,2	0,2	0,1	0	0	0	0	0	0
$\underset{\sim}{E}_2$	0	0	1	1	0,6	0,6	0,2	0,2	0	0	0	0	0	0
$\underset{\sim}{E}_3$	0	0	0	0,3	0,7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\underset{\sim}{E}_4$	0	0	0	0,1	0,5	0,7	1	1	1	0	0	0	0	0
$\underset{\sim}{E}_5$	0	0	0,1	0,6	0,7	0,9	1	1	0,2	0,1	0	0	0	0
$\underset{\sim}{E}_6$	0	0	0,2	0,3	1	0,8	0,7	0,6	0,6	0,6	0,5	0,3	0	0
$\underset{\sim}{E}_7$	0	0	0	0,5	1	0,9	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0
$\underset{\sim}{E}_8$	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	1	0,5	0	0	0	0
$\underset{\sim}{E}_9$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\underset{\sim}{E}_{10}$	0	0	0,3	1	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\underset{\sim}{E}_{11}$	0	0	0,5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\underset{\sim}{E}_{12}$	0	0	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,5	1	0,5	0	0	0
$\underset{\sim}{E}_{13}$	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\underset{\sim}{E}_{14}$	0	0	1	0,5	0,4	0,3	0,2	0	0	0	0	0	0	0

Etapa 2. Construcción del número aleatorio borroso.

Con la información proporcionada por las 14 empresas entrevistadas, vamos a desarrollar una agregación de opiniones de estos expertos para obtener un número aleatorio borroso.

Para lograr dicha agregación, procedemos a obtener la estadística correspondiente contando cuántos expertos han asignado cada nivel de presunción en cada uno de los elementos del referencial. Observe que la suma en todas las columnas debe ser catorce.

Estadísticas														
Años:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	14	14	5	2	3	5	5	6	8	9	11	12	13	14
0,1			1	1				1		1				
0,2			2	1	1	1	3	1	1					
0,3			1	3	1	2	1					1		
0,4					1			1						
0,5			1	2	1		2	2	2	2	3	1	1	
0,6				1	1	1		1	1	1				
0,7					3	1	1							
0,8						1								
0,9						2								
1			4	4	3	1	2	2	2	1				

Para obtener las frecuencias relativas y por tanto las probabilidades, se divide la cifra de cada celda por el número total de expertos, en nuestro caso catorce. Por tanto, la suma en cada columna debe ser la unidad.

Frecuencias relativas														
Años:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1,00	1,00	0,36	0,14	0,21	0,36	0,36	0,43	0,57	0,64	0,79	0,86	0,93	1,00
0,1			0,07	0,07				0,07		0,07				
0,2			0,14	0,07	0,07	0,07	0,21	0,07	0,07					
0,3			0,07	0,21	0,07	0,14	0,07					0,07		
0,4					0,07			0,07						
0,5			0,07	0,14	0,07		0,14	0,14	0,14	0,14	0,21	0,07	0,07	
0,6				0,07	0,07	0,07		0,07	0,07	0,07				
0,7					0,21	0,07	0,07							
0,8						0,07								
0,9						0,14								
1			0,29	0,29	0,21	0,07	0,14	0,14	0,14	0,07				

Obtenemos el acumulado partiendo de α=1 para obtener el número aleatorio borroso y se denota con un punto debajo de la tilde:

Años:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1			0,64	0,85	0,77	0,63	0,63	0,56	0,42	0,35	0,21	0,14	0,07	
0,2			0,57	0,78	0,77	0,63	0,63	0,49	0,42	0,28	0,21	0,14	0,07	
0,3			0,43	0,71	0,70	0,56	0,42	0,42	0,35	0,28	0,21	0,14	0,07	
0,4			0,36	0,50	0,63	0,42	0,35	0,42	0,35	0,28	0,21	0,07	0,07	
0,5			0,36	0,50	0,56	0,42	0,35	0,35	0,35	0,28	0,21	0,07	0,07	
0,6			0,29	0,36	0,49	0,42	0,21	0,21	0,21	0,14				
0,7			0,29	0,29	0,42	0,35	0,21	0,14	0,14	0,07				
0,8			0,29	0,29	0,21	0,28	0,14	0,14	0,14	0,07				
0,9			0,29	0,29	0,21	0,21	0,14	0,14	0,14	0,07				
1			0,29	0,29	0,21	0,07	0,14	0,14	0,14	0,07				

$= \underset{\dot{\sim}}{E}$ (número aleatorio borroso)

Con esto, hemos construido un número aleatorio borroso que, como señala Gil Lafuente (1997), constituye una agregación de la opinión de los expertos, conservando toda la información.

Etapa 3. Obtención de la ley de posibilidad.

Si queremos presentar de forma resumida la información contenida en el presente número aleatorio borroso, es suficiente con obtener la media aritmética en cada año. Con esta simplificación es suficiente para hacer caer la entropía y pasamos, como ya se había justificado en el epígrafe anterior, al ámbito de la certeza.

En situaciones como estas, se acostumbra eliminar los valores del nivel superior $\alpha=0$. La razón es que dicho uno es inocuo o redundante al ser una suma acumulada de frecuencias, por lo que la suma siempre será uno. Por tanto, las medias aritméticas quedan como:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0,38	0,49	0,50	0,40	0,32	0,30	0,27	0,19	0,11	0,06	0,04	0

Como se mencionó en el apartado de la metodología, al no tener ninguno de los valores medios del referencial el nivel de presunción de $\alpha=1$, dividimos dicho resultado entre el valor máximo de las medias, en este caso 0,50, con la intención de conservar la normalidad. Definimos $\pi(t)$ como el número borroso normalizado.

$\pi(t)=$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0,76	0,97	1	0,80	0,64	0,60	0,54	0,38	0,21	0,12	0,07	0

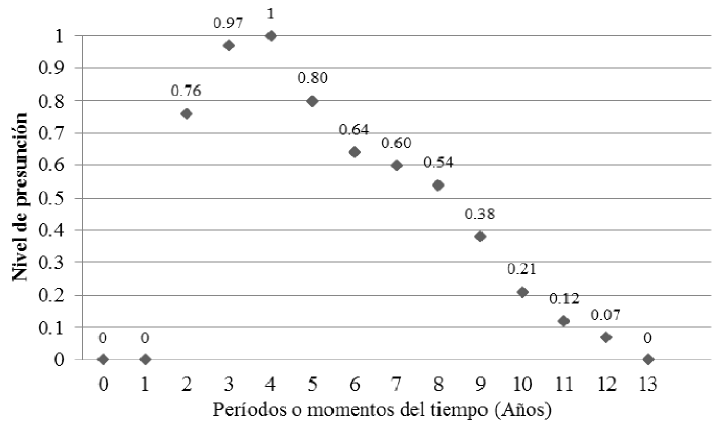
Se puede observar que $\pi(t)$ cumple las dos condiciones mencionadas por los autores Kaufmann y Gil Aluja (1987) para ser llamada ley de posibilidad, en este caso en el ámbito discreto:

$$1.\ \forall\ t \in \pi\ ;\ \pi(t) \in [0,1] \qquad\qquad 2.\ \bigvee_{t} \pi(t) = 1$$

donde la expresión $\bigvee_{t}$ se define como el máximo sobre los valores del referencial.

De esta forma, obtenemos una ley de posibilidad $\pi(t)$ que se muestra en la Gráfica 1 y que representa un tipo de valuación acerca de la posibilidad de que un cliente se retire de la empresa en cada uno de los períodos o años considerados en el referencial.

La Gráfica 1 muestra que para el sector del vestido en el centro del país, el año de mayor posibilidad para que el cliente se retire de la empresa es el año 4. No obstante, si analizamos los niveles de presunción cercanos al máximo de presunción, podemos decir que, entre el año 2 y el año 5, los niveles de presunción en la retirada del cliente son considerablemente altos al superar el nivel de $\alpha=0,7$. Cabe señalar que si aplicamos esta metodología en otras industrias o sectores económicos diferentes, las gráficas tendrán en cada caso sus propias características.



Gráfica 1. Ley de posibilidad de retirada del cliente en el año t (Sector del vestido en el centro de México)

Es necesario tener presente que la ley de posibilidad π(t) es una aproximación a través de la agregación de la opinión de un grupo de expertos en el sector del vestido en el centro de México y no de un cliente específico. Para ello, vamos a desarrollar en la etapa 4 de la metodología una aplicación sobre el uso de dicha ley con un cliente en particular.

Etapa 4. Aplicación de la ley de posibilidad.

Para ilustrar lo anterior, entrevistamos a la empresa número 15, conservando de la misma manera el anonimato de esta, donde solicitamos la misma información que nos proporcionaron las 14 empresas del sector del vestido, con la instrucción que fuera un cliente particular potencial en su cartera actual. Para proteger el anonimato de dicho cliente vamos a utilizar sólo la letra C para hacer referencia a dicha figura.

La información de la empresa número 15 sobre el cliente seleccionado es:

$\underset{\sim}{C}$ =

1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,4	0,8	0,9	1	0,5	0,1	0

La intención es, en primer lugar, ajustar el referencial al tamaño de la ley de posibilidad de retirada del cliente en el año t; en nuestro caso, tenemos 13 períodos o años:

$\underset{\sim}{C}$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0,4	0,8	0,9	1	0,5	0,1	0	0	0	0	0	0

En segundo lugar, es realizar una valoración de este cliente C con respecto a la ley π(t). Para ello existen varios caminos, uno de ellos hace referencia a la distancia entre dos subconjuntos borrosos: nos referimos a la distancia absoluta de Hamming, donde Kaufmann y Gil Aluja (1992) la definen explícitamente para dos subconjuntos borrosos como:

$$D(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\sum_{n=1}^{m}\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\right|$$

Aplicando la distancia de Hamming entre las valuaciones del cliente C y la ley de posibilidades π(t) tenemos:

$D(\pi, \underset{\sim}{C}) = |0 - 0| + |0 - 0| + |0{,}76 - 0{,}4| + |0{,}97 - 0{,}8| + |1 - 0{,}9| + |0{,}80 - 1| + |0{,}64 - 0{,}5| + |0{,}60 - 0{,}1|$
$+ |0{,}54 - 0| + |0{,}38 - 0| + |0{,}21 - 0| + |0{,}12 - 0| + |0{,}07 - 0| + |0 - 0|$

$D(\pi, \underset{\sim}{C}) = 0 + 0 + 0{,}36 + 0{,}17 + 0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}14 + 0{,}50 + 0{,}54 + 0{,}38 + 0{,}21 + 0{,}12 + 0{,}07 + 0$

$D(\pi, \underset{\sim}{C}) = 2{,}79$

Esta cifra nos da una idea de la distancia absoluta entre la valuación del cliente C hecha por la empresa 15 y la ley de posibilidad de retirada en el año t. No obstante, el valor de esta distancia depende del número de períodos o años que se contemplen, en este caso son 14 sumandos iniciando en el año cero. Para eliminar este efecto, Kaufmann y Gil Aluja (1992) recomiendan utilizar la distancia relativa de Hamming δ. Para su obtención basta con dividir la distancia absoluta obtenida entre el número de elementos considerados. De esta forma la distancia pertenece al intervalo [0,1] donde cuanto más próximo a cero, más cerca están los subconjuntos que se comparan.

$$\delta(\pi, \underset{\sim}{C}) = \frac{1}{14}\, D(\pi, \underset{\sim}{C}) = \frac{1}{14}\,(2{,}79) = 0{,}199$$

Vemos que las valuaciones del cliente y la ley de posibilidad de retirada del cliente se encuentran a muy poca distancia. Gil Aluja (2002) menciona que normalmente, cuando se desea hallar la proximidad, se calcula el complemento a uno de la distancia relativa. De esta forma, cuanto más cercano a uno, son más semejantes y cuanto más cercano a cero son menos semejantes. En nuestro caso tenemos:

$$\rho\,(\pi, \underset{\sim}{C}) = 1 - \delta(\pi, \underset{\sim}{C})$$

$$\rho\,(\pi, C) = 1 - 0{,}199 = 0{,}801$$

En definitiva, este resultado nos revela que la valuación global del cliente C se halla suficientemente próximo a la ley de posibilidad de retirada del cliente π(t). No obstante, este criterio tiene la limitante que es una valoración global del cliente C con respecto a la ley en cuestión.

Ya que los análisis anteriores (distancia absoluta y relativa de Hamming o de proximidad) son valoraciones globales, proponemos el camino que fue mencionado en la presentación de la metodología donde los autores Kaufmann y Gil Aluja (1987) lo definen como un tipo de "posibilidad" en relación a una ley de posibilidad, jugando un papel similar a la esperanza matemática de una variable aleatoria.

En el caso que nos ocupa, si $\pi(t)$ es la ley y $\underset{\sim}{C}$ la información del cliente, la posibilidad de retirada del cliente C en relación a dicha ley queda determinada por:

$$Pos_{\pi}(\underset{\sim}{C}) = V(\underset{\sim}{C} \ \Lambda\ \pi)$$

con los operadores V, que significa el máximo entre varios valores, y Λ, que significa el mínimo entre varios valores.

Con los valores de $\underset{\sim}{C}$ y la ley $\pi(t)$ y aplicando el operador mínimo Λ, tenemos:

$\underset{\sim}{C} =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0,4	0,8	0,9	1	0,5	0,1	0	0	0	0	0	0

$\pi(t) =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0,76	0,97	1	0,80	0,64	0,60	0,54	0,38	0,21	0,12	0,07	0

$\underset{\sim}{C} \ \Lambda\ \pi =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0.4	0.8	0.9	0.80	0.5	0.1	0	0	0	0	0	0

Ahora aplicamos el operador máximo V:

Max (0; 0; 0,4; 0,8; 0,9; 0,80; 0,5; 0,1; 0; 0; 0; 0; 0; 0)= 0,9

Otra notación más directa con los operadores máximo y mínimo es simplemente:

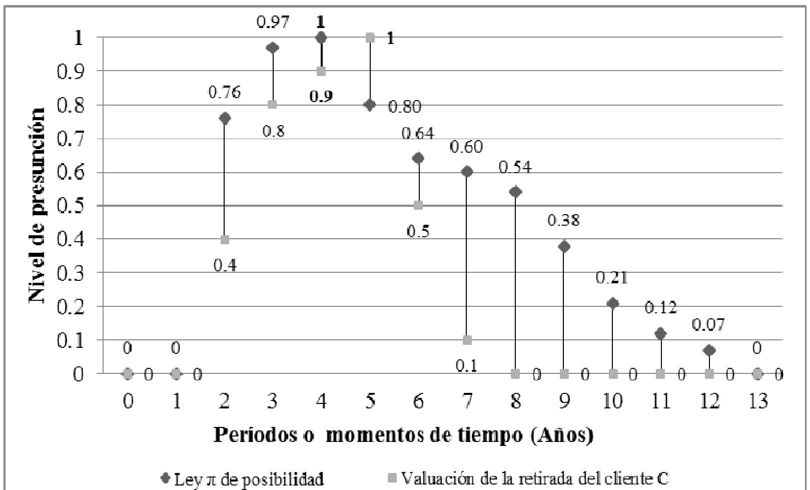
$Pos_{\pi}(\underset{\sim}{C})$ = V(0 Λ 0; 0 Λ 0; 0,4 Λ 0,76; 0,8 Λ 0,97; 0,9 Λ 1; 1 Λ 0,80; 0,5 Λ 0,64; 0,1 Λ 0,60; 0 Λ 0,54; 0 Λ 0,38; 0 Λ 0,21; 0 Λ 0,12; 0 Λ 0,07; 0 Λ 0)

$Pos_{\pi}(\underset{\sim}{C})$= V(0; 0; 0,4; 0,8; 0,9; 0,80; 0,5; 0,1; 0; 0; 0; 0; 0; 0)

$\mathrm{Pos}_{\pi}\,(\underset{\sim}{C}) = 0,9$

Como se puede apreciar en la Gráfica 2, el valor de 0,9 representa el máximo nivel de acercamiento entre ambos conjuntos de valores; esto ocurre en el año 4. En este sentido, podemos interpretar el resultado como una información resumida donde "esperamos" que el cliente se retire de la empresa en el año 4 con un nivel de presunción promedio de α=0,9

Observemos que el resultado obtenido representa la posición más pesimista; es decir, si observamos por ejemplo en el año 4, vemos que la posibilidad de que se retire el cliente según la valuación de la empresa número 15, fue de α=0,9 y según la ley π es de α = 1, por lo que si tomamos la postura más pesimista nos quedamos con el menor valor.



Gráfica 2 Comparación entre la valuación del cliente C y la ley π

5. CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES DE INTERÉS

El estudio ha tenido por objetivo poner a prueba una metodología que permita construir leyes de posibilidad para evaluar la retirada del cliente en cada período (discreto) en el tiempo.

Para tener dichas condiciones, se llevó a cabo un estudio en el sector del vestido en el centro de México, recabando información de expertos que trabajan la línea de uniformes para empresas, ya que por lo general, hay una solicitud de uniformes nuevos cada año, pero una vez cubierto el pedido, el cliente puede cambiar de proveedor sin mayor problema.

En el estudio, se entrevistaron a 14 directores comerciales o directores de ventas para construir la ley de posibilidad π. Posteriormente para poner en práctica dicha ley, se consultó a la empresa 15 para tener una valuación sobre un cliente específico. Al realizar un tipo especial de "posibilidad" de un número borroso en relación a una ley de posibilidad, el resultado muestra que el cliente seleccionado se retira hasta el año 4 con un nivel de presunción de α=0,9. En todos los casos, se ha respetado el anonimato de las empresas participantes.

La aportación del presente trabajo radica en tener un camino alternativo, sin la necesidad de tener una gran cantidad de información histórica como lo requieren los modelos tradicionales tales como: el modelo Pareto/NBD desarrollado por Schmittlein *et al.* (1987), el modelo BG/NBD desarrollado por Fader *et al.* (2005) o el algoritmo desarrollado por Tamaddoni Jahromi *et al.* (2010), el cual utiliza en su primera etapa información histórica conocida por sus siglas RFM (*Recency, Frequency, and Monetary Value*) de los clientes, entre otros.

Esta propuesta permite aliviar, aunque fuera de manera modesta, la pesada tarea de analizar la permanencia del cliente en esquemas no contractuales con un mínimo de información. Asimismo, permite calcular una variable fundamental que es el tiempo de retirada del cliente, necesaria para calcular el CLV. Ya que es un camino alterno a través de la creatividad para dar una solución aproximada a un problema, podríamos considerar esta metodología de naturaleza heurística.

Cabe mencionar que hay ciertas implicaciones prácticas. Cada industria o sector económico tiene características muy especiales, lo que determina en cada caso, la forma o estructura en que dichas leyes se comportarán. Además, ciertamente la metodología por sus características inherentes, está limitada para ciertos sectores o giros empresariales determinados: no sería aplicable en empresas que se encuentren en mercados masivos de clientes y con alta rotación de ellos. No obstante, cuando existe un nivel de cercanía entre el cliente y la empresa, y el nuevo cliente puede tener un peso considerable en el total de las ventas de la empresa, en estos casos, aun cuando no se tuviesen muchos expertos, será de utilidad tener presente una estimación, al menos subjetiva, en relación a su posible retirada ya que es un elemento importante si se desea calcular el valor económico de dicho cliente.

El poder estimar la retirada del cliente permite utilizar de forma selectiva los recursos de la empresa para la construcción y desarrollo de estrategias de retención.

El entusiasmo por utilizar estas herramientas no deben alejarnos de un hecho incuestionable: las técnicas tradicionales no pueden ser relegadas ya que resultan indispensables cuando los fenómenos pueden ser mensurables.

AGRADECIMIENTOS

Deseamos expresar nuestro agradecimiento a los revisores anónimos por sus valiosas sugerencias que han permitido mejorar la calidad de este trabajo.

REFERENCIAS

Abe, M. (2009). "Counting your customers" one by one: A hierarchical Bayes extension to the Pareto/NBD model. *Marketing Science, 28*(3), 541-553.

Fader, P.S., Hardie, B.G.S. & Lee, K.L. (2005). "Counting your customers" the easy way: An alternative to the Pareto/NBD model. *Marketing Science, 24*(2), 275-284.

Fader, P.S., Hardie, B.S. & Shang, J. (2010). Customer-Base Analysis in a Discrete-Time Noncontractual Setting. *Marketing Science, 29*(6), 1086-1108.

Figini, S. (2010). Penalized models to estimate customer survival. *Statistical Methods & Applications, 19*(1), 141-150.

Gil Aluja, J. (1996). Lances y desventuras del nuevo paradigma de la teoría de la decisión. *Proceedings del III Congreso de la Sociedad Internacional para la Gestión y Economía Fuzzy, Buenos Aires*.

Gil Aluja, J. (2002). *Introducción de la Teoría de la incertidumbre en la gestión de empresas*. Vigo: Editorial Milladoiro.

Gil Lafuente, J. (1997). *Marketing para el nuevo milenio: Nuevas técnicas para la gestión comercial en la incertidumbre*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Kaufmann, A. & Gil-Aluja, J. (1987). *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*. Barcelona: Editorial Hispano Europea.

Kaufmann, A. & Gil-Aluja, J. (1990). *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre: Elementos básicos para su aplicación en economía.* Madrid: Centro de Estudios Ramon Areces.

Kaufmann, A. & Gil-Aluja, J. (1992). *Técnicas de gestión de empresa: Previsiones, decisiones y estrategias*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Lu, J. (2003). Modeling customer lifetime value using survival analysis—an application in the telecommunications industry. *Proceedings of the 28th Annual SAS Users Group International Conference.* Cary, NC: SAS Institute Inc, Paper 120-28. Disponible en http://www2.sas.com/proceedings/sugi28/120-28.pdf.

Neslin, S., Gupta, S., Kamakura, W., Lu, J. & Mason, C. (2006). Defection Detection: Measuring and Undestanding the Predictive Accuracy of Customer Churn Models. *Journal of Marketing Research, 43*(2), 204-211.

Reinartz, W. & Kumar, V. (2000). On the profitability of long-life customers in a noncontractual setting: An empirical investigation and implications for marketing. *Journal of Marketing, 64*(4), 17-35.

Reinartz, W. & Kumar, V. (2003), The Impact of Customer Relationship Characteristics on Profitable Lifetime Duration. *Journal of Marketing, 67*(1), 77-99.

Schmittlein, D., Morrison, D. & Colombo, R. (1987). Counting your customers: Who are they and What will they do next? *Management Science, 33*(1), 1-24.

Schmittlein, D.C. & Peterson, R.A. (1994). Customer Base Analysis: An Industrial Purchase Process Application. *Marketing Science, 13*(1), 41-67.

Tamaddoni Jahromi, A., Sepehri, M. M., Teimourpour, B. & Choobdar, S. (2010). Modeling customer churn in a non-contractual setting: the case of telecommunications service providers. *Journal of Strategic Marketing*, *18*(7), 587-598.

Wübben, M. & Von Wangenheim, F. (2006). Predicting Customer Lifetime Duration And Future Purchase Levels: Simple Heuristics vs. Complex Models. En J.L. Johnson & J. Hulland (eds.) *AMA Winter Educators' Conference: Marketing Theory and Applications*, 17, 83-84.