



## Fractalidad implícita en el comercio internacional

LAGUNAS PULS, SERGIO  
Universidad del Caribe (México)  
Correo electrónico: [slagunas@ucaribe.edu.mx](mailto:slagunas@ucaribe.edu.mx)

### RESUMEN

El objetivo de este trabajo es determinar si las operaciones de comercio internacional, despachadas por las aduanas marítimas de México, presentan características fractales con memoria de largo plazo. Para estimar el exponente de Hurst ( $H$ ), se empleó el método de rango escalado (R/S) aplicado a 1,700 datos agrupados por cada aduana del país, considerando como hipótesis que se presenta memoria de largo plazo cuando  $H$  sea igual o mayor a 0.5 y menor o igual a 1. Los resultados permiten afirmar que sí existe memoria de largo plazo, con lo cual las autoridades podrían administrar más eficientemente los recursos asignados a las aduanas marítimas del país.

**Palabras clave:** comercio internacional, dimensión fractal, aduanas marítimas.

**Clasificación JEL:** F13; F23; N76.

**MSC2010:** 28A80; 81Q35.

## Implicit fractality in international trade

### ABSTRACT

In this paper, the objective is to determine whether international trade operations, cleared by maritime customs in Mexico, present fractal characteristics with long term memory. To estimate the Hurst exponent (H), the scaled rank method (R/S) was applied to 1,700 data grouped by each customs office in the country, considering as a hypotheses that long-term memory is present when H is equal or greater than 0.5 and less than or equal to 1. The results allow affirming that long-term memory does exist, with which the authorities could manage more efficiently the resources assigned to the country's maritime customs offices.

**Keywords:** international trade, fractal dimension, maritime customs.

**JEL classification:** F13; F23; N76.

**MSC2010:** 28A80; 81Q35.



## 1. Introducción

Tras la introducción por Hurst (1951) del denominado fenómeno Hurst para caracterizar la persistencia en el río Nilo (O'Connell et al., 2015; Sutcliffe et al., 2016) y la posterior formulación de la geometría fractal (incluida la noción de dimensión fractal) por Mandelbrot (1975; 1982), el uso de los fractales y de la dimensión fractal en distintos ámbitos de conocimiento se inició en la década de 1980 y se consolidó en la de 1990. De hecho, el conjunto de Mandelbrot es considerado como uno de los “monstruos matemáticos” junto a los tres fractales lineales clásicos, el conjunto de Cantor, la curva del Hilbert y el copo de nieve de Koch (Rubiano, 1997; Debnath, 2006). Todos estos objetos matemáticos comparten una misma propiedad: una ilimitada conformación similar en múltiples niveles o escalas (Gomory, 2010; Peitgen, 2010). De hecho, ya existen aplicaciones previas de los fractales en el ámbito de las Finanzas como puede ser la medición del riesgo en los mercados (Mostenau, 2019).

De esta manera, ya en el siglo XXI, la medición fractal ha continuado como una metodología bien aceptada en diversas disciplinas: en aspectos humanos y de salud (Rodríguez et al., 2006); en fenómenos naturales como las precipitaciones pluviales (Martín-Vide et al., 2001), reproducción de organismos (Modesto-Iregui, Guillot & Donato, 2002); en industrias y sus procesos, como en la de combustibles (Suárez-Domínguez et al., 2013) o en la industria de la construcción (Iturriaga & Jovanovich, 2012); en mercados financieros (Calvet & Fisher, 2013; Kristoufek & Vosvrda, 2013; Rodríguez, 2014); en impuestos y finanzas públicas (Lagunas, Aguilar & Rodríguez, 2014); y recientemente se ha considerado la aplicación fractal al comercio con enfoque global (Karpiarz, Fronczak & Fronczak, 2014); en todos los casos el interés fundamental ha sido estimar las propiedades fractales representadas por el exponente de Hurst ( $H$ ) y por la dimensión fractal ( $D$ ).

Inspirados en las múltiples aplicaciones que permiten emplear características fractales de exponente  $H$  y dimensión  $D$ , en este trabajo, se realizarán valoraciones de las series temporales de operaciones de comercio exterior en las aduanas marítimas de México. La hipótesis principal de trabajo será que las operaciones despachadas en estas aduanas siguen patrones fractales con exponente  $H > 0.5$ , en cuyo caso la dimensión fractal será  $1 < D \leq 1.5$ . Para ello, después de esbozar la conformación de la aduana mexicana, se presentará una síntesis con la metodología para obtener las características  $H$  y  $D$ , dando seguidamente paso al análisis de las series de interés y a los resultados y conclusiones obtenidos.

## 2. La aduana de México

En México, el Servicio de Administración Tributaria (SAT) es un órgano desconcentrado de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), con el propósito de recaudar impuestos internos (de operaciones que ocurren dentro del país) y arancelarios (principalmente por la importación de bienes), facilitando a los contribuyentes los mecanismos, instructivos o manuales, para que cumplan correctamente con las obligaciones fiscales (Servicio de Administración Tributaria, 2020a).

El SAT, para el cumplimiento de sus funciones, cuenta con las siguientes administraciones: Administración General de Grandes Contribuyentes, Administración General de Recaudación, Administración General de Planeación, Administración General de Evaluación, Administración General de Auditoría Fiscal Federal, Administración General Jurídica, Administración General de Recursos y Servicios, Administración General de Servicios al Contribuyente, Administración General de Auditoría de Comercio Exterior y Administración General de Aduanas, siendo estas últimas dos las relacionadas directamente con las operaciones de comercio internacional (Servicio de Administración Tributaria, 2020b).

La Administración General de Auditoría de Comercio Exterior es la encargada de la planeación, organización y en general de dirigir y controlar las funciones de prevención y combate de conductas ilícitas en el comercio internacional. Por otra parte, la Administración General de Aduanas tiene como encomienda el despacho aduanero; dicho de otra manera, la verificación de la salida y entrada de

mercancías a territorio nacional. Por tanto, sus actividades están directamente realizadas en el momento en que se desarrollan las operaciones, mientras que la auditoría se realiza previamente o bien a posteriori de haber realizado operaciones (Instituto Nacional de Acceso a la Información, 2020).

La Administración General de Aduanas cuenta con 84 aduanas en México, que se encuentran distribuidas en todas las regiones del país y se clasifican en 11 aduanas interiores, 21 fronteras y 17 aduanas marítimas, estas últimas ubicadas en los estados de Baja California, Baja California Sur, Campeche, Colima, Guerrero, Oaxaca, Michoacán, Quintana Roo, Sinaloa, Sonora, Tamaulipas y Tabasco Tamaulipas, Veracruz y Yucatán. Es importante destacar que las aduanas establecidas en los estados pueden tener secciones (sucursales) con dependencia a una aduana; por ejemplo, la aduana de Cancún cuenta con dos secciones, una en el Municipio de Puerto Morelos y otra en el Municipio de Cozumel (Secretaría de Hacienda y Crédito Público, 2020).

Conforme a las leyes de México, las operaciones de comercio exterior con fines comerciales deben estar amparadas con un pedimento (Congreso de la Unión, 2020) bajo el cual, las personas autorizadas para realizar actividades en la aduana, deben presentarlo, describiendo los elementos fundamentales como tipo de mercancía y clasificación arancelaria, entre otros.

Los pedidos en el año 2019 alcanzaron 6.8 millones de importaciones, lo que significó incremento de 0.3% con respecto al año 2018, mientras que en operaciones de exportación fueron 2.6 millones de pedimentos, representado un incremento del 0.9% con respecto a 2018 (Servicio de Administración Tributaria, 2020c).

Tan solo durante el año 2019 el valor de las importaciones sumó 9,891,105,534,545.80 pesos, en un total de 10,812,183 operaciones, mientras que el valor de las exportaciones alcanzó 9,797,607,537,435.78 pesos, en un total de 9,015,807 operaciones (Secretaría de Hacienda y Crédito Público, 2020). Lo anterior hizo posible una recaudación del Impuesto al Valor Agregado (IVA) de 624,781,701,232 pesos, del Impuesto General de Importación (IGI) 60,081,432,315 peso, del Impuesto Especial de Producción y Servicios 204,607,236,151 (IEPS) y Derechos de Trámite Aduanero (DTA) por 1,490,499,949 pesos.

Lo anterior representa el importante volumen de actos en comercio internacional y su impacto en los recursos públicos, en los que participa la aduana mexicana, siendo interesante y necesario conocer si este patrón de operaciones puede tener relación de invarianza o memoria de largo plazo, con respecto a períodos pasados.

Existen precedentes sobre la aparición de características fractales en la manera en la que los contribuyentes aportan al gasto público mediante el pago de impuestos internos (Lagunas, Aguilar, & Rodríguez, 2014). No obstante, en materia de comercio exterior, específicamente en cuanto al número de operaciones, resulta importante analizar si también se comparten estas características, interpretadas como un hábito que, en distintas escalas de tiempo (diez meses, veinticinco meses, cincuenta meses, etcétera), presentan persistencia pudiendo comprender mejor los fenómenos comerciales. Por tal situación, en el siguiente apartado se presenta una síntesis de estudios precedentes que describen los métodos de rango escalado R/S para estimar el exponente de Hurst (H) y dimensión fractal (D) que serán aplicados al número de operaciones de comercio internacional realizados por alguna de las aduanas marítimas de México.

### **3. Exponente de Hurst y Dimensión Fractal**

Para analizar si una serie de datos, en este caso las operaciones despachadas por la aduana, presenta persistencia (dicho de otra manera, sigue un patrón fractal) a lo largo del período de tiempo analizado, habría que dividir la serie total de las operaciones en períodos temporales de menor amplitud (una partición) y constatar la existencia de características similares en todos ellos y, por tanto, podremos

afirmar la persistencia (invarianza) o memoria de largo plazo que, en análisis fractal, viene determinado por esa conservación de patrones similares (o fractalidad) en distintos períodos de la misma serie.

Para los autores Plazas, Ávila y Moncada (2014), Hernández y Avilán (2016), y Luengas, Ardilla y Moreno (2010), el exponente de Hurst (H) debe seguir etapas claramente definidas, iniciada con la identificación de la serie de interés, que debe ser dividida en partes, llamados particiones, en las que se incluya el total de los datos de la serie original; cada una de estas particiones servirán para estimar las propiedades de invarianza, de ahí el término invarianza en escala.

La segunda etapa corresponde a determinar dos parámetros estadísticos para cada partición, la media  $\mu$  y la desviación estándar  $S$ , después calcular la diferencia de cada dato respecto a  $\mu$ . Realizado lo anterior, se obtienen las diferencias acumuladas por partición y se obtiene el rango (R) que es la diferencia entre el valor mayor y el menor de cada diferencia acumulada.

Determinado R en cada partición, su valor debe dividirse entre la desviación  $S$  de esa misma partición, obteniendo así el Rango Escalado ( $R/S$ ), agrupando los resultados  $R/S$  de acuerdo con su clase, por ejemplo, si se decidió dividir los datos en 4 partes de 25, de estos se determina el promedio, obteniendo el  $R/S$  que represente a toda la clase.

La información que se pretende analizar mediante fractalidad es recomendable organizarla en una tabla en la que su primera columna representa el número de particiones que se consideran para tratar los datos. De este modo, si consideramos solo una partición, su tamaño será el total (N) de los datos considerados; mientras que, si consideramos más particiones, éstas tendrán un tamaño n que será menor a medida que aumente el número de particiones, lo que nos permitirá obtener todas las categorías que conformarán la primera columna. La segunda columna de la tabla debe contener el promedio de los valores  $R/S$  calculados para las categorías en función de la partición hecha.

La tabla anterior incluirá otras dos columnas para registrar la información del resultado de aplicar logaritmo neperiano (LN) a los valores de las dos columnas antes indicadas: número de clases o particiones y promedio de  $R/S$  para esa partición. Los valores de estas dos últimas columnas se utilizan para realizar un análisis de regresión lineal simple, con las abscisas representando los logaritmos neperianos de las particiones y las ordenadas, los de los promedios de  $R/S$ . Precisamente, el coeficiente  $b_1$  que representa la pendiente de la recta de regresión es el valor estimado del exponente H de Hurst.

$$x_t t = a, \dots, T$$

$$n = \frac{x}{i} \quad [1]$$

$$\langle X \rangle_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \quad [2]$$

$$X = (t, T) = \sum_{u=1}^t [x(u) - \langle X \rangle_T] \quad [3]$$

$$R(T) = \max X(t, T) - \min X(t, T) \quad 1 \leq t \leq T \quad [4]$$

$$Sd = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [x(t) - \langle x \rangle_T]^2} \quad [5]$$

$$\frac{R}{Sd} = (cT)^H \quad [6]$$

$$\log \left( \frac{R}{Sd} \right) = H \log T + \log c \quad [7]$$

El exponente  $H$  debe ser un valor comprendido en el intervalo  $[0, 1]$ . Si  $H < 0.5$ , entonces podemos considerar que existe poca persistencia de largo plazo y que un aumento de valores en cierto período de tiempo puede traer una disminución en un tiempo posterior. Por otra parte, cuando se satisface  $0.5 < H < 1$ , puede concluirse la presencia de memoria de largo plazo y correlación entre las escalas y los valores escalados en distintas etapas temporales, por lo que se han de esperar aumentos o disminuciones similares en el futuro. Finalmente, si  $H = 0.5$ , se ha de concluir la ausencia de relación entre las variables y, por tanto, se debe considerar un alto nivel de aleatoriedad, siendo más adecuada su catalogación como un proceso browniano, en el que las situaciones acontecidas a distintas escalas de tiempo son variantes al no presentar memoria o correlación (Hernández & Avilán, 2016).

En cuanto a la dimensión fractal ( $D$ ) una manera convencional para explicarla es comprender que su valor en geometría representa el espacio de cada una de las escalas en la primera figura que dio origen a las demás, aunque todas de características similares, es decir, fractales.

Otra forma de entender esta dimensión es como una medida de irregularidad. Por ejemplo, si en una partición, digamos de 30 meses, se observan  $n$  disminuciones con  $n$  incrementos y estas características se observan invariantes en otros períodos de distinta amplitud de tiempo, la medición o amplitud de estas características, también llamadas irregularidades, es la dimensión fractal que, en la naturaleza siempre será un número fraccionado a diferencia de las dimensiones euclidianas (de Spinadel, 2003).

En cuanto al interés dimensional en variables cuantitativas (como puede ser precios de activos financieros, impuestos recaudados o, como es el caso del presente artículo, operaciones de comercio internacional), la dimensión debe interpretarse como el tamaño o “espacio” entre los rangos escalados de cada partición y las características invariantes.

Al igual que en  $H$ , el valor teórico de  $D$  puede interpretarse teniendo en cuenta los siguientes criterios: si  $D \in \mathbb{N}$  es un número natural, se debe interpretar la ausencia de fractalidad ya que estaríamos en el ámbito de objetos geométricos correspondientes a un espacio euclídeo. Así, si  $D = 1$  estaríamos con una línea recta y si  $D = 2$  con una figura plana; lo que, por analogía en el contexto de este trabajo, podría interpretarse como valores constantes al paso del tiempo. La fractalidad aparece cuando el valor de  $D$  se encuentra estrictamente entre dos valores naturales y, por tanto, presenta parte decimal no nula. Por ejemplo, si  $D$  pertenece al intervalo  $(1, 2)$ , estaríamos realmente con un objeto fractal para el que la complejidad de su estructura dependerá del valor de esta dimensión y su proximidad a alguno de los extremos. Por analogía en el contexto que estamos considerando, cuanto más cercano a 1 sea el valor de  $D$ , la estructura fractal permitirá una mejor comprensión de la influencia de fenómenos pasados para los siguientes en el futuro, características que se presentarían en períodos cortos, medios y de largo plazo.

Con la estimación de  $H$  mediante los rangos escalados  $R/S$ , la estimación para  $D$  sería la siguiente, de conformidad con Luengas, Ardila y Moreno (2010):

$$D = 2 - H \quad [8]$$

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, la siguiente sección presenta los datos y resultados de la medición fractal para las operaciones de comercio exterior de interés.

#### 4. Métodos y resultados

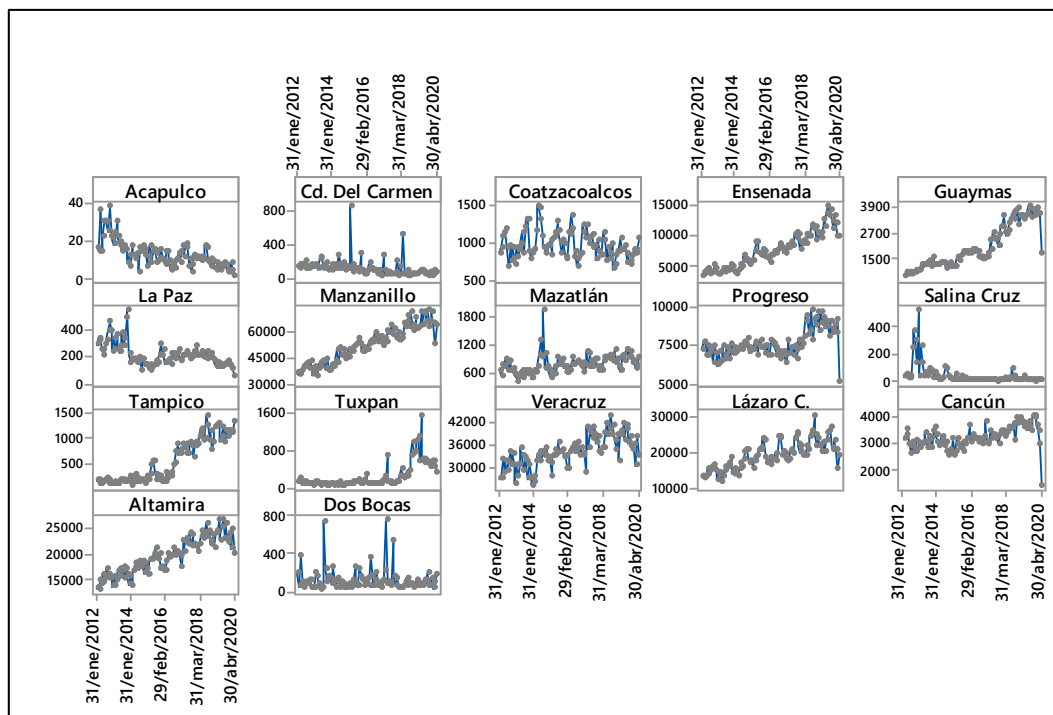
La variable de interés son las operaciones de comercio internacional realizadas a través de las 17 aduanas marítimas del país, mediante observaciones mensuales, iniciándose en el mes de enero 2012 y concluyendo en abril 2020; es decir, 100 observaciones para cada aduana.

Conforme con el objetivo “determinar si las operaciones de comercio internacional, despachadas por las aduanas marítimas de México, presentan características fractales con memoria de largo plazo”, se presenta la hipótesis general para cada una de las 17 aduanas, como sigue:

Si  $0.5 < H \leq 1$ , entonces las operaciones comerciales tienen persistencia de largo plazo, en donde operaciones realizadas en períodos más cortos tienden a tener comportamiento similar en períodos más largos, se rotulará como “sí presenta memoria”; por tener interés específico de este artículo en la memoria de largo plazo, cuando el valor de H resulte inferior a 0.5 entonces se rechazará la hipótesis y se rotulará como “no presenta memoria”.

Debido al volumen total de datos que deben procesarse (1,700 agrupados en 100 datos mensuales por aduanas (Gráfico 1), los estimados para H se calculan haciendo uso del proceso Hurstexp en el entorno R de software libre para computación estadística, indicando a dicho proceso que determine el número máximo de particiones posibles.

**Gráfico 1. Series de tiempo de las aduanas marítimas mexicanas, sujetas a particiones.**



Fuente: Elaboración propia mediante Minitab

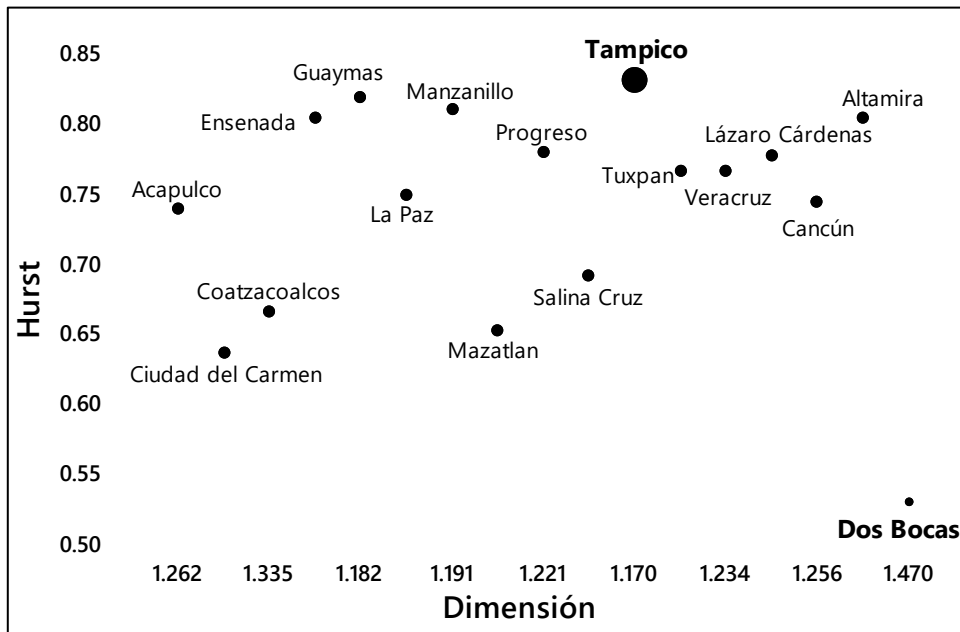
**Tabla 1. Exponente de Hurst y Dimensión Fractal en las Aduanas Marítimas de México.**

Aduana	Estado	Exponente de Hurst (H)	Dimensión Fractal (D)
Acapulco	Guerrero	0.738	1.262
Ciudad del Carmen	Campeche	0.636	1.364
Coatzacoalcos	Veracruz	0.665	1.335
Ensenada	Baja California	0.803	1.197
Guaymas	Sonora	0.818	1.182
La Paz	Baja California Sur	0.748	1.252
Manzanillo	Colima	0.809	1.191
Mazatlán	Sinaloa	0.652	1.348
Progreso	Yucatán	0.779	1.221

Salina Cruz	Oaxaca	0.691	1.309
Tampico	Tamaulipas	0.830	1.170
Tuxpan	Veracruz	0.765	1.235
Veracruz	Veracruz	0.766	1.234
Lázaro Cárdenas	Michoacán	0.777	1.223
Cancún	Quintana Roo	0.744	1.256
Altamira	Tamaulipas	0.804	1.196
Dos Bocas	Tabasco	0.530	1.470

Fuente: Elaboración propia mediante R.

**Gráfico 2. Grado de fractalidad de las aduanas marítimas mexicanas.**



Fuente: Elaboración propia mediante Minitab.

El grado de Fractalidad en las aduanas marítimas mexicanas se puede interpretar a partir de la información disponible en el Gráfico 2. De hecho, debido a que la memoria de largo plazo (mayor invarianza o menor variación en diferentes escalas en el tiempo) se presenta cuando el valor para H supera 0.5 y es lo más cercano a 1, entonces con este criterio y considerando solo el exponente H, la mayor fractalidad se encuentra en los puntos más cercanos a la parte superior del Gráfico 2. Por otra parte, en lo que a la dimensión D se refiere, la presencia de memoria de largo plazo o invarianza más fuerte se presentaría en los valores más cercanos a 1.

La cuestión “¿las aduanas marítimas despachan operaciones que pueden depender de costumbres y hábitos al través del tiempo?”, que se ha planteado en este trabajo, obtendría como respuesta que el comercio internacional comparte patrones (también llamados hábitos o costumbres), en base a las mediciones fractales que permiten observar la presencia de memoria o invarianza en escala, que pueden tener su explicación desde distintos enfoques, como, por ejemplo, provocados por ciertas facilidades o eficiencia aduanera. Sin embargo, estos últimos dos atributos son especulativos y no se han analizado en este trabajo, cuyos resultados solo permiten afirmar la presencia de patrones repetitivos en escalas de tiempo distintas.

De acuerdo con lo anterior, la mayor fractalidad corresponde a la Aduana de Tampico en el estado de Tamaulipas, mientras que la menor memoria de largo plazo o fractalidad corresponde a la Aduana Dos Bocas, en el estado de Tabasco.



## 5. Conclusiones

Las operaciones de comercio internacional, despachadas mediante las aduanas marítimas de México, presentan claramente memoria y persistencia ya que, en todos los casos, los valores obtenidos para el exponente de Hurst resultaron mayores a 0.50, por lo tanto, se acepta la hipótesis general para las 17 aduanas.

La incógnita planteada desde el resumen “¿las aduanas marítimas despachan operaciones que pueden depender de costumbres y hábitos al través del tiempo?” obtendría como respuesta que, de acuerdo a las mediciones fractales que afirman la presencia de memoria o invarianza en escala, se puede decir que el comercio comparte patrones, también llamados hábitos o costumbres, que pueden tener explicación desde distintos enfoques, por ejemplo, provocados por ciertas facilidades o eficiencia aduanera; sin embargo, estos últimos dos atributos son especulativos, fuera del alcance de este trabajo que, por ahora, solo aporta con afirmar la presencia de patrones repetitivos en escalas de tiempo distintas.

Desde un enfoque de fiscalización, la representación del grado de fractalidad podría establecerse como herramienta indicadora permanente de la Administración General de Aduanas o de la Administración General de Auditoría de Comercio Exterior, a fin de verificar si las repeticiones o costumbres en el volumen de operaciones de aduanas pudieran estar relacionadas con alguna tipología de subvaluación de precios o relajación de la verificación aduanera, que haga atractivo despachar por ciertas aduanas determinadas mercancías.

Desde una óptica hacia la mejora de la gestión, el grado de fractalidad podría significar un indicador del nivel de operaciones y reemplazamientos de elementos humanos e infraestructura, pues se sabría que grandes volúmenes despachados podrían volver a presentarse en el futuro o, por el contrario, que menores volúmenes comerciales en el pasado vuelvan a ocurrir en el futuro.

Otro enfoque desde el cual la fractalidad puede aplicarse es en las políticas públicas y, específicamente la fiscal, ya que, de encontrar recurrencia o memoria en aduanas establecidas en estados del país en lo particular, serviría de respaldo para la solicitud de mayores recursos públicos locales y para fortalecer la urbanización circundante y las condiciones en general.

## Referencias

- Calvet, L.E. & Fisher, A.J. (2013). Extreme Risk and Fractal Regularity in Finance. *Contemporary Mathematics*, 601, 65-94. <https://doi.org/10.1090/conm/601/11933>
- Congreso de la Unión (2020). *Ley Aduanera*. México: Congreso de la Unión. [http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/12\\_010720.pdf](http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/12_010720.pdf)
- De Spinadel, V.W. (2003). Geometría fractal y geometría euclidiana. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 83-91. <https://revistas.udea.edu.co/index.php/revistaeyp/article/download/5945/5355>
- Debnath, L. (2006). A brief historical introduction to fractals and fractal geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(1), 29-50. <https://doi.org/10.1080/00207390500186206>
- Gomory, R. (2010). Benoît Mandelbrot (1924-2010). *Nature*, 468(7322), 378. <https://doi.org/10.1038/468378a>

- Hernández, N., & Avilán, N. (2016). Estimación del exponente de Hurst y la dimensión fractal del petróleo: caso WTI. *Ingeciencia*, 1(2), 25-31. [http://editorial.ucentral.edu.co/ojs\\_uc/index.php/Ingeciencia/article/view/307/274](http://editorial.ucentral.edu.co/ojs_uc/index.php/Ingeciencia/article/view/307/274)
- Hurst, H.E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116(1), 770-808.
- Instituto Nacional de Acceso a la Información (11 de julio de 2020). *Portal Nacional de Transparencia*. <https://consultapublicamx.inai.org.mx/vut-web/faces/view/consultaPublica.xhtml#tarjetaInformativa>
- Iturriaga, R., & Jovanovich, C. (2012). Los fractales y el diseño en las construcciones. *TRIM: Tordesillas, revista de investigación multidisciplinar*, 5, 5-19. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4761055.pdf>
- Karpiarz, M., Fronczak, P., & Fronczak, A. (2014). International trade network: Fractal properties and globalization puzzle. *Physical Review Letters*, 113(24), 248701. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.113.248701>
- Kristoufek, L., & Vosvrda, M. (2013). Measuring capital market efficiency: Global and local correlations structure. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(1), 184-193. <https://arxiv.org/pdf/1208.1298.pdf>
- Kristoufek, L., & Vosvrda, M. (2014). Measuring capital market efficiency: long-term memory, fractal dimension and approximate entropy. *The European Physical Journal B*, 87, 1-14. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2014-50113-6>
- Lagunas, S., Aguilar, G., & Rodríguez, J.J. (2014). Análisis del comportamiento estadístico y aproximación fractal en la recaudación del impuesto sobre nóminas y asimilados en el estado de Quintana Roo. *Contaduría y Administración* 59(4), 71-86. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4837488>
- Luengas, D., Ardila, E., & Moreno, J.F. (2010). Metodología e interpretación del coeficiente de Hurst. *Revista ODEON*, 5, 265-290. <https://revistas.uexternado.edu.co/index.php/odeon/article/view/2872>
- Mandelbrot, B. (1975). *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*. Paris: Flammarion.
- Mandelbrot, B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. Paris: Times Books.
- Mandelbrot, B. B. (2005). The inescapable need for fractal tools in finance. *Annals of Finance*, 1(2), 193-195. <https://doi.org/10.1007/s10436-004-0008-1>
- Martín-Vide, J., Prohom, M., Bohigas, M., Peña Rabadán, J.C., Esteban, P., & Montserrat, D. (2001). Índices de irregularidad temporal y dimensión fractal de la precipitación anual en España. En Pérez, A.J., López, E. y Tamayo, J. (eds.): El tiempo del clima. Valencia: Asociación Española de Climatología, pp. 157-166.
- Modesto-Iregui, M., Guillot, G., & Donato, J.C. (2002). Dimensión fractal y relación área superficial/volumen de algas del fitoplancton de lagos colombianos. *Caldasia*, 24(1), 121-134. <https://revistas.unal.edu.co/index.php/cal/article/download/39437/41328%3A%3A.pdf>
- Mosteanu, N.R. (2019). Intelligent tool to prevent economic crisis - fractals. A possible solution to assess the management of financial risk. *Quality*, 20(172), 13-17.

- O'Connell, P.K., Koutsoyiannis, D., Lins, H.F., Markonis, Y., Montanari, A., & Cohn, T. (2015). The scientific legacy of Harold Edwin Hurst (1880-1978). *Hydrological Sciences Journal*, 61(9), 1571-1590. <https://doi.org/10.1080/02626667.2015.11>
- Peitgen, H.O. (2010). Benoît B. Mandelbrot (1924-2010). *Science*, 330(6006), 193-196. <https://doi.org/10.1126/science.1199471>
- Plazas, N.P., Ávila, M., & Moncada, G. (2014). Estimación del exponente de Hurst y dimensión fractal para el análisis de series de tiempo de absorbancia uv-vis. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, 24(2), 133-143. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5065696.pdf>
- Rodríguez, J., Prieto, S., Ortiz, L., Wiesner, C., Díaz, M., & Correa, C. (2006). Descripción matemática con dimensiones fractales de células normales y con anomalías citológicas de cuello uterino. *Revista Ciencias de la Salud*, 4(2), 58-63. <https://revistas.urosario.edu.co/index.php/revsalud/article/view/568>
- Rodríguez, R. (2014). El coeficiente de Hurst y el parámetro  $\alpha$ -estable para el análisis de series financieras aplicación al mercado cambiario mexicano. *Contaduría y Administración*, 59(1), 149-173. [https://doi.org/10.1016/S0186-1042\(14\)71247-1](https://doi.org/10.1016/S0186-1042(14)71247-1)
- Rubiano, G.N. (1997). Fractales: la huella del caos. *Lecturas matemáticas*, 18(1), 53-69. <http://scm.org.co/archivos/revista/Articulos/16.pdf>
- Secretaría de Hacienda y Crédito Público (11 de julio de 2020). SAT - Portal de Servicios de Aduanas. Estadísticas de Comercio Exterior: <http://omawww.sat.gob.mx/aduanasPortal/Paginas/index.html#!/>
- Servicio de Administración Tributaria (11 de julio de 2020a). Estructura Orgánica. <https://www.gob.mx/sat>
- Servicio de Administración Tributaria (11 de julio de 2020b). Informe Tributario y de Gestión. Cuarto Trimestre 2019: [http://omawww.sat.gob.mx/gobmxtransparencia/Paginas/documentos/itg/ITG\\_4o\\_Trim2019.pdf](http://omawww.sat.gob.mx/gobmxtransparencia/Paginas/documentos/itg/ITG_4o_Trim2019.pdf)
- Servicio de Administración Tributaria. (11 de julio de 2020c). Sitio del SAT - ¿Qué hacemos? <https://www.gob.mx/sat/que-hacemos>
- Suárez-Domínguez, E.J., Betancourt-Mar, J.A., Llanos-Pérez, J.A., Nieto-Villar, J.M., Palacio-Pérez, A., & Izquierdo-Kulich, E. (2013). Dimensión fractal de asfaltenos en capa delgada en presencia de un estabilizante. *Revista Cubana de química*, 25(3), 311-317.
- Sutcliffe, J., Hurst, S., Awadallah, A., Brown, E., & Hamed, K. (2016). Harold Edwin Hurst: The Nile and Egypt, past and future. *Hydrological Sciences Journal*, 61(9), 1557-1570. <https://doi.org/10.1080/02626667.2015.1019508>

## Anexo: Datos de operaciones por aduana y estimados del exponente de Hurts

**Imagen 1. Data y resultados: Aduana de Acapulco, Guerrero.**

```
[1] 16 14 36 14 22 30 30 30 25 38 22 21 18 24 30 22 19 17 14 15 17 15 8 12 6 17
[27] 12 12 10 13 3 16 14 17 15 12 6 11 17 8 14 15 13 8 9 10 15 10 9 7 14 14
[53] 9 4 6 7 5 9 10 13 8 14 17 11 18 16 6 10 3 7 12 10 10 11 10 11 9 10
[79] 17 16 9 8 6 10 9 5 4 8 7 4 6 7 8 7 3 4 3 8 4 1
> hurstexp(b)
simple R/S Hurst estimation: 0.7375867
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

**Imagen 2. Data y resultados: Aduana de Ciudad del Carmen, Campeche.**

```
[1] 132 110 160 146 154 194 102 125 106 148 127 136 124 143 127 101 243 230 139
[20] 106 181 98 91 100 142 86 107 145 97 270 153 98 177 135 94 128 116 106
[39] 861 145 71 106 109 110 67 286 83 65 31 36 84 165 110 103 74 76 92
[58] 46 76 28 24 274 83 35 32 52 32 37 42 32 62 204 25 123 36 524
[77] 34 38 28 86 22 43 40 31 42 38 70 67 78 76 47 57 39 45 28
[96] 51 22 92 37 59
> hurstexp(c)
simple R/S Hurst estimation: 0.6365705
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

**Imagen 3. Data y resultados: Aduana de Coatzacoalcos, Veracruz.**

```
[1] 842 919 1071 1128 1162 905 658 938 735 908 761 690 911 793 896
[16] 968 1118 845 1199 1292 1304 875 761 828 877 898 1152 1483 1446 1302
[31] 1072 923 912 836 932 951 1012 820 1035 1056 1105 1269 1147 997 844
[46] 1006 952 799 772 1112 1099 1355 1174 796 866 668 756 802 845 1208
[61] 1128 1041 1219 1050 975 1077 1101 905 951 761 1025 865 808 818 1119
[76] 1015 730 902 750 840 966 625 697 821 865 869 1030 878 881 936
[91] 850 704 808 688 745 820 899 843 894 1036
> hurstexp(d)
simple R/S Hurst estimation: 0.6650473
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

**Imagen 4. Data y resultados: Ensenada, Baja California.**

```
[1] 3190 3424 3673 4195 4477 3846 3563 3653 3782 4859 4378 3503 3405
[14] 3401 3745 4354 4527 3799 4135 4182 4353 4957 4564 3888 3882 3403
[27] 4186 4385 5070 4855 6537 5780 5804 5632 5130 5329 5646 5748 7361
[40] 8690 8710 7030 6674 6592 7602 7129 6304 6223 6108 5470 6630 6712
[53] 7184 7198 6986 7534 8478 8309 7855 7221 7546 6830 8240 7856 8738
[66] 8497 8110 9942 10282 9553 10004 7662 8734 8548 9176 8522 10127 9972
[79] 9665 11214 11778 11153 11190 9077 10320 10212 9453 10508 12683 11401 13565
[92] 14875 13338 14157 12401 10972 13317 11901 9864 9783
> hurstexp(e)
simple R/S Hurst estimation: 0.8033045
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

### Imagen 5. Data y resultados: Guaymas, Sonora.

```
[1] 617 674 791 676 771 688 670 753 759 898 847 884 1137 1052 1177
[16] 1159 1260 1152 1282 1194 1066 1473 1135 1113 1183 1152 1218 1206 1211 1243
[31] 1133 938 1029 1221 1015 1018 1047 1052 1468 1450 1358 1570 1721 1752 1773
[46] 1775 1634 1730 1666 1846 1871 1884 1737 1800 1485 1510 1415 1460 1376 1487
[61] 1491 1661 2275 1892 2668 2382 2294 2362 2034 2549 2944 2953 3459 2684 2568
[76] 2772 3128 3324 3442 3702 3284 3761 3816 3041 3483 3498 3324 3347 3498 3614
[91] 3955 3798 3366 3722 3558 3487 3886 3530 3570 1708
> hurstexp(f)
Simple R/S Hurst estimation: 0.8183888
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

### Imagen 6. Data y resultados: La Paz, Baja California Sur.

```
[1] 289 333 323 248 245 214 292 317 391 452 382 236 324 250 359 253 230 275 376
[20] 276 329 475 539 215 156 175 179 182 167 151 201 161 100 177 145 135 137 114
[39] 145 99 126 135 162 141 158 210 287 208 245 151 158 169 176 145 219 227 184
[58] 201 218 245 175 168 206 202 219 233 209 181 189 210 241 214 270 204 210 219
[77] 241 195 193 238 182 201 215 188 180 161 129 125 150 126 123 138 134 150 142
[96] 161 146 116 111 63
> hurstexp(g)
Simple R/S Hurst estimation: 0.7487275
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

### Imagen 7. Data y resultados: Manzanillo, Colima.

```
[1] 36655 35519 35678 37535 39959 40662 40310 42055 39058 42817 39115 35544 40162
[14] 37988 34244 39228 42169 39567 43462 43199 38851 44302 38014 37739 40884 40141
[27] 40402 43602 49467 42391 51184 46631 45874 49547 44673 46842 49107 45034 48068
[40] 48871 51180 51344 52937 53443 55642 52942 48877 48280 50505 49503 49658 53897
[53] 52678 55208 53615 58834 56551 57266 53537 56687 53764 52076 55759 53681 60519
[66] 59502 59535 62989 57949 61112 57465 55880 59494 54895 56478 58045 64811 62969
[79] 65170 68698 62445 71307 63795 60264 67729 61796 61993 62353 70679 63479 70409
[92] 70739 65167 72444 62478 65781 70526 64160 52473 63403
> hurstexp(h)
Simple R/S Hurst estimation: 0.809012
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

### Imagen 8. Data y resultados: Mazatlán, Sinaloa.

```
[1] 652 527 766 734 865 812 648 864 632 698 602 555 516 415 516
[16] 607 650 494 582 626 579 657 592 466 663 591 613 739 972 1266
[31] 928 1932 703 1009 719 630 512 467 612 742 576 911 771 827 748
[46] 880 721 712 587 604 642 758 921 778 806 787 856 816 729 794
[61] 586 764 1050 732 995 860 712 788 876 880 707 625 727 641 829
[76] 936 909 926 887 984 961 835 1068 803 892 721 635 923 967 846
[91] 1069 1092 915 1053 909 787 847 700 764 932
> hurstexp(i)
Simple R/S Hurst estimation: 0.6527549
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

**Imagen 9. Data y resultados: Progreso, Yucatán.**

```
[1] 7266 7652 7650 6826 7509 6803 7126 7360 6355 7399 6949 6213 7035 6384 6484
[16] 7416 6790 6593 7342 7145 6539 7547 7071 6957 7320 7043 7256 7359 7507 7215
[31] 7691 7410 7622 7980 7042 7341 7223 7216 7635 7644 6851 7481 7839 7321 7353
[46] 7491 6993 7397 6834 6890 7842 7642 7541 7331 6878 7114 7038 6617 6875 7063
[61] 6829 6300 7833 6963 7391 7377 6832 7458 6614 7157 7840 7321 7880 7634 8043
[76] 9405 9069 8209 8413 9757 7885 9232 9276 8773 9615 8434 9679 8894 9301 8653
[91] 9016 8668 8094 9015 8311 8612 8853 8350 9179 5152
> hurstexp(j)
Simple R/S Hurst estimation: 0.7793229
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

**Imagen 10. Data y resultados: Salina Cruz, Oaxaca.**

```
[1] 33 46 40 24 24 34 252 373 299 130 525 32 265 131 33 66 41 65 88
[20] 60 85 25 62 34 23 8 17 27 26 103 97 91 35 18 16 11 15 51
[39] 11 16 16 38 13 9 27 9 10 11 10 10 12 11 15 11 10 12 9
[58] 11 8 11 17 16 14 15 9 9 5 1 5 9 6 8 11 21 16 19
[77] 14 25 95 33 12 11 6 11 8 6 18 35 5 7 10 5 7 7 4
[96] 10 9 5 10 9
> hurstexp(k)
Simple R/S Hurst estimation: 0.6915537
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

**Imagen 11. Data y resultados: Tampico, Tamaulipas.**

```
[1] 185 207 134 112 163 151 184 232 127 203 125 123 173 118 107
[16] 126 205 178 196 204 165 174 197 257 164 93 270 289 164 248
[31] 146 181 214 195 137 147 267 191 324 490 555 547 322 192 197
[46] 270 263 170 188 145 341 248 298 270 325 492 527 755 885 712
[61] 792 729 914 838 907 706 704 936 871 859 640 874 928 896 1033
[76] 1211 1102 958 1017 1461 1251 963 1159 799 951 1223 1261 1251 1314 958
[91] 1058 1241 943 1173 1030 1160 1168 1110 1148 1355
> hurstexp(l)
Simple R/S Hurst estimation: 0.8302125
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

**Imagen 12. Data y resultados: Tuxpan, Veracruz.**

```
[1] 134 224 147 100 139 80 125 102 72 103 78 68 82 128 143
[16] 90 84 57 75 72 58 89 62 74 96 74 66 95 64 96
[31] 138 59 62 67 71 75 83 81 90 140 99 119 110 161 168
[46] 83 77 120 181 291 97 94 73 78 89 83 88 74 69 123
[61] 84 178 231 132 703 135 119 101 86 100 110 129 138 240 404
[76] 270 212 234 344 247 392 712 988 734 798 1042 1096 584 1560 609
[91] 548 612 586 524 528 469 580 454 561 350
> hurstexp(m)
Simple R/S Hurst estimation: 0.7656522
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

**Imagen 13. Data y resultados: Veracruz, Veracruz.**

```
[1] 27184 27532 32256 29118 31637 29567 31817 34454 30735 33687 30696 26011 30833
[14] 27655 30894 35117 33335 29241 32855 31787 27364 30923 27540 25497 27848 26549
[27] 31851 33360 34196 31785 34221 34096 33340 35255 31623 33032 31476 27983 33520
[40] 33320 34804 33998 36710 34388 34500 34648 32943 33249 30048 29986 34350 35504
[53] 34720 36376 34173 36911 35336 33519 35119 33453 34094 28797 40998 35267 39787
[66] 39092 38076 40820 38833 36650 38162 34534 33627 35151 35130 39267 41992 38578
[79] 40554 43924 38600 41115 37553 34894 38766 31872 39953 39004 41975 37366 40352
[92] 41290 36778 38409 35785 34598 36322 30764 38117 33260
> hurstexp(n)
Simple R/S Hurst estimation: 0.7663968
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

**Imagen 14. Data y resultados: Lázaro Cárdenas, Michoacán.**

```
[1] 13227 13462 12823 13534 15545 14032 14817 15962 15413 16660 14945 12301 14133
[14] 14515 11537 13497 14834 15807 15876 16138 17311 18445 14342 13880 15609 13727
[27] 13562 15416 17203 15951 17912 20173 20827 20913 17392 17297 17535 15641 17648
[40] 18443 19053 20533 21072 20766 24059 23219 18845 17311 16847 18424 16659 18173
[53] 17916 19910 17620 24490 24497 23809 19427 20003 19595 18078 17707 17903 20308
[66] 20627 19504 24123 25048 25593 22170 20199 22032 19447 19196 19335 21867 21012
[79] 24329 26263 25463 30538 24952 21946 24070 21864 22175 20228 22977 20234 23691
[92] 25410 26260 27220 21182 20903 23671 20861 15290 19302
> hurstexp(o)
Simple R/S Hurst estimation: 0.7776927
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

**Imagen 15. Data y resultados: Cancún, Quintana Roo.**

```
[1] 3176 3333 3527 2975 2940 2650 3050 2870 2682 3131 3074 2861 2983 3002 3073
[16] 3386 3039 2841 3271 3180 2857 3501 3650 3307 3037 2925 3007 3287 3156 2932
[31] 3039 2700 2561 2799 2615 3187 2582 2694 3194 2974 2825 2850 3048 2711 2970
[46] 3193 3200 3678 3059 3245 3324 3161 3201 3206 3032 3113 3093 2998 3285 3868
[61] 3038 2990 3498 3195 3339 3292 3173 3244 2987 3316 3484 3464 3385 3246 3384
[76] 3588 3532 3518 3629 3764 3094 3973 3925 3771 3973 3809 3761 3600 3765 3546
[91] 3861 3616 3496 4063 4029 4007 3709 3483 3013 1441
> hurstexp(p)
Simple R/S Hurst estimation: 0.744811
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

**Imagen 16. Data y resultados: Altamira, Tamaulipas.**

```
[1] 13244 13066 14942 13983 16043 14402 15235 17176 15255 15888 15243 13635 15597
[14] 13545 15003 16662 16893 15756 16698 17356 15053 17253 15823 14030 15712 13888
[27] 16840 17402 18184 16976 18556 18009 17460 18600 16200 18364 17120 15918 19069
[40] 18886 18977 19984 21099 19705 19086 19940 17012 17525 16856 16656 18538 20145
[53] 19282 19585 19832 21057 19904 19585 20287 20062 19624 17419 22570 20530 22963
[66] 22274 21893 24125 21663 23732 22004 21381 21618 20234 21883 23306 24516 23148
[79] 24104 26095 23559 24551 22472 21830 23596 21215 24043 24343 26819 22729 25291
[92] 26724 22853 26124 23066 22204 23943 21040 24817 20193
> hurstexp(q)
Simple R/S Hurst estimation: 0.8046396
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.

**Imagen 17. Data y resultados: Dos Bocas, Tabasco.**

```
[1] 188 49 371 91 36 75 93 84 114 108 29 27 25 198 159 70 17 61 42
[20] 745 236 89 153 142 81 253 111 36 95 135 38 99 77 25 38 37 72 63
[39] 35 47 120 265 67 52 239 160 123 121 59 87 132 63 365 147 45 112 203
[58] 45 45 99 39 107 212 760 65 102 62 76 541 158 55 125 40 37 38 40
[77] 55 102 140 59 71 69 59 39 54 121 61 53 74 59 105 94 114 194 52
[96] 54 141 30 90 176
> hurstexp(r)
simple R/S Hurst estimation: 0.5307018
```

Fuente: Elaboración propia con datos del SAT, mediante RStudio.