

## Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional

### *Determination ps Stochastic processes by means of the Hurst coefficient for the projection of the commodities in the international market*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez

Universidad Popular del Cesar (Colombia)

<https://orcid.org/0000-0002-8194-0859>

[gossa@unicesar.edu.co](mailto:gossa@unicesar.edu.co)

Miriam Rojas Domínguez

Universidad Popular del Cesar (Colombia)

<https://orcid.org/0000-0002-5839-0086>

[miriamrojas@unicesar.edu.co](mailto:miriamrojas@unicesar.edu.co)

---

#### RESUMEN

En este estudio, se investigó la potencial relación entre los valores de las materias primas durante el periodo de 2019 a 2023, utilizando el coeficiente de Hurst como una métrica estadística. Los resultados señalaron que, en términos generales, los registros de precios exhibieron una persistencia con un coeficiente de 0,63, pero también revelaron cierto grado de aleatoriedad. En consecuencia, se empleó un proceso estocástico de tipo browniano geométrico junto con simulación de Montecarlo para anticipar los precios en un horizonte de un año en el mercado bursátil y, de esta manera, identificar las fluctuaciones impredecibles de cada conjunto de datos. En líneas generales, los resultados de la simulación demostraron una tendencia media estable a pesar de la naturaleza aleatoria del proceso, con notables incrementos en los precios del petróleo Brent, el cobre del Reino Unido y los Estados Unidos, así como en el

*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

acero en barra. Por otro lado, los precios del acero HRC permanecieron constantes, mientras se anticipó una disminución significativa en los precios del gas natural en comparación con sus valores históricos promedio.

**PALABRAS CLAVE**

Estocasticidad; Browniano geométrico; Coeficiente de Hurst; Commodities.

**ABSTRACT**

In this study, the potential relationship between commodity values during the period from 2019 to 2023 was investigated, using the Hurst coefficient as a statistical metric. The results indicated that, generally speaking, the price records exhibited persistence with a coefficient of 0.63, but also revealed a certain degree of randomness. Consequently, a geometric Brownian stochastic process along with Monte Carlo simulation was used to anticipate prices over a one-year horizon in the stock market and, in this way, identify unpredictable fluctuations in each data set. Overall, the simulation results demonstrated a stable average trend despite the random nature of the process, with notable increases in the prices of Brent oil, UK and US copper, and bar steel. On the other hand, HRC steel prices remained constant, while a significant decrease in natural gas prices was anticipated compared to their average historical values.

**KEYWORDS**

Stochasticity; Geometric Brownian; Hurst coefficient; Commodities.

Clasificación JEL: C01, C22, D52, G14. MSC2010:

34K50, 05D40.

**1. INTRODUCCIÓN**

En el ámbito financiero, el análisis de datos es fundamental para tomar decisiones de inversión informadas. A través del análisis de patrones y tendencias en los precios de los activos financieros, los inversionistas pueden evaluar el comportamiento del mercado y ajustar sus estrategias de inversión. Para evaluar la dependencia a largo plazo en una serie temporal, es decir un patrón, se puede utilizar el coeficiente de Hurst. Este coeficiente según Hall et al. (2000) se basa en la idea de que una serie temporal con dependencia a largo plazo tiene una memoria que influye en los valores futuros de la serie, lo cual puede interpretarse como un indicador de la irregularidad del precio que puede ser útil para predecir los cambios en los precios de los activos financieros

El exponente de Hurst puede clasificar diferentes series temporales y distinguir una aleatoria de una que no lo es, así como determinar si una serie tiene o no una distribución gaussiana, por lo que puede representar una estimación numérica que puede determinar el grado de previsibilidad de una serie temporal (Cadenas et al., 2019), por lo que se puede usar para comparar diferentes series de tiempo o para sugerir cómo se puede modelar una serie. Este

*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

coeficiente es tan relevante que su función según Cannon et al. (1997) puede ser tan importante como las medidas clásicas de análisis de series temporales, como la media de la serie, la varianza, la función de densidad de probabilidad, la secuencia de autocorrelación y el espectro de Fourier.

De acuerdo con Chaves y Lorena (2019) el valor del coeficiente de Hurst puede variar entre 0 y 1, y se interpreta de la siguiente manera: La serie temporal se clasifica como un proceso anti-persistente cuando el coeficiente de Hurst es  $0 \leq x \leq 0.5$ . Esto implica que, si en un período anterior la serie superó un valor específico que representa su media a largo plazo, es probable que en el siguiente período disminuya y viceversa. En otras palabras, las fluctuaciones positivas suelen ser seguidas por negativas y viceversa (Chamoli et al., 2007; Aguilar, 2014).

Cuando el coeficiente es  $0.5 \leq x < 1$ , la serie de tiempo se cataloga como un proceso persistente, lo que sugiere que las fluctuaciones positivas y negativas tienden a seguir siendo positivas y negativas, respectivamente (Luengas et al., 2010). La serie es conocida por presentar ruido negro, lo que significa que refuerza la tendencia y es típico en procesos cíclicos a largo plazo (Millán, 2021). En otras palabras, si la serie se encontraba por encima (o por debajo) de su media de largo plazo en el periodo anterior, lo más probable es que siga estando por encima (o por debajo) en el siguiente periodo.

Y en lo que se refiere a coeficiente de Hurst con 0,5, se supone según Acuña y Álvarez (2017) que la serie temporal es un proceso aleatorio con dependencia a corto plazo y sin evidencia de persistencia. Dado que no hay memoria presente, los datos son independientes y la serie cumple con las reglas del movimiento browniano normal, exhibe ruido blanco.

El coeficiente de Hurst es una herramienta esencial para el análisis de procesos estocásticos (McCauley et al., 2007) y se aplica frecuentemente al modelado de series temporales financieras, incluyendo los contratos de futuros de materias primas, si bien en la literatura se han propuesto varios estimadores de la dependencia a largo plazo como (Regresión de periodogramas, Whittle, variaciones agregadas), el más antiguo y más conocido y por el cual se justifica la aplicación en este documento es el llamado análisis rango reescalado **R/S** popularizado por Mandelbrot y Wallis (1968) y basado en hallazgos hidrológicos previos de Hurst. Al evaluar la serie temporal de precios de futuros de materias primas utilizando el coeficiente de Hurst, se puede identificar la existencia de dependencia a largo plazo, lo que permite hacer pronósticos más precisos sobre el comportamiento futuro del mercado de materias primas.

En estudios realizados por Luengas et al. (2010), se estimó el valor del coeficiente de Hurst ( $H$ ) utilizando el rango reescalado (R/S) en los campos de la Economía y las Finanzas en Colombia. Se analizaron series como el Índice de Precios al Consumidor (IPC), la oferta monetaria y la Tasa Representativa del Mercado (TRM), concluyendo que las series presentan un coeficiente de Hurst estadísticamente válido. Por su parte, Rendón de la Torre (2013) examinó el índice S&P 500 aplicando la metodología del rango reescalado para obtener el coeficiente de Hurst, detectando comportamientos de naturaleza caótica y memoria a largo plazo, ya que los coeficientes de  $H$  obtenidos fueron mayores a 0.50.

De manera similar, Duarte et al. (2014) probaron la existencia de comportamientos caóticos en las principales series bursátiles de Colombia mediante el análisis del coeficiente de Hurst y la metodología del rango reescalado. Y finalmente, Patiño et al. (2021) analiza el comportamiento de los retornos de algunos activos del Mercado Integrado Latinoamericano, con el objetivo de buscar evidencia de persistencia y evaluar el impacto de su presencia en la toma de decisiones de carteras de inversión. Se usó la metodología del rango reescalado en la estimación del coeficiente de Hurst como una medida de la persistencia y se tuvo un  $H = 0.59$ , y la inferencia confirma que a pesar de que el valor es cercano a 0.6, no existe evidencia de persistencia en las observaciones.

El movimiento browniano geométrico es un proceso estocástico de tiempo continuo, dado que

*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

el logaritmo natural del precio del activo en este proceso se mueve erráticamente en el tiempo de acuerdo con un proceso browniano geométrico (Yang, 2020). Se describe formalmente como un proceso estocástico gaussiano cuyo parámetro de "tasa de crecimiento geométrico" determina la tasa de crecimiento, que es constante (Postali y Picchetti, 2006).

Un proceso estocástico es un concepto matemático que implica magnitudes aleatorias que varían en el tiempo o que caracterizan una sucesión de variables aleatorias que cambian en función de otra variable u otros factores impredecibles, donde en cada paso de tiempo, existe una probabilidad de movimiento hacia arriba y otra de movimiento hacia abajo en un cierto porcentaje, y en el límite, por lo general el tiempo (Gaviria, 2019). El cálculo estocástico se centra en el análisis de procesos de probabilidad, los cuales se emplean para modelar sistemas que presentan comportamientos impredecibles (Doob, 1942). Cada variable aleatoria del proceso posee su propia función de distribución de probabilidad y puede estar relacionada o no con otras variables del proceso.

Por consiguiente, el propósito de este documento es establecer qué proceso estocástico emplear, considerando el enfoque del coeficiente de Hurst, para la proyección de commodities en el mercado internacional a un año bursátil. El resto de este documento está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 presentamos la metodología y datos, nos limitaremos a una descripción del coeficiente de Hurst y de un proceso estocástico en términos simples. En la sección 3 nuestros los principales resultados. La sección 4 concluye. También hay un anexo que muestra imágenes descriptivas producto de la regresión para la obtención del coeficiente de Hurst.

## 2. METODOLOGÍA Y DATOS

En esta sección se describe las principales variables junto con la razón económica de las mismas, se justifica porque representa un tema importante y digno de investigación, y finalmente se presenta el marco metodológico de las pruebas. El conjunto de datos utilizado en este estudio contiene series temporales diarias de precios de cierre para las materias primas: Gas natural, Cobre UK, Cobre US, Steel, Steel HRC y Petróleo Brent. La duración del período de muestra está dictada por la razón de dividir la muestra en submuestras con longitudes proporcionales a las potencias de dos es una convención común en las aplicaciones de exponentes de Hurst, por lo tanto, basamos nuestro análisis en el período comprendido entre el 16 de abril del 2019 al 03 de abril de 2023, es decir alrededor de 4 años bursátiles.

**Tabla 1. Nombre de los commodities.**

Contratos a futuro	Bolsa
Petróleo Brent - (LCOM3)	UK
Cobre - (MCU3)	UK
Cobre - (HGK3)	USA
Gas natural - (NGK3)	USA
Steel Rebar - (SRRc1)	UK
Steel HRC FOB China - (MHCC1)	UK

Fuente: Elaboración propia.

*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

## 2.1. Cobre

De acuerdo con Global, (2022) el cobre es un metal en el cual tiene alta concentración de producción en países como Chile y Perú. A pesar de esto, hay países con grandes reservas de cobre, como Australia, la República Democrática del Congo, China continental y EE. UU. Los líderes mundiales buscan lograr cero emisiones de carbono para 2050, lo que impulsará la demanda de cobre en sectores como la automoción, la transmisión y distribución de energía. Por ejemplo, los vehículos eléctricos requieren 2,5 veces más cobre que los motores de combustión interna, y la energía verde consume de 2 a 5 veces más cobre que la energía de carbón o gas natural.

Se espera que la demanda de cobre crezca alrededor de un 8% anual, lo que incluye la energía eólica marina, el almacenamiento de batería y los vehículos eléctricos. La demanda total de cobre se duplicará de 25 millones de toneladas en 2021 a 49 en 2035, y la escasez de cobre es inevitable debido a la falta de nuevas minas y a la creciente demanda. Los precios del cobre deben subir para satisfacer la demanda de electrificación, lo que incentivará la producción e innovación, pero incluso con precios altos y una utilización del 96%, no habría suficiente suministro de cobre. Se espera un déficit de suministro de 2 a 10 millones de toneladas para 2035, lo que representa un déficit históricamente alto.

## 2.2. Steel

El acero es un material altamente utilizado en diversas industrias, como la construcción, automotriz, maquinaria, electrodomésticos, energía y más. En los últimos años, la producción mundial de acero ha experimentado un crecimiento constante. Según los estudios de Luong y Sopranzetti, (2022), la producción total de acero aumentó de 1100 millones de toneladas métricas en 2005 a 1.6 toneladas métricas en 2015. La industria siderúrgica mundial posee activos subyacentes con un valor estimado de alrededor de 420,000 millones de dólares, en comparación con los 162,000 millones de dólares de los metales básicos.

Trabajos como los de Nieh et al. (2013) han demostrado el papel dominante de China en el mercado global del acero en los últimos, tal que la creciente demanda de acero del país asiático desempeña un rol determinante en las condiciones del mercado global, incluso de la industria siderúrgica estadounidense. La producción y exportación de acero chino es tan grande que los precios del acero se han convertido en el principal indicador para los mercados regionales y más allá. De hecho, de acuerdo con Argus, (2023) el precio de acero HRC FOB China que es el producto de acero acabado predominante en la industria mundial del acero y la base de muchos productos industriales a base de acero se ha convertido en el verdadero índice de referencia actual del acero a nivel global.

## 2.3. Gas Natural

Desde 1950, el consumo global de gas natural ha experimentado un aumento significativo, pasando del 7% al 22% del consumo de energía primaria en 2017, lo que equivale a un incremento de casi 7 a 125 cuatrillones de unidades térmicas británicas. Debido a que el gas natural emite menos CO<sub>2</sub> que el carbón o el petróleo cuando se quema, existe un potencial para que su uso siga creciendo en las próximas décadas, incluso bajo políticas climáticas ambiciosas, siempre y cuando las emisiones de metano se mantengan en niveles muy bajos (Newell et al., 2019).

Se prevé que la participación del gas natural en la combinación energética siga aumentando, aunque el nivel absoluto de crecimiento varíe según los distintos escenarios proyectados. Se espera un aumento en el consumo de gas natural en 2040, aunque en niveles más bajos que en la actualidad, con un aumento del 16% y 10% en comparación con los niveles de 2017 (Shell, 2018). Estos escenarios incluyen la implementación a gran escala de la tecnología de captura y

*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

almacenamiento de carbono (CCS, por sus siglas en inglés) para 2040, aunque no se sabe con certeza cuánto se aplicará esta tecnología en instalaciones que consuman gas natural en comparación con otros combustibles como el carbón o la biomasa.

Las perspectivas para el gas natural varían entre regiones. En América del Norte, según estimaciones de Shell, (2018) y Ryo Eto, (2020), se proyecta una disminución de alrededor del 16%, mientras que Equinor (2018) prevé una disminución del 28% en la demanda. En la Unión Europea, se espera una caída en el consumo de gas natural de aproximadamente el 35% (Equinor, 2018 y Mobil, 2019; Ryo Eto, 2020), mientras que Shell, (2018) pronostica una disminución del 18% en el consumo total de gas en Europa. En China, se prevé que el consumo se duplique con creces, aumentando hasta un 91% (IEA, 2018; Equinor, 2018). En América del Sur y Central, según las proyecciones de Shell, (2018), se espera aumento del 140% en la demanda de gas natural, mientras que, en India, las estimaciones de Equinor (2018) y Ryo Eto, (2020) son más optimistas, con proyecciones del 153% y 331%, respectivamente.

## 2.4. Petróleo Brent

Se espera que la demanda futura de petróleo sea impulsada principalmente por los países en desarrollo, encabezados por China, India y el sudeste asiático, mientras que se espera que el consumo en los países de la OCDE se estabilice en alrededor de 46 millones de barriles por día. Las tendencias de la demanda indican que el mundo no está haciendo lo suficiente a pesar de la necesidad de reducir el uso de petróleo para hacer frente a los riesgos del cambio climático (Raimi et al., 2022). Si la demanda mundial de petróleo se recupera por encima de los niveles pre-pandémicos, podría haber escasez de oferta y, por lo tanto, precios más altos.

En la actualidad, se ha registrado una disminución significativa en los descubrimientos de nuevos yacimientos de petróleo, llegando a niveles que no se habían visto en los últimos 75 años. Esta situación puede ocasionar un aumento en los precios si no se logra disminuir la demanda en los próximos meses y años. Aunque el incremento en los precios del petróleo podría llevar a una reducción en la demanda y, por ende, en las emisiones de gases de efecto invernadero, los costos económicos asociados con la reducción del consumo a través de precios altos y volátiles serán mayores que aquellos relacionados con la reducción del consumo mediante políticas predecibles orientadas a la demanda. De acuerdo con Lloyd et al. (2022) solo con la adopción generalizada de vehículos eléctricos podría disminuir significativamente la demanda mundial de petróleo, lo que podría provocar una caída del 32% en la demanda mundial de petróleo en 2050,

La Agencia Internacional de Energía y la Administración de Información de Energía de EE. UU. publican proyecciones del precio del petróleo, que tienen un amplio rango, desde 24 por barril en el escenario de Neutralidad Cero Emisiones (IEA, 2021) de hasta 173 por barril en el escenario de alto precio del petróleo (EIA, 2021), y en proyecciones de precios en escenarios centrales para cada perspectiva, alcanzan el rango alto de 80 por barril a bajo 90 para 2050. En otras palabras, estas proyecciones sugieren que los precios del petróleo se mantendrán en un rango relativamente estable durante los próximos 30 años.

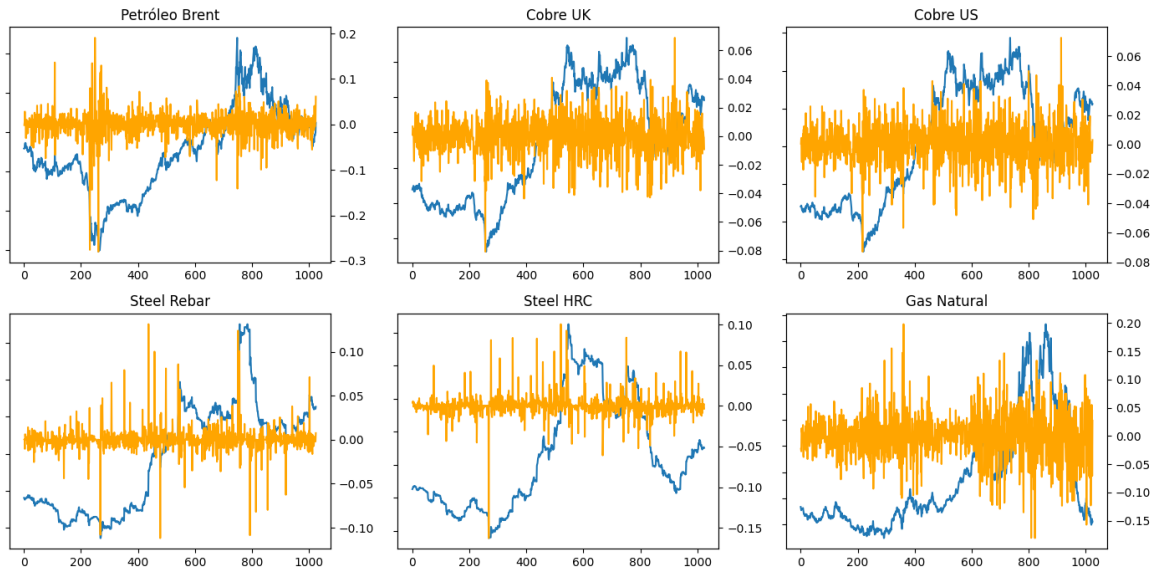
Este rango refleja de acuerdo con Raimi et al. (2022) la incertidumbre duradera relacionada con los mercados mundiales de petróleo y es mayor que los cambios recientes en los precios del petróleo, desde los mínimos de 2020 de 10 a 20 por barril hasta los máximos por encima de 120 por barril a principios de 2022.



*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

**Figura 1. Precios y retornos históricos de los Commodities.**



Fuente: Elaboración propia en Google Colab.

**Tabla 2. Rendimientos y volatilidad series.**

Estadísticas	Gas Natural	Petróleo Brent	Cobre UK	Cobre US	Steel Rebar	Steel HRC
Rendimiento diario	-0,023%	0,016%	0,033%	0,040%	0,040%	0,021%
Rendimiento anual	-5,681%	4,126%	8,197%	10,04%	10,163%	5,237%
Volatilidad diaria	4,19%	3,043%	1,36%	1,464%	1,49%	1,40%
Volatilidad anual	66,58%	48,31%	21,60%	23,24%	23,68%	22,19%

Fuente: Elaboración propia.

En términos de rendimiento diario, el petróleo Brent tuvo el mejor desempeño con un aumento del 0,016%, seguido por los dos tipos de cobre con incrementos del 0,033% y 0,040% respectivamente. El gas natural tuvo una caída del 0,023%. Por otro lado, los dos productos de acero tuvieron aumentos del 0,040% y 0,021%, respectivamente. En cuanto al rendimiento anual, el cobre US y el cobre UK tuvieron los mejores desempeños con aumentos del 10,04% y 8,197%, respectivamente. El gas natural tuvo el peor rendimiento anual con una caída del 5,681%.

En términos de volatilidad diaria, el cobre US fue el commodity más volátil con una variación del 10,04%, seguido por el cobre UK con una volatilidad del 8,197%. Los dos productos de acero tuvieron volatilidades diarias más bajas del 10,163% y 5,237%, respectivamente. En cuanto a la volatilidad anual, el gas natural tuvo la mayor volatilidad con una variación del 66,58%, seguido por el petróleo Brent con una volatilidad anual del 48,31%. El cobre UK tuvo la menor volatilidad anual con una variación del 21,60%.

*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

**2.5. Metodología Rango Escalado**

De acuerdo con (Sierra, 2007, p. 26 y Delgado y Delgado, 2011, p. 85) se inicia obteniendo los retornos logarítmicos, aquí la serie original  $M$  se reduce a una nueva serie de tiempo de tamaño  $\mu$ .

$$\mu = \log\left(\frac{M_{i+1}}{M_i}\right) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \tag{1}$$

Es necesario mencionar que el número de datos de retorno en este caso es  $M = 1025$ ;  $\mu = 1024$ , lo cual se debe a que 2 ha sido elevado a la décima potencia. La razón de dividir la muestra en submuestras con longitudes proporcionales a las potencias de dos es una convención común en las aplicaciones de exponentes de Hurst. Posteriormente se divide el periodo de tiempo  $\mu$  en  $A$  subperiodos contiguos de longitud  $n$ , de manera que  $A * n = \mu$ . Cada uno de estos subperiodos recibe el nombre de  $I_a$ , donde  $a = 1, \dots, A$ . Para identificar cada elemento dentro del subperiodo  $I_a$  se utiliza una etiqueta  $N_{k,a}$ , donde  $k = 1, \dots, n$ . El cálculo promedio de los valores de cada subperiodo  $I_a$  de longitud  $n$ , se aplica la siguiente expresión:

$$e_a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_{k,a} \tag{2}$$

Para obtener la serie de tiempo acumulada  $X_{k,a}$ , se suman las diferencias de cada elemento  $N_{k,a}$  con respecto a la media  $e_a$  de cada subperiodo  $I_a$ . Para cada subperiodo  $I_a$  se calcula la media  $e_a$  de los valores de la serie temporal en ese subperiodo. Luego, se toma cada uno de los valores individuales de la serie temporal en ese subperiodo,  $N_{k,a}$ , y se le resta la media  $e_a$  correspondiente a ese mismo subperiodo.

De esta forma, se obtienen las diferencias entre cada valor individual y la media del subperiodo al que pertenece.

$$X_{k,a} = \sum_{i=1}^k (N_{i,a} - e_a) \quad k = 1, \dots, n \tag{3}$$

El rango  $RI_a$  se obtiene a partir de los valores de la serie de tiempo acumulada de cada subperiodo  $I_a$ , los cuales se obtienen como se explicó en la respuesta anterior. Para cada subperiodo  $I_a$ , se determina el valor máximo y el valor mínimo de la serie de tiempo acumulada  $X_{k,a}$ . La diferencia entre estos dos valores se conoce como el rango  $RI_a$  del subperiodo  $I_a$ . Este valor representa la amplitud de los cambios de la serie de tiempo acumulada en ese subperiodo en particular. Es importante destacar que el rango  $RI_a$  es una medida de la variabilidad de la serie de tiempo acumulada en cada subperiodo  $I_a$ , y puede ser utilizado para evaluar la estacionariedad de la serie temporal.

$$RI_a = M_{\max}(X_{k,a}) - M_{\min}(X_{k,a}), \text{ donde } 1 \leq k \leq n \tag{4}$$

Para cada subperiodo  $I_a$  se calcula la desviación estándar muestral  $SI_a$  utilizando el método convencional:

$$\tag{5}$$



Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

$$SI_a = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (N_{k,a} - e_a)^2 \right)^{1/2}$$

Posteriormente se divide la serie de tiempo en subperiodos o subgrupos  $I_a$  de longitud  $n$ , y se calcula el rango  $RI_a$  (diferencia entre el valor máximo y mínimo) para cada uno de ellos. A continuación, se calcula la desviación estándar muestral  $SI_a$  para cada subperiodo de la forma tradicional. Luego, se procede a normalizar cada subperiodo  $I_a$  dividiendo su rango  $RI_a$  por su desviación estándar muestral  $SI_a$  correspondiente. El resultado de esta operación es el rango reescalado, que se expresa como  $RI_a/SI_a$ . Finalmente, para obtener un valor promedio de la normalización  $R/S$  para cada periodo de longitud  $n$ , se suman los valores  $R/S$  de todos los subperiodos y se divide entre el número total de subperiodos  $A$ . Este valor promedio representa una medida de la fluctuación relativa en cada periodo de la serie de tiempo.

(6)

$$(R/S)_n = 1/A \sum_{a=1}^A (RI_a/SI_a)$$

### 3. RESULTADOS

Tabla 3. Logaritmos del rango escalado y longitud del subperiodo por serie.

Muestras		2	4	8	16	32	64	128	256
Observaciones (n)		512	256	128	64	32	16	8	4
Petróleo Brent	Promedio R/S	33,38	19,74	14,03	8,66	5,60	3,92	2,50	1,44
	log(R/S)	3,51	2,98	2,64	2,16	1,72	1,37	0,92	0,36
	log(n)	6,24	5,55	4,85	4,16	3,47	2,77	2,08	1,39
Cobre UK	Promedio R/S	36,28	19,15	12,64	8,47	6,15	3,69	2,44	1,44
	log(R/S)	3,59	2,95	2,54	2,14	1,82	1,31	0,89	0,36
	log(n)	6,24	5,55	4,85	4,16	3,47	2,77	2,08	1,39
Cobre USA	Promedio R/S	33,54	19,51	12,79	9,53	6,04	3,91	2,58	1,48
	log(R/S)	3,51	2,97	2,55	2,25	1,80	1,36	0,95	0,39
	log(n)	6,24	5,55	4,85	4,16	3,47	2,77	2,08	1,39
Gas Natural	Promedio R/S	28,59	18,30	13,05	9,14	6,04	4,14	2,54	1,48
	log(R/S)	3,35	2,91	2,57	2,21	1,80	1,42	0,93	0,39
	log(n)	6,24	5,55	4,85	4,16	3,47	2,77	2,08	1,39
Steel Rebar	Promedio R/S	34,02	23,11	14,24	8,61	5,72	3,85	2,44	1,46
	log(R/S)	3,53	3,14	2,66	2,15	1,74	1,35	0,89	0,38
	log(n)	6,24	5,55	4,85	4,16	3,47	2,77	2,08	1,39
Steel HRC	Promedio R/S	40,07	23,10	14,28	8,83	5,53	3,78	2,42	1,44
	log(R/S)	3,69	3,14	2,66	2,18	1,71	1,33	0,88	0,36
	log(n)	6,24	5,55	4,85	4,16	3,47	2,77	2,08	1,39

Fuente: Elaboración propia.

*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

**3.1. Obtención del índice H.**

Finalmente, la obtención del índice  $H$  se realiza una regresión con los datos de la tabla 3, para los valores de  $\log(R/S)_n$  (logaritmo del rango reescalado para periodos de longitud  $n$ ) en función de  $\log(n)$  (logaritmo de la longitud del subperiodo). La recta que mejor se ajusta a los datos se obtiene mediante la minimización de la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores reales y los valores predichos por la recta. Esta recta puede ser expresada mediante la ecuación estándar de la forma:

(7)

$$y = mx + b$$

donde  $y$  representa el  $\log(R/S)_n$ ,  $x$  representa el  $\log(n)$ ,  $m$  es la pendiente de la recta (que representa la estimación del exponente de Hurst  $H$ ) y  $b$  es la ordenada al origen (que representa el logaritmo de la constante  $c$ ).

**Tabla 4. Coeficiente de Hurst por serie.**

Materia prima	Hurst	Error estándar	H esperado	t-stat	p-valor
Petróleo Brent	0,6285	0,0120	0,50	10,69	0,00
Cobre UK	0,6342	0,0177	0,50	7,600	0,00
Cobre US	0,6183	0,0151	0,50	7,841	0,00
Gas Natural	0,5916	0,0167	0,50	5,472	0,00
Steel Rebar	0,6463	0,0084	0,50	17,32	0,00
Steel HRC China	0,6703	0,011	0,50	15,42	0,00

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 4 presenta valores del coeficiente de Hurst, las materias primas de acero (Steel y Steel HRC China) tienen valores más altos que las demás, lo que indica que su comportamiento tiene una mayor persistencia en el tiempo y es menos influenciado por fluctuaciones aleatorias. El Gas Natural tiene el valor más bajo de Hurst, lo que sugiere que su comportamiento es menos persistente y más influenciado por fluctuaciones aleatorias en comparación con las demás materias primas.

En promedio el conjunto de series tiene un coeficiente de 0,63 lo que indica que la serie analizada tiene una tendencia a la persistencia, pero puede ser caótica (Duarte et al., 2014). Este resultado sugiere que es probable que la serie siga moviéndose en la misma dirección en el futuro, lo que implica una dependencia a largo plazo. Sin embargo, es importante destacar que este valor también implica cierto grado de estocasticidad, lo que significa que la serie puede presentar cierta aleatoriedad, y en concordancia con Sierra, (2007) que, aunque teóricamente los valores de  $H$  son mayores que 0,5 lo que estadísticamente no pueden ser considerados de forma absoluta como persistentes.

*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

**3.2. Movimiento Browniano**

(1)

$$S_t = S_0 e^{\mu t}$$

El precio futuro del commodity  $S_t$  es igual al precio actual  $S_0$  multiplicado por el factor de crecimiento exponencial continuo  $e^{\mu t}$  elevado a la potencia de la tasa de crecimiento esperada  $\mu$  multiplicado por el tiempo  $t$ .

(1.1)

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t}$$

A la anterior ecuación, a parte de la deriva determinista  $\mu t$ , se tiene la volatilidad estocástica  $\sigma B_t$ . La deriva determinista representa el rendimiento esperado del commodity a lo largo del tiempo, mientras que la volatilidad estocástica refleja la incertidumbre en el precio y la fluctuación aleatoria, es decir el movimiento browniano en torno a la deriva determinista.

(1.2)

$$\frac{dS_t}{dt} = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t} \left( \mu + \frac{dB_t}{dt} \right)$$

(1.3)

$$\frac{dS_t}{dt} = S_t \left( \mu + \frac{dB_t}{dt} \right)$$

Para conocer el movimiento aleatorio del proceso Browniano en el tiempo  $t$  es necesario conocer la derivada interna de la variable determinística y de la aleatoria.

(2)

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dB_t$$

El lema de Itô es una identidad utilizada en el cálculo estocástico para encontrar el diferencial de una función dependiente del tiempo y de un proceso estocástico. Por lo tanto, establece que si  $S_t$  es un proceso estocástico dado por la ecuación diferencial:

(3)

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dB_t \quad \text{donde } a = S_t \mu; b = S_t \sigma$$

Donde  $a$  y  $b$  son funciones que dependen del precio del activo y del tiempo, además,  $dB_t$  es un movimiento Browniano. El lema de Itô muestra que existe una función  $G$  dependiente de  $S_t$  y de  $t$ , que sigue el siguiente proceso:

(4)

$$dG_t = \left[ \frac{dG}{dS} S_t \mu + \frac{dG}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right] dt + \frac{dG}{dS} S_t \sigma dB_t \quad \text{donde } G = \ln(S_t)$$

La fórmula permite calcular la dinámica estocástica de la función  $G$ , (Donde  $G$  es una distribución logarítmica normal) en términos de la dinámica estocástica del proceso  $S$ . La fórmula tiene dos términos: el primero es el cambio esperado en  $G$  debido a la deriva del proceso  $S$  y el segundo es el cambio debido a la volatilidad del proceso  $S$ .

Finalmente, el desarrollo termina siendo el siguiente:

*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

$$\begin{aligned}
 (5) \\
 dG_t &= \left[ \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] dt + \sigma dB_t \\
 \int_0^t dG_t &= \left[ \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \int_0^t dt + \sigma \int_0^t dB_t \\
 G_t - G_0 &= \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma B_t \\
 \ln(S_t) - \ln(S_0) &= \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma B_t \\
 S_t &= S_0 e^{\left[ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right]}
 \end{aligned}$$

Se lleva a cabo una simulación de Montecarlo con 5000 iteraciones en cada conjunto de datos para determinar el rango probable de precios de cada commodity. De esta manera, se puede determinar con un 80% de certeza el rango dentro de la distribución log normal a 1 un año bursátil.

**Tabla 5. Resultados simulación de Montecarlo.**

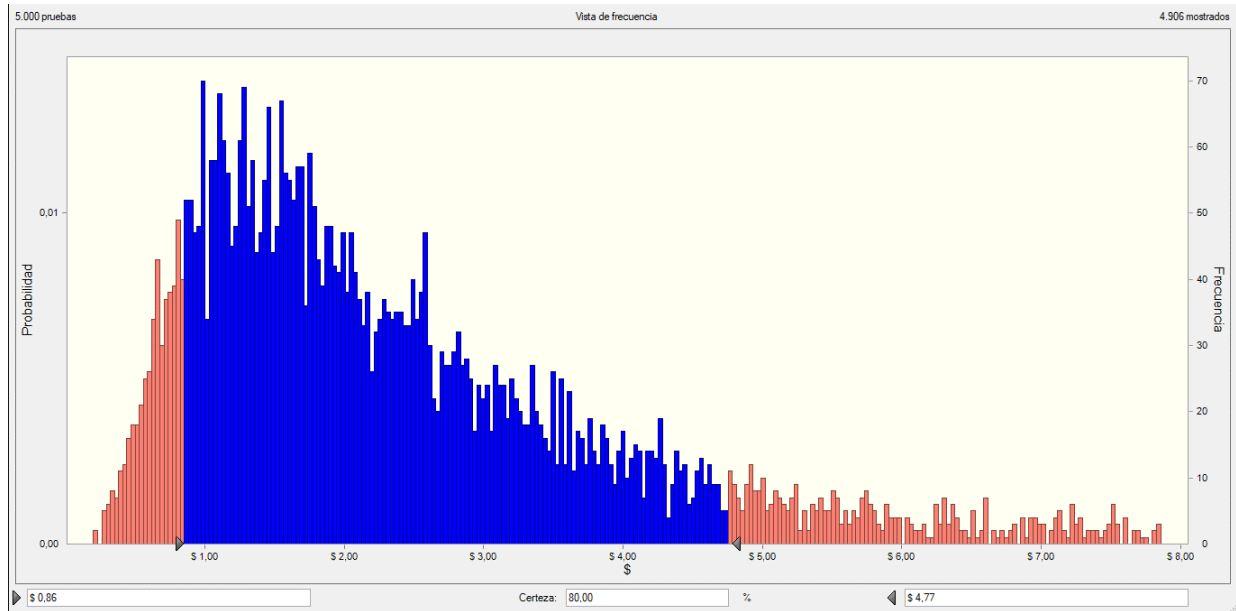
Estadísticas	Gas Natural	Petróleo Brent	Cobre UK	Cobre US	Steel Rebar	Steel HRC
Media	2,52	99,08	9.930,10	4,62	835,19	702,76
Media Histórica	3,76	70,43	7728,54	3,55	591,68	642,83
Mediana	1,99	88,78	9.680,83	4,49	812,06	686,93
Desviación estándar	1,91	50,37	2.161,28	1,1	202,16	155,62
Varianza	3,63	2.537	4.671.122	1,21	40.870	24.217
Sesgo	2,6	1,71	0,6514	0,6809	0,8145	0,6678
Curtosis	15,02	9,24	3,73	3,66	4,28	3,77
C. de variación	0,7559	0,5084	0,2176	0,2381	0,2421	0,2214
Mínimo	0,2	13,76	3.883,18	1,48	324,65	295,93
Máximo	21,88	636,47	20.828,74	9,71	2.066,93	1.430,24
E. estándar medio	0,03	0,71	30,57	0,02	2,86	2,2
P75	1,27	64,13	8.392,23	3,83	687,67	590,53
P50	1,99	88,76	9.680,67	4,49	812,05	686,91
P10	4,77	162,1	12.815,58	6,08	1.099,68	903,02

Fuente: Elaboración propia.

*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

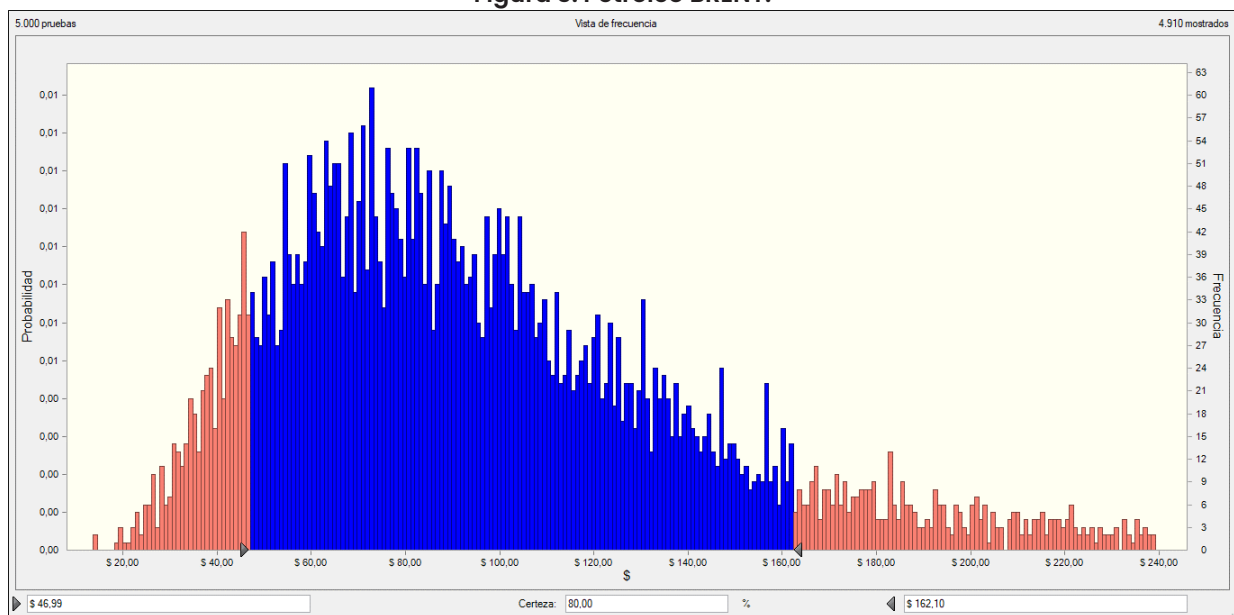
**FIGURA 2. GAS NATURAL.**



Fuente: Elaboración propia a partir del modelado en Crystal Ball.

Los precios esperados del gas natural a 252 días tienen una distribución con un sesgo hacia la derecha, con una media de 2,52 y una mediana de 1,99. La desviación estándar de 1,91 indica una variabilidad alta, aunque moderada en relación con la media. El rango de precios esperados es amplio, con un mínimo de 0,2 y un máximo de 21,88. Existe 10% de probabilidad acumulada de que el precio caiga por debajo de 0,86 o supere los 4,77 en un año bursátil, pero se espera un 90% de certeza dentro de este rango de valores.

**Figura 3. Petróleo BRENT.**



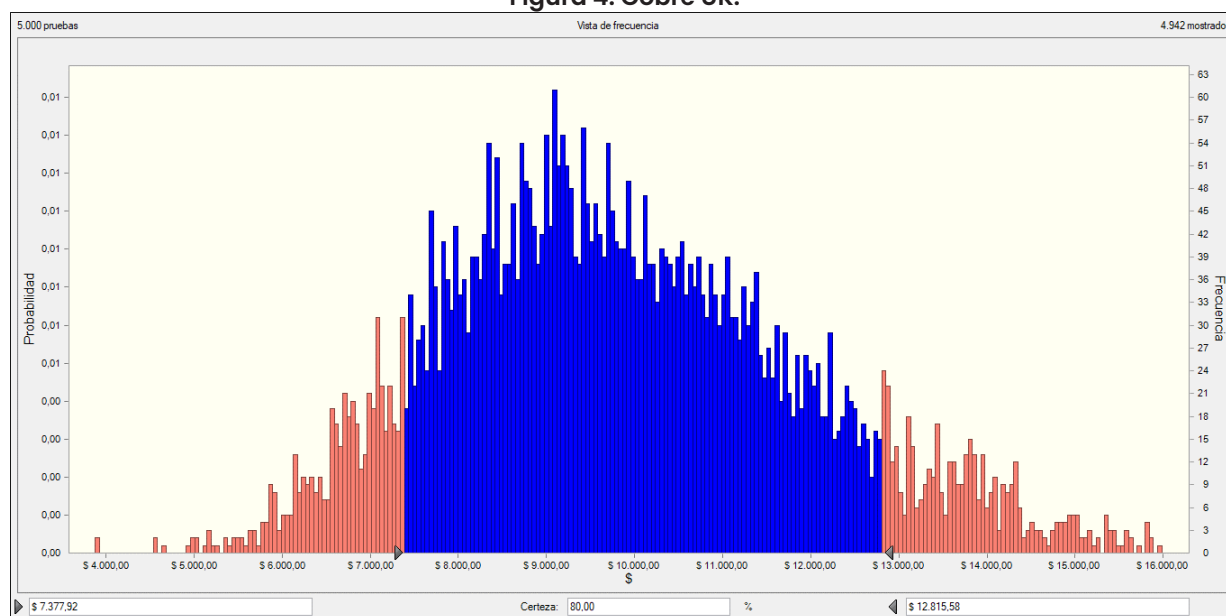
*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

Fuente: Elaboración propia a partir del modelado en Crystal Ball.

Se encontró que la media de los precios simulados del barril de petróleo Brent es de 99,08, pero la mediana de 88,78 sugiere una posible tendencia sesgada hacia la derecha. La desviación estándar de 50,37 indica una amplia variabilidad de precios posibles y un rango de precios de 13,76 a 636,47. También hay un 10% de probabilidad de que los precios caigan por debajo de 46,99, o supere los 162,10 mientras que se espera que haya un 90% de certeza acumulada de que el precio se mantenga dentro del rango mencionado.

**Figura 4. Cobre UK.**



Fuente: Elaboración propia a partir del modelado en Crystal Ball.

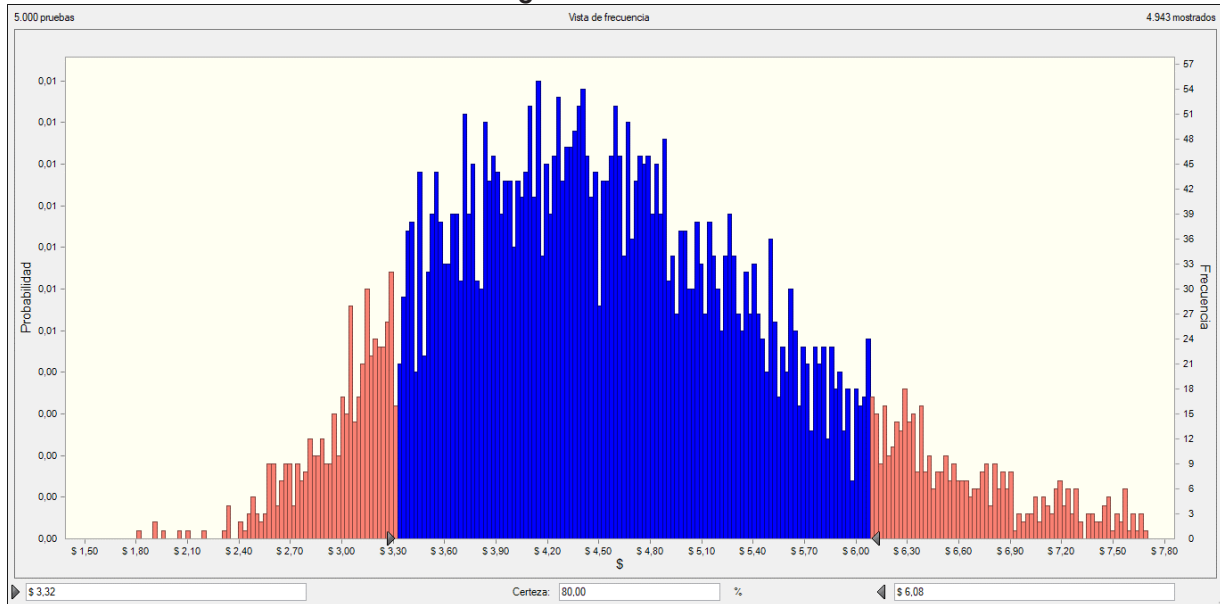
Los resultados de la simulación indican que se espera un precio promedio de 9.930,10, con una distribución de precios centrada en torno a 9.680,83. Los precios simulados tienen una variabilidad moderada y un amplio rango de precios de 3.883,18 a 20.828,74. El sesgo positivo y la curtosis indican una mayor probabilidad de valores extremos. También se observa que dentro de los escenarios existe un 10% de probabilidad de que los precios superen los 12.815 y caigan por debajo de 7,377, y existe un 90% de probabilidad acumulada de que el precio se mantenga dentro del rango mencionado.



*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

**Figura 5. Cobre US.**



Fuente: Elaboración propia a partir del modelado en Crystal Ball.

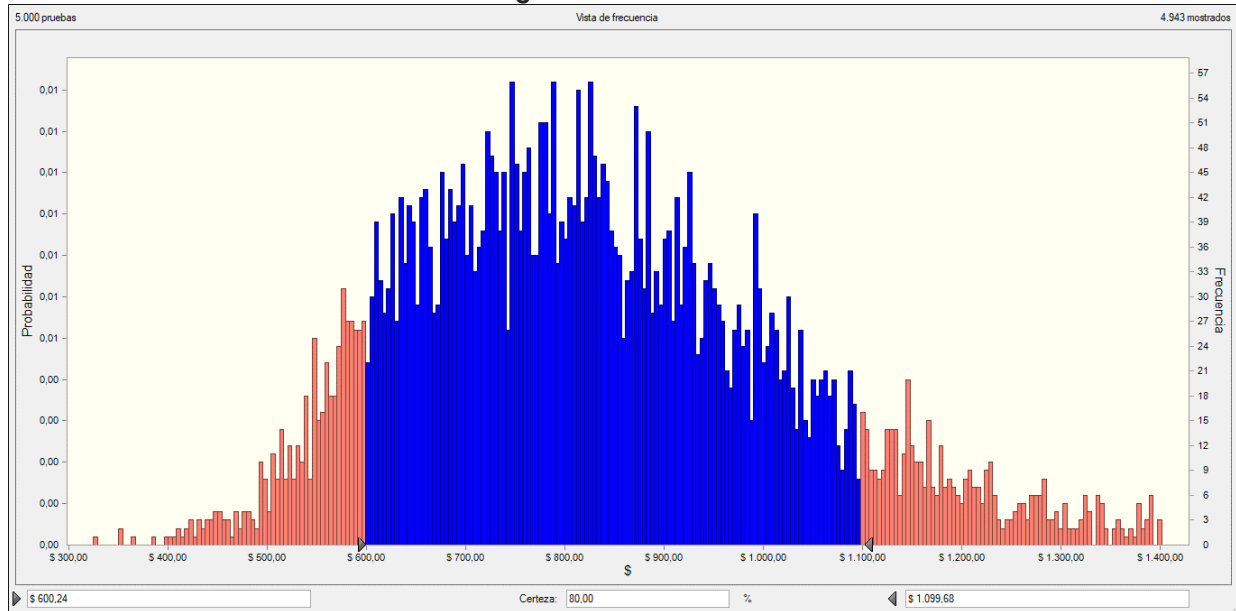
Fuente: Elaboración propia a partir del modelado en Crystal Ball.

Los datos de la simulación indican que una distribución de valores con un caso base de 4,49 y una media de 4,62, sugiriendo que la mayoría de los valores están ligeramente por encima del caso base. La desviación estándar es de 1,1, lo que indica que los valores están dispersos. La varianza es de 1,21 y el sesgo es de 0,6809, sugiriendo una ligera inclinación hacia la derecha. Los resultados concluyen en que existe un 10% de probabilidad de que los precios superen los 6,08 y caigan por debajo de 3,32, y existe un 90% de certeza de que el precio se mantenga dentro del rango mencionado.

*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

**Figura 6. Steel Rebar.**



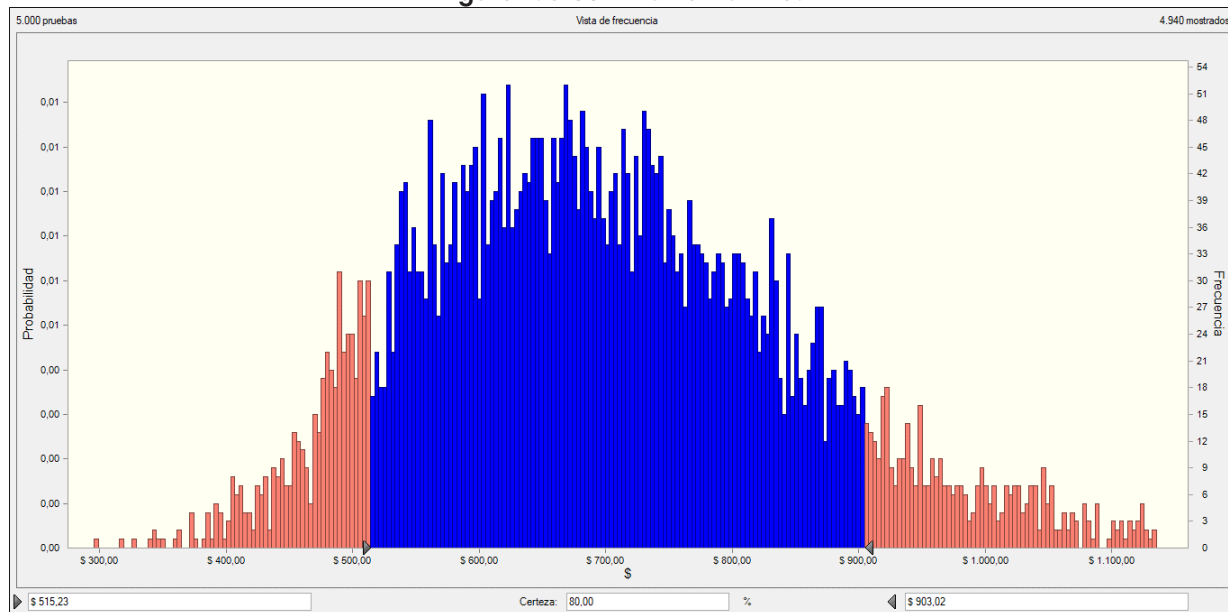
Fuente: Elaboración propia a partir del modelado en software Crystal Ball.

Los datos de la simulación indican que la Media de la simulación es de 835,19. La Mediana es 812,06, lo que indica que el valor central de los datos está por debajo de la media. La desviación estándar es de 202,16, lo que indica que los datos están ampliamente dispersos. La curtosis es de 4,28, lo que indica una distribución leptocúrtica con colas pesadas. Los resultados concluyen en que existe un 10% de probabilidad de que los precios superen los 1099,68 y caigan por debajo de 600,24, y existe un 90% de certeza de que el precio se mantenga dentro del rango mencionado.

*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

**Figura 7. Steel HRC FOB China.**



Fuente: Elaboración propia a partir del modelado en software Crystal Ball.

Los datos muestran una distribución de valores con un caso base de 685,87 y una media de 702,76, indicando que la mayoría de los valores están ligeramente por encima del caso base. La distribución es bastante dispersa con una variabilidad moderada en relación con la media. En general, la distribución se concentra alrededor de la media con una variabilidad moderada. Los resultados concluyen en que existe un 10% de probabilidad de que los precios superen los 903,02 y caigan por debajo de 515,23, y existe un 90% de certeza de que el precio se mantenga dentro del rango mencionado.

#### 4. CONCLUSIONES

Este estudio examinó la posible interdependencia entre los precios de las materias primas durante el período 2019-2023, utilizando el coeficiente de Hurst como medida estadística. Los resultados indicaron que, en general, las series de precios presentan una persistencia con un coeficiente promedio de 0,63, pero también existe cierto grado de aleatoriedad. Por lo tanto, se hizo necesario identificar los componentes aleatorios de cada serie mediante procesos estocásticos y simulaciones de Montecarlo, sin tratar de ajustar la realidad a un marco predefinido en las finanzas, con el fin de prever la actividad bursátil de los commodities durante el siguiente año.

A pesar de tratarse de un proceso aleatorio, los resultados obtenidos muestran una media estable si se considera la volatilidad presentada en la Tabla 2. La simulación sugiere un aumento significativo en los precios del petróleo Brent, el cobre del Reino Unido y los Estados Unidos, así como del acero en barra en comparación con sus promedios históricos. El petróleo Brent presenta una diferencia del 40,7%, mientras que el cobre del Reino Unido y los Estados Unidos muestran un aumento del 28,5% y el 30,1%, respectivamente, en comparación con el histórico. El acero en barra presenta el mayor aumento, con un 41,2%. Por otro lado, los precios del acero HRC se mantienen relativamente estables, con una diferencia del 9,3% en comparación con el promedio histórico. En contraste, se espera una disminución significativa en los precios del gas natural, con una diferencia del -33,0% en comparación con el promedio histórico.

*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

## REFERENCIAS

- Acuña, C., y Álvarez, A. (2017). Dependencia serial de largo plazo en el índice bursátil chileno, a través del coeficiente de Hurst y Hurst ajustado. *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, 22(42), 37-50.
- Aguilar, R. R. (2014). El coeficiente de Hurst y el parámetro  $\alpha$ -estable para el análisis de series financieras aplicación al mercado cambiario mexicano. *Contaduría y administración*, 59(1), 149-173.
- Argus. (2023). *Metals: ARGUS China HRC steel price assessment*. <https://www.argusmedia.com/es/methodology/key-prices/argus-china-hrc-steel-price>
- Chamoli, A., Bansal, A. R., y Dimri, V. P. (2007). Wavelet and rescaled range approach for the Hurst coefficient for short and long time series. *Computers y Geosciences*, 33(1), 83-93. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2006.05.008>
- Chaves, H. M. L., y Lorena, D. R. (2019). Assessing reservoir reliability using classical and long-memory statistics. *Journal of Hydrology: Regional Studies*, 26, 100 - 641. <https://doi.org/10.1016/j.ejrh.2019.100641>
- Cadenas, E., Campos-Amezcuca, R., Rivera, W., Espinosa-Medina, M. A., Méndez-Gordillo, A. R., Rangel, E., y Tena, J. (2019). Wind speed variability study based on the Hurst coefficient and fractal dimensional analysis. *Energy Science & Engineering*, 7(2), 361-378. <https://doi.org/10.1002/ese3.277>
- Cannon, M. J., Percival, D. B., Caccia, D. C., Raymond, G. M., y Basingthwaite, J. B. (1997). Evaluating scaled windowed variance methods for estimating the Hurst coefficient of time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 241(3), 606-626. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(97\)00252-5](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(97)00252-5)
- Delgado, O. Y., y Delgado, J. R. (2011). Estimación del exponente de Hurst y la dimensión fractal de una superficie topográfica a través de la extracción de perfiles. *UD y la Geomática*, (5), 84-91. <https://doi.org/10.14483/23448407.3648>
- Doob, J. L. (1942). What is a stochastic process? *The American Mathematical Monthly*, 49(10), 648-653. <https://doi.org/10.1080/00029890.1942.11991300>
- Duarte, J., Sierra, K., Pérez-Iñigo, M., y Manuel, J. (2014). Evaluación de la memoria de largo plazo del mercado bursátil colombiano mediante el coeficiente de Hurst. *Revista Internacional Administración y Finanzas*, 7(4), 1-10.
- Equinor (2018). *Energy Perspectives*. Equinor. <https://www.equinor.com/news/archive/07jun2018-energy-perspectives>
- Gaviria, D. (2019). *Introducción al Movimiento Browniano para Finanzas*. Derivados Financieros y Finanzas Internacionales. Medellín, Colombia. Instituto Tecnológico Metropolitano 1-29
- Global, S. P. (2022). *The Future of Copper: Will the Looming Supply Gap Short-Circuit the Energy Transition?* New York.
- Hall, P., Härdle, W., Kleinow, T., y Schmidt, P. (2000). Semiparametric bootstrap approach to hypothesis tests and confidence intervals for the Hurst coefficient. *Statistical inference for stochastic processes*, 3, 263-276. <https://doi.org/10.1023/A:1009921413616>
- International Energy Agency [IEA] (2018), *World Energy Outlook 2018*, IEA, Paris: International Energy Agency.
- International Energy Agency [IEA] (2021). *Analysis and Forecast to 2026*. Paris: International Energy Agency.
- Lloyd, J., McBride, J., y Wang, S. (2022). *Oil and Gas Assets at Risk*. The Breakthrough Institute. <https://thebreakthrough.org/articles/oil-and-gas-assets-at-risk-impacts-of-declining-fossil-production-in-climate-scenarios-in-the-us>
- Luengas, D., Ardila Romero, E., y Moreno Trujillo, J. F. (2010). Metodología e interpretación del coeficiente de Hurst. *ODEON* (Bogotá), 5, 265-290.
- Luong, P. V., y Sopranzetti, B. (2022). Commodity markets intervention: Consequences of speculation, and informed trading. *Journal of Commodity Markets*, 26, 100192.
- Mandelbrot, B. B., y Wallis, J. R. (1968). Noah, Joseph, and operational hydrology. *Water Resources Research*, 4(5), 909-918. doi:10.1029/WR004i005p00909.

*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

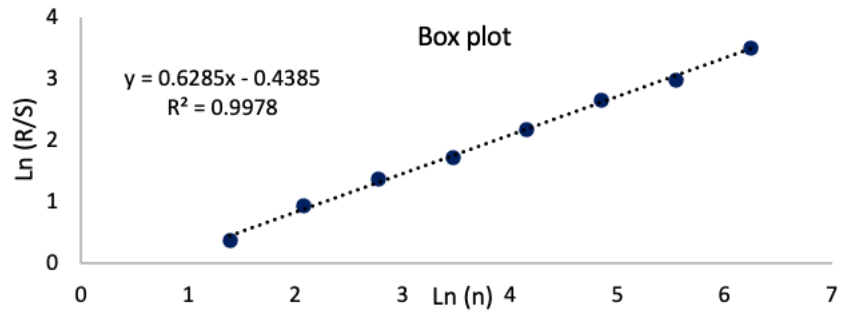
- McCauley, J. L., Gunaratne, G. H., y Bassler, K. E. (2007). Hurst exponents, Markov processes, and fractional Brownian motion. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 379(1), 1-9. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.12.028>
- Millán, G. (2021). On the Hurst exponent, Markov processes, and fractional Brownian motion. *arXiv*, 1-3.
- Mobil, E. (2019). *Outlook for energy: A perspective to 2040*. Exxon Mobil: Irving, TX, USA.
- Newell, R., Raimi, D., y Aldana, G. (2019). Global energy outlook 2019: the next generation of energy. *Resources for the Future*, 1, 8-19.
- Nieh, C. C., Yau, H. Y., Hung, K., Ou, H. K., y Hung, S. M. (2013). Cointegration and causal relationships among steel prices of Mainland China, Taiwan, and USA in the presence of multiple structural changes. *Empirical Economics*, 44, 545-561. <https://doi.org/10.1007/s00181-012-0556-6>
- Patiño, M. A. M., Garzón, M. J. A., y Lozano, J. B. C. (2021). Relevancia del patrón de persistencia de Hurst en la gestión de portafolios de renta variable. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 32, 66-82.
- Postali, F. A., y Picchetti, P. (2006). Geometric Brownian motion and structural breaks in oil prices: a quantitative analysis. *Energy Economics*, 28(4), 506-522. <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2006.02.011>
- Raimi, D., Campbell, E., Newell, R. G., Prest, B., Villanueva, S., y Wingenroth, J. (2022). Global Energy Outlook 2022: Turning Points and Tension in the Energy Transition. Resources for the Future Report, Washington, DC, 1-47.
- Rendón de la Torre, S., (2013). Memoria de largo plazo en el índice S&P500: un enfoque fractal aplicando el coeficiente de Hurst con el método R/S (rango escalado). *Ciencia Económica*, 2(2), 35-61
- Ryo Eto, E. (2020). Economic and Energy Outlook of Japan for FY2021. IEEE Japan, 1-7.
- Shell, S. (2018). *Meeting the Goals of the Paris Agreement*.
- Sierra, G. (2007). *Procesos Hurst y movimiento browniano fraccional en mercados fractales*. (Trabajo de grado). Instituto Tecnológico de Monterrey, México.
- US Energy Information Administration [EIA] (2021). *International Energy Outlook 2021*. [https://www.eia.gov/outlooks/ieo/tables\\_side\\_xls.php](https://www.eia.gov/outlooks/ieo/tables_side_xls.php)
- Yang, X. (2020). *Introduction to stochastic calculus and its applications*. SSRN 3607647.

*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

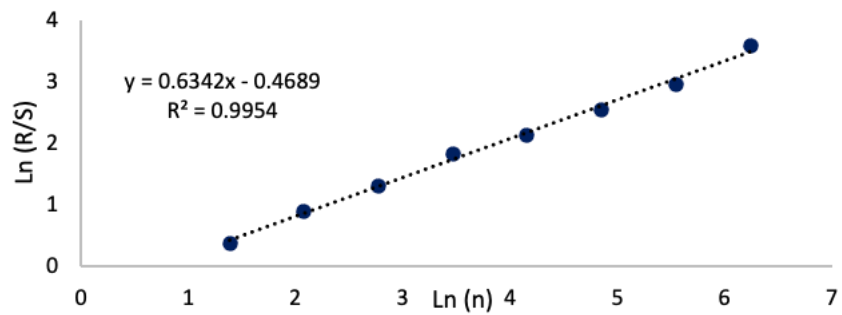
**ANEXOS**

**Figura 8. Petróleo Brent.**



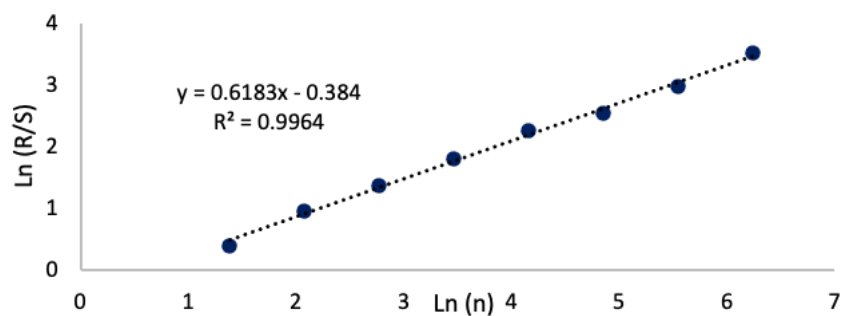
Fuente: Elaboración propia.

**Figura 9. Cobre UK.**



Fuente: Elaboración propia.

**Figura 10. Cobre USA.**



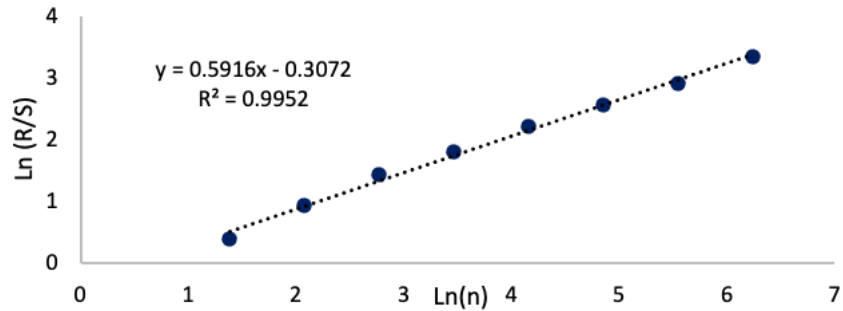
Fuente: Elaboración propia.



*Determinación de procesos estocásticos mediante el coeficiente de Hurst para commodities en el mercado internacional*

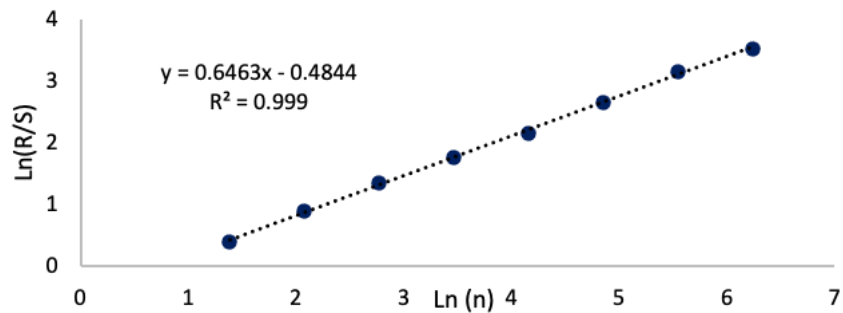
Genjis Alberto Ossa Gonzalez, Miriam Rojas Domínguez

**Figura 11. Gas Natural.**



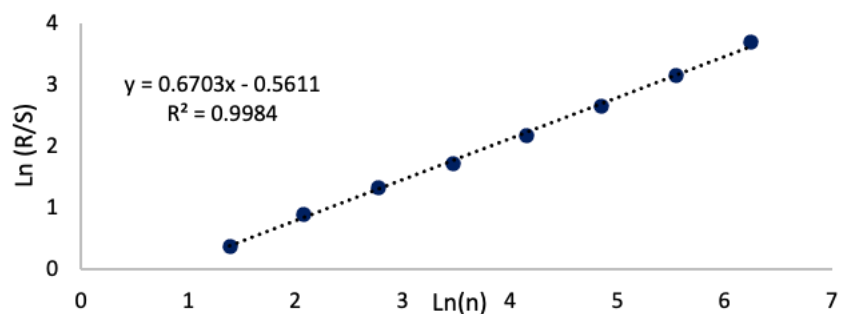
Fuente: Elaboración propia.

**Figura 12. Steel Rebar.**



Fuente: Elaboración propia.

**Figura 13. Steel HRC FOB China.**



Fuente: Elaboración propia.