



Pronosticando la inflación mensual en Colombia un paso hacia delante: una aproximación “de abajo hacia arriba”

ALONSO, JULIO CÉSAR

Centro de Estudios en Economía y Finanzas (CIEFI)

Departamento de Economía

Universidad Icesi, Cali (Colombia)

Correo electrónico: jcalonso@icesi.edu.co

RIVERA, ANDRÉS FELIPE

Centro de Estudios en Economía y Finanzas (CIEFI)

Universidad Icesi, Cali (Colombia)

Correo electrónico: afrivera@icesi.edu.co

RESUMEN

La estructura jerárquica del Índice de Precios al Consumidor (IPC) de Colombia permite calcular la inflación como una combinación lineal de sus subcomponentes. Nuestra aproximación implica emplear modelos SARIMA para pronosticar cada componente del IPC y crear un pronóstico de la inflación como una combinación lineal de los pronósticos individuales; es decir, una aproximación “de abajo hacia arriba”. Se evalúa el desempeño fuera de muestra de los pronósticos para el siguiente mes de 12 métodos que emplean una aproximación “de abajo hacia arriba”. Estos métodos son comparados con un pronóstico agregado de la inflación empleando un modelo SARIMA para el IPC total. Nuestros resultados muestran que emplear un método “de abajo hacia arriba” para pronosticar la inflación del siguiente mes tiene un mejor comportamiento que emplear un modelo SARIMA agregado.

Palabras claves: IPC; inflación; pronósticos; de abajo hacia arriba; Colombia.

Clasificación JEL: C32; C53; E31; E37.

MSC2010: 62P20; 91B82; 91B84; 62M10.

Forecasting the Colombian Monthly Inflation One Step Ahead: A “Bottom to Top” Approach

ABSTRACT

The hierarchical structure of the Colombian Consumer Price Index (CPI) makes possible to calculate inflation as a linear combination of its subcomponents. We use SARIMA models to forecast each component of CPI and construct an forecast of inflation using a lineal combination of the forecasts of these components, i.e. a “bottom to top” approach. In this paper, we asses the out-of-sample performance of the one-step-ahead forecast of 12 “bottom to top” methodologies. These methods are compared with an aggregate forecast using a SARIMA model. Our results show that a “bottom to top” method to forecast inflation outperforms an aggregate approach for the case of monthly inflation in Colombia.

Keywords: CPI; inflation; forecasts; “bottom to top”; Colombia.

JEL classification: C32; C53; E31; E37.

MSC2010: 62P20; 91B82; 91B84; 62M10.



1. INTRODUCCIÓN

Pronosticar la inflación es una de las tareas rutinarias de los Bancos Centrales así como de buena parte de los actores del mercado financiero. Para los banqueros centrales estos pronósticos son indispensables para la implementación de una estrategia de política monetaria como es el caso de la “inflación objetivo” que maneja el Banco de la República en Colombia (Svensson, 1997). Por otro lado, los actores del mercado financiero tienen la posibilidad de obtener grandes rendimientos si están en la capacidad de generar un pronóstico acertado de la inflación para el siguiente mes (Nelson, 1976). No solamente los hacedores de política monetaria y los actores del mercado financiero están interesados en contar con un buen pronóstico de la inflación mensual, los agentes del sector real también toman decisiones económicas basadas en la información disponible sobre el comportamiento futuro de los precios (Dornbusch, 1976; Firth, 1979; Miller *et al.*, 1976; Solnik, 1983). En fin, existen numerosas razones que justifican contar con un buen modelo para predecir la inflación del próximo mes.

La inflación, y más específicamente el índice de precios del cual se deriva su cálculo, surgen de una combinación lineal de índices de precios que representan el comportamiento de canastas o subcanastas para diferentes ciudades y niveles de ingreso. Por ejemplo, en Colombia el Índice de Precios al Consumidor (IPC) nacional es el que se emplea para calcular la inflación de referencia para todos los actores. Este IPC se construye a partir de una combinación lineal de índices de precios asociados a categorías de productos o servicios, niveles de ingreso (bajo, medio y alto) y un conjunto de 24 ciudades.

En general, si una variable (a la cual denominaremos general o nivel agregado) resulta de una combinación lineal de otras variables (a las cuales denominaremos subcomponentes o nivel desagregado) la primera se podría pronosticar en dos pasos. Primero, se pronostica el comportamiento de los distintos subcomponentes. Y segundo, a partir del pronóstico de los subcomponentes, se construye una combinación lineal de estos últimos. Este pronóstico se conoce como el pronóstico de la variable general (Grunfeld y Griliches, 1960). A este procedimiento lo denominaremos como una aproximación “de abajo hacia arriba” (“*bottom to top*”, en inglés). La aproximación “de abajo hacia arriba” contrasta con una aproximación agregada (conocida como “enfoque agregado”) que implica pronosticar la variable general a partir de información agregada sin tener en cuenta cada uno de los subcomponentes de la variable general.

Existen dos argumentos a favor de una aproximación “de abajo hacia arriba”. Primero, pronosticar la variable general utilizando únicamente su información hace que se descarte otro tipo de información relevante que podría permitir llegar a unos mejores resultados. Al considerar los distintos subcomponentes, la aproximación “de abajo hacia arriba” abarca un conjunto más amplio de información y un mayor rango de

heterogeneidad inherente a los distintos subcomponentes que podría generar un pronóstico de la variable general sistemáticamente más acertado. Segundo, en el caso hipotético de un choque aleatorio que afectaría a todos los subcomponentes de la variable general, los errores de pronóstico de estos podrían ser positivos o negativos. Sin embargo, al agregar los pronósticos, estos errores podrían cancelarse entre sí y de esta forma generar un pronóstico acertado de la variable general (Hendry y Clements, 2004).

Sin embargo, existen críticas a los anteriores argumentos. No necesariamente una mayor cantidad de información y heterogeneidad implican mejores pronósticos. Dado que el pronóstico de cada subcomponente requiere un modelo de estimación que describa su proceso generador de datos, es necesario conocer el verdadero proceso generador de datos de cada subcomponente. En muchas ocasiones esta condición no se cumple porque lo que el investigador tiene a la mano es una aproximación al verdadero proceso generador de datos. Al presentarse un error de especificación, es posible que la combinación lineal de los pronósticos de los distintos subcomponentes este expuesto a un error de pronóstico lo suficientemente grande que no permita lograr unos resultados satisfactorios. Respecto a los choques aleatorios, es posible que estos afecten a los subcomponentes de una misma forma, por lo cual estos errores de pronóstico no se cancelarían entre sí, generando así que el pronóstico de la variable general no sea tan acertado como podría esperarse (Theil, 1954).

El objetivo de este artículo es evaluar la conveniencia o no de emplear una aproximación “de abajo hacia arriba” para pronosticar la inflación en Colombia en el corto plazo. Considerando los argumentos que en general sugieren la aproximación “de abajo hacia arriba”, es posible esperar que el pronóstico obtenido a partir del nivel de desagregación más amplio (Grupo) muestre mejores resultados debido a que se está incorporando mayor cantidad de información de la dinámica de los componentes de la inflación. De esta manera, si distintos *shocks* económicos afectan los precios de forma asimétrica, la estimación desagregada puede incorporar en el pronóstico esta asimetría oculta en la información agregada y, por tanto, se estaría teniendo en cuenta la heterogeneidad inherente al pronóstico de los precios de los distintos bienes y servicios.

Para lograr nuestro objetivo aprovechamos la estructura con la que es construido el IPC en Colombia, el cual implica un nivel de desagregación de la canasta de productos y servicios por grupos de bienes, niveles de ingresos y por una distribución geográfica. En ese orden de ideas, el objetivo es comparar los pronósticos de la inflación en Colombia para el siguiente mes empleando una aproximación agregada con la combinación de los pronósticos asociados a los subcomponentes del IPC. Para lograr nuestro objetivo, estimamos modelos SARIMA para cada uno de los subcomponentes del IPC y se construye un pronóstico “de abajo hacia arriba” de la inflación. Este pronóstico es comparado con el obtenido de un modelo SARIMA para

el IPC total nacional. Posteriormente, comparamos el desempeño de todos los pronósticos empleando distintos criterios de evaluación, con la aproximación agregada.

Este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera. Después de esta introducción, en la segunda sección se presenta una revisión de la literatura sobre el tema, especialmente en la zona Euro, donde más se ha trabajado el tópico. En la tercera sección se describen los datos usados en el presente trabajo. La cuarta sección muestra la estructura metodológica a partir de la cual se construye el IPC (y la inflación) en Colombia. Además, se ilustra la estrategia empírica adoptada y los criterios tenidos en cuenta para evaluar los resultados. La quinta sección describe y analiza los resultados encontrados. Finalmente, la última sección presenta unos comentarios finales del ejercicio.

2. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Para la zona Euro existe una amplia literatura que evalúa cuál es la metodología más acertada para pronosticar la inflación mensual. En general, en la literatura se encuentran tres tipos de ejercicios. El primer conjunto de ejercicios es el de modelar los subcomponentes del IPC nacional a través de un modelo VAR y construir una combinación lineal de los pronósticos de estos subcomponentes para lograr un pronóstico del IPC nacional. El segundo tipo de ejercicio es modelar los subcomponentes del IPC nacional y el IPC nacional en un modelo VAR para pronosticar el IPC nacional directamente. Se esperaría que la mayor información contenida en el VAR implique en mejores pronósticos del IPC nacional agregado. Finalmente, el tercer tipo de ejercicio es modelar cada subcomponente del IPC con una especificación ARIMA y construir el IPC nacional a partir de la combinación lineal de los pronósticos de estos modelos ARIMA. El desempeño de estas tres metodologías se compara con los pronósticos generados por un modelo ARIMA que utiliza únicamente información agregada del IPC nacional. Cabe resaltar el hecho que la desagregación que reportan en los trabajos respecto a la zona Euro está en función a la forma en que la Unión Monetaria reporta la información, es decir, la desagregación del IPC se da por sectores económicos y por regiones geográficas.

Espasa *et al.* (2002), empleando modelos VAR para datos de la zona Euro, encuentran que no hay una evidencia clara de cointegración entre las series de precios, según sector económico y región geográfica. La desagregación del IPC por sectores y su posterior pronóstico genera unos resultados más precisos y menos sesgados para periodos de pronóstico mayores a un mes, en comparación a los pronósticos provenientes del modelo ARIMA que usa información agregada. Pino *et al.* (2013) realizan un estudio similar para España. Empleando la existencia de una relación de largo plazo (cointegración) entre el índice de precio de un sector económico de una región y el índice de precio del mismo sector económico de una región vecina, los

autores encuentran que los pronósticos del IPC nacional a partir de la combinación lineal de los pronósticos de sus subcomponentes a través de un modelo VAR son más precisos en comparación a lo evidenciado con los pronósticos de un modelo ARIMA que usa información agregada del IPC, para periodos de pronóstico mayores a un mes. En este caso, la desagregación de los precios según el sector económico evidencia mejores resultados a los expuestos por los precios desagregados según región económica.

Fritzer *et al.* (2002), Benalal *et al.* (2004) y Harvey y Cushing (2014) consideran las tres metodologías mencionadas arriba. El primer estudio es realizado para Austria, el segundo para el caso de la zona Euro y el tercero para el caso de Ghana. Fritzer *et al.* (2002) comparan un modelo VAR (considerando todos los subcomponentes del IPC y el IPC nacional) y un modelo ARIMA (que solo considera el IPC nacional) para verificar la conveniencia de pronosticar directamente el IPC nacional a partir de la información agregada. Los autores encuentran que los pronósticos del modelo VAR son más acertados para periodos de 8 y 12 meses. A continuación, comparan el desempeño de los mismos modelos basados en un enfoque desagregado. Para este caso, el enfoque desagregado reporta un mejor desempeño a partir de los modelos ARIMA. Benalal *et al.* (2004) encuentran que los pronósticos producidos por modelos ARIMA que usan información agregada del IPC nacional son superiores a los pronósticos construidos a partir de una combinación lineal de los subcomponentes del IPC (ya sean a partir de los modelos VAR o ARIMA), esto para periodos de pronóstico de 12 y 18 meses. Para el caso de periodos de pronósticos inferiores a 12 meses, las conclusiones son mixtas. De otro lado, Harvey y Cushing (2014) concluyen algo similar. Estos autores encuentran que el pronóstico directo del IPC nacional a través de un modelo ARIMA tiene mejor desempeño a lo que resulta de los pronósticos basados en la combinación lineal de los pronósticos de los precios de los componentes del IPC.

Hubrich (2005), partiendo de las tres metodologías descritas al inicio de esta sección, encuentra que las diferencias en los pronósticos son más evidentes a medida que los periodos de pronóstico son mayores. Para periodos mayores a un mes, los pronósticos provenientes del modelo ARIMA con información agregada son superiores a los pronósticos de los demás modelos. De otro lado, el enfoque desagregado a partir del modelo VAR se desempeña mejor en comparación al enfoque desagregado a partir de los modelos ARIMA. Además de esto, también encuentra que al incluir información desagregada en un modelo VAR y pronosticar el IPC nacional resulta en mejores pronósticos en comparación al enfoque desagregado a partir del modelo ARIMA.

Con la información de los precios en Estados Unidos, Hendry y Hubrich (2011) basan sus análisis en modelos ARMA y VAR para poder concluir sobre el desempeño comparativo las tres metodologías de pronóstico. Al igual que Hubrich (2005), Hendry y Hubrich (2011) encuentran que un modelo ARIMA que utiliza información agregada,

a un modelo VAR con información de los subcomponentes del IPC pronostican mejor la inflación nacional en comparación al pronóstico de la inflación mensual que resulta de combinar los pronósticos de inflación de los subcomponentes del IPC. Es decir, incluir información desagregada resulta ser más conveniente para pronosticar la inflación mensual que combinar pronósticos desagregados. Además, incluir información desagregada en el pronóstico de la inflación mensual demuestra mejores resultados en comparación a pronosticar la inflación solo con su información (ARIMA con un enfoque agregado)

Demers y De Champlain (2005), adicional a la aproximación tradicional de los modelos AR y VAR, consideran los modelos de rezagos parsimoniosos más largos (PLL, por sus siglas en inglés). Encuentran que la aplicación de los modelos PLL, asociados con el enfoque desagregado, muestra mejores resultados. Sin embargo, estos autores resaltan la necesidad de considerar evidencia más robusta en contra de los métodos de pronóstico basados en modelos univariados que utilizan información agregada.

En general, existe evidencia mixta sobre la conveniencia de pronosticar la inflación mensual a partir de una combinación lineal de los componentes del IPC.

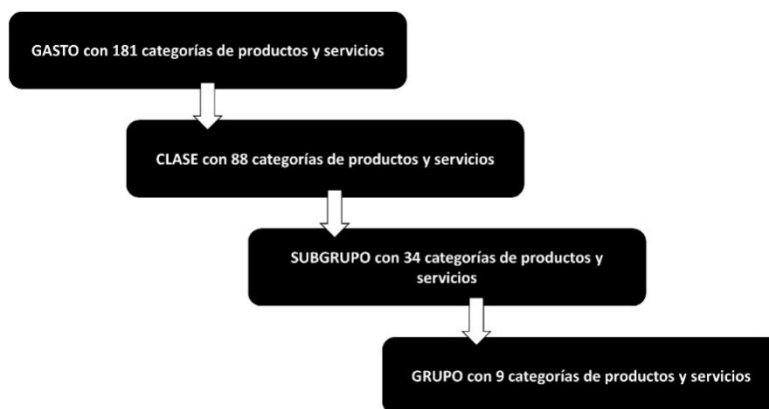
3. METODOLOGÍA

3.1. Estructura del IPC en Colombia

El Índice de Precios al Consumidor (IPC) permite seguir el comportamiento de los precios al por menor de una canasta de bienes y servicios, y su crecimiento porcentual corresponde a la medida más empleada para la inflación. En Colombia, el IPC se calcula para diferentes niveles de desagregación. Estos niveles de desagregación están dados por categorías de productos o servicios, niveles de ingreso (bajo, medio y alto) y ciudades. El primer nivel de desagregación corresponde al tipo de producto o servicio. Este criterio de desagregación implica cuatro niveles de categorización: Gasto, Clase, Subgrupo y Grupo. El nivel de categorización más amplio (más bajo) es el de Gasto, el cual cuenta con 181 productos y servicios. El siguiente nivel de categorización es la Clase con 88 subconjuntos de productos y servicios. Por ejemplo, “Frutas frescas” es un producto de la categoría de Clase la cual agrega productos como “Naranjas”, “Bananos” y “Tomate de árbol”, pertenecientes al nivel de categorización de Gasto. El tercer nivel de categorización es el de Subgrupo con 34 subconjuntos de productos y servicios. Por ejemplo, “Frutas frescas” es agrupada por “Frutas” la cual pertenece a la categorización de Subgrupo. Finalmente, el Grupo es el último nivel de categorización y abarca 9 conjuntos de productos y servicios. Siguiendo con el ejemplo anterior, el subgrupo “Frutas” está agrupada en “Alimentos”, siendo esta última uno de los nueve conjuntos de productos y servicios del nivel de categorización de Grupo. La Figura 1

muestra la estructura de desagregación descrita.

Figura 1. Esquema de la estructura jerárquica del IPC en Colombia

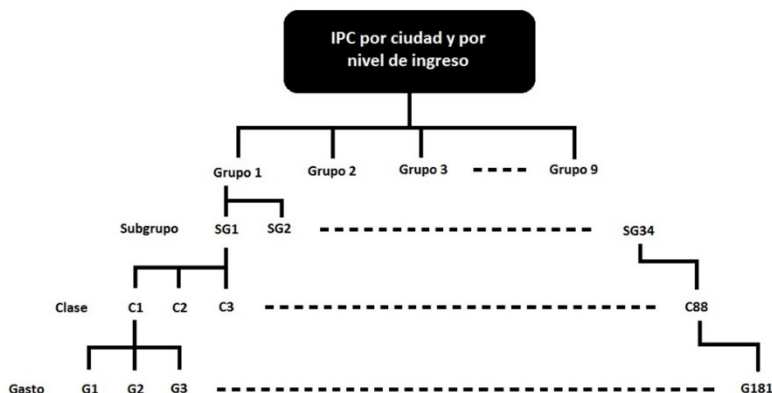


Fuente: Elaboración propia.

La estructura de clasificación es aplicada en los tres niveles de ingreso para 24 ciudades del país en las que se hace el seguimiento de los precios. Estas ciudades son: Armenia, Barranquilla, Bogotá, Bucaramanga, Cali, Cartagena, Cúcuta, Florencia, Ibagué, Manizales, Medellín, Montería, Neiva, Pasto, Pereira, Popayán, Quibdó, Riohacha, San Andrés, Santa Marta, Sincelejo, Tunja, Valledupar, y Villavicencio. De acuerdo a la estructura con la que se construye el IPC nacional, el IPC de cada nivel de ingreso por ciudad resulta de una combinación lineal de los índices de precios de cualquiera de los cuatro niveles de desagregación mencionados anteriormente. Es decir, empleando los 181 índices de precios para los productos y servicios del nivel de desagregación de Gasto para una misma ciudad y un mismo nivel de ingresos se puede obtener el índice de precios de la respectiva ciudad y nivel de ingresos. El mismo resultado se puede obtener si se emplea una combinación lineal de los 88 índices de precios correspondientes al nivel de desagregación de Clase. De manera similar se puede recuperar el índice de precios para una ciudad y nivel de ingresos a partir de los 34 subgrupos o de los 9 grupos.

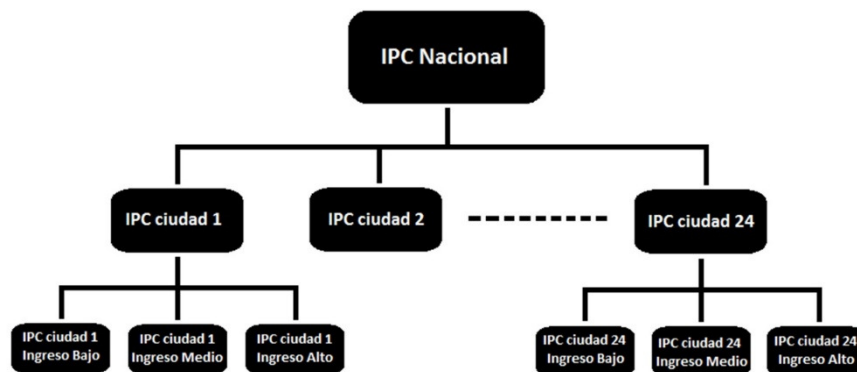
El IPC total para una ciudad resulta de la combinación lineal de los IPC de los tres niveles de ingreso de la respectiva ciudad. Finalmente, el IPC nacional es la combinación lineal del IPC de las 24 ciudades del país.

Figura 2. Esquema de la estructura del IPC para una ciudad y un nivel de ingresos en Colombia



Fuente: Elaboración propia.

Figura 3. Esquema de la construcción del IPC nacional a partir de los IPC de las 24 ciudades.



Fuente: Elaboración propia.

3.2. Representación matricial de la construcción del IPC de Colombia

Es importante adoptar una notación para la representación matricial de la construcción del IPC de Colombia. Emplearemos r para denotar los cuatro niveles de desagregación de los productos y servicios ($r \in \{Gasto, Clase, Subgrupo, Grupo\}$). j representará

el elemento posible en el correspondiente nivel de categorización r . Es decir, el número del elemento en el conjunto r . Para el nivel de Gasto existen 181 elementos, en nuestra notación esto implicará que si $r = \text{Gasto}$, entonces $j = 1, 2, \dots, 181$. Para el nivel de desagregación de Clase se tienen 88 posibles elementos de clasificación. En nuestra notación, si $r = \text{Clase}$, entonces $j = 1, 2, \dots, 88$. Para el nivel de Subgrupo existen 34 posibles elementos (si $r = \text{Subgrupo}$, entonces $j = 1, 2, \dots, 34$). Y para el nivel de Grupo se presentan 9 posibles grupos (si $r = \text{Grupo}$, entonces $j = 1, 2, \dots, 9$). i denotará el nivel del ingreso ($i \in \{\text{Bajo}, \text{Medio}, \text{Alto}\}$). Finalmente, c representará una de las 24¹ ciudades del país consideradas en la construcción del IPC.

En la construcción del IPC, cada bien o servicio o subconjunto de ellos tiene asociado un índice de precio y una ponderación, de acuerdo al nivel de desagregación. Sea $w_{i,c}^r$ un vector columna de ponderaciones de dimensión $(\text{Max}(j) \times 1)$ para la ciudad c , el nivel de ingresos i y el nivel de agregación r y sea $y_{i,c}^r$ un vector columna de dimensión $(\text{Max}(j) \times 1)$ que recoge los respectivos índices de precios para la ciudad c , el nivel de ingresos i y el nivel de agregación r . En otras palabras, $y_{i,c}^r$ es el vector de índices de precios de los j productos o conjuntos pertenecientes al nivel de desagregación r , en el nivel de ingreso i de la ciudad c . Formalmente²

$$w_{i,c}^r = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{\text{Max}(j)} \end{bmatrix} \quad y_{i,c}^r = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{\text{Max}(j)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

El índice de precio de la ciudad c para el nivel de ingreso i y el nivel de agregación r se calcula como

$$IPC_{i,c} = (w_{i,c}^r)^T y_{i,c}^r \quad (2)$$

Con los índices de precio de los tres niveles de ingreso de la ciudad c se construye un vector columna \mathbf{I}_c el cual contiene estos índices y un vector columna \mathbf{p}_c que representa las ponderaciones de los índices anteriores para la ciudad c , tal que

¹ Es decir, $c \in \{\text{Armenia}, \text{Barranquilla}, \text{Bogotá}, \text{Bucaramanga}, \text{Cali}, \text{Cartagena}, \text{Cúcuta}, \text{Florencia}, \text{Ibagué}, \text{Manizales}, \text{Medellín}, \text{Montería}, \text{Neiva}, \text{Pasto}, \text{Pereira}, \text{Popayán}, \text{Quibdó}, \text{Riohacha}, \text{San Andrés}, \text{Santa Marta}, \text{Sincelejo}, \text{Tunja}, \text{Valledupar}, \text{Villavicencio}\}$.

² Para simplificar la notación se omitirá el subíndice correspondiente al tiempo.

$$\mathbf{I}_c = \begin{bmatrix} IPC_{bajo,c} \\ IPC_{medio,c} \\ IPC_{alto,c} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_c = \begin{bmatrix} p_{bajo,c} \\ p_{medio,c} \\ p_{alto,c} \end{bmatrix} \quad (3)$$

El índice de precio en la ciudad c se construye como

$$IPC_c = (\mathbf{I}_c)^T \mathbf{p}_c \quad (4)$$

El IPC nacional se calcula como una combinación lineal de los índices de precios de 24 ciudades del país. Sea \mathbf{IPC} y \mathbf{s} vectores columna que recogen los índices de precios de cada ciudad (IPC_c) y las ponderaciones de las 24 ciudades (s_c), respectivamente; es decir

$$\mathbf{IPC} = \begin{bmatrix} IPC_1 \\ IPC_2 \\ \vdots \\ IPC_{24} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{24} \end{bmatrix} \quad (5)$$

El IPC nacional es

$$IPC = (\mathbf{IPC})^T \cdot \mathbf{s} \quad (6)$$

Finalmente es importante mencionar el hecho que, por razones de reserva estadística, el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE) no reporta información desagregada del IPC para 11 ciudades del país. Esto impide construir de manera desagregada el IPC de esas 11 ciudades³.

De esta manera, nuestro ejercicio de pronóstico “de abajo hacia arriba” puede realizarse desde diferentes niveles de desagregación. Se puede construir el IPC empleando como base (nivel de máxima desagregación) cualquiera de los cuatro criterios: los 9 Grupos, los 34 Subgrupos, las 88 Clases o las 181 categorías de Gasto. En este orden de ideas, tendremos cuatro aproximaciones para construir nuestro pronóstico “de abajo hacia arriba”. La primera aproximación implicará pronosticar para cada uno de los tres niveles de ingresos cada uno de los 181 índices de precios de las categorías de Gasto en las 13 ciudades para las cuales se reporta la información desagregada⁴. A partir de estos pronósticos se construye el IPC de estas ciudades.

³ Estas ciudades son: Armenia, Florencia, Ibagué, Popayán, Quibdó, Riohacha, San Andrés, Santa Marta, Sincelejo, Tunja y Valledupar.

⁴ Estas ciudades son: Medellín, Barranquilla, Bogotá, Cartagena, Manizales, Montería, Neiva, Villavicencio, Pasto, Cúcuta, Pereira, Bucaramanga y Cali.

Posteriormente, construimos pronósticos agregados para las restantes 11 ciudades. Finalmente, se construye el pronóstico “de abajo hacia arriba” para el IPC nacional por medio de la combinación lineal de los 24 pronósticos de las ciudades. La segunda aproximación corresponde a generar pronósticos para los índices de precios de los 88 productos y servicios del nivel de desagregación de Clase para cada nivel de ingresos de las 13 ciudades para las cuales existe información desagregada. De manera similar a la primera aproximación, se construye el IPC nacional empleando los pronósticos del IPC de las 24 ciudades. La tercera aproximación se diferencia de las dos anteriores en que se generan pronósticos para los 34 elementos del nivel de desagregación de Subgrupo para cada nivel de ingresos de las 13 ciudades para las cuales existe información desagregada. La última aproximación genera pronósticos para los 9 Grupos para cada nivel de ingresos de las 13 ciudades para las cuales existe información desagregada. Nuestro pronóstico de inflación mensual será la variación porcentual de los IPC pronosticados. A continuación se describe como se estiman los pronósticos para cada una de estas aproximaciones.

3.3. Estrategia de estimación y construcción de los pronósticos

Como se mencionó anteriormente, para la construcción del pronóstico del IPC será necesario generar pronósticos univariados de cada una de las variables que conforman la “base” de las cuatro aproximaciones descritas. Para cumplir nuestro objetivo de evaluar el desempeño de corto plazo de la aproximación “de abajo hacia arriba”, estimamos un modelo SARIMA para cada producto y servicio perteneciente a los niveles de desagregación descritos arriba. Para evaluar el desempeño de los pronósticos se “guardan” los últimos 24 meses de la muestra. Es decir, se encuentra el modelo SARIMA sin incluir los últimos 24 meses de la muestra. Los pronósticos desagregados de los bienes y servicios obtenidos a través de la metodología del IPC son combinados de la forma descrita por las ecuaciones (1) a (6) para así estimar un pronóstico mensual del IPC nacional.

Para determinar el orden de los modelos SARIMA se emplearán tres criterios de información: el AIC (el criterio de información de Akaike), el AICC (el mismo AIC corregido por muestras finitas) y el BIC (criterio bayesiano). Una vez se encuentra el mejor modelo de acuerdo al respectivo criterio de información, se genera un pronóstico para el siguiente mes de manera recursiva. Es decir, se genera un pronóstico para el siguiente mes, se reestima los parámetros del modelo SARIMA incluyendo el último mes de información (pero manteniendo su estructura autoregresiva y de media móvil) y se vuelve a realizar un pronóstico para el siguiente mes. Esto se hace hasta contar con 12 pronósticos para el índice respectivo del siguiente mes (*one-step-ahead*). El pronóstico para el IPC nacional se construye como se mencionó en la sección anterior; es decir, agregando estos pronósticos individuales.

Lo anterior significa que tendremos para cada una de las cuatro aproximaciones “de abajo hacia arriba” tres conjuntos de pronósticos del IPC nacional: uno para el criterio AIC, otro para el AICC y otro para el BIC. En otras palabras, tendremos 12 métodos de pronósticos que combinan las cuatro niveles de desagregación para la aproximación “de abajo hacia arriba” y los tres criterios de información de los modelos univariados.

Por otro lado, se generan pronósticos agregados del IPC nacional empleando modelos SARIMA y los tres criterios de información mencionados anteriormente. Así, los 12 métodos de pronóstico que implican una aproximación “de abajo hacia arriba” serán comparados con 3 métodos de pronóstico agregados. Dado que nuestro objetivo es pronosticar la inflación, se comparan la inflación asociada al pronóstico del IPC nacional de los 15 métodos. Esta inflación se construye como la variación porcentual mensual entre el último IPC observado y el IPC pronosticado.

3.4. Criterios de evaluación de los métodos de pronósticos

Para evaluar el desempeño de los 12 métodos de pronóstico “de abajo hacia arriba” y de los 3 métodos que emplean la aproximación agregada, haremos una combinación de prueba estadística y métricas tradicionales que se aplicarán a todos los 12 pronósticos recursivos (*one-step-ahead*) para la inflación del siguiente mes. Primero emplearemos la prueba de Diebold y Mariano (1995). Esta prueba compara la precisión de los diferentes métodos de pronóstico. La hipótesis nula de esta prueba es que, al comparar dos métodos, ambos tengan la misma precisión estadística. Estas comparaciones se llevarán a cabo entre los 26 métodos de pronóstico.

Después de considerar la prueba de Diebold y Mariano (1995), utilizaremos las siguientes medidas de bondad de ajuste para evaluar el desempeño de los errores de pronóstico⁵: la raíz del error cuadrático promedio (RECP) y el error absoluto medio (EAM). El RECP computa el promedio de la desviación cuadrada entre la inflación pronosticada y la inflación observada:

$$RECP = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\%IPC_{pronosticado} - \%IPC_{observado})^2} \quad (7)$$

⁵ El error de pronóstico será la diferencia entre la inflación pronosticada y la inflación observada.

donde N es el número de pronósticos (12 en este caso). Por otro lado, el EAM mide la diferencia absoluta de la desviación entre la inflación pronosticada y la inflación observada:

$$EAM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\%IPC_{pronosticado} - \%IPC_{observado}| \quad (8)$$

Además, también se reportarán otras medidas de dispersión como la media, mediana y los valores máximos y mínimos, todo para los errores de pronóstico. Respecto a la conveniencia de utilizar ciertas medidas de ajuste, es necesario mencionar lo planteado por Cuitiño *et al* (2010). En el presente trabajo no emplearemos medidas de ajuste porcentuales debido a que para estas, el valor en el denominador podría ser muy cercano a cero. De cierta forma la medida se magnifica llevando a resultados que pueden ser erróneos. Finalmente, es necesario tener presente que una medida cuadrática como la RECP podría resultar afectada por desviaciones extremas en los pronósticos de la inflación mensual. Sin embargo, al calcular el error absoluto medio se está tratando de atenuar ese sesgo.

3.5. Datos

Para realizar nuestro ejercicio emplearemos información mensual del IPC de Colombia publicada por el DANE en su página web⁶. La muestra bajo estudio abarca el periodo desde enero de 2009 a diciembre de 2015. Durante todo este periodo, el DANE mantiene fija las ponderaciones de los índices. No emplearemos información previa al año 2009 porque en ese año se dio un cambio metodológico que reconfiguró la estructura de clasificación del IPC. La información de los índices de precios y de la inflación es generada para los tres niveles de ingreso y 13 ciudades del país⁷. Para las demás 11 ciudades únicamente existe información desde el nivel de desagregación de Grupo, para los tres niveles de ingreso⁸.

Para determinar el correspondiente modelo SARIMA, se emplea una submuestra que va desde enero de 2009 a diciembre de 2013. Las observaciones para el año 2014 y 2015 son empleadas para evaluar los pronósticos recursivos (fuera de muestra) generados por los 15 métodos de pronóstico descritos anteriormente⁹.

⁶ La información fue descargada en el siguiente link: <http://cubindices.dane.gov.co:8084/Dane/inicioIPC.jsf>.

⁷ Estas ciudades son: Medellín, Barranquilla, Bogotá, Cartagena, Manizales, Montería, Neiva, Villavicencio, Pasto, Cúcuta, Pereira, Bucaramanga y Cali.

⁸ Estas ciudades son: Armenia, Florencia, Ibagué, Popayán, Quibdó, Riohacha, San Andrés, Santa Marta, Sincelejo, Tunja y Valledupar.

⁹ Los cálculos fueron realizados empleando el lenguaje estadístico R (R Core Team, 2016) partiendo del paquete “forecast” (Hyndman y Khandakar, 2008).

4. RESULTADOS DE LAS ESTIMACIONES

Para facilitar el análisis de los resultados, emplearemos la siguiente notación para denominar los resultados de los 12 métodos de pronóstico “de abajo hacia arriba”:

$$r.criterio \quad (10)$$

donde $r \in \{Gasto, Clase, Subgrupo, Grupo\}$ y $criterio \in \{AIC, AICC, BIC\}$. Por ejemplo, el método de pronóstico que parte del nivel de desagregación de Gasto y que emplea el criterio BIC para encontrar el mejor modelo SARIMA de los índices de precio se identifica como *Gasto.BIC*.

En el caso de la aproximación agregada, encontramos que los tres criterios de información seleccionan el mismo modelo SARIMA, por lo que se mostrarán los resultados de un solo criterio de información. Este se denotará como *Agreg.* Así, solo comparamos los 12 métodos de pronóstico “de abajo hacia arriba” y 1 método que emplea la aproximación agregada.

Por encima de la diagonal principal de la Tabla 1 se muestran los estadísticos de la prueba de Diebold y Mariano (1995) (y sus niveles de significancia se expresa con asteriscos) que resultan de la comparación de los métodos de pronóstico asociados a los 12 métodos mencionados arriba. Rechazar la hipótesis nula de la prueba implica que los dos métodos que se comparan tienen una precisión estadística distinta. De otro lado, la diagonal inferior de la Tabla 1 muestra la significancia estadística de la prueba de Diebold y Mariano (1995) cuando partimos de la hipótesis nula de que los pronósticos del modelo 2 (especificados en las columnas de la tabla) son más precisos que los pronósticos del modelo 1 (especificados en las filas de la tabla). Si los estadísticos que se encuentran por encima de la diagonal principal indican que los pronósticos de los dos modelos que se están comparando son estadísticamente distintos, la significancia estadística que se muestra debajo de la diagonal principal definirá cuál de los modelos es más preciso en su pronóstico. De la Tabla 1 se puede concluir lo siguiente:

- i) Existe una diferencia entre los niveles de los pronósticos que generan los diferentes niveles de agregación. Por ejemplo, los métodos que agregan al nivel de Gasto (sin importar el método de selección del orden del modelo SARIMA) generan pronósticos que son estadísticamente diferentes de los que generan los niveles de agregación de Clase, Subgrupo y Grupo (pero solo cuando se selecciona el número de rezagos con el criterio AIC).
- ii) A excepción del caso del nivel de agregación de Grupo, no existe diferencia estadística entre los pronósticos que genera cada nivel de agregación cuando se selecciona el orden del modelo SARIMA con diferentes métodos.

- iii) Los modelos “de abajo hacia arriba” que generan pronósticos estadísticamente diferentes al método agregado son aquellos que emplean el nivel de agregación de Subgrupo y Grupo (pero solo cuando se selecciona el número de rezagos con el criterio AIC). Sin embargo, vale la pena resaltar que los pronósticos del método desagregado a nivel de Clase (para los tres criterios) son estadísticamente diferentes a los pronósticos de los demás métodos¹⁰, excepto cuando se comparan con los pronósticos al nivel de Grupo. Igualmente, los pronósticos al nivel de Subgrupo son estadísticamente diferentes a los pronósticos de los demás métodos¹¹, excepto, de nuevo, cuando se comparan con los pronósticos a nivel de Grupo.

Por otro lado, es interesante anotar que los resultados obtenidos para los diferentes criterios de información son robustos para los diferentes niveles de agregación. En otras palabras, los diferentes criterios de información empleados no generan pronósticos estadísticamente diferentes. La diferencia estadística de los pronósticos proviene del nivel de desagregación de los productos y servicios. Por ejemplo, al comparar los pronósticos de los métodos *Grupo.AIC* y *Clase.AIC* (diagonal superior) la prueba de Diebold y Mariano (1995) concluye que los pronósticos de ambos métodos son estadísticamente distintos. Sin embargo, cuando se comparan los pronósticos de los métodos *Grupo.AIC* y *Grupo.AICC*, la prueba concluye que no existe una diferencia estadísticamente significativa. Lo mismo es cierto si comparamos los pronósticos de los métodos *Clase.AIC* y *Clase.AICC*.

En la misma Tabla 1, por debajo de la diagonal principal, se reportan los valores p de la prueba de una cola cuya hipótesis nula es que los pronósticos del método reportado en la fila genera pronósticos menos precisos o iguales en comparación a los generados por el método reportado en la columna. La alterna de esta prueba implica que el método de la fila es más preciso que el de la columna. Se somborean aquellos valores p que son inferiores a 0.1. A partir de estos resultados podemos concluir que: i) los métodos que parten del nivel de desagregación de Clase (independientemente del criterio de selección) muestran los pronósticos más precisos que el método agregado, y los métodos “de abajo hacia arriba” que emplean los niveles de agregación de Gasto, Subgrupo y Grupo para los criterios de selección AICC y BIC; ii) los métodos de pronóstico que parten del nivel de desagregación de Gasto son más precisos que los métodos de pronósticos al nivel de desagregación de Subgrupo (para los tres criterios de selección) y al nivel de Grupo para los criterios de selección AICC y BIC; iii) los

¹⁰ Aceptando la hipótesis alterna de que los pronósticos asociados al nivel de Clase son estadísticamente más acertados.

¹¹ Aceptando la hipótesis alterna de que los pronósticos asociados al nivel de Subgrupo son estadísticamente menos acertados.

métodos de pronóstico al nivel desagregación de Subgrupo solo son más precisos que los métodos de pronóstico a nivel de Grupo para los criterios de selección AICC y BIC; iv) los pronósticos del enfoque agregado solo son más precisos cuando se comparan a los pronósticos asociados al método que parte del nivel de desagregación de Subgrupo; y v) el método de pronóstico de *Grupo.AIC* muestra los pronósticos más precisos que todos los otros métodos “de abajo hacia arriba” considerados y el agregado. Una situación importante que puede destacarse de la Tabla 1 es el hecho que tener más información no es algo necesariamente conveniente. A pesar que es aparente que los métodos desagregados funcionan mejor al momento de pronosticar la inflación mensual un paso delante, relativo a lo que puede hacer el método agregado, no es cierto que entre más desagregada sea la lista de productos y servicios considerados, más acertado sea el pronósticos obtenido.

Según la Tabla 1, las pruebas de Diebold y Mariano (1995) brindan evidencia de que los pronósticos del método *Grupo.AIC* presentan el mejor desempeño entre los 13 métodos de pronóstico que consideramos en el presente análisis. La Tabla 2 muestra las medidas de bondad de ajuste de los pronósticos de los 13 métodos evaluados, además de la media, la mediana y los valores máximos y mínimos de los errores de pronóstico. Cuando comparamos el desempeño de estos 13 métodos de pronóstico, las tres medidas de bondad de ajuste favorecen a los métodos basados en la aproximación “de abajo hacia arriba”. Para el RECP, el método *Grupo.AIC* reporta el menor valor. Por otro lado, el método *Clase.AICC* reporta los menores valores para EAM.

Tabla 1. Pruebas Diebold-Mariano entre métodos de pronóstico del IPC mensual para los métodos que emplean las series de índices mensuales.

	<i>Gasto.AIC</i>	<i>Gasto.AICC</i>	<i>Gasto.BIC</i>	<i>Clase.AIC</i>	<i>Clase.AICC</i>	<i>Clase.BIC</i>	<i>Subgrupo.AIC</i>	<i>Subgrupo.AICC</i>	<i>Subgrupo.BIC</i>	<i>Grupo.AIC</i>	<i>Grupo.AICC</i>	<i>Grupo.BIC</i>	<i>Agreg</i>
<i>Gasto.AIC</i>		-0.894	-0.173	3.0029***	3.1667***	1.8057*	-5.0054***	-5.3978***	-4.4758***	2.2565**	-0.8803	-0.8973	0.7296
<i>Gasto.AICC</i>	0.8097		-0.0139	3.136***	3.2989***	1.9472*	-4.9435***	-5.3157***	-4.3457***	2.2949**	-0.8545	-0.8725	0.7694
<i>Gasto.BIC</i>	0.5679	0.5055		2.1383**	2.313**	2.2946**	-4.6103***	-5.0492***	-5.4141***	2.336**	-0.8304	-0.8512	0.7087
<i>Clase.AIC</i>	0.0032	0.0023	0.0217		1.0771	-0.4124	-7.6732***	-8.2562***	-6.6447***	1.7768*	-1.3144	-1.3303	0.1403
<i>Clase.AICC</i>	0.0022	0.0016	0.0150	0.1463		-0.6449	-7.722***	-8.3599***	-6.9169***	1.7439*	-1.3421	-1.3578	0.1035
<i>Clase.BIC</i>	0.0420	0.0319	0.0156	0.6581	0.7373		-6.6444***	-7.1965***	-7.9685***	1.8931*	-1.2532	-1.2799	0.21
<i>Subgrupo.AIC</i>	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000		-1.4242	0.0064	3.4478***	0.0487	0.0245	2.2557**
<i>Subgrupo.AICC</i>	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9161		0.294	3.4978***	0.0826	0.0582	2.3054**
<i>Subgrupo.BIC</i>	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.4975	0.3857		3.4391***	0.0478	0.0237	2.1436**
<i>Grupo.AIC</i>	0.0169	0.0156	0.0143	0.0444	0.0473	0.0355	0.0011	0.0010	0.0011		-1.8033*	-1.8321*	-1.9467*
<i>Grupo.AICC</i>	0.8061	0.7992	0.7926	0.8992	0.9037	0.8886	0.4808	0.4674	0.4812	0.9578		-0.1947	1.0675
<i>Grupo.BIC</i>	0.8106	0.8040	0.7983	0.9018	0.9061	0.8933	0.4903	0.4771	0.4907	0.9600	0.5763		1.0824
<i>Agreg</i>	0.2365	0.2247	0.2428	0.4448	0.4592	0.4178	0.0170	0.0153	0.0214	0.9681	0.1484	0.1452	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 2. Métricas de bondad de ajuste de los 13 métodos de pronóstico.

	Media	Mediana	Máximo	Mínimo	Rango	RECP	EAM
<i>Gasto.AIC</i>	-0.2127%	-0.2022%	0.0590%	-0.8225%	0.8814%	0.2879%	0.2205
<i>Gasto.AICC</i>	-0.2128%	-0.2107%	0.0586%	-0.8184%	0.8770%	0.2877%	0.2215
<i>Gasto.BIC</i>	-0.2159%	-0.2340%	0.0358%	-0.7903%	0.8261%	0.2855%	0.2216
<i>Clase.AIC</i>	-0.1974%	-0.1855%	0.0774%	-0.8752%	0.9526%	0.2831%	0.2046
<i>Clase.AICC</i>	-0.1967%	-0.1850%	0.0664%	-0.8782%	0.9447%	0.2824%	0.2037
<i>Clase.BIC</i>	-0.1985%	-0.2099%	0.0685%	-0.8734%	0.9419%	0.2820%	0.2067
<i>Subgrupo.AIC</i>	-0.2606%	-0.2737%	0.0405%	-0.8784%	0.9189%	0.3271%	0.6642
<i>Subgrupo.AICC</i>	-0.2618%	-0.2689%	0.0451%	-0.8772%	0.9223%	0.3279%	0.2655
<i>Subgrupo.BIC</i>	-0.2612%	-0.2781%	0.0323%	-0.8752%	0.9074%	0.3258%	0.2639
<i>Grupo.AIC</i>	-0.0804%	-0.0560%	0.1856%	-0.4241%	0.6097%	0.1821%	0.2622
<i>Grupo.AICC</i>	-0.2273%	-0.2144%	0.1677%	-1.9068%	2.0745%	0.4531%	0.2617
<i>Grupo.BIC</i>	-0.2284%	-0.2331%	0.1883%	-1.9136%	2.1018%	0.4531%	0.2628
<i>Agreg</i>	0.0986%	0.1111%	0.6914%	-0.2623%	0.9537%	0.2306%	0.5429

Por otro lado, si se considera el rango de los errores de pronóstico, se encuentra que el que tiene menor rango es el método *Grupo.AIC*. Este método también presenta el error de pronóstico medio y mediano más pequeño (en valor absoluto). El rango del error de pronóstico del método *Grupo.AIC* es aproximadamente un 55% menor que el del método *Clase.AICC*. La media del método *Grupo.AIC* es 145% menor que el del método *Clase.AICC* y la mediana es 230% menor. Es decir empleando criterios que solo tienen en cuenta la magnitud absoluta del error de pronóstico el mejor método de estimación corresponde a *Grupo.AIC*.

5. COMENTARIOS FINALES

Este trabajo permite evidenciar que para el caso de la inflación mensual en Colombia, y el período de estudio seleccionado, emplear un método “de abajo hacia arriba” para pronosticar la inflación del siguiente mes tiene un mejor comportamiento que emplear un modelo SARIMA agregado. En especial encontramos que partiendo de los índices de precios desagregados al nivel de Grupo¹² por ciudad y por nivel de ingresos se puede construir un mejor pronóstico para la inflación mensual durante el 2014 y 2015, en lugar de emplear un modelo univariado para el IPC nacional total.

El método “de abajo hacia arriba” que mejor se comportó implica estimar modelos SARIMA para 9 conjuntos de productos y servicios para los niveles de ingresos bajo, medio y alto de las 13 ciudades para las cuales se reporta la información desagregada. Estas ciudades son: Medellín, Barranquilla, Bogotá, Cartagena, Manizales, Montería, Neiva, Villavicencio, Pasto, Cúcuta, Pereira, Bucaramanga y Cali. Esto implica 351 modelos SARIMA. Para las restantes 11 ciudades que cubre el IPC en Colombia se construye un pronóstico agregado por ciudad. Empleando estos 362

¹² Y empleando el AIC para seleccionar el orden de los modelos SARIMA.

pronósticos se construye una combinación lineal de estos que produce el pronóstico de la inflación mensual para el total nacional. Según nuestros resultados, este pronóstico es estadísticamente mejor que emplear un método agregado para pronosticar la inflación mensual durante 2014 y 2015.

De esta manera, nuestros resultados muestran que, para pronosticar la inflación en el corto plazo, es útil emplear información desagregada que incorpora de forma diferente los choques macroeconómicos y microeconómicos que se presentan en la economía colombiana. Estos choques pueden ser enmascarados en el comportamiento agregado. Así un método como el empleado puede incorporar mejor toda la información disponible.

No obstante estos resultados sugerirían que los métodos “de abajo hacia arriba” son mejores que una aproximación agregada, se deberá evaluar en futuras investigaciones el comportamiento de pronóstico de los métodos “de abajo hacia arriba” para horizontes de tiempo más amplios. Por otro lado, nuestro ejercicio solo se concentró en el comportamiento de los pronósticos puntuales y en ningún momento considera el comportamiento de los intervalos de predicción que pueden generar las diferentes aproximaciones. Futuras investigaciones tendrán que evaluar el comportamiento de los intervalos de predicción de las aproximaciones “de abajo hacia arriba”.

REFERENCIAS

- Benalal, N.; del Hoyo, J. L.; Roma, M.; Landau, B. & Skudelny, F. (2004). "To aggregate or not to aggregate? Euro Area Inflation Forecasting". ECB Working Paper No. 374. European Central Bank.
- Cuitiño, F.; Ganón, E.; Tiscordio, I. & Vicente, L. (2010). "Modelos univariados de series de tiempo para predecir la inflación a corto plazo". Documento de trabajo No. 008-2010. Banco Central de Uruguay.
- Demers, F. & De Champlain, A. (2005). "Forecasting Core Inflation in Canada: Should We Forecast the Aggregate or the Components?". Working paper 2005-44. Bank of Canada.
- Diebold, F. X. & Mariano, R. S. (1995). "Comparing predictive accuracy", *Journal of Business & Economic Statistics*, 13, 253–265.
- Dornbusch, R. (1976). "Expectations and exchange rate dynamics", *Journal of Political Economy*, 84(6), 1161–1176.
- Espasa, A., Senra, E. & Albacete, R. (2002). "Forecasting inflation in the European Monetary Union: A disaggregated approach by countries and by sectors", *The European Journal of Finance*, 8(4), 402–421.

- Firth, M. (1979). "The Relationship Between Stock Market Returns and Rates of Inflation", *The Journal of Finance*, 34(3), 743–749.
- Fritzer, F., Moser, G. & Scharler, J. (2002). "Forecasting Austrian HCPI and its Components using VAR and ARIMA Models". Working Paper 73, Oesterreichische Nationalbank.
- Grunfeld, Y. & Griliches, Z. (1960). "Is aggregation necessarily bad?", *The Review of Economics and Statistics*, 42(1), 1–13.
- Harvey, S. K. & Cushing, M. J. (2014). "Does Using Disaggregate Components Help in Producing Better Forecasts for Aggregate Inflation?", *Journal of Economics and Development Studies*, 2(2), 527–546.
- Hendry, D. F. & Clements, M. P. (2004). "Pooling of forecasts", *Econometrics Journal*, 5, 1–31.
- Hendry, D. F. & Hubrich, K. (2011). "Combining disaggregate forecasts or combining disaggregate information to forecast an aggregate", *Journal of Business & Economic Statistics*, 29(2), 216–227.
- Hubrich, K. (2005). "Forecasting euro area inflation: Does aggregating forecasts by HICP component improve forecast accuracy?", *International Journal of Forecasting*, 21(1), 119–136.
- Hyndman, R. J., Khandakar, Y. (2008). "Automatic Time Series Forecasting: The forecast Package for R", *Journal of Statistical Software*, 27(3), 1-22.
- Miller, K. D., Jeffrey, F. J. & Mandelker, G. (1976). "The 'Fisher effect' for risky assets: An empirical investigation", *The Journal of Finance*, 31(2), 447–458.
- Nelson, C. R. (1976). "Inflation And Rates Of Return On Common Stocks", *The Journal of Finance*, 31(2), 471–483.
- Pino, G., Tena, J. D., & Espasa, A. (2013). "Forecasting disaggregates by sectors and regions: the case of inflation in the euro area and Spain". Working Paper 13-08. Statistics and Econometrics Series 07. Universidad Carlos III de Madrid.
- R Core Team (2016). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna.
- Solnik, B. (1983). "The relation between stock prices and inflationary expectations: The international evidence", *The Journal of Finance*, 38(1), 35–48.
- Svensson, L. E. O. (1997). "Inflation forecast targeting: Implementing and monitoring inflation targets", *European Economic Review*, 41(6), 1111–1146.
- Theil, H. (1954). *Linear aggregation of economic relations*. North-Holland Pub. Co.