REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA (33). Páginas 191-225.
Junio de 2022. ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.
www.upo.es/revistas/index.php/RevMetCuant/article/view/4715

Difusión de choques de productividad en redes productivas con competencia imperfecta y quiebra de empresas

Ramírez-Álvarez, José
Escuela Politécnica Nacional (Quito, Ecuador)
Correo electrónico: jose.ramirez@epn.edu.ec

Pérez-Oviedo, Wilson
Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales (Quito, Ecuador)
Correo electrónico: wperez@flacso.edu.ec

RESUMEN

La red productiva representa un mecanismo económico clave para comprender cómo los choques microeconómicos se propagan en el sistema económico. En esta línea se han desarrollo diversos trabajos teóricos bajo el supuesto de libre competencia, sin considerar el poder de mercado ni la posible quiebra de empresas. El presente documento estudia la difusión de choques de productividad en redes productivas con competencia imperfecta y quiebra de empresas. Para ello, se asume que las empresas pueden fijar el precio de su producto, tomando en cuenta que los precios inciden en la posibilidad de que sus compradores los contraten. Este hecho supone que las transacciones comerciales podrían fallar, a causa, por ejemplo, de que los productos no tienen la calidad o características esperadas, lo que generaría pérdidas para el comprador. En este contexto, el comprador no solo busca el mayor beneficio esperado, sino también el menor riesgo de pérdida, lo que lo lleva a asignar una probabilidad de contratación a cada proveedor. Por otro lado, la quiebra de empresas se representa mediante un proceso estocástico en el que aquellas empresas con peor desempeño durante el tiempo tienen mayores posibilidades de salir de la industria. Los resultados muestran distintos efectos cascada sobre los precios y las cantidades que se transan en la red productiva, ante choques de productividad negativos. En particular, se encuentra un efecto cascada "aguas arriba" en la quiebra de las empresas durante el transcurso del tiempo, el cual se trasmite exclusivamente hacia los proveedores de menor riesgo en la red.

Palabras clave: redes productivas, competencia imperfecta, quiebra de empresas, equilibrio.
JEL classification: D85; D43; D58.
MSC2010: 90C33; 90C35; 91B50.

Artículo recibido el 29 de julio de 2020 y aceptado el 10 de julio de 2021.

Productivity Shocks Diffusion in Firms Networks with Imperfect Competition and Bankruptcy

ABSTRACT

The productive network represents a key economic mechanism to understand how microeconomic shocks spread in the economic system. At this scope, several theoretical works have been developed under the assumption of free competition, without considering market power or the possible bankruptcy of firms. This document studies the diffusion of productivity shocks in productive networks with imperfect competition and firms' bankruptcy. It is assumed that firms can to set the price of their product, taking into account that prices affect the possibility of their buyers hiring them. This fact means that transactions could fail because, for instance, the products do not have the expected quality or characteristics, which would generate losses for the buyer. In this context, the buyer seeks not only the highest expected benefit, but also the lowest risk of loss, which leads him to assign a hiring probability to each supplier. On the other hand, firms' bankruptcy is represented by a stochastic process in which firms with worse performance over time are more likely to leave the industry. The model's results show different cascade effects on prices and quantities exchanged in the production network to negative productivity shocks. Interestingly, we observe an upstream cascade effect on firm bankruptcy over time, which is transmitted exclusively to suppliers with the lowest risk in the production network.

Keywords: productive networks, imperfect competition, firms bankruptcy, equilibrium.
Clasificación JEL: D85; D43; D58.
MSC2010: 90C33; 90C35; 91B50.

1. Introducción

Supongamos que tenemos un conjunto de empresas cuyas funciones de producción son Hicks-neutrales y que constituyen una red direccionada y ponderada, donde las conexiones son de proveedor a comprador de insumos productivos. Si algunas de las empresas reciben un choque, positivo o negativo, en su productividad: ¿Cuáles son los efectos en la red productiva y en la macroeconomía en su conjunto?

Para contestar esta pregunta la mayoría de los autores, tal como lo explicamos más adelante en la revisión de la literatura, asumen empresas cuyas funciones de producción admiten algún grado de sustitución entre insumos, y mercados perfectamente competitivos, donde empresas idénticas actúan como tomadores de precios en un equilibrio walrasiano. En este contexto, un choque negativo, por ejemplo en la productividad de toda una industria, originará un incremento del precio del insumo que produce, con la consecuente sustitución de este bien por otros más baratos en la función de producción de las empresas que lo usan, y la reducción de la producción total y de la demanda de insumos por parte de la industria que recibió el choque original; efectos que se transmitirán "aguas abajo" (afectando a las empresas que usan los bienes producidos por esta industria) y "aguas arriba" (afectando a las empresas que proveen insumos a esta industria). Desde esta perspectiva, las consecuencias macroeconómicas no suelen ser importantes, pues este tipo de efectos tienden a debilitarse a medida que el choque se propaga en la red productiva. Nuestra hipótesis es que existen otros factores de difusión de un choque microeconómico, como son: la competencia imperfecta en mercados importantes desde el punto de vista de su posición en la red productiva y, quizá más relevante, la posibilidad de quiebra de las empresas. En el escenario de equilibrio walrasiano y competencia perfecta, la quiebra de una empresa originaría el desplazamiento de la oferta (y consecuentemente el de la demanda de insumos y de la contratación de trabajo) hacia las otras empresas que producen el mismo insumo.

Para abordar conjuntamente la competencia imperfecta y la posibilidad de quiebra de empresas, en el presente documento se construye un modelo económico basado en una red, donde los nodos representan las empresas y las aristas direccionadas y ponderadas representan la venta de insumos de una empresa a otra. Esta economía incluye también un hogar representativo, cuya relación con las empresas es doble: como proveedor de trabajo y como comprador de bienes finales. Se asume una economía cerrada.

Las empresas están caracterizadas por: (1) Una función de producción CES Hicks-Neutral. (2) Una función de evaluación de las ofertas de insumos que recibe, que toma en cuenta la variación del beneficio esperado al asignar el contrato de provisión de insumos a una firma en lugar de otra, y la variación del riesgo que esta decisión implica. (3) Una percepción del riesgo respecto a la falla del contrato de provisión de insumos, para cada uno de los proveedores potenciales de la empresa. Este riesgo es menor cuando el insumo es homogéneo (carburantes, por ejemplo) y, por tanto, las características del bien no varían según el proveedor; pero es mayor cuando el bien tiene características especiales a las que se ha adaptado el proceso productivo de la empresa, o formas y tiempos específicos de entrega y financiamiento. Los proveedores potenciales se dividen en habituales, es decir, aquellos a los que la empresa ha contratado recurrentemente en el pasado, y los nuevos, cuya contratación tiene una percepción de riesgo mayor. Las características (2) y (3) hacen que la decisión del comprador sea asignar a cada proveedor una probabilidad de ser contratado, en lugar de, como es tradicional, asignar con certeza el contrato a la empresa que le ofrezca el mayor beneficio esperado.

En este modelo, las empresas que producen bienes intermedios (insumos) deciden los precios de venta de tal manera que maximicen su beneficio esperado, teniendo en cuenta que estos precios inciden en la probabilidad de que sus compradores los contraten. Al tomar esta decisión, cada empresa asume que el resto de firmas en la red productiva actúan de la misma manera, tomando como dados los precios de los otros, por lo que el primer equilibrio de esta economía es un equilibrio de Nash. Por otro lado, las empresas que producen bienes de consumo final operan en mercados de libre competencia, es decir son tomadores de precios. Por último, el hogar representativo demanda bienes finales y oferta trabajo maximizando su utilidad esperada.

Así, la economía se convierte en un espacio probabilístico donde cada realización representa un subgrafo de la red productiva, en el que las aristas son los contratos de provisión de insumos de una empresa a otra efectivamente asignados. Los precios de los insumos determinados por el equilibrio de Nash establecen la probabilidad en el espacio probabilístico de la red productiva. Para cada realización en este espacio, ya con los precios de los insumos definidos, cada empresa decide la cantidad de trabajo a contratar y de insumos a comprar, y el hogar define su demanda de productos finales maximizando su utilidad, de tal forma que se alcanza un equilibrio oferta-utilización. En su conjunto, ambos equilibrios representan lo que denominamos en este documento el Equilibrio General de Mercado (EGM), es decir, el conjunto de precios que constituye un equilibrio de Nash ex-ante y el conjunto de cantidades que garantizan el equilibrio oferta-utilización ex-post.

La quiebra de empresas en este modelo es también un evento aleatorio. Aquí, la probabilidad de que una empresa quiebre es mayor mientras mayor es el número de períodos en los que la empresa obtuvo malos resultados. Este hecho se incorpora en el modelo mediante un proceso estocástico en el que cada periodo de tiempo se encuentra determinado por el EGM de las empresas que subsistieron hasta ese instante.

Teniendo en cuenta este modelo, la simulación de un choque de productividad sobre una empresa en una red simple genera diversos resultados. Primero, la empresa afectada tendrá que incrementar sus precios, pues es más costoso para ella producir. Esto hará que sus competidoras también tengan margen para incrementar sus precios, a pesar de no haber sufrido un impacto negativo o, si mantienen sus precios anteriores, tendrán mayores probabilidades de ser escogidas y, por tanto, de desplazar al proveedor habitual. Segundo, los compradores que se ubican "aguas abajo" de la empresa afectada tendrán que asumir precios mayores en la demanda de sus insumos, por lo que aumentarán sus precios de venta y, consecuentemente, se reducirán sus probabilidades de ser contratados. Tercero, los proveedores habituales que se ubican "aguas arriba" de la empresa afectada pueden esperar una reducción en sus ventas, por lo que deben reducir sus precios en busca de mayores opciones de ganar contratos; ambos factores deterioran sus ganancias. Si estos efectos negativos en las empresas que recibieron el choque original o en las otras que sufrieron los efectos difundidos a través de la red productiva, son lo suficientemente grandes y permanentes, algunas empresas pueden quebrar. La quiebra de una empresa afecta negativamente a sus proveedores habituales, que ven su demanda disminuida y deben bajar precios para competir por otros compradores; y, aguas abajo, afecta a sus compradores habituales que deben recurrir a empresas que quizá no ofrezcan el insumo con las características que ellos requieren y podrían aumentar sus precios ante la disminución del número de competidores.

El presente estudio contribuye a la literatura sobre difusión de choques microeconómicos en redes productivas. Carvalho (2010) muestra cómo choques idiosincráticos en los sectores productivos pueden originar fluctuaciones en los agregados macroeconómicos. Para ello, utiliza un modelo de equilibrio general con un hogar representativo y varios sectores productivos con preferencias y tecnologias Cobb-Douglas. Asume que el hogar posee una preferencia por el ocio, por lo que la oferta de trabajo es endógena. Teniendo en cuenta este modelo, el autor encuentra que los choques sobre los sectores productivos pueden propagarse en el sistema económico y afectar los agregados macroeconómicos. Este resultado se cumple para redes productivas en las cuales la demanda es poco diversificada y existe un grupo reducido de sectores que acapara la oferta. Son los choques en estos sectores los que se multiplican rápidamente en la red productiva y amplían las fluctuaciones de los agregados económicos.

El trabajo de Acemoglu et al. (2012) es otra de las principales referencias sobre difusión de choques microeconómicos en redes productivas. [4]Utilizando un modelo de equilibrio similiar con tecnologías y preferencias Cobb-Douglas en mercados perfectamente competitivos, estos autores demuestran que un choque de productividad sobre un sector productivo puede propagarse "aguas abajo" sobre el resto de sectores en la economía, dependiendo del grado con que los sectores productivos participan como proveedores en la red. En particular, se hallan dos importantes resultados. Primero, los choques sobre proveedores que poseen un rol más central tienen mayor influencia en la volatilidad de los agregados macroeconómicos. Segundo, cuanto más heterogéneo sea el rol que desempeñan los sectores productivos como proveedores de insumos, mayor será la incidencia de estos choques. Varias investigaciones sobre difusión en redes productivas adoptan este planteamiento teórico llegando a resultados similares (Acemoglu et al., 2016, 2017; Atalay, 2017; Carvalho & Gabaix, 2013; Stella, 2015). Nuestro trabajo se diferencia de estos estudios porque considera competencia imperfecta y posibilidad de quiebra de empresas.

El presente estudio se relaciona más de cerca con los trabajos de Grassi (2017) y Baqaee (2018) sobre efectos cascada en economías con fallas de mercado. Por un lado, Grassi (2017) estudia el origen de las fluctuaciones de los agregados macroeconómicos, enfocándose en la organización industrial de los sectores productivos. Para ello, elabora un modelo de equilibrio con competencia imperfecta donde las empresas deciden sus precios de venta de manera estratégica a la Bertrand, con un grado de sustitución CES entre ellas. Teniendo en cuenta este modelo, Grassi (2017) manifiesta que los choques microeconómicos pueden generar la difusión de dos efectos: un efecto cascada aguas abajo debido al cambio de los precios y un efecto aguas arriba debido al cambio en los márgenes de ganancia. El presente modelo añade la posibilidad de quiebra de empresas, no considerado por este autor.

Por su parte, Baqaee (2018) aborda la difusión de choques en la productividad laboral en una red productiva considerando poder de mercado y la salida y entrada de empresas en las industrias. El mecanismo fundamental es la competencia monopolística que, mediante funciones de producción CES anidadas, puede tener diferente grado en cada industria. Adicionalmente, el decremento (incremento) del número de empresas en una industria puede originar una caída (subida) en las economías de escala externas, en forma de un incremento (caída) del mark-up en la industria y una reducción (incremento) de su variedad de productos. Por ello, un choque de productividad negativo en una industria, por ejemplo, puede originar la salida de productores que buscan mayor rentabilidad en otras industrias, afectando tanto a sus proveedores como compradores, cuyas industrias pueden experimentar, a su vez, salidas o entradas, difundiendo y quizá amplificando el choque original. El modelo permite hacer un ejercicio de estática comparativa de dos situaciones (antes y después del choque de productividad laboral) en donde el equilibrio significa que cada empresa tiene cero ganancias y, por tanto, la entrada y salida de empresas (con el consiguiente movimiento de factores) ha concluido.

Nuestro trabajo se asemeja al de Baqaee (2018) en cuanto a la inclusión de diferentes grados de poder de mercado en las industrias. Como se ha dicho, incorpora la posibilidad de que empresas salgan de su industria, al igual que nosotros consideramos la posibilidad de quiebra de las empresas. Aquí aparece una diferencia fundamental: cuando Baqaee (2018) permite que las empresas y factores se muevan a otra industria, considerando un nuevo punto de equilibrio de la economía, está pensando en el medio y largo plazo, cuando ese tipo de movilidades pueden concretarse. En cambio, nuestro modelo no permite tal movilidad siendo, por tanto, una perspectiva de corto plazo en la que la quiebra de una empresa no se convierte inmediatamente en incremento del número de empresas en otra industria; por ello, la quiebra de una empresa, en nuestro modelo, es un fuerte factor de amplificación de un choque negativo. Los dos enfoques también tienen grandes diferencias en cuanto a las técnicas de modelización, ya que el presente trabajo aporta una forma de modelar el poder de mercado distinta a la competencia monopolística, que se basa en las características específicas de un mismo insumo cuando es producido por empresas diferentes, en la adaptación del proceso productivo del comprador a las características específicas de un proveedor y, por tanto, en el riesgo que supone cambiar de proveedor. Además, modelamos de forma distinta las decisiones bajo riesgo (el modelo de Baqaee (2018) es un modelo determinístico) obteniendo como decisión una elección probabilística de adjudicar la compra a cada uno de los potenciales proveedores.

De hecho, una de nuestras aportaciones es incluir el riesgo en la toma de decisiones de los productores. Si bien Carvalho (2010), Carvalho y Gabaix (2013), Stella (2015), Acemoglu et al. (2016), Acemoglu et al. (2017) y Atalay (2017) (entre otros) suponen choques aleatorios, también consideran que, una vez realizado el choque, es perfectamente conocido por los agentes; es decir, estos toman decisiones en certidumbre. En nuestro modelo, el hecho de que los otros agentes decidan asignando una probabilidad a cada una de las opciones, hace que la red misma sea aleatoria y, por tanto, cada empresario deba tomar decisiones bajo riesgo, que se incrementa ante la presencia de un choque negativo.

El resto del documento se encuentra organizado de la siguiente forma. La segunda sección muestra el planteamiento de la red productiva, el comportamiento de cada uno de los agentes económicos, el Equilibrio General de Mercado (EGM) y el proceso de quiebra de empresas. La tercera sección hace un ejercicio de simulación a partir de una red productiva pequeña y sencilla, y analiza cómo los choques de productividad de las empresas se difunden en el aparato productivo. Finalmente, la cuarta sección presenta las conclusiones del estudio.

2. Modelo

En esta sección se plantea el modelo para el análisis de una red productiva con competencia imperfecta y quiebra de empresas. El sistema económico está conformado por un hogar representativo h y las empresas $J = \{1,2, \dots, N\}$ que realizan transacciones en los mercados de bienes $I = \{1,2, \dots, M\}$ y en el mercado de trabajo l. Se supone $N > M$.

La red productiva se encuentra definida por un grafo dirigido $R = (V, \Gamma)$, donde $V = J \cup \{h\}$ son los nodos que representan el conjunto de empresas J y el hogar representativo h, y $\Gamma \subset V \times V$ son las aristas que representan las transacciones de compra-venta que pueden realizar estos agentes en los mercados de bienes I y el mercado de trabajo l. Cabe resaltar que esta red es potencial, es decir, comprende todas las posibles transacciones entre las empresas.

Cada empresa $j \epsilon J$ produce un solo bien representado por el conjunto $a(j)$ y demanda un conjunto de insumos representado por el conjunto $b(j)$. Por supuesto $a(j) \subset I, |a(j)| = 1$, y $b(j) \subset I \cup \{l\}$. Se asume que las empresas no ofertan productos de su propio insumo y que siempre requieren trabajo $\left(\text{e.d. } a(j) \cap b(j) = \emptyset, l \in b(j)\right)$. El conjunto de producción de las empresas cumple los supuestos de libre disponibilidad, *no free lunch*, es un conjunto cerrado e incluye la posibilidad inacción. Por otro lado, el hogar representativo h oferta el factor trabajo $a(h) = \{l\}$ y demanda el conjunto de bienes $b(h) \subset I,\ b(h) \neq \emptyset$. La preferencia del hogar se asume racional, continua, localmente no satisfecha y estrictamente convexa.

Las correspondencias $a(j)$ y $b(j)$ se encuentran definidas de tal manera que todos los bienes tienen al menos un proveedor y un comprador.

$$\forall i \in I \cup \{l\}, \exists j, j' \in V, j \neq j' \mid \{i\} = a(j) \ \wedge \ i \in b(j') \qquad [1]$$

Estas correspondencias asumen que las empresas se dedican exclusivamente a la producción de un solo tipo de bien, ya sea bien de consumo intermedio o final, no ambos. En términos formales, sea $I^{\mathrm{m}} = I \backslash b(h)$ el conjunto de bienes de consumo intermedio de cardinalidad M^{m}, y $I^{\mathrm{g}} = b(h)$ el conjunto de bienes de consumo final de cardinalidad M^{g}. Asimismo, sea $J^{\mathrm{m}} = \{j \in J \mid a(j) \subset I^{\mathrm{m}}\}$ el conjunto de empresas que producen bienes de consumo intermedio de cardinalidad N^{m}, y $J^{\mathrm{g}} = \{j \in J \mid a(j) \subset I^{\mathrm{g}}\}$ el conjunto de empresas que producen bienes de consumo final de cardinalidad N^{g}. De esta manera se cumple que:

$$J^{\mathrm{m}} \cap J^{\mathrm{g}} = \emptyset, J^{\mathrm{m}} \cup J^{\mathrm{g}} = J$$

Sea $c(k, i)$ el conjunto de proveedores potenciales del insumo $i \in b(k) \backslash \{l\}$ para la empresa $k \in J$. Este conjunto, para toda empresa y todo insumo distinto de trabajo, se asume está integrado por dos proveedores potenciales $c(k, i) = \{j, \bar{j}\}$, donde j es el proveedor habitual, es decir, aquella empresa a la cual contrata regularmente el comprador k para la provisión del insumo i; y $\bar{j}$ es el proveedor rival, es decir, aquella empresa que nunca antes ha transado con el comprador k y que trata de desplazar al proveedor j.

En términos formales, el conjunto $c(k,i)$ cumple con la siguiente condición:

$$\forall k \in J, \forall i \in b(k), \exists c(k,i) = \{j, \bar{\jmath}\} \subset J^{\mathrm{m}}, j \neq \bar{\jmath} \mid a(\bar{\jmath}) = a(j) = \{i\}$$

Las correspondencias $a(j), b(j), c(k,i)$ permiten definir la estructura de la red productiva. Aquí, la arista (j,k) forma parte de la red $R = (V, \Gamma)$ en cualquiera de los siguientes casos: el hogar representativo h provee trabajo a las empresas $k \in J$; la empresa $j \in J$ produce bienes de consumo final para el hogar representativo $k = h$; o la empresa j es un proveedor (habitual o rival) de la empresa k. Estas condiciones se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{gathered} \forall j \in J, \qquad a(h) \cap b(j) \neq \emptyset \Rightarrow (h,j) \in \Gamma \\ \forall j \in J, \qquad a(j) \cap b(h) \neq \emptyset \Rightarrow (j,h) \in \Gamma \\ \forall j,k \in J, j \neq k{:}\, \exists i \in b(k) \mid j \in c(k,i) \Rightarrow (j,k) \in \Gamma \end{gathered}$$

En esta red, el comportamiento de las empresas como compradoras de insumos se basa en un enfoque de elección probabilística. Cada empresa $k \in J$ establece una probabilidad ψ_{jk} de asignar efectivamente el contrato de provisión del insumo i al proveedor $j \in c(k,i)$. Este comportamiento se produce por la falta de información que posee el comprador respecto a sus proveedores y el *trade-off* entre beneficio esperado y riesgo que afronta. El planteamiento formal de este proceso de elección se realiza en la siguiente sección.

Por tanto, las probabilidades ψ_{jk} dependen de los precios de venta que establecen los proveedores en la red productiva. Sea $p^{\mathrm{m}} = \left(p_{jk}^{\mathrm{m}}\right) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^{N^{\mathrm{m}}}$ los precios que establecen las empresas que producen bienes intermedios, donde p_{jk}^{m} es el precio de oferta del proveedor j a la empresa k, cuando $j \in c(k,i), a(j) = \{i\}$. Entonces, la probabilidad ψ_{jk} que tiene el comprador k de contratar el proveedor habitual j se encuentra determinada por el precio que ofrece este proveedor p_{jk}^{m} y el precio que ofrece el proveedor rival $p_{\bar{\jmath}k}^{\mathrm{m}}$:

$$\forall k \in J, \forall i \in b(k), \qquad \psi_{jk} = \psi_{jk}\left(p_{jk}^{\mathrm{m}}, p_{\bar{\jmath}k}^{\mathrm{m}}\right) \;\; j, \bar{\jmath} \in c(k,i)$$

Estas funciones permiten definir el espacio probabilístico (Ω, Ψ), donde $\Omega = \left\{\omega = \left(V, \hat{\Gamma}\right) \mid \hat{\Gamma} \subseteq \Gamma \right\}$ es el conjunto de realizaciones de la red productiva $R = (V, \Gamma)$. Aquí, la arista $(j,k) \in \hat{\Gamma}$ si la empresa k efectivamente asignó el contrato de provisión a la empresa j (Cabe subrayar que cada realización $\omega \in \Omega$ representa un conjunto diferente de transacciones efectivas entre las empresas, es decir representa un subgrafo de R). Por otro lado, $\Psi(\omega \mid p^{\mathrm{m}})$ es la probabilidad de la realización $\omega \in \Omega$, dado los precios p^{m}.

El conjunto de realizaciones Ω asume que toda empresa puede ofertar su producto a uno o más compradores (o a ninguno), y que puede demandar cualquier insumo desde un solo proveedor. Formalmente, sea $\hat{\Gamma}(\omega)$ las transacciones de compra-venta de la realización $\omega \in \Omega$. Sean $\Delta_j^+(\omega) = \{k \epsilon V \mid (j,k) \in \hat{\Gamma}(\omega)\}$ y $\Delta_{ji}^-(\omega) = \{k \epsilon V \mid (k,j) \in \hat{\Gamma}(\omega), a(k) = \{i\}\}$ dos operadores que muestran los compradores y proveedores de la empresa j en dicha realización, respectivamente. Entonces, el conjunto Ω cumple:

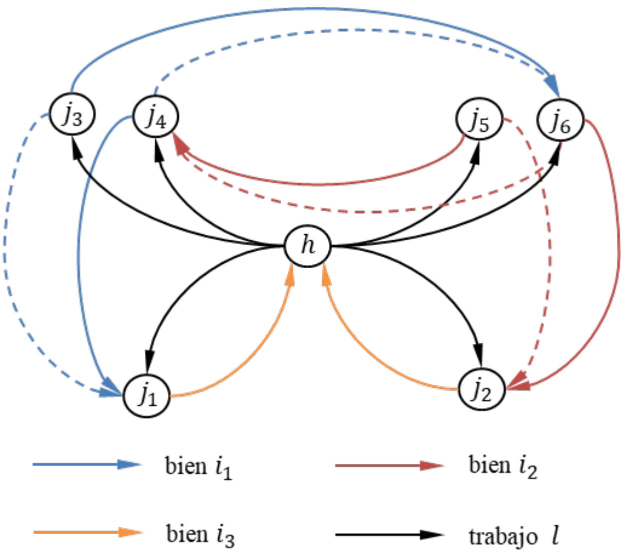
$$\forall \omega \in \Omega, \forall j \in J, \forall i \in I \quad \left|\Delta_j^+(\omega)\right| \geq 0, \qquad \left|\Delta_{ji}^-(\omega)\right| = 1$$

Asimismo, se asume que todas las transacciones entre las empresas J y el hogar representativo h son efectivas en cualquier realización $\omega \in \Omega$, por lo que el conjunto Ω cumple, además:

$$\forall \omega \in \Omega, \forall j \in J \mid (a(j) \cap b(h) \neq \emptyset \vee a(h) \cap b(j) \neq \emptyset), \qquad \{(j,h),(h,j)\} \subset \hat{\Gamma}(\omega)$$

Para apreciar el planteamiento del modelo, consideremos la red productiva que se ilustra en la Figura 1. En esta red existen 6 empresas $J = \{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6\}$ y un hogar representativo h, que interactúan en 3 mercados de bienes $I = \{i_1, i_2, i_3\}$ y el mercado de trabajo l.

Figura 1. Ejemplo de Red Productiva *R*.



Nota. Esta figura ilustra un ejemplo de red productiva. Cada nodo representa una empresa, cada arista representa una transacción potencial de compra-venta, y cada color identifica un bien. Si las aristas se encuentran en línea continua, se trata de la oferta del proveedor habitual; y si las aristas se encuentran en línea discontinua, la oferta es del proveedor rival.
Fuente: Elaboración propia.

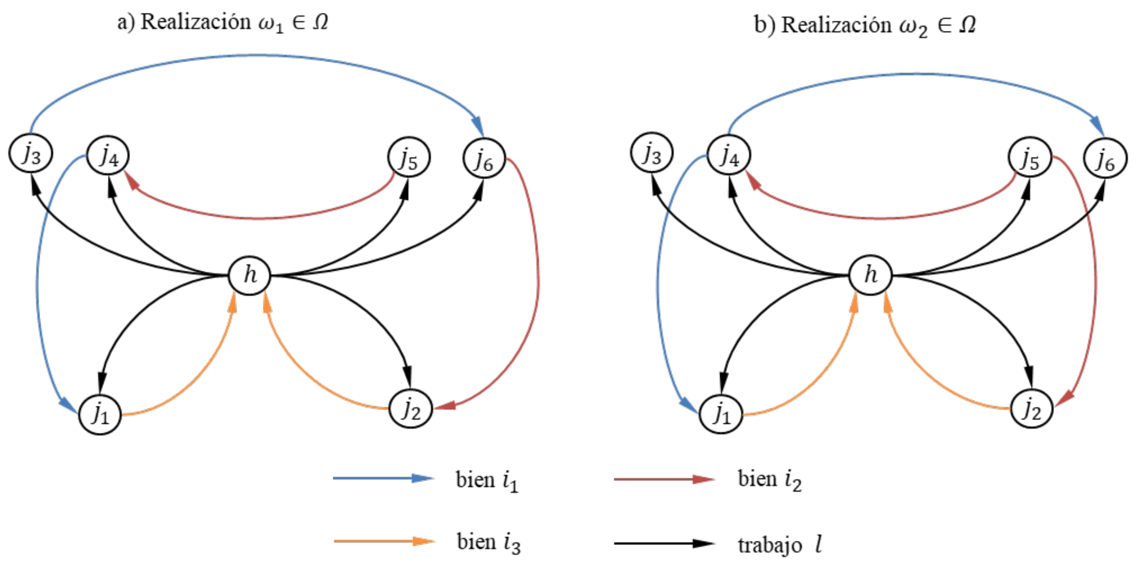
La producción de las empresas se encuentra definida por los productos $a(j_1) = \{i_3\}$, $a(j_2) = \{i_3\}$, $a(j_3) = \{i_1\}$, $a(j_4) = \{i_1\}$, $a(j_5) = \{i_2\}, a(j_6) = \{i_2\}$; mientras que su demanda de insumos está definida por los conjuntos $b(j_1) = \{i_1, l\}$, $b(j_2) = \{i_2, l\}$, $b(j_3) = \{l\}$, $b(j_4) = \{i_2, l\}$, $b(j_5) = \{l\}$, $b(j_6) = \{i_1, l\}$. Por otro lado, la preferencia del hogar representativo se encuentra definida sobre los ítems $a(h) = \{l\}$ y $b(h) = \{j_1, j_2\}$.

Las transacciones se encuentran señaladas mediante distintos colores. Las transacciones del bien i_1 se dibujan en color azul, las transacciones del bien i_2 en color rojo, las transacciones del bien i_3 en color naranja, y las transacciones de trabajo en color negro. Como se puede observar, los mercados $I^{\mathrm{m}} = \{i_1, i_2\}$ son los mercados de bienes de consumo intermedio donde participan las empresas $J^{\mathrm{m}} = \{j_3, j_4, j_5, j_6\}$; mientras que el mercado $I^{\mathrm{g}} = \{i_3\}$ es el mercado de consumo final donde participan las empresas $J^{\mathrm{g}} = \{j_1, j_2\}$.

Los proveedores habituales y rivales de cada empresa se distinguen mediante aristas continuas y entrecortadas, respectivamente. Por ejemplo, la empresa j_2 tiene como proveedor habitual del bien i_2 a la empresa j_6 y como proveedor rival a la empresa j_5 (e.d. $c(j_2, i_1) = \{j_6, \bar{j}_5\}$) . Asimismo, la empresa j_6 tiene como proveedor habitual del bien i_1 a la empresa j_3 y como proveedor rival a la empresa j_4 (e.d. $c(j_6, i_1) = \{j_3, \bar{j}_4\}$).

Dos realizaciones de esta red productiva se ilustran en la Figura 2.

Figura 2. Ejemplos de realizaciones de la red productiva.



Nota. Esta figura muestra dos realizaciones de la red productiva de la Figura 1. La Figura 2.a muestra las transacciones exclusivamente con los proveedores habituales, mientras que la Figura 2.b muestra las transacciones con algunos proveedores rivales.

Fuente: Elaboración propia.

En la realización ω_1 todas las empresas adquieren los insumos desde sus correspondientes proveedores habituales. Por ejemplo, la empresa j_2 elige contratar a su proveedor habitual j_6 (e.d. $(j_6, j_2) \in \omega_1$), y la empresa j_6 elige contratar a su proveedor habitual j_3 (e.d. $(j_3, j_6) \in \omega_1$). Por otro lado, en la realización ω_2 algunos compradores se relacionan con sus proveedores rivales. Aquí, la empresa j_2 decide contratar a su proveedor rival j_5 (e.d. $(j_5, j_2) \in \omega_2$) y la empresa j_6 decide contratar a su proveedor rival j_4 (e.d. $(j_4, j_6) \in \omega_2$). Cabe resaltar en esta realización que las decisiones de los compradores hacen que las empresas j_4 y j_5 monopolicen el mercado de los bienes i_1 y i_2, respectivamente.

Dadas las posibles realizaciones Ω de la red productiva $R = (V, \Gamma)$, las empresas y el hogar representativo toman su mejor decisión. Las empresas que producen bienes intermedios maximizan su beneficio esperado, para lo que deciden los precios de sus productos, dado la estructura de la red y las posibilidades de vender su producto a sus compradores. Las empresas que producen bienes de consumo final también maximizan su beneficio esperado, pero en mercados competitivos, es decir, no deciden precios sino cantidades. Por último, el hogar representativo maximiza su utilidad esperada mediante la demanda bienes finales y oferta de trabajo. A continuación, se explica el fundamento microeconómico del proceso de elección probabilística del comprador, antes de dar paso al comportamiento de los agentes económicos en el modelo.

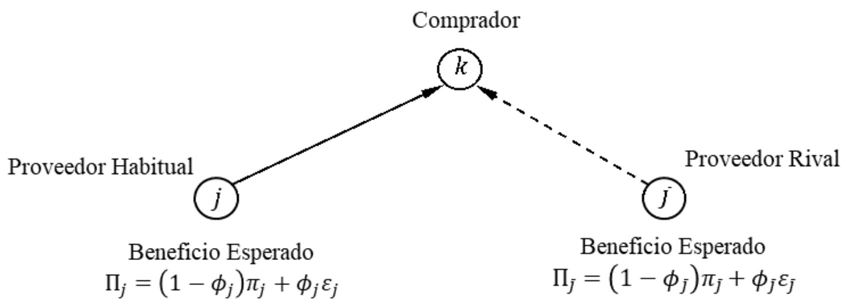
2.1. Fundamento Microeconómico de la elección probabilística del comprador

Como se manifestó en la sección anterior, la elección que realizan los compradores entre un proveedor u otro es probabilística; esto es, se supone que el comprador asigna una probabilidad a la contratación de sus proveedores.

Este tipo de elección se genera por la falta de información que posee el comprador en aspectos clave de la transacción como: calidad del producto, plazo de entrega, sistema de pagos o financiamiento, atención al cliente, capacidad de respuesta, costos de transporte, entre otros factores. Cuando el comprador interactúa repetidamente con un proveedor, adquiere conocimientos sobre estos factores, incluso adapta su proceso productivo a las características propias del insumo que proporciona ese proveedor. Por ello, un proveedor que ha realizado transacciones antes y de manera regular con una empresa (es decir, un proveedor habitual) tiene una ventaja respecto a otro que no lo ha hecho (un proveedor rival), aún si el precio de la competencia es menor, otorgándole mayor probabilidad de vender su producto. Por supuesto, si el precio del proveedor rival es mucho menor al precio de proveedor habitual, el comprador podría estar interesado en cambiar de proveedor; no obstante, correría el riesgo de que alguna de las características del insumo que adquiera no cumpla con los requerimientos que éste necesita para su proceso productivo, pudiendo generarle pérdidas en lugar de ganancias.

Este tipo de elección se modela a continuación. Supongamos un comprador $k \in J$ y dos proveedores: un proveedor habitual j y un proveedor rival $\bar{j}$ que suministran un mismo bien $a(j) = a(\bar{j})$, tal como se muestra en la Figura 3. Ambos proveedores se desenvuelven en dos tipos escenarios: un escenario positivo en el que generan ganancias para el comprador y un escenario negativo en el que generan pérdidas.

Figura 3. Elección probabilística entre dos proveedores



	Valor ; Probabilidad	Valor ; Probabilidad
Escenario Positivo	$\pi_j > 0$; $(1-\phi_j)$	$\pi_{\bar{j}} > 0$; $(1-\phi_{\bar{j}})$
Escenario negativo	$\varepsilon_j < 0$; ϕ_j	$\varepsilon_{\bar{j}} < 0$; $\phi_{\bar{j}}$

Nota. Esta figura muestra el planteamiento de la elección probabilística que realiza el comprador entre dos proveedores. El nodo k representa el comprador, mientras que los nodos $j, \bar{j}$ representan los proveedores habituales y rivales, respectivamente. El cuadro inferior muestra las ganancias y la probabilidad de realizar transacciones con cada proveedor en dos escenarios: un escenario con ganancias y otro escenario con pérdidas.

Fuente: Elaboración propia.

De esta manera, si el comprador decide contratar al proveedor habitual j, entonces su beneficio esperado será $\Pi_j = (1-\phi_j)\pi_j + \phi_j\varepsilon_j$, donde π_j, ε_j son los montos de ganancias y pérdidas con este proveedor, respectivamente, y ϕ_j es el riesgo de pérdida. De la misma forma, si el comprador decide contratar al proveedor rival $\bar{j}$, entonces su beneficio esperado será $\Pi_{\bar{j}} = (1-\phi_{\bar{j}})\pi_{\bar{j}} + \phi_{\bar{j}}\varepsilon_{\bar{j}}$, donde $\pi_{\bar{j}}, \varepsilon_{\bar{j}}$ son los montos de ganancias y pérdidas con este proveedor, respectivamente, y $\phi_{\bar{j}}$ es el riesgo de pérdida. En ambos casos, las pérdidas ε_j y $\varepsilon_{\bar{j}}$ pueden ser tan altas como para ser consideradas magnitudes de catástrofe $(\varepsilon_j, \varepsilon_{\bar{j}} \ll 0)$.

Supongamos que la contratación del proveedor rival $\bar{j}$ genera un mayor beneficio esperado que la contratación del proveedor habitual j; sin embargo, posee una mayor pérdida esperada.

$$\Pi_{\bar{j}} > \Pi_j, \qquad \phi_{\bar{j}}\varepsilon_{\bar{j}} < \phi_j\varepsilon_j$$

Estos aspectos generan una disyuntiva en la decisión del comprador. ¿Cuál proveedor contratar? ¿El proveedor que ofrece mayor beneficio o el que ofrece menor riesgo? Si el comprador está interesado solamente en maximizar el beneficio entonces escogerá contratar al proveedor rival $\bar{j}$, pero sí en cambio está interesado en minimizar el riesgo entonces escogerá contratar al proveedor habitual j.

Si el comprador k pondera simultáneamente la variación del beneficio esperado y el riesgo que significa contratar a un determinado proveedor, su decisión no será necesariamente determinística. Sea ψ_{jk} la probabilidad que asigna el comprador a la contratación del proveedor habitual j, y $\psi_{\bar{j}k} = \left(1 - \psi_{jk}\right)$ la probabilidad que asigna el comprador a la contratación del proveedor rival $\bar{j}$. Sea g una función de evaluación que mide el trade-off entre la variación de la ganancia esperada y riesgo para la probabilidad ψ_{jk}. Decimos que el comprador quiere un valor mínimo en esta ponderación cuando:

$$g\left(\widehat{\Pi}(\psi_{jk}), \hat{\mathcal{E}}(\psi_{jk})\right) \geq \beta$$

donde $\widehat{\Pi}(\psi_{jk}) = \left(1 - \psi_{jk}\right)(\Pi_{\bar{j}} - \Pi_j)$ es el diferencial de beneficio esperado, $\hat{\mathcal{E}}(\psi_{jk}) = \left(1 - \psi_{jk}\right)(\phi_{\bar{j}}\varepsilon_{\bar{j}} - \phi_j\varepsilon_j)$ es el diferencial de perdida esperada y β es un valor mínimo de preferencia para el trade-off.

Se asume que g es una función continua, creciente y cóncava ($g_1 \geq 0, g_2 \geq 0, g_{11} \leq 0, g_{22} \leq 0, g_{12} \geq 0$). Por simplicidad, esta función se representa mediante una función univariante $f\left(\psi_{jk}\right)$:

$$f\left(\psi_{jk}\right) = g\left(\widehat{\Pi}(\psi_{jk}), \hat{\mathcal{E}}(\psi_{jk})\right)$$

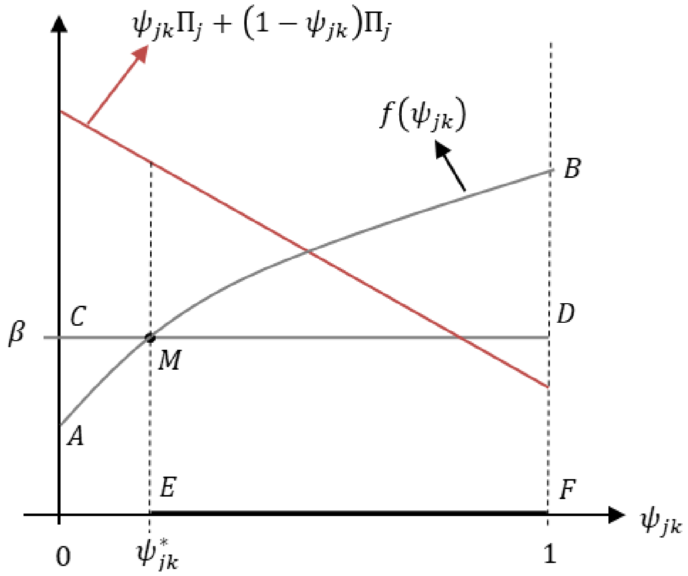
En este contexto, el problema del comprador k consiste en hallar la probabilidad ψ_{jk} que maximiza el beneficio esperado de contratar a los proveedores $j, \bar{j}$; sujeto a la restricción de trade-off entre beneficio y riesgo.

$$\begin{aligned} &\max_{\psi_{jk}} \ \psi_{jk}\Pi_j + \left(1 - \psi_{jk}\right)\Pi_{\bar{j}} \\ &s.r \\ &f\left(\psi_{jk}\right) \geq \beta \\ &0 \leq \psi_{jk} \leq 1 \end{aligned} \qquad [2]$$

La solución de este problema se ilustra en la Figura 4 para una situación cuando $\Pi_{\bar{j}} > \Pi_j$ y $\phi_{\bar{j}}\varepsilon_{\bar{j}} < \phi_j\varepsilon_j$.

Para que exista una solución interior, se asume que $f(1) > \beta$, $f(0) < \beta$. La curva AB representa la función $f\left(\psi_{jk}\right)$ y la recta CD representa la horizontal correspondiente al valor de la ordenada β. Ambas líneas cortan en el punto M y delimitan el conjunto factible $f\left(\psi_{jk}\right) \geq \beta$ mediante el segmento de recta EF. Por otro lado, la línea roja representa la función de beneficio esperado $\psi_{jk}\Pi_j + \left(1 - \psi_{jk}\right)\Pi_{\bar{j}}$. De esta manera, se puede observar que la solución del problema [2] se alcanza en el punto E. En este punto se genera el mayor valor esperado, de manera que la probabilidad ψ_{jk}^* cumpla el trade-off entre beneficio y riesgo.

Figura 4. Solución del problema de elección probabilística.



Nota. Esta figura muestra la solución al problema de elección probabilística [2] cuando $\Pi_{\bar{j}} > \Pi_j$ y $\phi_{\bar{j}}\varepsilon_{\bar{j}} < \phi_j\varepsilon_j$. El eje de las abscisas representa la probabilidad de transacción ψ_{jk} y el eje de las ordenadas representa el total de beneficio esperado. La curva AB representa la función de trade-off $f(\psi_{jk})$, la línea CD representa la horizontal correspondiente al valor mínimo de preferencia β y la recta EF representa el conjunto factible del problema. La línea roja representa la función de beneficio esperado $\psi_{jk}\Pi_j + (1-\psi_{jk})\Pi_{\bar{j}}$ que se desea maximizar y que alcanza su óptimo en el punto E.

Fuente: Elaboración propia.

Realicemos un análisis de estática comparativa de esta solución cuando varían las ganancias. Para ello, calculemos la derivada de la probabilidad ψ_{jk}^* respecto a los beneficios Π_j y $\Pi_{\bar{j}}$. Utilizando el teorema de la derivada implícita se obtiene:

$$\frac{\partial\psi_{jk}^*}{\partial\Pi_j} = \frac{g_1(1-\psi_{jk}^*)}{f'} > 0$$

$$\frac{\partial\psi_{jk}^*}{\partial\Pi_{\bar{j}}} = -\frac{g_1(1-\psi_{jk}^*)}{f'} < 0$$

Ambos efectos presentan los signos esperados. Si el beneficio esperado Π_j aumenta (a consecuencia por ejemplo de una disminución del precio de los insumos que oferta el proveedor habitual), o si el beneficio esperado $\Pi_{\bar{j}}$ disminuye (a consecuencia de un aumento del precio de los insumos que oferta el proveedor rival), entonces el comprador incrementará la probabilidad de contratar al proveedor habitual j y, por lo tanto, reducirá la probabilidad de contratar al proveedor rival $\bar{j}$.

Una de las ventajas que tiene el problema [2] es la representación de diferentes grados de competitividad en el mercado específico que enfrenta una empresa al demandar un insumo. Por ejemplo, una percepción por parte del comprador de altísimo riesgo de contratar a un proveedor diferente al habitual ($\phi_{\bar{j}} = 1$), haría que este último se comporte como un monopolista respecto a ese comprador. Eso podría suceder cuando el comprador requiere características muy específicas en un insumo, cuando la calidad del producto es difícil de conocer ex-ante, y/o las consecuencias de un error en el tiempo, lugar o detalles de la provisión son muy altas. Por otro lado, si se trata de un insumo de características estándar, fácilmente verificables ex-ante y de costos bajos en caso de falla, ambos proveedores tendrían la capacidad de ofrecer un similar beneficio y riesgo para el comprador ($\Pi_{\bar{j}} = \Pi_j$; $\varepsilon_{\bar{j}}\phi_{\bar{j}} = \varepsilon_j\phi_j$), por lo que estaríamos hablando de un mercado competitivo (e.d. ambos proveedores serian precio-aceptantes).

Tal como se señaló, una de nuestras aportaciones es incluir el riesgo en la toma de decisiones de los productores, a diferencia de Carvalho (2010), Carvalho & Gabaix (2013), Stella (2015), Acemoglu et al. (2016), Acemoglu et al. (2017) y Atalay (2017) (entre otros) que suponen choques aleatorios que, una vez realizado es perfectamente conocido por los agentes; es decir, estos toman decisiones en certidumbre.

2.2. Comportamiento de los agentes en el modelo

2.2.1. Empresas de bienes intermedios

La decisión de cada empresa $j\epsilon J^{\mathrm{m}}$ consiste en hallar el vector de precios $p_j^{\mathrm{m}} = \left(p_{j1}^{\mathrm{m}}, \dots, p_{jN}^{\mathrm{m}}\right)' \in \mathbb{R}_+^N$ para la venta del bien $a(j)$ a sus compradores potenciales en la red, de manera que maximice el beneficio esperado sobre el conjunto de realizaciones Ω.

Formalmente, este problema tiene el siguiente planteamiento:

$$\begin{aligned} &\max_{p_j^{\mathrm{m}}} \; E\left[\pi_j \mid p_j^{\mathrm{m}}, p_{-j}^{\mathrm{m}}\right] = \textstyle\sum_{\omega\in\Omega} \Psi\left(\omega \mid p_j^{\mathrm{m}}, p_{-j}^{\mathrm{m}}\right)\; \pi_j\left(p_j^{\mathrm{m}}, p_{-j}^{\mathrm{m}}, \omega\right) \\ &p_{jk}^{\mathrm{m}} \geq 0,\; \forall k \in \Delta_j^+(R) \\ &p_{jk}^{\mathrm{m}} = 0,\; \forall k \notin \Delta_j^+(R) \end{aligned} \quad [3]$$

donde $p_{-j}^{\mathrm{m}} = \left(p_1^{\mathrm{m}}, \dots, p_{j-1}^{\mathrm{m}}, p_{j+1}^{\mathrm{m}}, \dots, p_{N^{\mathrm{m}}}^{\mathrm{m}}\right) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^{N^{\mathrm{m}}-1}$ son los vectores de precios que deciden las empresas que producen bienes intermedios, excepto la empresa j; $\Delta_j^+(R) = \{k\epsilon V \mid (j,k) \in \Gamma\}$ es el conjunto de compradores potenciales de la empresa j; y $\Psi\left(\omega \mid p_j^{\mathrm{m}}, p_{-j}^{\mathrm{m}}\right)$ es la probabilidad condicionada de la realización $\omega \in \Omega$ dado los precios p_j^{m} y p_{-j}^{m}. Notar que $p^{\mathrm{m}} = \left(p_j^{\mathrm{m}}, p_{-j}^{\mathrm{m}}\right) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^{N^{\mathrm{m}}}$.

Esta probabilidad se encuentra determinada por la siguiente función:

$$\Psi(\omega \mid p^{\mathrm{m}}) = \prod_{(j,k)\in\hat{\Gamma}(\omega)} \psi_{jk}$$

donde ψ_{jk} es la probabilidad de que el comprador k contrate al proveedor j para adquirir el insumo $i \in b(k)$; y $\hat{\Gamma}(\omega)$ es el conjunto de transacciones en la realización $\omega \in \Omega$. Estas probabilidades tienen su fundamento microeconómico en la sección anterior.

Para el caso de un proveedor habitual j, estas probabilidades se asumen crecen cuando disminuye los precios de venta de este proveedor p_{jk}^{m}, o cuando aumentan los precios de venta del proveedor rival $p_{\bar{j}k}^{\mathrm{m}}$.

$$\forall k \in J, \forall i \in b(k), \qquad \psi_{jk} = \psi_{jk}\left(p_{jk}^{\mathrm{m}}, p_{\bar{j}k}^{\mathrm{m}}\right) \quad \{j, \bar{j}\} = c(k,i)$$

$$\frac{\partial \psi_{jk}}{\partial p_{jk}^{\mathrm{m}}} \leq 0, \frac{\partial \psi_{jk}}{\partial p_{\bar{j}k}^{\mathrm{m}}} \geq 0$$

Por complementariedad, lo contrario sucede para la probabilidad de contratación del proveedor rival $\bar{j}$

$$\forall k \in J, \forall i \in b(k), \qquad \psi_{\bar{j}k} = 1 - \psi_{jk}\left(p_{jk}^{\mathrm{m}}, p_{\bar{j}k}^{\mathrm{m}}\right) \quad j, \bar{j} \in c(k,i)$$

Por otro lado, $\pi_j(p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}, \omega)$ representa la ganancia que obtiene la empresa j por vender su producto en la realización $\omega \in \Omega$. Esta función se encuentra determinada por:

$$\pi_j(p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}, \omega) = \sum_{k \in \Delta_j^+(\omega)} p_{jk}^{\mathfrak{m}}\, z_{ki}\left(p_{jk}^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}, y_k(\omega), w(\omega)\right) - c_j\left(p_{-j}^{\mathfrak{m}}, y_j(\omega), w(\omega)\right)$$

La función $z_{ki}\left(p_{jk}^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}, y_k(\omega), w(\omega)\right)$ es la demanda condicionada de la empresa k respecto al bien $i = a(j)$, la cual depende del precio de venta $p_{jk}^{\mathfrak{m}}$, los precios $p_{-j}^{\mathfrak{m}}$, la producción del comprador $y_k(\omega)$ y el salario $w(\omega)$. Por otro lado, la función $c_j\left(p_{-j}^{\mathfrak{m}}, y_j(\omega), w(\omega)\right)$ es la función de costo mínimo de la empresa j, la cual se encuentra definida para los precios $p_{-j}^{\mathfrak{m}}$, el nivel de producción del proveedor $y_j(\omega)$ y el salario $w(\omega)$. Estas funciones se muestran en el Anexo A para una tecnología tipo CES de retornos constantes de escala.

De esta forma, en este modelo se introduce la posibilidad de diversos grados de poder de mercado y competencia imperfecta, basados en la heterogeneidad de los insumos, lo que diferencia este trabajo de las contribuciones de Carvalho (2010) y de Acemoglu et al. (2012), por ejemplo, que consideran competencia perfecta.

2.2.2. Empresas de bienes de consumo final

Las empresas $J^{\mathfrak{g}}$ realizan su actividad en mercados perfectamente competitivos. Estas empresas deciden cuánto producir en cada realización $\omega \in \Omega$ con el objetivo de maximizar su beneficio esperado, asumiendo que los precios de los bienes de consumo final son únicos y fijos para cada mercado.

Formalmente, la empresa $j \epsilon J^{\mathfrak{g}}$ enfrenta el siguiente problema de decisión:

$$\max_{y_j(\omega)} \sum_{\omega \in \Omega} \Psi(\omega \mid p^{\mathfrak{m}}) \cdot \pi_j\left(y_j(\omega)\right) \qquad [4]$$

donde $y_j(\omega) \in \mathbb{R}_+$ es la producción de la empresa j en la realización $\omega \in \Omega$; y $\pi_j\left(y_j(\omega)\right)$ es el beneficio para ese nivel de producción. Esta función se encuentra definida por:

$$\pi_j\left(y_j(\omega)\right) = p_i^{\mathfrak{g}}(\omega)\, y_j(\omega) - c_j\left(p_{-j}^{\mathfrak{m}}, y_j(\omega), w(\omega)\right)$$

donde $p_i^{\mathfrak{g}}(\omega) \in \mathbb{R}_+$ es el precio del bien $i = a(j)$ que produce la empresa j en la realización $\omega \in \Omega$, y $c_j\left(p_{-j}^{\mathfrak{m}}, y_j(\omega), w(\omega)\right)$ es la función de costo mínimo para dicha realización.

2.2.3. El Hogar representativo

El hogar representativo maximiza su utilidad esperada, para lo que decide qué cantidad de cada bien demandar y cuanto trabajo ofertar en cada realización $\omega \in \Omega$ sujeto a una restricción presupuestaria. En esta restricción, el hogar no solo recibe ingresos por ofertar mano de obra, sino también por ser dueño del capital de las empresas.

Formalmente, el comportamiento de este agente se representa de la siguiente manera:

$$\begin{gathered}\max_{x(\omega), l_h(\omega)} \sum_{\omega \in \Omega} \Psi(\omega \mid p^{\mathfrak{m}}) \cdot U\left(x(\omega), l_h(\omega)\right) \\ \sum_{i \epsilon I^{\mathfrak{g}}} p_i^{\mathfrak{g}}(\omega) x_i(\omega) = \pi(\omega) + w(\omega) \cdot l_h(\omega),\ \forall \omega \in \Omega\end{gathered} \qquad [5]$$

donde $U(x(\omega), l_h(\omega))$ es la función de utilidad del consumidor, $x(\omega) = (x_1(\omega), \dots, x_{M^g}(\omega))' \in \mathbb{R}_+^{M^g}$ es el vector de consumo en la realización $\omega \in \Omega$, $p^g(\omega) = \left(p_1^g(\omega), \dots, p_{M^g}^g(\omega)\right)' \in \mathbb{R}_+^{M^g}$ es el vector de precios de los bienes de consumo final, $l_h(\omega) \in \mathbb{R}_+$ es la oferta de mano de obra, y $\pi(\omega)$ es el total de ganancias de las empresas.

$$\pi(\omega) = \sum_{j \in J^m} \pi_j(\omega) + \sum_{j \in J^g} \pi_j(\omega)$$

La solución de este problema para preferencias tipo CES se muestra en el Anexo A.

2.3. Equilibrio General de Mercado (EGM)

El comportamiento e interacción de las empresas y el hogar representativo en la red productiva permite determinar lo que denominamos el Equilibrio General de Mercado (EGM). Este equilibrio representa un sistema de precios y cantidades para el que las empresas y el hogar toman su mejor decisión de acuerdo a los problemas planteados anteriormente.

Cabe recalcar que estas decisiones son óptimas ex-ante, pues los agentes económicos maximizan el valor esperado de su beneficio o utilidad. Solo en el caso de los hogares y las empresas de bienes finales, estas decisiones son óptimas ex-post ya que no afectan la elección probabilística de los compradores (e.d. $\Psi(\omega| \, p^m)$ es exógena); mientras que para las empresas de bienes intermedios esta situación no ocurre. En este sentido, es primordial establecer ciertas consideraciones para asegurar que las transacciones de compra-venta se efectúen en cualquier realización $\omega \in \Omega$, incluso en aquellas realizaciones donde las empresas de bienes intermedios podrían obtener beneficios menores a los esperados.

Supuesto 1. Equilibrio local ex-post en el mercado de bienes intermedios

Los proveedores de bienes intermedios tienen derecho de definir el precio de su producto; mientras que los compradores de dichos bienes tienen el derecho de definir su demanda, sin que los proveedores puedan negarse a producir la cantidad que ellos requieren una vez decididos los precios.

Este supuesto elimina la posibilidad de racionamiento y agrega un rasgo de equilibrio local para el mercado especifico de cada proveedor.

$$\forall \omega \in \Omega, \forall j \in J^m, \; y_j(\omega) = \textstyle\sum_{k \in \Delta_j^+(\omega)} z_{ki}(\omega) \qquad [6]$$

Supuesto 2. Equilibrio global ex-post en el mercado de bienes de consumo final

Las empresas de bienes de consumo final y el hogar representativo tienen el mismo derecho de definir la demanda y oferta de bienes, respectivamente.

$$\forall \omega \in \Omega, \forall i \in I^g, \; x_i(\omega) = \textstyle\sum_{j \in J^g | \, a(j)=\{i\}} y_j(\omega) \qquad [7]$$

Supuesto 3. Equilibrio global ex-post en el mercado de trabajo

Las empresas y el hogar representativo tienen el mismo derecho de definir la demanda y oferta de trabajo, respectivamente.

$$\forall \omega \in \Omega, \; l_h(\omega) = \textstyle\sum_{i \in J} l_j(\omega) \qquad [8]$$

donde $l_j(\omega)$ es la demanda de trabajo de la empresa $j \in J$ en la realización $\omega \in \Omega$.

Es necesario resaltar que todas las variables que conforman estos equilibrios se encuentran en función de los precios de bienes de consumo intermedio $p^{\mathfrak{m}}$, los precios de bienes de consumo final $p^{\mathfrak{g}}(\omega)$ y el salario $w(\omega)$, de acuerdo a los problemas de decisión descritos anteriormente.

Definición 1. Equilibrio General de Mercado (EGM)

El Equilibrio General de Mercado es aquel sistema de precios y cantidades $\Lambda = (p^{\mathfrak{m}*}, \{x^*(\omega), y^*(\omega), p^{\mathfrak{g}*}(\omega), w^*(\omega)\}_{\omega\in\Omega})$ *determinado por los comportamientos* [3], [4] y [5] *y las condiciones de equilibrio ex-post* [6], [7] y [8].

El EGM comparte algunas características del equilibrio walrasiano. Por ejemplo, los precios de los bienes de consumo final $p^{\mathfrak{g}*}(\omega)$ y el salario $w^*(\omega)$ se determinan de tal forma que limpian los mercados de bienes finales y mano de obra en cada realización $\omega \in \Omega$. De hecho, debido a la restricción presupuestaria del hogar representativo, se cumple la ley de Walras, por lo que es suficiente considerar el equilibrio local en el mercado de bienes intermedios [6] y el equilibrio global en el mercado de bienes finales [7], para alcanzar el equilibrio global en el mercado laboral [8]. Pese a esta similitud, el EGM no constituye en sí mismo un equilibrio walrasiano, ya que considera un fenómeno de fijación y discriminación de precios en la oferta de bienes intermedios.

Asimismo, el EGM tiene fuerte sintonía con el concepto del equilibrio de Nash, puesto que los precios $p^{\mathfrak{m}*}$ se determinan de manera interdependiente, tomando en cuenta las estrategias de cada una de las empresas dado sus posibles transacciones en la red productiva. De acuerdo al problema [3], cada empresa $j \epsilon J^{\mathfrak{m}}$ fija su vector de precios $p_j^{\mathfrak{m}*}$ de manera que maximice su beneficio esperado, asumiendo que el resto de proveedores actúa de la misma forma para los precios $p_{-j}^{\mathfrak{m}*}$. Es esta interacción la que establece los precios en la red y la que condiciona el comportamiento del resto de agentes en el modelo.

La existencia de este equilibrio se demuestra en el Anexo B cuando se tiene un hogar representativo con preferencias Cobb-Douglas sin preferencia al ocio, las empresas tienen una tecnología Marx-Leontief en la demanda de insumos, la producción de cada bien de consumo final se realiza a través de una firma representativa y la función de trade-off en el problema de elección probabilística de los compradores tiene una especificación lineal.

2.4. Quiebra de empresas

En el presente modelo se supone que las empresas quiebran de manera aleatoria de acuerdo a un proceso estocástico en el que se tiene en cuenta su desempeño económico en periodos anteriores. En este proceso, cada periodo de tiempo se encuentra delimitado por el EGM que ha sido alcanzado por las empresas que subsistieron hasta ese instante.

En términos formales, sea $\{s_t\}_{t\geq 0}$ un proceso estocástico que muestra el conjunto de empresas s_t que se encuentran activas en el periodo t (e.d. que permanecen en la red hasta ese instante), tal que $s_{t+1} \subseteq s_t$. Este proceso tiene la siguiente función de probabilidad:

$$\begin{gathered} H(v_{t+1}, v_t, \dots, v_{t-r}) = \Pr(s_{t+1} = v_{t+1}/s_t = v_t, \dots, s_{t-r} = v_{t-r}) \\ \forall t \geq 0, \forall v_{t+1}, v_t, \dots, v_{t-r} \in \wp(J) \end{gathered} \qquad [9]$$

donde $H(v_{t+1}, v_t, \dots, v_{t-r})$ es la probabilidad de que las empresas v_{t+1} se encuentren activas en el periodo $t+1$, dado que las empresas $v_t, \dots, v_{t-r}$ estuvieron activas en r periodos anteriores; y $\wp(J)$ representa el conjunto de posibles subconjuntos de J tal que se cumple la condición [1] y que cada empresa posee al menos un proveedor por insumo que requiere (e.d. $\forall s \in \wp(J), \forall k \in s, \forall i \in b(k), c(k,i) \neq \emptyset$).

En este proceso, cada conjunto de empresas s_t se encuentra asociado con su correspondiente equilibrio general de mercado Λ^{s_t} y espacio de realizaciones Ω^{s_t}. Para representar la dinámica del conjunto de empresas s_t de acuerdo al proceso estocástico [9], y propiamente del conjunto de empresas que quiebran $J \backslash s_t$, se toman en cuenta los siguientes supuestos.

Supuesto 4. Independencia Intratemporal

Las empresas permanecen/quiebran de manera independiente en cada instante de tiempo, tomando en cuenta solo sus ganancias obtenidas en el pasado.

$$H(v_{t+1}, v_t, \dots, v_{t-r}) = \prod_{j \in v_{t+1}} \eta_j(\hat{\pi}_j \mid \Lambda^{v_t}, \dots, \Lambda^{v_{t-r}}) \quad [10]$$

donde $\eta_j(\hat{\pi}_j \mid \Lambda^{v_t}, \dots, \Lambda^{v_{t-r}})$ es la probabilidad de que la empresa j se encuentre activa en el periodo $t+1$, dado los equilibrios $\Lambda^{v_t}, \dots, \Lambda^{v_{t-r}}$ en r periodos anteriores; y $\hat{\pi}_j = (\hat{\pi}_{j,t}, \dots, \hat{\pi}_{j,t-r})' \in \mathbb{R}_+^r$ es el vector de ganancias observadas de la empresa j para esos periodos.

Supuesto 5. Dependencia Intertemporal

Cuanto menor sea el número de veces que las empresas obtuvieron ganancias positivas en el pasado, menor será su probabilidad de permanecer en la red y, por lo tanto, mayor será su probabilidad de quebrar.

$$\eta_j(\hat{\pi}_j \mid \Lambda^{v_t}, \dots, \Lambda^{v_{t-r}}) = f\left(\sum_{k=1}^{r} \mathbf{1}(\hat{\pi}_{j,t-k} > 0)\right), \ \frac{df}{dx} > 0 \quad [11]$$

donde $\mathbf{1}(\hat{\pi}_{j,t-k} > 0)$ es una función indicatriz que muestra cuándo la empresa obtuvo ganancias. Debido a que las empresas de bienes de consumo final operan en mercados perfectamente competitivos, sus ganancias siempre serán positivas en cualquier realización de la red, por lo que estas empresas siempre participarán en el mercado (e.d. $\eta_j = 1 \ \forall j \in J^{g}$).

Añadimos, así, a la quiebra de empresas y sus consecuencias en el análisis de la difusión de choques negativos en la red productiva. Nuestro modelo se diferencia del trabajo de Baqaee (2018) el cual es de corto plazo, ya que no asume la movilidad de los factores hasta alcanzar un nuevo equilibrio.

3. Simulación de choques negativos de productividad

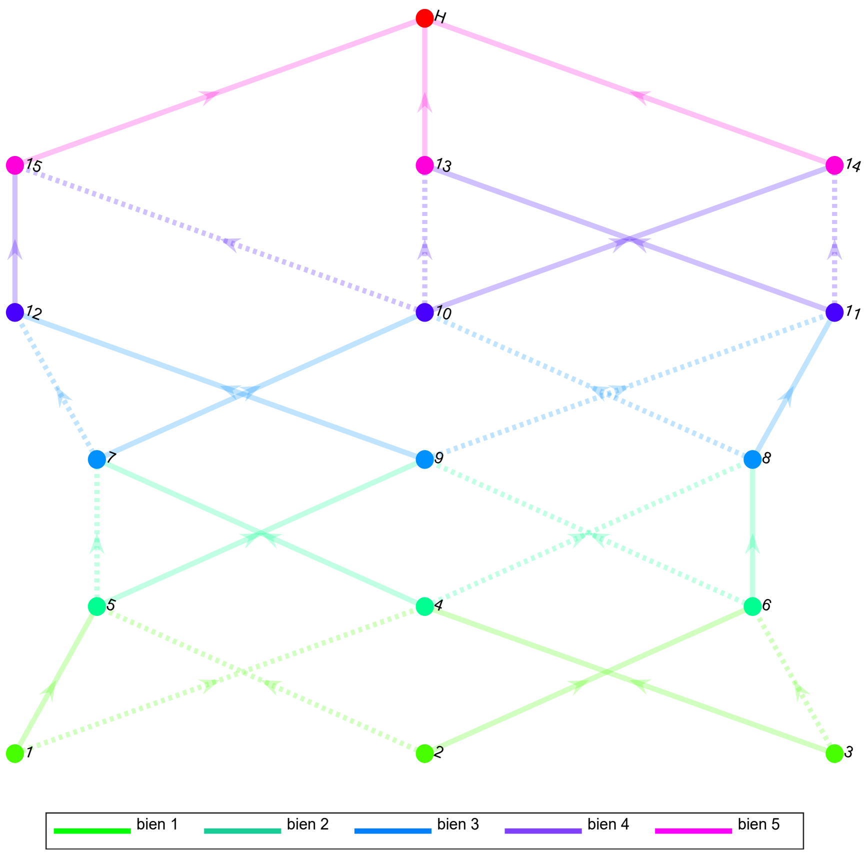
La red que se emplea para la simulación del modelo posee 15 empresas $J = \{j_1, j_2, \dots, j_{15}\}$, 5 bienes $I = \{i_1, i_2, \dots, i_5\}$ y un hogar representativo H. Las empresas se dividen uniformemente en 5 niveles de encadenamientos. Cada nivel contiene 3 empresas que producen un mismo bien y que demandan un mismo. La Figura 5 ilustra esta red excluyendo las transacciones en el mercado laboral.

Todas las transacciones de la red se encuentran representadas mediante aristas direccionadas. Como se recordará en la explicación de la Figura 1, el color identifica el bien objeto de transacción, mientras que el tipo de línea distingue el tipo de proveedor: línea continua si es proveedor habitual o línea punteada si es proveedor rival. En total, esta red posee $|\Omega| = 2^{12} = 4{,}096$ posibles realizaciones.

Todas las empresas de la red tienen funciones de demanda condicionada y costo mínimo según una tecnología CES de retornos constantes de escala. Asimismo, el hogar representativo tiene funciones de demanda marshaliana de acuerdo a función de utilidad CES. Estas funciones se muestran en el Anexo A.

La probabilidad de contratar a los proveedores habituales se representa a través de un spline de 3er orden decreciente, que es igual a 1 cuando su precio de venta es menor al precio del proveedor rival, y 0 cuando su precio es mayor al precio del proveedor rival en 2 unidades monetarias. Por complementariedad, el mismo spline se utiliza para representar la probabilidad de contratación de los proveedores rivales. Por otro lado, la probabilidad de permanencia de una empresa se asume depende de manera directamente proporcional del número de veces que obtuvo ganancias hasta 5 periodos atrás.

Figura 5. Red Productiva empleada para la simulación del modelo.



Nota: Esta figura muestra la red productiva con la que se simula el modelo. Cada nodo representa una empresa, cada arista representa una transacción de compra-venta, y cada color identifica un bien. Si las aristas se encuentran en línea continua, las transacciones se realizan con el proveedor habitual, por el contrario, si las aristas se encuentran en línea punteada, las transacciones se realizan con el proveedor rival. Para efectos de ilustración, se omite las transacciones del mercado laboral.

Fuente: Elaboración propia.

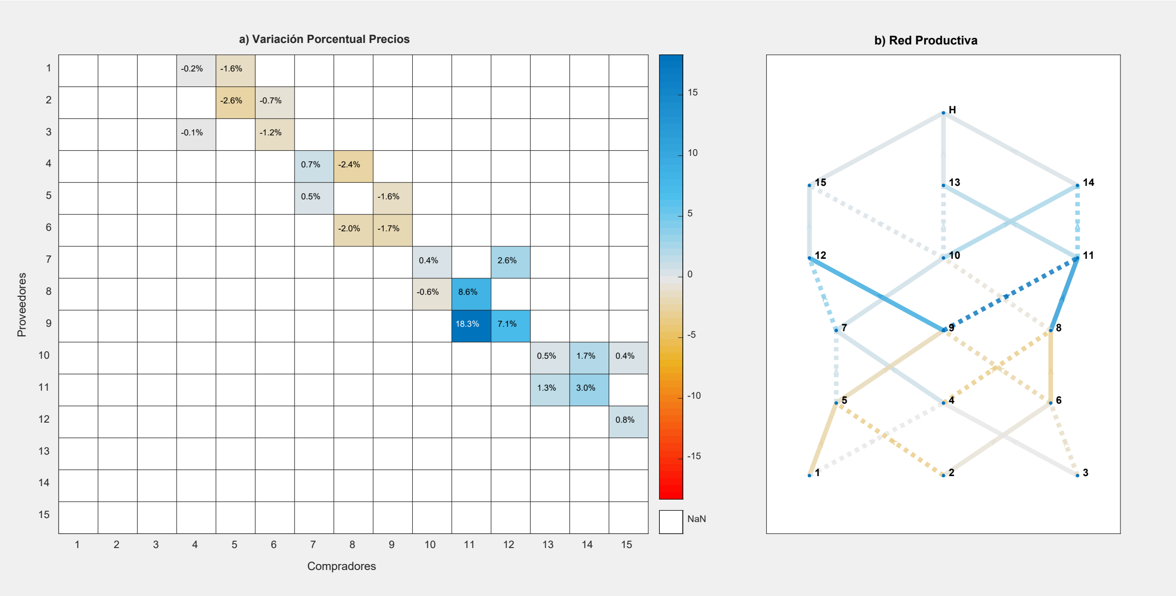
Para efectos del análisis, a continuación, se estudia el efecto que tiene un choque negativo de productividad del 20% sobre la empresa j_9. El choque sobre otras empresas no se analiza en el presente documento, sin embargo, produce resultados similares (Estas simulaciones están disponibles previa solicitud a los autores). La simulación de este choque en el modelo se realiza mediante 1000 ensayos aleatorios sobre un horizonte de tiempo de 30 periodos; cada periodo se encuentra determinado por el EGM correspondiente a las empresas que subsistieron hasta ese instante. La programación del modelo se realizó en MATLAB.

El algoritmo que es utiliza para la determinación númerica del EGM en estas simulaciones se muestra en el Anexo C.

3.1. Efectos sobre los precios del EGM en el periodo inicial

Como se observa en la Figura 6.a, un choque negativo de productividad sobre la empresa j_9 produce cambios no solo en sus precios de venta sino también en los precios de venta del resto de firmas en la red en el periodo inicial. Cada celda de esta tabla muestra la variación porcentual del precio que fija un proveedor (fila) a su comprador potencial (columna) de acuerdo a una coloración rojo-azul. Esta coloración indica el signo y magnitud de la variación de los precios. Si la celda tiene color rojo, entonces los precios disminuyen; por el contrario, si la celda tiene color azul, los precios aumentan. La intensidad de cada color depende de la cuantía de la variación en valor absoluto. Esta misma coloración se aplica sobre las aristas de la red en la Figura 6.b.

Figura 6. Variación de los precios de bienes intermedios en el periodo inicial, cuando existe un choque de productividad del 20% sobre la empresa 9.



Nota. La tabla a) muestra la variación porcentual de los precios de venta que fijan los proveedores a sus compradores potenciales. Los proveedores se encuentran ubicados por filas y los compradores por columnas. La coloración rojo-azul indica el signo y magnitud de la variación del precio. Si el color es rojo, entonces disminuyen los precios. Cuanto más alta sea la intensidad de color rojo, más alta es la disminución del precio. Por el contrario, si el color es azul, entonces aumentan los precios. Cuanta más alta sea la intensidad de color azul, más alto es el aumento de los precios. La figura b) reproduce esta coloración sobre las aristas de la red productiva.

Fuente: Elaboración propia.

En primer lugar, se puede observar que el choque negativo de productividad sobre la empresa j_9 aumenta sus precios de venta en 18.3% y 7.1% para los compradores j_{11} y j_{12}, respectivamente. Este incremento se debe al aumento del costo marginal que experimenta la empresa después del choque y se presenta de manera más marcada en aquellas transacciones donde la empresa participa como proveedor rival (ya que en estos casos la posible pérdida de un comprador por incrementar el precio es menor). Este choque se difunde en la red y genera dos efectos prevalentes en los precios de venta del resto de empresas en la red: un efecto horizontal y un efecto cascada "aguas abajo".

El efecto horizontal constituye el aumento de precios para las empresas que pertenecen al mismo nivel de encadenamiento de la empresa que recibió el choque. Este efecto se puede distinguir por el color azul que toman las celdas de la fila 7, 8 y 9 en la Tabla 6.a y que se ubican en las columnas 11 y 12. También se puede visualizar en la red 6.b mediante el color azul que toman las aristas que parten de los nodos 7, 8 y 9, y terminan en los mismos nodos 11 y 12. Por ejemplo, se observa que la competencia entre las empresas j_8 y j_9 en torno al comprador j_{11}, trasmite el choque que recibe la empresa j_9 hacia la empresa j_8, aumentando su precio de venta en 8.6% para el comprador j_{11}. Por otro lado, el efecto cascada "aguas abajo" representa el aumento de precios que ocurre de comprador en comprador en la red. Este efecto se puede visualizar mediante el color azul de las celdas de la Figura 6.a que se ubican por debajo de la fila 9. De igual forma, este efecto se puede visualizar mediante el color azul de las aristas de la red 6.b ubicadas por encima del nodo 9. Por ejemplo, se observa que el choque que recibe la empresa j_9 se trasmite a su comprador j_{11}, el cual incrementa sus precios en 1.3% y 3% para los compradores j_{13} y j_{14}, respectivamente.

La razón de ambos efectos es simple. Por un lado, el efecto horizontal se debe a la interacción que existe entre las firmas al momento de fijar los precios. Si una empresa incrementa sus precios de venta después de un choque, entonces sus compradores comenzarán a realizar transacciones con otros proveedores de la competencia. Estos proveedores, en vista de un aumento de la demanda, también incrementarán sus precios de venta, pero lo harán en una proporción menor que el de la empresa afectada por el choque, pues de lo contrario perderían los compradores ganados en un inicio. Por otro lado, el efecto cascada "aguas abajo" se debe a un factor de costos. Cuando una empresa recibe un choque negativo, su costo marginal aumenta, obligando a subir sus precios de venta. Este hecho, sumado al efecto horizontal, incrementa el costo de sus compradores, que aumentarán también sus precios de venta para ajustarse al alza de costos. Este efecto se trasmite de comprador en comprador en la red y disminuye a medida que los compradores se alejan de la empresa afectada.

3.2. Efectos sobre las ganancias del EGM en el periodo inicial

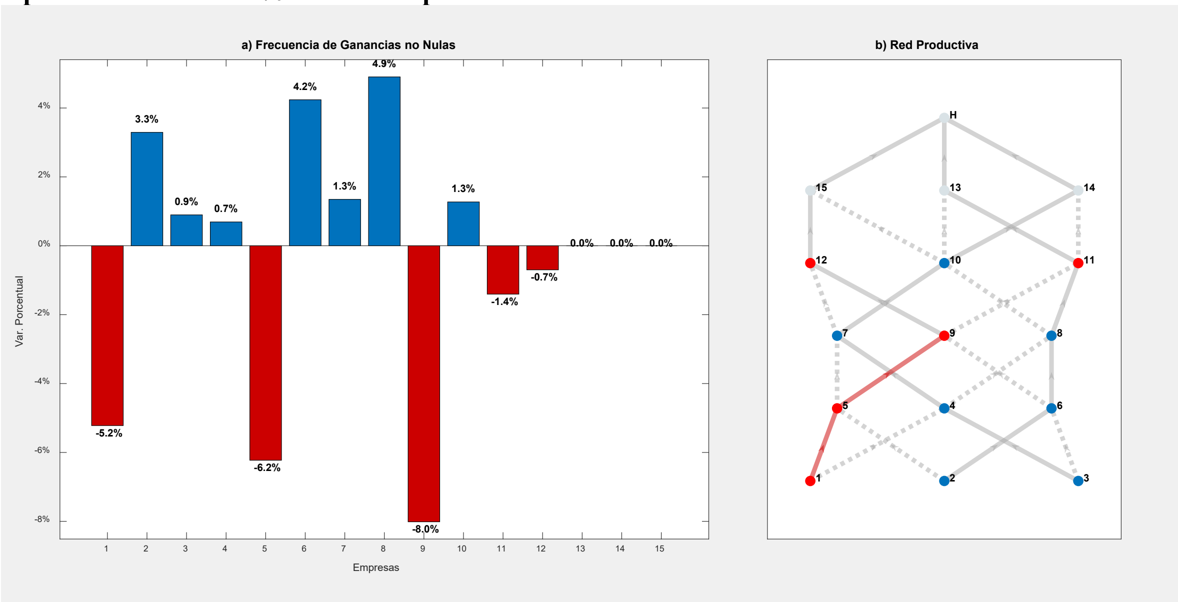
El aumento de precios de la empresa que recibió el choque trae implicaciones importantes en el análisis del EGM. Un incremento significativo de los precios resta competitividad a la empresa afectada dentro del conjunto de firmas que atiende a un mismo segmento de mercado, lo que disminuye su posibilidad de vender el producto y obtener ganancias. Este efecto se puede difundir en la red productiva a través de las transacciones de compra-venta y vulnerar la rentabilidad de otras empresas. Para analizar este fenómeno, se calcula la variación porcentual de la frecuencia con que las empresas obtienen ganancias no nulas en el periodo inicial. Esta frecuencia nos da una idea de la probabilidad que tiene una empresa para generar ganancias positivas y tener relaciones comerciales con sus compradores.

La variación de este indicador se muestra en la Figura 7.a mediante barras de color rojo y azul para aquellos valores que son negativos y positivos, respectivamente. La misma coloración se emplea para los nodos de la red en la Figura 7.b, y se señala mediante un camino aquellas empresas que presentan las variaciones negativas más altas. Teniendo en cuenta ambas figuras, se puede observar que el choque sobre la empresa j_9 genera un efecto cascada "aguas arriba" sobre las ganancias de las empresas, que se propaga solo hacia los proveedores habituales de la red.

Como se puede apreciar, el choque sobre la empresa j_9 disminuye su posibilidad de obtener ganancias positivas en 8.0%. Pero no solo eso, también disminuye esta posibilidad para su proveedor habitual j_5 en 6.2%, y para el proveedor habitual de este último j_1 en 5.2%. Estos efectos están acompañados por efectos positivos en otras empresas que tienden a reemplazar los proveedores afectados en el mismo nivel de encadenamiento. Por ejemplo, tras el choque en la empresa j_9, las empresas de la competencia j_7 y j_8 aumentan sus posibilidades de obtener ganancias positivas en 1.3% y 4.9%, respectivamente.

El motivo por el que el efecto cascada "aguas arriba" se propaga exclusivamente sobre los proveedores habituales se debe a la alta frecuencia con que estos proveedores participan en las transacciones de la red. Los proveedores habituales obtienen ganancias en la mayor parte de las ocasiones cuando sus compradores deciden contratarlos, por lo que si los compradores no obtienen ganancias (porque sus precios de venta son menos competitivos) ellos tampoco. En otras palabras, si un proveedor vende regularmente su producto a algún comprador en la red, todo lo que le sucede a este comprador repercute en las ganancias del proveedor (y consecuentemente en las ganancias de aquellos proveedores que regularmente abastezcan a este último). Es necesario resaltar que esta difusión hace más competitivos a los proveedores rivales, los cuales en cambio aumentan sus posibilidades de realizar transacciones en la red y por ende obtener ganancias.

Figura 7. Variación de la frecuencia de ganancias no nulas en el periodo inicial, cuando existe un choque de productividad del 20% sobre la empresa 9.



Nota. La Figura a) es un diagrama de barras que muestra la variación porcentual de la frecuencia con que las empresas obtienen ganancias no nulas. Esta frecuencia se construye teniendo en cuenta la función distribución empírica del EGM antes y después del choque de productividad. La coloración rojo-azul indica el signo de la variación. Si el color es rojo, entonces disminuye la frecuencia. Por el contrario, si el color es azul, entonces aumenta la frecuencia. La Figura b) reproduce esta coloración sobre los nodos de la red productiva y traza el camino con aquellos nodos que presentan la variación negativa más alta.

Fuente: Elaboración propia.

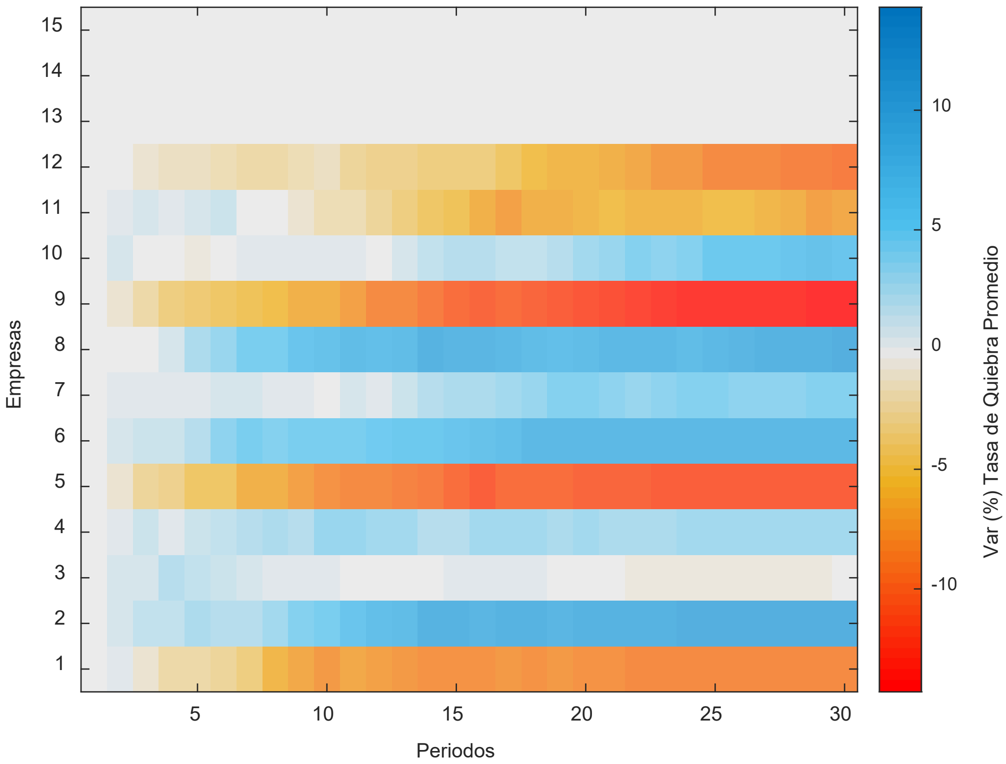
3.3. Efectos sobre la quiebra de empresas

La difusión del choque de productividad "aguas arriba" sobre las ganancias de las empresas en el periodo inicial es un elemento clave para entender cómo éstas quiebran en el transcurso del tiempo. Como se recordará en el diseño del modelo, una empresa tiene una mayor probabilidad de quiebra cuanto mayor sea el número de periodos que posea ganancias nulas. En este sentido, si se conoce cómo un choque incide en la forma de obtener ganancias, entonces se podrá explicar el efecto del mismo sobre la quiebra de las empresas.

La Figura 8 muestra la variación porcentual de la tasa de quiebra promedio de las empresas sobre un conjunto de 1000 ensayos aleatorios en un horizonte de tiempo de 30 periodos. Cada fila corresponde a una empresa y cada columna corresponde a un periodo de tiempo. La coloración rojo-azul indica el signo y magnitud de la variación. Si el color es rojo, entonces aumenta la tasa de quiebra. Cuanto más alta sea la intensidad de color rojo, más alto es el aumento de la tasa de quiebra. Por el contrario, si el color es azul, entonces disminuye la tasa de quiebra. Cuanto más alta sea la intensidad de color azul, más alta es la disminución de la tasa de quiebra.

Para analizar este efecto, se elabora la Figura 8. Esta figura muestra la variación de la tasa de quiebra promedio de las empresas en la red productiva mediante un mapa de calor con una coloración rojo-azul invertida. El color rojo indica que la variación es positiva (es decir, aumentan las posibilidades de que la empresa quiebre) mientras que el color azul indica que la variación es negativa (es decir, aumentan las posibilidades de que la empresa permanezca en la red). Cuanto más alta sea la intensidad de color, mayor es la variación de la tasa de quiebra (en valor absoluto) de una empresa en un periodo determinado.

Figura 8. Variación de la tasa de quiebra promedio por empresa para 30 periodos, cuando existe un choque de productividad del 20% sobre la empresa 9.



Fuente: Elaboración propia.

A grandes rasgos se observa que el choque de productividad en la empresa j_9 acentúa la quiebra de los proveedores habituales que se encuentran "aguas arriba". En primer lugar, este choque causa que la empresa j_9 aumente sus posibilidades de quebrar desde el periodo 3, hasta incrementar su tasa de quiebra en 14% al finalizar los 30 periodos de tiempo. Este efecto se propaga de proveedor en proveedor, con una fuerza menor. Por ejemplo, se observa que las empresas j_5 y j_1 aumentan también sus posibilidades de quebrar desde el periodo 3 y 5, pero con un incremento de su tasa de quiebra del 10% y 8% al terminar los 30 periodos, respectivamente. Se puede observar también un efecto negativo sobre las empresas j_{11} y j_{12}, compradores de la empresa j_9, aunque más tenue.

Cabe resaltar en esta figura que existen empresas que, por el contrario, aumentan sus posibilidades de permanecer en la industria debido a su condición de proveedores rivales. Este es el caso de las empresas j_2, j_4, j_6, j_7, j_8, que aumentan su permanencia en la red a fin de reemplazar aquellos proveedores habituales que fueron desplazados por el choque.

Como se había manifestado, el efecto cascada "aguas arriba" sobre las ganancias en el periodo inicial ayuda a entender cómo se origina el efecto cascada "aguas arriba" sobre la quiebra de los proveedores habituales. Un choque de productividad sobre una empresa aumenta sus precios de venta, lo que disminuye su posibilidad de realizar transacciones en la red y obtener ganancias positivas en el periodo inicial. Este efecto se propaga de proveedor en proveedor de tal manera que los proveedores habituales también reducen su posibilidad de obtener ganancias. En este sentido, toda la cadena de empresas, desde la empresa que recibió el choque hasta el último de los proveedores habituales afectados, será más propensa de quebrar en un próximo periodo.

Si en el siguiente periodo alguna de estas empresas quiebra, la actividad de los proveedores habituales de la empresa que quebró se contraerá de manera sustancial (pues gran parte de sus ventas se pierden por no tener comprador), limitando aún más su posibilidad de obtener ganancias y de permanecer en la red. Lo mismo sucederá para el resto de proveedores habituales que se encuentran “aguas arriba”, debido al efecto cascada en las ganancias que se reproduce para dicho instante de tiempo. Este proceso ocurre sucesivamente periodo a periodo a medida que las empresas salen de la industria, condicionando cada vez más las ganancias de las empresas que permanecen en la red productiva.

4. Conclusiones

La difusión de choques microeconómicos en redes productivas representa uno de los campos de investigación de mayor desarrollo dentro del análisis de redes económicas en la última década. Su objetivo se enmarca principalmente en el hallazgo de efectos cascada, es decir, la propagación de choques de productividad hacia la cadena de compradores o proveedores de la red mediante las relaciones intersectoriales insumo-producto.

En esta línea se han desarrollo diversos trabajos teóricos que se enfocan en la teoría de equilibrio general, con un uso importante de supuestos como: mercados de competencia perfecta, firmas representativas, redes exógenas, empresas permanentes sin posibilidad de quiebra, y tecnologías/preferencias tipo Cobb-Douglas. Estos supuestos incorporan restricciones fuertes en el comportamiento de la red productiva y reducen la complejidad del sistema económico que se pretende estudiar. Como tal, pueden atenuar la propagación de los choques microeconómicos o limitarla a ciertas empresas en la red.

El presente documento realiza una singular contribución en este marco teórico. Analiza la difusión de choques microeconómicos en redes productivas con competencia imperfecta y con posibilidad de quiebra de empresas. Este análisis se realiza mediante la introducción de un nuevo concepto: el Equilibrio General de Mercado, que posee las propiedades de un equilibrio de Nash para aquellas empresas tomadoras de precios que participan en el mercado de bienes intermedios, y las propiedades de un equilibrio oferta-utilización para el mercado de bienes de consumo final y el mercado laboral. Así también, este análisis considera el planteamiento de un enfoque de elección distinto: la elección probabilística, que asume que los compradores asignan una probabilidad a la contratación de cada uno de sus proveedores, a consecuencia del trade-off entre beneficio y riesgo que enfrentan por la falta de información.

Bajo estas consideraciones, un choque negativo de productividad en una empresa puede generar varios resultados. Primero, existen dos efectos sobre los precios de venta en el periodo inicial: un efecto horizontal y un efecto cascada “aguas abajo”. El primer efecto incrementa los precios de venta para las empresas que pertenecen a la competencia de la empresa afectada, mientras que el segundo incrementa los precios de venta de comprador en comprador en la red. Segundo, existe un efecto cascada “aguas arriba” sobre las ganancias de las empresas en el periodo inicial. Tercero, existe un efecto cascada “aguas arriba” en la quiebra de las empresas durante el transcurso del tiempo.

Si bien estos resultados se respaldan en simulaciones numéricas sobre una red simple (específicamente, una red estructurada uniformemente por niveles de encadenamiento), constituyen una muestra importante de los diferentes efectos indirectos que produce un choque microeconómico cuando se relajan ciertos supuestos fundamentales del equilibrio competitivo y el análisis de redes. En este sentido, puede ser relevante explorar otros problemas que van de la mano con la fijación de precios y la quiebra de empresas, como es la segmentación regional del mercado, la centralidad de las empresas y la inversión de capital.

Finalmente, el modelo económico realizado en este estudio, es una muestra de la utilidad que tienen las herramientas matemáticas para la modelización de sistemas altamente complejos y circulares;

en nuestro caso, una red productiva con empresas altamente interdependientes mediante decisiones de precios bajo incertidumbre y con posibilidad de quiebra. Estas herramientas se pueden reconfigurar, con algo de trabajo, para incorporar rasgos más realistas de un aparato productivo, como propiedades markovianas en las que las decisiones de las empresas no dependen de todas las empresas inmersas en la red, sino de aquellas que se encuentran en una red egocéntrica (i.e. aquellos compradores y vendedores que se encuentran a pocas transacciones de la empresa). De hecho, esta característica podría hacer que la determinación del EGM sea más simple, dado el confinamiento del equilibrio de Nash para dicho subconjunto de empresas.

Referencias

Acemoglu, D., Carvalho, Vasco, M., Ozdaglar, A., & Tahbaz-Salehi., A. (2012). The Network Origins of Aggregate Fluctuations. *Econometrica*, *80*(5), 1977-2016. https://doi.org/10.3982/ECTA9623

Acemoglu, D., Ozdaglar, A., & Tahbaz-Salehi, A. (2016). Networks, Shocks, and Systemic Risk. *The Oxford Handbook of the Economics of Networks*, *January*, 569-607. https://doi.org/10.3386/w20931

Acemoglu, D., Ozdaglar, A., & Tahbaz-Salehi, A. (2017). Microeconomic Origins of Macroeconomic Tail Risks. *American Economic Review*, *107*(1), 54-108. https://doi.org/10.1257/aer.20151086

Atalay, E. (2017). How Important Are Sectoral Shocks? *American Economic Journal: Macroeconomics*, *9*(4), 254-280. https://doi.org/10.1257/mac.20160353

Baqaee, D.R. (2018). Cascading Failures in Production Networks. *Econometrica*, *86*(5), 1819-1838. https://doi.org/10.3982/ECTA15280

Carvalho, V.M. (2010). Aggregate Fluctuations and the Network Structure of Intersectoral Trade. In *Economics Working Papers 1206*. http://www.econ.ucdavis.edu/seminars/papers/337/3371.pdf

Carvalho, V. M., & Gabaix, X. (2013). The Great Diversification and its Undoing. *American Economic Review*, *103*(5), 1697-1727. https://doi.org/10.1257/aer.103.5.1697

Grassi, B. (2017). IO in I-O: Size, Industrial Organization, and the Input-Output Network Make a Firm Structurally Important. *Working Paper*.

Stella, A. (2015). Firm dynamics and the origins of aggregate fluctuations. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *55*(1133), 71-88. https://doi.org/10.1016/j.jedc.2015.03.009

Anexos

A. Funciones de demanda con tecnología/preferencias CES

A.1 Funciones de demanda condicionada y costo mínimo de las empresas

Todas las empresas en la red productiva son tomadoras de precios en la adquisición de insumos. Su objetivo es minimizar su costo total, sujeto a una restricción tecnológica tipo CES con retornos constantes de escala y capital fijo.

Formalmente, cada empresa $j \in J$ enfrenta el siguiente problema de decisión:

$$\min_{z_{ji},l_j} c_j = \sum_{i \in I^{m}} p_i \, z_{ji} + w l_j$$

$$y_j = A_j \left(\sum_{I^{m}} \alpha_{ji} z_{ji}^{\rho_j} + \alpha_{jl} l_j^{\rho_j} \right)^{\frac{\vartheta_j}{\rho_j}}$$

donde $y_j \in \mathbb{R}_+$ es la producción de la empresa j; $z_j = (z_{j1}, \dots, z_{jM^{m}}) \in \mathbb{R}_+^{M^{m}}$ es el vector de demanda de insumos; $p = (p_1, \dots, p_{M^{m}}) \in \mathbb{R}_+^{M^{m}}$ es el vector de precios de los insumos, $l_j \in \mathbb{R}_+$ es la demanda de mano de obra y w es el salario; A_j es un constante de productividad; $\alpha_{ji}, \alpha_{jl}, \alpha_{jk} > 0$ son coeficientes de participación de la demanda de factores, y $\rho \leq 1$ es un coeficiente relacionado con la elasticidad de sustitución entre factores.

La solución de este problema utilizando la técnica de multiplicadores de Lagrange nos conduce a las siguientes funciones de demanda condicionada:

$$z_{ji}(y_j, p, w) = \left(\frac{y_j}{A_j}\right)^{\frac{1}{\vartheta_j}} \frac{\left(\frac{\alpha_{ji}}{p_i}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}}{\left(\sum_{i' \epsilon I^{m}} p_{i'} \left(\frac{\alpha_{ji'}}{p_{i'}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} + w \left(\frac{\alpha_{jl}}{w}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\right)^{1/\rho_j}}, \qquad \forall i \epsilon I^{m}$$

$$l_j(y_j, p, w) = \left(\frac{y_j}{A_j}\right)^{\frac{1}{\vartheta_j}} \frac{\left(\frac{\alpha_{jl}}{w}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}}{\left(\sum_{i' \epsilon I^{m}} p_{i'} \left(\frac{\alpha_{ji'}}{p_{i'}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} + w \left(\frac{\alpha_{jl}}{w}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}}\right)^{\frac{1}{\rho_j}}}$$

Por otro lado, la función de costo mínimo es:

$$c_j(y_j, p, w) = \left(\frac{y_j}{A_j}\right)^{\frac{1}{\vartheta_j}} \left(\sum_{i' \epsilon I^{m}} p_{i'} \left(\frac{\alpha_{ji'}}{p_{i'}}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} + w \left(\frac{\alpha_{jl}}{w}\right)^{\frac{1}{1-\rho_j}} \right)^{(\rho_j - 1)/\rho_j}$$

A.2. Funciones de demanda marshaliana y de oferta de trabajo del hogar representativo

Sea la utilidad tipo CES con preferencia al ocio:

$$U\big(x(\omega), l_h(\omega)\big) = \left(\sum_{i \epsilon I^{\mathrm{g}}} \gamma_i x_i^{\eta}(\omega) + \gamma_l\big(\bar{L} - l_h(\omega)\big)^{\eta}\right)^{\frac{1}{\eta}}$$

donde $x(\omega)$ es el vector de demanda de insumos; $l_h(\omega)$ es la oferta de trabajo para cada realización de la red productiva $\omega \in \Omega$; $\bar{L}$ es la dotación total de mano de obra; $\gamma_i, \gamma_l > 0$ son coeficientes de participación de consumo y ocio, respectivamente; y $\eta \leq 1$ es un parámetro relacionado con la elasticidad de sustitución entre la demanda de bienes y oferta laboral.

Por lo tanto, la solución del problema (7) mediante la técnica de multiplicadores de Lagrange arroja las siguientes funciones de demanda marshaliana:

$$x_i\big(\omega, p^{\mathrm{g}}(\omega), w(\omega), \pi(\omega)\big) =$$

$$\left(\frac{\gamma_i}{p_i^{\mathrm{g}}(\omega)}\right)^{\frac{1}{1-\eta}} \frac{\pi(\omega) + w(\omega)\bar{L}}{\sum_{i' \epsilon I^{\mathrm{g}}} p_{i'}^{\mathrm{g}}(\omega)\left(\frac{\gamma_{i'}}{p_{i'}^{\mathrm{g}}(\omega)}\right)^{\frac{1}{1-\eta}} + w(\omega)\left(\frac{\gamma_l}{w(\omega)}\right)^{\frac{1}{1-\eta}}}, \qquad \forall i \epsilon I^{\mathrm{g}} \ \forall \omega \in \Omega$$

Por otro lado, la oferta laboral óptima se encuentra definida por:

$$l_h\big(\omega, p^{\mathrm{g}}(\omega), w(\omega), \pi(\omega)\big) =$$

$$\bar{L} - \left(\frac{\gamma_l}{w(\omega)}\right)^{\frac{1}{1-\eta}} \frac{\pi(\omega) + w(\omega)\bar{L}}{\sum_{i' \epsilon I^{\mathrm{g}}} p_{i'}^{\mathrm{g}}(\omega)\left(\frac{\gamma_{i'}}{p_{i'}^{\mathrm{g}}(\omega)}\right)^{\frac{1}{1-\eta}} + w(\omega)\left(\frac{\gamma_l}{w(\omega)}\right)^{\frac{1}{1-\eta}}}, \qquad \forall \omega \in \Omega$$

B. Demostración de la existencia del Equilibrio General de Mercado

La existencia del Equilibrio General de Mercado se demuestra en 5 pasos. Primero, se demuestra que las condiciones de equilibrio ex-post (6), (7), (8) tienen una solución para cada escenario $\omega \in \Omega$, teniendo como fijo los precios p^{m}. Segundo, se halla un conjunto compacto y convexo para los precios p^{m}. Tercero, se demuestra que el beneficio de las empresas que producen bienes intermedios $E\big[\pi_j / p_j^{\mathrm{m}}, p_{-j}^{\mathrm{m}}\big]$ es una función continua. Cuarto, se demuestra que esta función es cóncava. Por último, en base al resultado de los pasos anteriores, se demuestra que existe una matriz de precios $p^{\mathrm{m}*}$ que resuelve el equilibrio de Nash planteado por los problemas (3).

Para simplificar la demostración, se asume que la utilidad del hogar representativo h tiene una especificación Cobb-Douglas sin preferencia al ocio (e.d. existe una dotación fija de mano de obra). Adicionalmente, se asume que las empresas tienen una tecnología Marx-Leontief en la demanda de insumos. Para las empresas $j \in J^{\mathrm{m}}$, el trabajo se demanda en proporciones fijas, mientras que para las empresas $j \in J^{g}$ el trabajo se demanda con una productividad marginal decreciente. Se asume también que la producción de cada bien de consumo final $i \in I^{\mathrm{g}}$ se realiza a través de una firma representativa. Finalmente, la función que mide el trade-off entre ganancia y riesgo en el problema de elección probabilística de los compradores se asume tiene una especificación lineal.

B.1. Existe un conjunto de precios y cantidades que resuelve las condiciones de equilibrio ex-post.

Sea $\omega \in \Omega$ una realización de la red productiva. Sea $p^{\mathrm{m}} \in \mathbb{R}_{+}^{N} \times \mathbb{R}_{+}^{N^{\mathrm{m}}}$ los precios de los bienes intermedios que se transan en la red productiva. Estas variables se considerarán fijas en esta primera parte.

Debido a que las empresas poseen una tecnología Marx-Leontief, la demanda de cada insumo representa una proporción fija de su producción. En términos formales:

$$\forall j \in J, \forall i \in b(j), \;\; z_{ji}(\omega) = \alpha_{ji} y_j(\omega)$$

donde z_{ji} es la demanda del insumo i en la empresa j, α_{ji} es el coeficiente técnico del insumo i en la empresa j, y y_j es la producción total de la empresa j en el escenario ω. Por otro lado, como se cumple el equilibrio local ex-post en el mercado de bienes intermedios, se tiene que:

$$\forall j \in J^{\mathrm{m}}, \qquad y_j(\omega) = \sum_{k \in \Delta_j^{+}(\omega)} z_{k,a(j)}(\omega)$$

En consecuencia, la producción de una empresa de bienes intermedios se puede representar como una combinación lineal de la producción de sus compradores.

$$\forall j \in J^{\mathrm{m}}, \qquad y_j(\omega) = \sum_{k \in \Delta_j^{+}(\omega)} \alpha_{k,a(j)} y_k(\omega)$$

Si se aplica esta propiedad de comprador en comprador hasta llegar a las empresas que producen bienes de consumo final, entonces se puede concluir que la producción de cualquier empresa se puede representar como una combinación lineal de la oferta de estos bienes. Es decir:

$$\forall j \in J^{\mathrm{m}}, \; y_j(\omega) = \textstyle\sum_{i \in I^{\mathrm{g}}} \theta_i(\omega) \hat{y}_i(\omega) \qquad [1]$$

donde $\theta_i(\omega)$ es una constante que depende de la realización ω, y $\hat{y}_i(\omega)$ es la producción de la firma representativa i. Esta ecuación plantea una característica importante en la solución del sistema $H(x(\omega), y(\omega), p^{\mathrm{g}}(\omega), w(\omega), p^{\mathrm{m}})$. Si la producción de las empresas de bienes de consumo final se encuentra determinada, entonces también lo estará la producción de cualquier empresa en la red. En este sentido, basta demostrar el equilibrio en el mercado de bienes finales y el mercado de trabajo para resolver el sistema.

Primero estudiemos el mercado de bienes finales. En el lado de la oferta, la firma representativa $i \in I^{\mathrm{g}}$ realiza su actividad en mercados perfectamente competitivos. En este sentido, decide cuanto producir a fin de maximizar sus ganancias dado los precios de mercado. Este problema se muestra a continuación una vez incluidas las consideraciones tecnológicas en los costos de la firma:

$$\max_{y_i^{\mathrm{g}}(\omega)} \; p_i^{\mathrm{g}}(\omega) \hat{y}_i(\omega) - \sum_{k \in b(i)} \alpha_{ik} \hat{y}_i(\omega) p_{ki}^{\mathrm{m}} - w l_i\big(\hat{y}_i(\omega)\big)$$

donde $p_i^{\mathrm{g}}(\omega)$ es el precio del bien de consumo final i, α_{ik} es el coeficiente técnico del insumo k en la empresa i, p_{ki}^{m} es el precio del insumo k que demanda la empresa i, w es el salario y $l_i\big(\hat{y}_i(\omega)\big)$ es una función de demanda de trabajo tal que:

$$\forall i \in I^{\mathrm{g}}, \qquad l_i\big(\hat{y}_i(\omega)\big) = \hat{y}_i(\omega)^{\vartheta_i}$$

donde ϑ_i es un coeficiente de retorno de la mano de obra. Se asume $\vartheta_i > 1$ para considerar una productividad marginal decreciente. La solución de este problema da como resultado:

$$\hat{y}_i(\omega) = \left(\frac{p_i^{\mathfrak{g}}(\omega) - \sum_k \alpha_{ik} p_{ki}^{\mathfrak{m}}}{w\vartheta_i}\right)^{\frac{1}{\vartheta_i - 1}} \qquad [2]$$

Cabe subrayar que esta función existe siempre que $p_i^{\mathfrak{g}}(\omega) > \sum_k \alpha_{ik} p_{ki}^{\mathfrak{m}}$. Esta restricción se conoce como condición de actividad y plantea que la empresa produce siempre que el precio de su producto sea mayor al costo de las materias primas por unidad producida.

En el lado de la demanda, el hogar representativo maximiza su utilidad con ingresos provenientes exclusivamente del beneficio de las empresas. En términos formales:

$$\max_{x_i(\omega)} \prod_{i \in I^{\mathfrak{g}}} x_i(\omega)^{\gamma_i}$$

$$\sum_{i \in I^{\mathfrak{g}}} p_i^{\mathfrak{g}}(\omega) x_i(\omega) = \pi(\omega)$$

donde $x_i(\omega)$ es el consumo de bien i, γ_i es el coeficiente de consumo del bien i ($\sum_{i \in I^{\mathfrak{g}}} \gamma_i = 1, \gamma_i > 0$), y $\pi(\omega)$ es el total de ganancias de las empresas en la realización $\omega \in \Omega$. La solución de este problema arroja:

$$\forall i \in I^{\mathfrak{g}},\ x_i(\omega) = \gamma_i \frac{\pi(\omega)}{p_i^{\mathfrak{g}}(\omega)} \qquad [3]$$

Las funciones de oferta [2] y demanda [3] nos conducen a las siguientes condiciones de equilibrio en el mercado de bienes de consumo final:

$$\forall i \in I^{\mathfrak{g}}, \qquad p_i^{\mathfrak{g}}(\omega)\left(\frac{p_i^{\mathfrak{g}}(\omega) - \sum_k \alpha_{ik} p_{ki}^{\mathfrak{m}}}{\vartheta_i}\right)^{\frac{1}{\vartheta_i - 1}} = \gamma_i \pi(\omega) w^{\frac{1}{\vartheta_i - 1}}$$

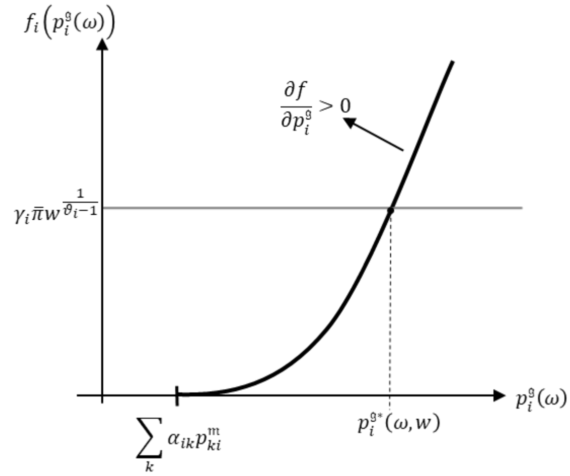
Denotemos el lado izquierdo de estas ecuaciones por $f_i\left(p_i^{\mathfrak{g}}(\omega)\right)$. Como $\vartheta_i > 1$ y $p_i^{\mathfrak{g}}(\omega) > \sum_k \alpha_{ik} p_{ki}^{\mathfrak{m}}$, se tiene $\frac{\partial f_i}{\partial p_i^{\mathfrak{g}}} > 0$.

Debido al cumplimiento de la Ley de Walras en el mercado de bienes de consumo final, una de estas ecuaciones es irrelevante, por lo que es necesario escoger un numerario para resolver el sistema. Si se toma como numerario la renta del hogar (e.d $\pi(\omega) = \overline{\pi}$), entonces existe un precio $p_i^{\mathfrak{g}*}(\omega, w)$ que resuelve:

$$f_i\left(p_i^{\mathfrak{g}*}(\omega, w)\right) = \gamma_i \overline{\pi} w^{\frac{1}{\vartheta_i - 1}} \qquad [4]$$

Este hecho se puede observar en la siguiente figura.

Figura 9. Determinación del precio $p_i^{g*}(\omega, w)$.



Fuente: Elaboración propia.

Como se observa $\lim_{w \to 0} p_i^{g*}(\omega, w) = \sum_k \alpha_{ik} p_{ki}^m$ y $\lim_{w \to \infty} p_i^{g*}(\omega, w) = \infty$. Además, por derivación implícita de [4] se tiene:

$$\frac{dp_i^g}{dw} = \frac{\vartheta_i (\gamma_i \bar{\pi})^{(\vartheta_i - 1)}}{(\vartheta_i - 1) p_i^g(\omega)^{(\vartheta_i - 2)} \left(p_i^g(\omega) - \sum_k \alpha_{ik} p_{ki}^m\right) + p_i^g(\omega)^{(\vartheta_i - 1)}}$$

La ecuación [4] plantea un resultado interesante. Si se conoce el salario, entonces se conocerán también los precios de los bienes finales que vacían el mercado. Para hallar este salario, analicemos el mercado laboral. Aquí, el equilibrio se encuentra determinado por:

$$\bar{L} = \sum_{j \in J} l_j \left(y_j(\omega)\right) = \sum_{j \in J} l_j \left(\sum_{i \in I^g} \theta_i(\omega) \hat{y}_i(\omega)\right)$$

donde $\bar{L}$ es la dotación fija de mano de obra. Debido a las ecuaciones [1] y [2] este equilibrio se puede expresar como:

$$\bar{L} = \sum_{j \in J} l_j \left(\sum_{i \in I^g} \theta_i(\omega) \left(\frac{p_i^g(\omega) - \sum_k \alpha_{ik} p_{ki}^m}{w \vartheta_i}\right)^{\frac{1}{\vartheta_i - 1}}\right) \qquad [5]$$

Asumamos que este equilibrio se cumple para los precios $p_i^{g*}(\omega, w)$ que resuelven[4]. En este sentido, la demanda total de mano de obra (lado derecho de la ecuación [5]) se puede representar como una función $g\left(p_i^{g*}(\omega, w), w\right)$. Estudiemos las propiedades de esta función de extremo a extremo.

En primer lugar, si el salario tiende a cero, por L'Hopital y la derivada $\frac{dp_i^g}{dw}$, se tiene que:

$$\lim_{w \to 0} \left(\frac{p_i^{g*}(\omega, w) - \sum_k \alpha_{ik} p_{ki}^m}{w \vartheta_i}\right)^{\frac{1}{\vartheta_i - 1}} = \frac{\gamma_i \bar{\pi}}{\sum_k \alpha_{ik} p_{ki}^m}$$

con lo cual:

$$\lim_{w \to 0} g\big(p_i^{\mathfrak{g}*}(\omega, w), w\big) = \sum_{j \in J} l_j \left(\frac{\gamma_i \bar{\pi}}{\sum_k \alpha_{ik} p_{ki}^{\mathfrak{m}}} \right) > 0$$

En segundo lugar, si el salario tiende al infinito, aplicando de la misma manera L'Hopital la derivada $\frac{dp_i^{\mathfrak{g}}}{dw}$, se tiene que:

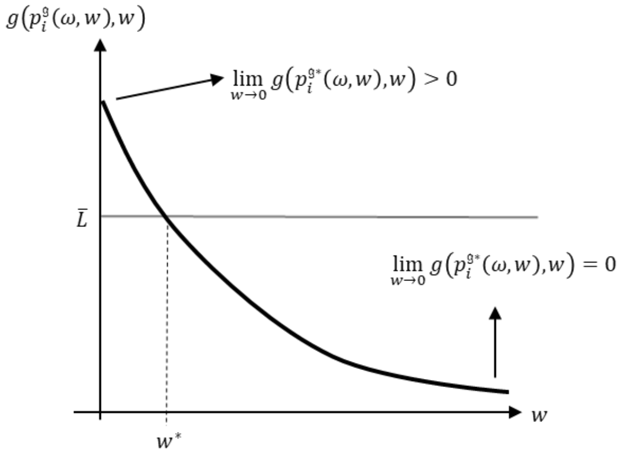
$$\lim_{w \to 0} \left(\frac{p_i^{\mathfrak{g}*}(\omega, w) - \sum_k \alpha_{ik} p_{ki}^{\mathfrak{m}}}{w \vartheta_i} \right)^{\frac{1}{\vartheta_i - 1}} = 0$$

con lo cual:

$$\lim_{w \to 0} g\big(p_i^{\mathfrak{g}*}(\omega, w), w\big) = 0$$

Dadas estas propiedades, se puede asegurar que existe un salario w^* que limpie el mercado laboral. Este hecho se puede observar en la siguiente figura.

Figura 10. Determinación del salario w^*.



Fuente: Elaboración propia.

En resumen, el salario de equilibrio en [5] permite determinar los precios de los bienes de consumo final mediante [4]. Ambas variables permiten determinar la producción de bienes finales por [2], el consumo final por [3] y consecuentemente la producción del resto de empresas en la red productiva a través de [1].

Dado este resultado, se tiene que los flujos $x(\omega), y(\omega)$ y los precios $p^{\mathfrak{g}}(\omega), w(\omega)$ se encuentran determinados por las condiciones de equilibrio ex-post para cualquiera realización $\omega \in \Omega$, por lo que el valor esperado $E\big[\pi_j / p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}\big]$ para cualquier empresa $j \in J^{\mathfrak{m}}$ se encuentra bien definido.

B.2. $p^{\mathfrak{m}}$ pertenece a un conjunto convexo y compacto

En principio, se conoce que los precios de los bienes intermedios $p^{\mathfrak{m}} \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^{N^{\mathfrak{m}}}$. Este conjunto por definición es cerrado y convexo, sin embargo, no es acotado; condición necesaria para la compacidad del conjunto.

En este sentido, se debe determinar si existe un valor que limite superiormente los precios del modelo. Como se había manifestado en la sección anterior, la Ley de Walras exige tomar un numerario para resolver el sistema de ecuaciones de equilibrio. Si se toma como numerario un índice de precios de la forma $I = \sum_k \gamma_i p_i^{\mathfrak{g}}(\omega)$, entonces:

$$\forall i \in I^{\mathfrak{g}}, \qquad p_i^{\mathfrak{g}}(\omega) \leq I$$

Esta restricción limita el resto de precios en el modelo a través de las condiciones de actividad de las empresas. En primer lugar, la condición de actividad en las empresas de bienes de consumo final plantea que:

$$\forall i \in I^{\mathfrak{g}}, \qquad p_i^{\mathfrak{g}}(\omega) > \sum_{k \in b(i)} \alpha_{ik} p_{ki}^{\mathfrak{m}}$$

como $0 \leq \alpha_{ik} \leq 1$, esto implica:

$$\forall i \in I^{\mathfrak{g}}, \forall k \in b(i), \qquad p_{ki}^{\mathfrak{m}} < I$$

Asimismo, la condición de actividad de las empresas de bienes intermedios plantea que:

$$\forall j \in J^{\mathfrak{m}}, \forall k \in \Delta_j^{+}(R), \qquad p_{jk}^{\mathfrak{m}} > \sum_{i \in b(j)} \sum_{\substack{k' \in \\ \Delta_{ji}^{-}(\omega)}} \alpha_{ji} p_{k'j}^{\mathfrak{m}}$$

lo cual implica también:

$$\forall j \in J^{\mathfrak{m}}, \forall k \in \Delta_j^{+}(R), \;\; p_{jk}^{\mathfrak{m}} < I$$

En consecuencia, $p^{\mathfrak{m}}$ pertenece a un conjunto convexo y compacto $A = \left\{p \in \mathbb{R}_{+}^{N} \times \mathbb{R}_{+}^{N^{\mathfrak{m}}} \mid \forall j, k \in J^{\mathfrak{m}}, \;\; p_{jk} < I\right\}$.

B.3. El beneficio $E\left[\pi_j / p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}\right]$ para una empresa $j \in J^{\mathfrak{m}}$ es una función continua en $p_j^{\mathfrak{m}}$

Antes de realizar este paso, primero replanteemos el problema de elección probabilística del comprador cuando el trade-off entre ganancia y riesgo posee una especificación lineal.

$$\begin{aligned}
&\max_{\psi} \; \psi_{jk}\Pi_j + \left(1 - \psi_{jk}\right)\Pi_{\bar{j}} \\
&s.r \\
&f\left(\psi_{jk}\right) \geq \beta \\
&0 \leq \psi_{jk} \leq 1
\end{aligned}$$

donde ψ_{jk} es la probabilidad que asigna el comprador k a la transacción con el proveedor habitual j; $\Pi_j, \Pi_{\bar{j}}$ son las ganancias de transar con el proveedor habitual j y el proveedor rival $\bar{j}$, respectivamente; β es un valor mínimo de preferencia para el trade-off, y $f\left(\psi_{jk}\right)$ es una función lineal de la forma:

$$f\left(\psi_{jk}\right) = \left(\Pi_{\bar{j}} - \Pi_j\right) + a\left(1 - \psi_{jk}\right)\left(\phi_{\bar{j}}\varepsilon_{\bar{j}} - \phi_j\varepsilon_j\right), \qquad a > 0$$

Para que exista una solución interior, se asume que $\beta < \left(\Pi_{\bar{j}} - \Pi_j\right) < \beta - a\left(\phi_{\bar{j}}\varepsilon_{\bar{j}} - \phi_j\varepsilon_j\right)$. De esta manera, se tiene que la elección probabilística se encuentra determinada por:

$$\psi_{jk} = 1 - \frac{\beta - (\Pi_{\bar{j}} - \Pi_j)}{a(\phi_{\bar{j}}\varepsilon_{\bar{j}} - \phi_j \varepsilon_j)} \qquad [7]$$

Debido a la tecnología Marx-Leontief, se conoce que $\Pi_{\bar{j}} - \Pi_j = -\alpha_{k,a(j)}\left(p^{\mathfrak{m}}_{jk} - p^{\mathfrak{m}}_{\bar{j}k}\right)$, por lo que la función de probabilidad es:

$$\psi_{jk} = 1 - \frac{\beta + \alpha_{k,a(j)}\left(p^{\mathfrak{m}}_{jk} - p^{\mathfrak{m}}_{\bar{j}k}\right),}{a(\phi_{\bar{j}}\varepsilon_{\bar{j}} - \phi_j \varepsilon_j)} \qquad [7]$$

En base a esta elección, se puede constatar que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{jk}}{\partial p^{\mathfrak{m}}_{jk}} &= \frac{1}{a(\phi_{\bar{j}}\varepsilon_{\bar{j}} - \phi_j \varepsilon_j)} < 0, \ \frac{\partial^2 \psi_{jk}}{\partial {p^{\mathfrak{m}}_{jk}}^2} = 0 \\ \frac{\partial \psi_{\bar{j}k}}{\partial p^{\mathfrak{m}}_{\bar{j}k}} &= \frac{1}{a(\phi_{\bar{j}}\varepsilon_{\bar{j}} - \phi_j \varepsilon_j)} < 0, \ \frac{\partial^2 \psi_{\bar{j}k}}{\partial {p^{\mathfrak{m}}_{\bar{j}k}}^2} = 0 \end{aligned} \qquad [8]$$

En otras palabras, las funciones de probabilidad ψ_{jk} y $\psi_{\bar{j}k}$ son funciones continuas decrecientes y cóncavas en los precios $p^{\mathfrak{m}}_{jk}$ y $p^{\mathfrak{m}}_{\bar{j}k}$, respectivamente. Estas conclusiones son puntos importantes para continuar con la demostración.

Retomemos ahora el paso 4. Como se recordará, el beneficio esperado de las empresas que producen bienes intermedios es:

$$E\left[\pi_j / p^{\mathfrak{m}}_j, p^{\mathfrak{m}}_{-j}\right] = \sum_{\omega \in \Omega} \Psi\left(\omega / p^{\mathfrak{m}}_j, p^{\mathfrak{m}}_{-j}\right) \ \pi_j\left(p^{\mathfrak{m}}_j, p^{\mathfrak{m}}_{-j}, \omega\right)$$

Por un lado, la probabilidad $\Psi\left(\omega / p^{\mathfrak{m}}_j, p^{\mathfrak{m}}_{-j}\right)$ es igual a la multiplicación de las probabilidades $\psi_{jk}\left(p^{\mathfrak{m}}_{jk}, p^{\mathfrak{m}}_{\bar{j}k}\right)$, las cuales tienen la forma continua [7].

Por otro lado, el beneficio $\pi_j\left(p^{\mathfrak{m}}_j, p^{\mathfrak{m}}_{-j}, \omega\right)$ en cada realización $\omega \in \Omega$ representa:

$$\pi_j\left(p^{\mathfrak{m}}_j, p^{\mathfrak{m}}_{-j}, \omega\right) = \sum_{k \in \Delta^{+}_j(\omega)} p^{\mathfrak{m}}_{jk} \, z_{k,a(j)}\left(y_k, p^{\mathfrak{m}}_{jk}, p^{\mathfrak{m}}_{-j}, w(\omega)\right) - c_j\left(y_j, p^{\mathfrak{m}}_{-j}, w(\omega)\right)$$

Aquí, la demanda condicionada $z_{k,a(j)}$ y el costo mínimo c_j se determinan a partir del problema de minimización de costos con una tecnología Marx-Leontief para la demanda de insumos y mano de obra. Formalmente, este problema para la empresa j tiene la forma:

$$\min_{z_{ji}} \sum_{i \in b(j)} \sum_{\substack{k \in \\ \Delta^{-}_{ji}(\omega)}} p^{\mathfrak{m}}_{kj} \, z_{ji} + w \, l_j$$

$$\min\left\{\frac{z_{j1}}{\alpha_{j1}}, \dots, \frac{z_{jn}}{\alpha_{jn}}, \frac{l_j}{\alpha_{jl}}\right\} = y_j$$

Resolviendo este problema se obtiene:

$$l_j = \alpha_{jl} w \qquad z_{ji} = \alpha_{ji} y_j, \qquad \forall i \in b(j)$$

$$c_j = y_j \left(\sum_{i \in b(j)} \sum_{\substack{k \in \\ \Delta_{ji}^{-}(\omega)}} \alpha_{ji} p_{kj}^{\mathfrak{m}} + \alpha_{jl} w \right), \qquad y_j = \sum_{\substack{k \in \\ \Delta_j^{+}(\omega)}} z_{k,a(j)}$$

con lo cual el beneficio en la realización $\omega \in \Omega$ es:

$$\pi_j(p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}, \omega) = \sum_{k \in \Delta_j^{+}(\omega)} \alpha_{k,a(j)} p_{jk}^{\mathfrak{m}} \, y_k - y_j \left(\sum_{i \in b(j)} \sum_{\substack{k \in \\ \Delta_{ji}^{-}(\omega)}} \alpha_{ji} p_{kj}^{\mathfrak{m}} + w \alpha_{jl} \right) \qquad [9]$$

Como se observa, esta función es lineal y continua en $p_j^{\mathfrak{m}}$.

Por lo tanto, debido a que $\Psi(\omega / p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}), \pi_j(p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}, \omega)$ son funciones continuas, se puede concluir que el beneficio esperado $E[\pi_j / p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}]$ también es una función continua.

B.4. El beneficio $E[\pi_j / p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}]$ para una empresa $j \in J^{\mathfrak{m}}$ es una función cóncava en $p_j^{\mathfrak{m}}$

Para realizar este paso, es necesario realizar dos observaciones sobre el valor esperado $E[\pi_j / p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}]$. Primero, notemos que la función de probabilidad $\Psi(\omega / p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}})$ se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\Psi(\omega / p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}) = \Psi_{-j}(\omega / p_{-j}^{\mathfrak{m}}) \, \Psi_j(\omega / p_j^{\mathfrak{m}})$$

donde Ψ_{-j} es la multiplicación de probabilidades de contratación de todas en las empresas en la red, excepto la empresa j; y Ψ_j es la multiplicación de probabilidades de contratación exclusivamente de la empresa j. Formalmente:

$$\Psi_{-j}(\omega / p_{-j}^{\mathfrak{m}}) = \prod_{r \neq j} \prod_{s \in \Delta_r^{+}(\omega)} \psi_{rs}$$

$$\Psi_j(\omega / p_j^{\mathfrak{m}}) = \prod_{k \in \Delta_j^{+}(\omega)} \psi_{jk}$$

Segundo, debido a la especificación lineal (9), el conjunto de realizaciones Ω sobre las cuales se determina el valor esperado $E[\pi_j / p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}]$ puede contraerse a un conjunto de menor tamaño $\hat{\Omega}$ que contenga aquellas realizaciones en las cuales los proveedores transen exclusivamente con un solo comprador. Es decir:

$$\hat{\Omega} = \{\omega \in \Omega \mid \forall j \in J \; |\Delta_j^{+}(\omega)| = 1\}$$

Bajo estas consideraciones, el beneficio esperado se transforma en:

$$E[\pi_j / p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}] = \sum_{\omega \in \hat{\Omega}} \Psi_{-j}(\omega / p_{-j}^{\mathfrak{m}}) \sum_{\substack{k \in \\ \Delta_j^{+}(R)}} \alpha_{k,a(j)} \, y_k \, \psi_{jk}(p_{jk}^{\mathfrak{m}}, p_{\overline{jk}}^{\mathfrak{m}}) \left(p_{jk}^{\mathfrak{m}} - \sum_{i \in b(j)} \sum_{\substack{k \in \\ \Delta_{ji}^{-}(\omega)}} \alpha_{ji} p_{kj}^{\mathfrak{m}} - \alpha_{jl} w \right)$$

En esta función, los términos $\Psi_{-j}, \{y_k \mid k \in \Delta_j^{+}(R)\}, \{p_{kj}^{\mathfrak{m}} \mid i \in b(j), k \in \Delta_{ji}^{-}(\omega)\}$ no dependen de $p_j^{\mathfrak{m}}$, por lo que permanecen constantes para las decisiones que toma la empresa j . En este sentido, la concavidad de $E\left[\pi_j/p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}\right]$ respecto a $p_j^{\mathfrak{m}}$ se encuentra determinada exclusivamente por el comportamiento del siguiente término:

$$h\left(p_{jk}^{\mathfrak{m}}\right) = \psi_{jk}\left(p_{jk}^{\mathfrak{m}}, p_{\overline{jk}}^{\mathfrak{m}}\right)\left(p_{jk}^{\mathfrak{m}} - \sum_{i \in b(j)} \sum_{\substack{k \in \\ \bar{\Delta}_{ji}(\omega)}} \alpha_{ji} p_{kj}^{\mathfrak{m}} - w\alpha_{jl} \right)$$

La segunda derivada de este término respecto a $p_{jk}^{\mathfrak{m}}$ es:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial {p_{jk}^{\mathfrak{m}}}^2} = \frac{\partial^2 \psi_{jk}^*}{\partial {p_{jk}^{\mathfrak{m}}}^2} p_{jk}^{\mathfrak{m}} + 2\frac{\partial \psi_{jk}^*}{\partial p_{jk}^{\mathfrak{m}}}$$

lo cual, debido a [8] se tiene:

$$\forall k \in J, \forall i \in b(k), \forall j \in c(k,i), \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial {p_{jk}^{\mathfrak{m}}}^2} < 0$$

Por lo tanto, el termino $h(p_{jk}^{\mathfrak{m}})$ es una función cóncava respecto a $p_{jk}^{\mathfrak{m}}$. Puesto que cualquier combinación lineal de funciones cóncavas también es cóncava, entonces queda demostrado que $E\left[\pi_j/p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}\right]$ es una función cóncava respecto a $p_j^{\mathfrak{m}}$.

B.5. Existe una matriz de precios $p^{\mathfrak{m}*}$ que resuelve simultáneamente el problema de decisión de las empresas de bienes de consumo intermedio

Este paso hace uso de los resultados obtenidos en los pasos anteriores. El paso 1 demuestra que existen $x(\omega), y(\omega), p^{\mathfrak{g}}(\omega), w(\omega),\ \forall \omega \in \Omega$ tal que se cumplen las condiciones de equilibrio ex-post, por lo que el valor esperado $E\left[\pi_j/p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}\right],\ \forall j \in J^{\mathfrak{m}}$ se encuentra bien definido. Por otro lado, el paso 2 demuestra que los precios $p^{\mathfrak{m}} \in A$, donde A es un conjunto compacto y convexo. Finalmente, los pasos 3 y 4 demuestran que el beneficio esperado $E\left[\pi_j/p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}}\right]$ es una función continua y cóncava respecto a $p_j^{\mathfrak{m}}$.

En consecuencia, utilizando el teorema de existencia del equilibrio de Nash para estrategias continuas, se tiene que existe una matriz de precios $p^{\mathfrak{m}*}$ que maximiza simultáneamente el beneficio esperado de las empresas. Esto es, cada empresa $j \in J^{\mathfrak{m}}$ determina su vector de precios $p_j^{\mathfrak{m}*}$ que maximiza sus ganancias, asumiendo que el resto de empresas en la red productiva actúa de la misma forma para los precios $p_{-j}^{\mathfrak{m}*}$. Formalmente:

$$\exists p^{\mathfrak{m}*} \in A \mid \forall j \in J^{\mathfrak{m}}, \qquad E\left[\pi_j/p_j^{\mathfrak{m}*}, p_{-j}^{\mathfrak{m}*}\right] > E\left[\pi_j/p_j^{\mathfrak{m}}, p_{-j}^{\mathfrak{m}*}\right], \forall p_j^{\mathfrak{m}} \in A_j$$

C. Algoritmo para hallar el Equilibrio General de Mercado

El EGM Λ se caracteriza por ser un equilibrio de Nash dentro de una estructura de equilibrio ex-post. Una de las técnicas más simples para determinar este tipo equilibrio es utilizar el método de punto fijo. Este método emplea las funciones de reacción que se derivan del modelo para hallar iterativamente los valores que resuelven el equilibrio. Ésta es la opción que se escoge en el presente documento y se detalla a través del siguiente algoritmo.

Algoritmo. Determinación del EGM

1. Hallar todas las realizaciones de la red productiva $\omega \in \Omega$

2. Dar un valor inicial a los precios $p^{\mathfrak{m},0} \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^{N^{\mathfrak{m}}}$.

3. Mientras $\|p^{\mathfrak{m},t+1} - p^{\mathfrak{m},t}\| \geq \epsilon$

3.1. Establecer $p^{\mathfrak{m},t} = p^{\mathfrak{m},t-1}$

3.2. Para toda realización $\omega \in \Omega$

3.2.1. Hallar los vectores $x(\omega), y(\omega), p^{\mathfrak{g}}(\omega), w(\omega)$ que resuelven: $H(x(\omega), y(\omega), p^{\mathfrak{g}}(\omega), w(\omega), p^{\mathfrak{m},t}) = 0$.

3.2.2. Ingresar la solución $y(\omega)$ en la matriz Y_{-j}

3.3. Para toda empresa $j \in J^{\mathfrak{m}}$,

3.3.1. Hallar el vector de precios $p_j^{\mathfrak{m},t+1} \in \mathbb{R}_+^N$ tal que

$p_j^{\mathfrak{m},t+1} = F_j\big(p_{-j}^{\mathfrak{m},t}, W, Y_{-j}\big)$.

EGM: $\Lambda \leftarrow p^{\mathfrak{m}*}$

4. Para toda realización $\omega \in \Omega$

4.1. Hallar los vectores $x^*(\omega), y^*(\omega), p^{\mathfrak{g}*}(\omega), w^*(\omega)$ que resuelve: $H(x^*(\omega), y^*(\omega), p^{\mathfrak{g}*}(\omega), w^*(\omega), p^{\mathfrak{m}*}) = 0$.

EGM: $\Lambda \leftarrow (p^{\mathfrak{m}*}, \{x^*(\omega), y^*(\omega), p^{\mathfrak{g}*}(\omega), w^*(\omega)\}_{\omega\in\Omega})$