



UNIVERSIDAD  
**PABLO DE  
OLAVIDE**  
SEVILLA

# Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa



**Journal of Quantitative Methods for  
Economics and Business Administration**

ISSN: 1886-516 X  
D.L.: SE-2927-06



**REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS  
PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA**

**Journal of Quantitative Methods for  
Economics and Business Administration**

Número 28. Diciembre de 2019.

ISSN: 1886-516X. D.L: SE-2927-06.

URL: <https://www.upo.es/revistas/index.php/RevMetCuant/index>

**Editores:**

Dr. Francisco Javier Blancas Peral  
Universidad Pablo de Olavide  
Ctra. de Utrera, km 1 - 41013  
Sevilla (Spain).  
Correo-e: [fjblaper@upo.es](mailto:fjblaper@upo.es)

Dra. Macarena Lozano Oyola  
Universidad Pablo de Olavide  
Ctra. de Utrera, km 1 - 41013  
Sevilla (Spain).  
Correo-e: [mlozoyo@upo.es](mailto:mlozoyo@upo.es)

**Comité Editorial:**

Dr. S. Ejaz Ahmed, University of Windsor, Ontario (Canadá)  
Dr. Adam P. Balcerzak, Nicolaus Copernicus University, Toruń (Polonia)  
Dr. Carlos A. Coello Coello, CINEVESTAV-IPN, México D.F. (México)  
Dr. Ignacio Contreras Rubio, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)  
Dra. Manuela Coromaldi, University of Social Sciences UNISU, Roma (Italia)  
Dr. Miguel Ángel Hinojosa Ramos, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)  
Dr. Matías Irigoyen Testa, Universidad Nacional del Sur, Buenos Aires (Argentina)  
Dr. M. Kazim Khan, Kent State University, Ohio (EE.UU.)  
Dr. Manuel Laguna, University of Colorado at Boulder, Colorado (EE.UU.)  
Dra. María Amparo León Sánchez, Universidad de Pinar del Río (Cuba)  
Dr. Jesús López-Rodríguez, Universidad de A Coruña, (España)  
Dr. Cecilio Mar Molinero, University of Kent, Canterbury (Reino Unido)  
Dra. Ana M. Martín Caraballo, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)  
Dra. M<sup>a</sup> Carmen Melgar Hiraldo, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)  
Dr. Gábor Nagy, University of Kent, Canterbury (Reino Unido)  
Dr. José Antonio Ordaz Sanz, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla (España)  
Dr. Andrés Rodríguez-Pose, London School of Economics, Londres (Reino Unido)  
Dr. José Manuel Rueda Cantuche, IPTS-DG J.R. Centre-European Commission  
Dra. Mariagrazia Squicciarini, OECD, París (Francia)  
Dra. Mariangela Zoli, Università degli Studi di Roma 'Tor Vergata', Roma (Italia)

## Editorial

Con la publicación del volumen 28 de la Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa (Journal of Quantitative Methods for Economics and Business Administration) tenemos que dar la despedida al Profesor Dr. D. Ángel Francisco Tenorio Villalón, que tras cinco años como coeditor de la Revista, comunicó que sus obligaciones docentes e investigadoras le impedían seguir con su labor en el Consejo Editorial.

De este modo, el volumen 27 (junio de 2019) fue el último que contó con la codirección del Prof. Tenorio Villalón. Desde el Consejo Editorial de la Revista esperamos que los proyectos en los que se ha embarcado alcancen los mayores éxitos y queremos agradecerle los años que ha dedicado a esta Revista y el trabajo realizado, esperando que en un futuro vuelva a este Consejo Editorial para seguir aportando su saber hacer y experiencia a la publicación.

Con el volumen 28 damos la bienvenida a la Profesora Dra. D<sup>a</sup>. Macarena Lozano Oyola, profesora Titular del Área de Métodos Cuantitativos del Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica de la Universidad Pablo de Olavide, que se incorpora en el equipo editorial.

La Revista sigue con el espíritu y afán con el que surgió en el año 2006 en el seno del Área de Métodos Cuantitativos del Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica de la Universidad Pablo de Olavide de Sevilla. En esta revista los trabajos publicados versan sobre la aplicación de técnicas y modelos cuantitativos al tratamiento y resolución de problemas relativos al ámbito de la economía y la empresa.

Buscando continuar con los parámetros de calidad con los que ha venido trabajando la Revista, se están tramitando todos los trabajos recibidos con la

mayor celeridad posible e intentando reducir el tiempo de respuesta a los autores. Asimismo, se establecerán nuevas directrices para los autores que agilicen aún más los procesos de evaluación y producción, en la búsqueda de trabajos relevantes que contribuyan gradualmente a aumentar el impacto internacional de nuestra publicación.

Muchas gracias a todos los autores de la Revista por seguir contando con ella como medio de divulgación de sus investigaciones en el estudio y aplicación de los métodos cuantitativos. A los suscriptores y lectores, también queremos volver a agradecerles que continúen consultando la Revista para conocer las investigaciones que en ella se publican. Muchas gracias a todos.

Atentamente,

El equipo editorial



## Expectativas para que México cambie el destino de sus exportaciones

LAGUNAS PULS, SERGIO

Departamento de Economía y Negocios

Universidad del Caribe (México)

Correo electrónico: [slagunas@ucaribe.edu.mx](mailto:slagunas@ucaribe.edu.mx)

CERVANTES BELLO, CARMEN LILIA

Departamento de Economía y Negocios

Universidad del Caribe (México)

Correo electrónico: [ccervantes@ucaribe.edu.mx](mailto:ccervantes@ucaribe.edu.mx)

### RESUMEN

En este artículo se analiza la exportación de México hacia la Unión Europea y China para conocer las probabilidades, en el caso de que las políticas comerciales de los Estados Unidos de América (EE.UU.) obligaran a cambiar el rumbo de los productos mexicanos hacia esos mercados. El trabajo se inicia con una síntesis de las políticas económicas de México hasta llegar a los acuerdos en materia comercial que tiene suscritos, con énfasis en el Tratado de Libre Comercio con la Unión Europea (TLCUEM) así como también esbozando la dinámica comercial de bienes con China. Posteriormente se describe trimestralmente la exportación mexicana de bienes y sus principales destinos, para después analizar los valores de la exportación desde el año 2012 y hasta el 2015, verificando que los datos se ajusten a distribuciones gamma y normal, estimando probabilidades para distintos ensayos, que contemplan los promedios exportados, los máximos e inclusive importes aún mayores para conocer las posibilidades que tendría México para sustituir distintas cantidades que eventualmente no pudieran colocarse en el mercado estadounidense.

**Palabras clave:** exportación mexicana, probabilidad, Unión Europea.

**Clasificación JEL:** F17; F15; C16; C13.

**MSC2010:** 6207; 60EXX; 60AXX.

# Expectations for Mexico to change the destination of its exports

## ABSTRACT

This article analyses the Mexican exports to China and the European Union along with the effects of a possible shift of Mexican products to the above markets due to a change within the US-Mexico trade agreements. Beginning with a review of Mexican trade agreements with the European Union and China, the article describes the quarterly Mexican exports of goods and products and their primary destinations to these countries. Later, the paper analyses the exports of Mexican products from years 2012-2015 fitting their values to Gamma and Normal distributions. Probabilities for different scenarios, which include the average and maximum exports, are given in order to quantify the possibilities that Mexico has to replace the goods and products that can not be positioned in the American market.

**Keywords:** Mexican export, probability, European Union.

**JEL classification:** F17; F15; C16; C13.

**MSC2010:** 6207; 60EXX; 60AXX.



## 1. Introducción.

Durante algún tiempo prevaleció la idea de asociar el crecimiento económico con el auge del sector industrial, principalmente en la década de los ochenta y hasta finales del siglo XX. Quizás este fundamento tenga su origen en los efectos que la Revolución Industrial generó en los países desarrollados al desplazar la fuerza de trabajo concentrada en los sectores tradicionales como el agrícola, a las actividades de manufactura, que generaban más riqueza (Banco Interamericano de Desarrollo, 2010). Por su parte, la región de América Latina y el Caribe (ALC) intentó seguir la misma ruta hacia la industrialización. Sin embargo, los resultados obtenidos fueron poco exitosos, a pesar de que las políticas implementadas en los años ochenta en materia industrial consiguieron algunos logros, estos no fueron suficientes para poder competir a nivel internacional ya que los mercados resultaron demasiado pequeños (Lora & Pagés, 2011).

Ante estos desafíos, una de las estrategias que adoptaron los países latinoamericanos fue la apertura comercial como pieza principal de la política exterior de la época, así como de los paquetes de liberalización y posterior ajuste estructural en gran parte de las economías de la región para afrontar los problemas de la deuda externa, la recesión, la desaceleración y la crisis económica de la década de los ochenta (Shearer & Tres, 2016). Si bien, el camino hacia la integración y la reducción de aranceles fueron el foco de las discusiones en materia de comercio internacional en los noventa, actualmente las preocupaciones deberían ser, entre otras, la especialización humana y tecnológica.

En los últimos años, se ha podido observar un deterioro en los términos de intercambio, los tipos de cambio de la mayoría de los países de ALC han sufrido marcadas depreciaciones y aunque esto podría estimular el crecimiento de las ventas externas, la configuración actual de los tipos de cambio reales no favorece las perspectivas de expansión y diversificación de las exportaciones, lo que ha mermado su valor y generado déficits en la cuenta corriente de la balanza de pagos de los países (Giordano & Ramos, 2016). De igual modo, es probable que los patrones de comercio global se vean modificados por la trayectoria de los acuerdos mega-regionales<sup>1</sup> y la evolución de la dinámica de las Cadenas Globales de Valor (CGV). En términos generales, las economías latinoamericanas tienden a exportar materias primas no procesadas o de bajo valor agregado, situándose cerca del extremo inferior de las CGV<sup>2</sup> debido en parte, a los elevados costos logísticos y de transporte y a sus bajos niveles de productividad (Blyde, 2014).

En cuestiones de geopolítica, de acuerdo con los escenarios previstos por el Atlantic Council (Marczak, Engelke, Bohl, & Saldarriaga, 2016) para 2030, los patrones de comercio e inversión global serán multidireccionales, con diversos polos económicos importantes como EE.UU., Europa, China, India y un conjunto de potencias económicas de peso medio. No obstante, uno de los mayores riesgos es el aumento de la rivalidad entre Estados Unidos y China. La falta de solidez y coherencia en la política exterior estadounidense provocará tensiones entre ambas potencias, sobre todo en lo que concierne a los socios económicos y diplomáticos en ALC (Ramírez, 2014). Por lo tanto, este reacomodo obliga a la región a poner en marcha estrategias como la diversificación en destinos que minimicen los posibles efectos de tal interacción.

Adicionalmente, en materia de seguridad global, la corrupción, los efectos acumulados de las organizaciones criminales internacionales, el tráfico ilegal de personas, la protección

---

<sup>1</sup> Un acuerdo mega-regional se define como aquel que involucra a países que en su conjunto representan proporciones importantes de la población, el PIB, el comercio y la IED mundial y que además conlleva un fuerte compromiso en materia de reglamentación al interior de las fronteras, tales como el TTP, TTIP y RCEP. Ver INTAL Interactivo/El Mega-Regionalismo.

<sup>2</sup> La “curva de la sonrisa”: Stan Shih describió la producción mundial como una U, en cuyos extremos se encuentran las actividades que agregan más valor como la investigación y el desarrollo, la creación de ideas, el branding y los contratos de servicios. En la base, se encuentran las actividades que agregan menor valor como la fabricación y el ensamblaje.

ineficiente de los derechos de propiedad y el deficiente Estado de derecho a través de las instituciones débiles han cobrado su precio. La inseguridad económica y personal, acelera la fuga de cerebros y genera dificultades para atraer inversión extranjera directa, lo cual deriva en sobre costos que disminuyen la competitividad de las empresas (Agosín, Fernández-Arias, Jaramillo, & Lora, 2015).

Para el caso de México, después de registrar tasas de crecimiento cercanas al 7% durante los años sesenta, el ingreso per cápita y los salarios reales se han estancado y la tasa de productividad solo ha experimentado un modesto aumento de 2% durante los últimos 50 años (Franco, 2016). Es cierto que algunos sectores de la economía mexicana son dinámicos gracias a las reformas efectuadas en décadas recientes para abrirlos al comercio y a la inversión. Sin embargo, otros sectores sufren de baja competitividad, en su mayoría debido al legado del corporativismo económico y el modelo político que sufrió el país durante gran parte del siglo XX (Vega, 2014). Estos datos de baja productividad y cifras de crecimiento económico reflejan mercados estancados, carencias de capital humano e insuficiente inversión pública, especialmente en infraestructura en comparación a otros países de desarrollo equiparable en situaciones iniciales similares como algunas economías asiáticas (Agosín, Fernández-Arias, Jaramillo, & Lora, 2015).

A nivel internacional, la interacción entre México y EE.UU. ha estado marcada por la fuerte dependencia comercial al mercado estadounidense, debido en parte a la proximidad geográfica y si bien esto representa áreas de oportunidad también es fuente de riesgos considerables por la vulnerabilidad que genera esta relación casi exclusiva y fuertemente asimétrica. Si a esto se suma la llegada de Donald Trump a la presidencia y su postura tendente a la fragmentación, incluida la renegociación o extinción del Tratado de Libre Comercio de América del Norte (TLCAN) y el endurecimiento de la política migratoria, el panorama se torna árido.

En virtud de lo anterior, es necesario dar cuenta de las alternativas de exportación que tiene México, con especial interés en los mercados de Europa y China (mercados que actualmente ya figuran dentro de los principales destinos), en el caso de que las políticas comerciales de EE.UU. forzaran a cambiar el destino de los productos mexicanos por modificación e incluso posible cancelación del TLCAN, objetivo principal de este trabajo.

## **2. Políticas Económicas.**

A continuación, se describe de manera breve la evolución de los modelos económicos aplicados por México en los últimos setenta años, desde el enfoque orientado al mercado interno y altamente proteccionista, hasta el neoliberalismo, poniendo especial énfasis en las acciones que se llevaron a cabo en materia de política comercial.

Desde mediados de los años cuarenta y hasta inicios de los ochenta, México siguió una estrategia de crecimiento basada en la industrialización por sustitución de importaciones (ISI). Se enfatizó en la necesidad de crear una importante base industrial con la intención de abandonar la dependencia del sector primario y fomentar la actividad de otras ramas mediante el aumento de la productividad de la mano de obra y el incremento del ahorro. Con una mayor relación capital-producto en la economía se propuso ampliar el mercado interno y crear una base productiva exportadora y así poder captar las divisas que el país precisaba para su modernización, todo esto mediante la intervención directa del sector público (Monserrat & Chávez, 2003). A pesar de que el modelo tuvo resultados positivos durante algún tiempo, comenzó a derrumbarse en los años setenta debido a la falta de capacidad tecnológica y financiera, deficiencias estructurales en la demanda y el alto grado de proteccionismo que prevaleció en la política comercial.

Ante esta muestra de debilidad en el crecimiento de la economía, se propuso el enfoque conocido como “Desarrollo Compartido” el cual transformó de manera radical la política fiscal y monetaria, manteniendo sin cambios significativos el resto de políticas. Con los ingresos obtenidos de la explotación y producción de los yacimientos petroleros descubiertos en esa época,



se pretendió financiar la inversión en infraestructura productiva y orientar la producción hacia los bienes de capital (Cruz, 2017). Sin embargo, esto generó una gran dependencia hacia los recursos provenientes de las exportaciones petroleras, por lo que al caer los precios del petróleo en 1982 automáticamente se desplomó la captación de divisas, evidenciando así los desequilibrios estructurales de la economía junto con el déficit externo, el fiscal, la reducción del ahorro interno, la acumulación de rezagos productivos y un excesivo endeudamiento tanto interno como externo imposible de pagar (Torres & Vega, 2010).

Ante esta precaria situación, el país requirió de una respuesta diferente por parte de las autoridades económicas y se vio forzado a negociar un rescate financiero con el Fondo Monetario Internacional (FMI), hecho que derivó en la implementación de una estricta política fiscal y monetaria, la desregulación del mercado, la privatización de la economía y una política comercial y de inversión tendiente a la apertura (Villareal, 2004). De este modo, la liberalización comercial da inicio en 1983 con una moderada reducción unilateral de los aranceles de importación y una gradual eliminación de los precios oficiales, así como de las cuotas, licencias y los permisos de importación. En 1986 México ingresa al Acuerdo General sobre Aranceles Aduaneros y Comercio (GATT) y para 1994 el arancel más alto a las importaciones era de 20%, transformando al país en una de las economías más abiertas al mundo y atractiva para los inversionistas.

A pesar de estos indicadores positivos, la economía aún presentaba signos de vulnerabilidad y debilidad, puesto que había acumulado un creciente déficit en la cuenta corriente y la tasa de cambio semifija provocó una apreciación de las monedas extranjeras. Finalmente, la crisis del peso en 1995 provocó una recesión más profunda que en 1982; sin embargo, la recuperación fue mucho más rápida gracias al papel fundamental que jugó el comercio exterior (Ortiz, 2014).

### **3. Tratados comerciales entre México, América del Norte y Europa.**

Durante la década de los noventa, México se convirtió en un fuerte impulsor del comercio internacional y mostró un notable interés en mantener una agenda de liberalización comercial que le permitiera tener acceso a los mercados del exterior y atraer inversión extranjera directa. En este sentido, la estrategia más proactiva que implementó fue la negociación de una red de acuerdos comerciales con distintas regiones del mundo siendo los más sobresalientes el TLCAN y el Tratado de Libre Comercio con la Unión Europea (TLCUEM), los cuales se abordarán a continuación.

Indudablemente el TLCAN ha sido uno de los acuerdos más importantes que ha suscrito el país y su trascendencia como modelo innovador de integración no tuvo que ver con su intención de ir en busca de una unión aduanera o un mercado común, sino más bien con el hecho de ser el primer tratado de desgravación arancelaria regional que incluyó cuestiones tan diversas e inéditas como: regulación sobre propiedad intelectual, legislación laboral y ambiental, comercio de servicios e inversión y mecanismos de solución de controversias ad hoc (Pastor, 2014). Con respecto a la liberación arancelaria, ésta se hizo adoptando un enfoque escalonado a un conjunto de categorías diferenciadas, proporcionando a cada una de ellas un marco temporal y una trayectoria progresiva hacia la eliminación completa de aranceles; mientras que el 75% de las líneas arancelarias se liberó durante el primer año, otras fueron sujetas a periodos de transición desde cinco y hasta quince años (Sehgal, 2010).

La decisión de negociar un acuerdo con EE.UU. y Canadá fue el resultado de una combinación de factores tanto internos como externos, ya que México promovió el acuerdo a fin de asegurar e impulsar el acceso de sus productos a uno de los mercados más importantes y así contrarrestar las prácticas proteccionistas de EE.UU. que en el pasado habían impedido el acceso a las exportaciones mexicanas competitivas (Vega, 2014). En este contexto, es importante señalar que los efectos de un área de libre comercio tardan un tiempo en manifestarse, ya sea por los ajustes estructurales que los países deben llevar a cabo como por la característica gradual incluida

en el propio acuerdo. Sin embargo, es un hecho que el comercio entre México y EE.UU. ha crecido sustancialmente y de igual manera el capital externo que ha fluido al país ha contribuido a fortalecer a algunos sectores productivos como el industrial, destacándose la rama textil, automotriz y de productos eléctricos; por el contrario, otros sectores como el agrícola no han tenido el mismo dinamismo.

Ahora, si bien las relaciones con EE.UU. han sido una prioridad para México en materia de política económica internacional por el tamaño de su mercado, la proximidad geográfica y su papel hegemónico, estas mismas características han orillado al país a avanzar en una agenda de libre comercio más allá de América del Norte para dar continuidad a su política de apertura. Después de la entrada en vigor del TLCAN, la UE buscó establecer relaciones comerciales privilegiadas con México, ya que había demostrado tener la capacidad técnica y el compromiso político de integrarse con una gran potencia y sobre todo porque tenía el interés de recuperar su participación en el mercado mexicano que había estado disminuyendo a consecuencia del TLCAN (Bacaria, Osorio & Artal, s.f.). De esta manera, en 1997 dan inicio las negociaciones del Acuerdo de Asociación Económica, Concertación Política y Cooperación también conocido como “Acuerdo Global” que si bien no contenía compromisos comerciales, sí contenía un mandato de negociación comercial predeterminado a través del Acuerdo Interino sobre Comercio y Cuestiones Relacionadas con el Comercio o TLCUEM (Curzio, 2004).

Las negociaciones entre México y la UE comenzaron en julio de 1998 y concluyeron después de 16 meses y nueve rondas. El alcance fue más allá de la desgravación arancelaria e incluyó diversos aspectos bajo un esquema de diálogo político, cooperación y comercio; la entrada en vigor del acuerdo se previó en dos etapas. La Decisión 2/2000 que cubre los temas de competencia exclusiva de la Comunidad Europea como el comercio de mercancías, compras públicas, disposiciones en materia de propiedad intelectual y de competencia, un mecanismo de solución de controversias y un dispositivo institucional. Por su parte, la Decisión 2/2001 cubre los temas que en su momento requerían ratificación por los Parlamentos nacionales de la UE como el comercio de servicios, inversiones, disposiciones adicionales sobre propiedad intelectual y solución de controversias (Frontini & Bonnefoy, 2017).

A pesar de que el TLCAN fue uno de los acuerdos más innovadores, el TLCUEM es único en varios sentidos ya que es el más incluyente que haya negociado la UE con un solo país y el primero de una serie de acuerdos comerciales con países América Latina fuera del contexto de vecindad de la UE (Vega, 2011). Aun cuando EE.UU. probablemente continúe siendo el socio más importante para México y su mayor mercado de exportaciones, el TLCUEM representa una oportunidad para los exportadores mexicanos de expandir y diversificar sus ventas en el vasto y rico mercado de la UE.

No obstante, China seguirá avanzando en la modernización de su economía y esa transformación en marcha implica una oportunidad a considerar para México. Si bien, históricamente ALC no ha destacado en la política exterior china y los vínculos comerciales han sido poco equilibrados, estos se han consolidado sobre todo a principios de milenio, puesto que Chile, Costa Rica y Perú ya han suscrito acuerdos parciales y Colombia ha iniciado negociaciones (Jenkins, 2016). De igual manera, en la cumbre celebrada en 2015 entre China y la Comunidad de Estados Latinoamericanos y Caribeños (CELAC), se elaboró el plan de cooperación 2015-2019<sup>3</sup> donde el gobierno chino se comprometió a otorgar US\$10 mil millones en préstamos para proyectos de infraestructura en la región, pero si bien, esta estrategia responde a los objetivos del gobierno chino y sus empresas, la relación estará condicionada en los próximos años por los avances que el gigante asiático logre con su reforma económica (Myers, 2016).

---

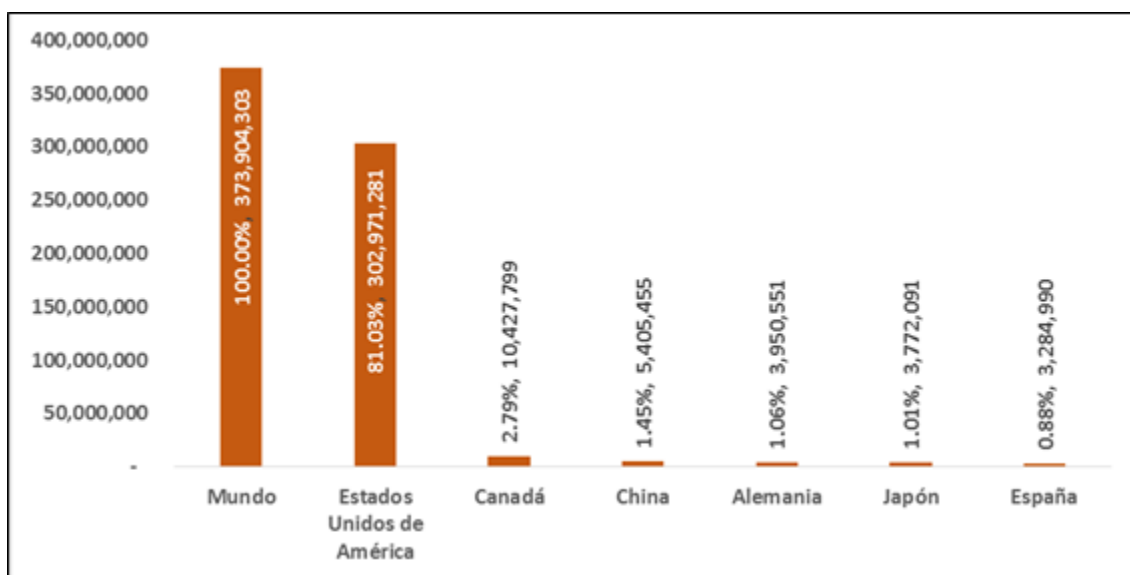
<sup>3</sup> Los esquemas 1+3+6 y 3×3 respaldan la intención de fomentar una mayor participación de las empresas públicas y privadas chinas en los sectores industriales y de alta tecnología de América Latina, como son los de telecomunicaciones, logística, marítimo y ferroviario. Mientras que el modelo 3×3 pretende promover el traslado de cierta producción industrial china a América Latina.

De acuerdo a lo anterior, en los siguientes apartados del trabajo se presenta el perfil de la exportación mexicana hacia Europa y China, con la finalidad de obtener probabilidades de ocurrencia para distintos importes que, derivados de medidas proteccionistas de los EE.UU. obligaran a buscar otros mercados destino, conociendo la opción con mayores posibilidades de éxito.

#### 4. Principales destinos de la exportación de bienes desde México.

De acuerdo con el International Trade Centre (ITC), durante el año 2016 la exportación de bienes mexicanos hacia el mundo alcanzó 373,904,303 miles de dólares de los cuales el 81.02% fue producto de las ventas a los EE.UU.; en segundo lugar se encontró Canadá con el 2.79%, en tercera posición China alcanzando el 1.45%, seguido por Alemania con el 1.06%, Japón en el cuarto puesto representando 1.01% y en quinto lugar se colocó España logrando que ese mercado demandara 0.88% de productos mexicanos (International Trade Centre, 2017).

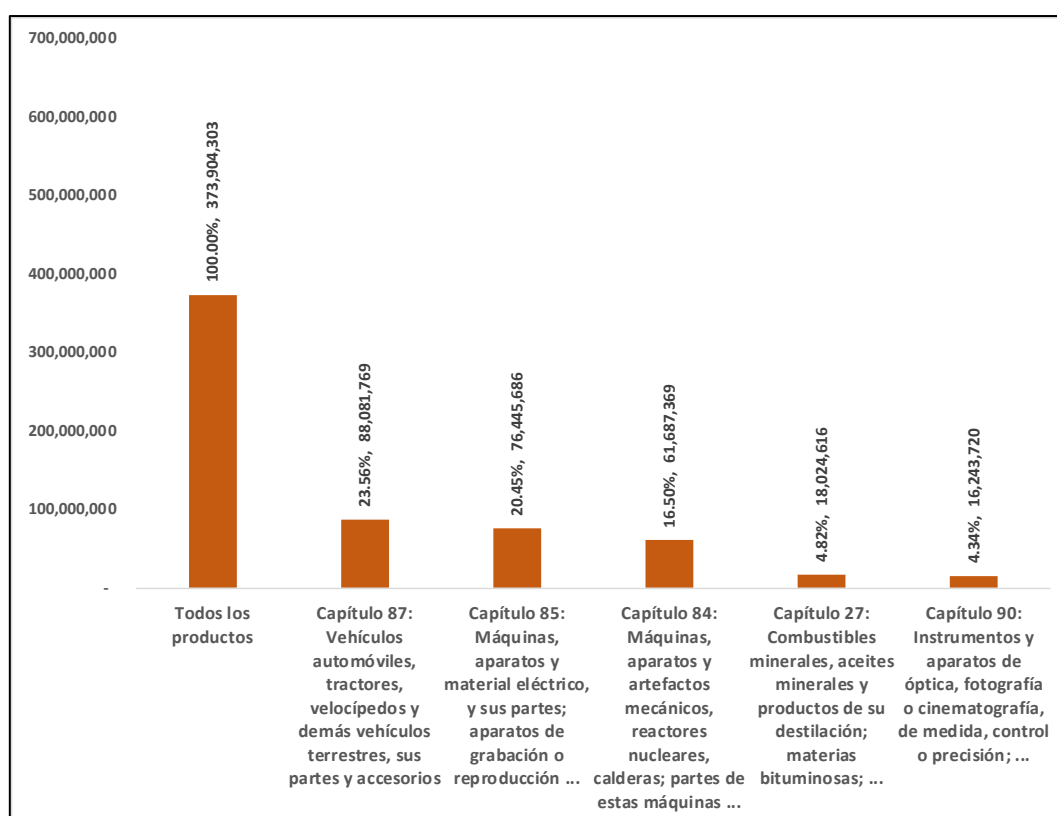
**Gráfica 1. Los cinco destinos más importantes en la exportación de bienes desde México en 2016 (miles de dólares).**



Fuente: Elaboración propia.

Para el caso de los bienes que constituyen la mayor exportación, de acuerdo con el Sistema de Clasificación Arancelaria y consultado en el ITC conforme a la cuantía al cierre del 2016, se sitúan en primer lugar los comprendidos en el Capítulo 87 con el 23.56% del total de las exportaciones; este capítulo agrupa bienes relacionados a vehículos automóviles, tractores, velocípedos y demás vehículos terrestres, sus partes y accesorios. En segundo lugar, se sitúan los bienes integrados en el Capítulo 85 que representan el 20.45%, integrado por máquinas, aparatos y material eléctrico, y sus partes, aparatos de grabación o reproducción de sonido, aparatos de grabación o reproducción de imagen y sonido en televisión, y las partes y accesorios de estos aparatos. El tercer lugar con 16.50% registra a los bienes comprendidos en el Capítulo 84 que son máquinas, aparatos y artefactos mecánicos, reactores nucleares, calderas, partes de estas máquinas o aparatos. El cuarto lugar está representado por el Capítulo 27 y constituye el 4.82% de la exportación, integrando los combustibles minerales, aceites minerales y productos de su destilación, materias bituminosas y ceras minerales. El quinto puesto en importancia lo tiene el Capítulo 90 que agrupa instrumentos y aparatos de óptica, fotografía o cinematografía, de medida, control o precisión, instrumentos y aparatos médico-quirúrgicos, partes y accesorios de estos instrumentos o aparatos, un capítulo que representa el 4.34% del total de bienes exportados por México.

**Gráfica 2. Los cinco capítulos arancelarios más importantes en la exportación de bienes desde México en 2016.**



Fuente: Elaboración propia.

Como se aprecia en la Gráfica 2, la exportación contenida en los cinco principales capítulos<sup>4</sup>, representan en conjunto poco menos del 70% de toda la venta mexicana al mundo. Unido a lo anterior, si se acepta que México ha venido fortaleciéndose en determinados procesos productivos y de especialización, entonces resultaría una opción más inmediata procurar exportar aquello en lo que ya se tiene conocimiento y eficacia, en lugar de iniciar con nuevos procesos productivos sin saber incluso el rendimiento que se tendría, resultando entonces interesante, al menos de manera más inmediata, suplir mercados de los bienes consolidados.

Por lo anterior, en el siguiente apartado se tratará de responder la pregunta de investigación sustantiva, relativa a conocer cuáles son las probabilidades de que otros de los principales mercados de exportación puedan absorber distintas cantidades que no pudiera colocar México en los EE.UU., derivado de políticas económicas adversas que decidiera implementar el Presidente Donald Trump, como la posible cancelación del TLCAN, lo cual ha manifestado en más de una ocasión.

## 5. Métodos de distribución gamma y normal.

En este trabajo se emplean dos distribuciones de probabilidad, gamma (Khodabin & Ahmadabadi, 2010) y normal (Wackerly, Mendenhall & Scheafer, 2010), con la finalidad de conocer mediante ensayos, cuál sería la posibilidad de sustituir diferentes montos que por ajustes de políticas comerciales de los EE.UU. dificultaran la continuidad de la exportación mexicana, conociendo la probabilidad para remplazar el destino hacia China o la UE, considerando en este último caso a

<sup>4</sup> De acuerdo a los importes registrados en el año 2016, consultados en el International Trade Centre.

todo el grupo de países que incluye a España y Alemania, clasificados dentro de los principales destinos de la exportación de México (PROMEXICO, 2017).

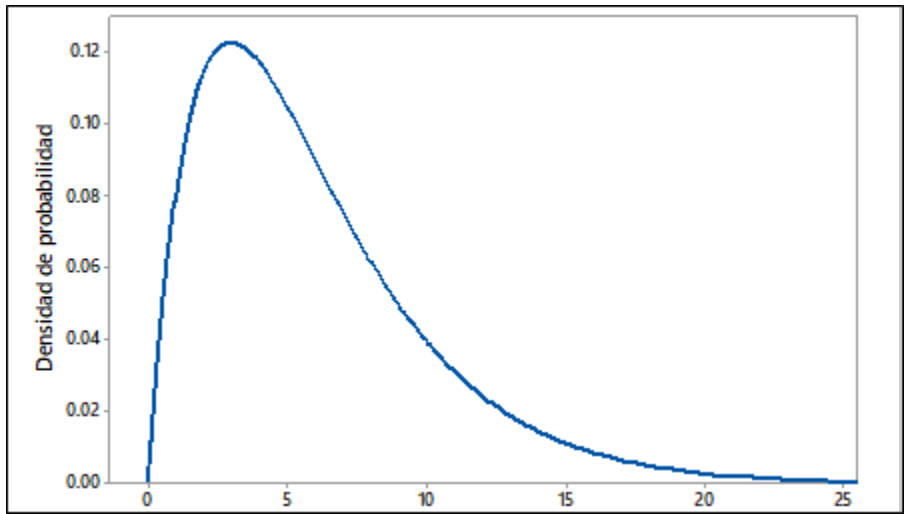
Mediante ambas distribuciones se analizan los valores, en dólares americanos, correspondientes a la exportación de México de los años 2001 a 2015; en el caso de la distribución gamma ésta se considera apropiada debido a que la exportación no se presenta con datos negativos y que, por la naturaleza propia de existencia de Tratados Comerciales, lo que se pretende es al menos conservar el promedio de exportación trimestral registrado hasta 2015, además de considerar una mesurada probabilidad para que se presenten incrementos considerables en la exportación por tratarse de mercados sustitutos (Arroyo, Bravo, Llinás & Muñoz, 2014).

Por otra parte, se optó por analizar la información mediante la distribución de probabilidad normal para contrastar los resultados y no descartar que inclusive, con este tipo de distribución, pudieran presentarse, a diferencia de la forma gamma, disminuciones del promedio exportado.

Para ambos métodos se aplicó la prueba Anderson - Darling (Pomory, 2006) con valor crítico (Ang & Willson, 2007) de 0.751 así como también prueba visual mediante gráfica de probabilidad.

La distribución gamma, representada por la Gráfica 3, está definida por una escala ( $\beta$ ) y una forma ( $\alpha$ ) que le otorga una figura con sesgo positivo.

**Gráfica 3. Representación de una distribución gamma.**



Fuente: Elaboración propia mediante Minitab 17.

En el eje horizontal se presentarán importes de la exportación que se analice en cada caso; en cuanto a los parámetros gamma se estará a lo siguiente (Thom, 1958):

$$A = \ln \mu - \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n} \tag{1}$$

$$\alpha = \frac{1}{4A} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4A}{3}} \right] \tag{2}$$

$$\beta = \frac{\mu}{\alpha} \tag{3}$$

En lo que se refiere al método de distribución normal representado por la Gráfica 4, los parámetros necesarios para la obtención de probabilidades, así como la representación gráfica son la media ( $\mu$ ), la desviación estándar ( $\sigma$ ) y la varianza ( $\sigma^2$ ).

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (4)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n-1} \quad (5)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (6)$$

**Gráfica 4. Representación de una distribución normal.**



Fuente: Elaboración propia mediante Minitab 17.

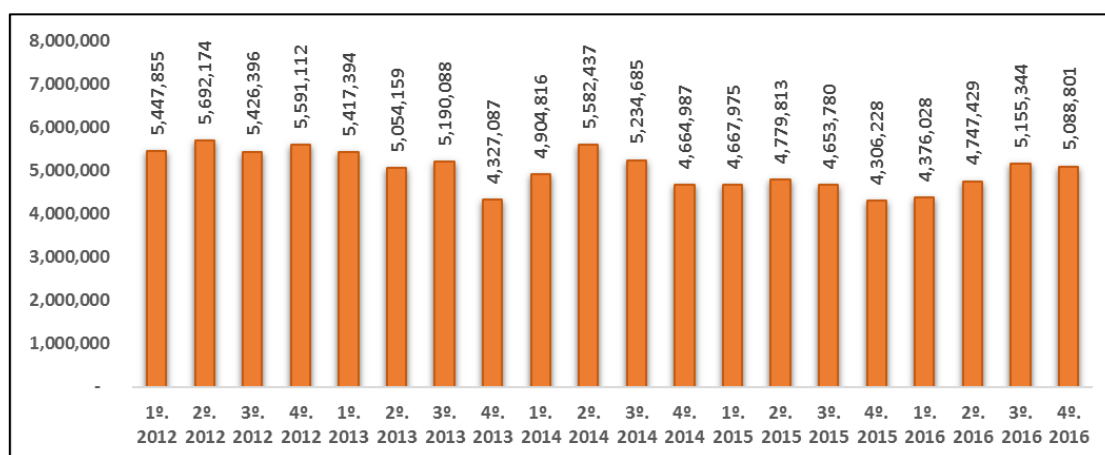
Mediante los dos métodos descritos anteriormente se estimarán probabilidades de ocurrencia para que la exportación de México ya sea hacia la UE o China, pudiera lograr colocarse en esos mercados. Lo anterior se presenta a manera de ensayos, cada uno con importes de exportación, en dólares americanos, de la forma “desde y en adelante” lo que permitirá obtener la probabilidad formal de sustituir exportación. La información que se analiza es por cuatrimestres, en virtud de analizar un mayor número de datos y no solamente la concentración anual, iniciando en el primer cuatrimestre del año 2012 y hasta el cuarto trimestre del 2016<sup>5</sup>.

## **6. Parámetros y probabilidades para el mercado de la Unión Europea.**

A continuación, se presentan distintos ensayos, con variantes en rangos de exportación que eventualmente necesitara México colocar debido a condiciones comerciales adversas en los EE.UU. La Gráfica 5 concentra la exportación colocada en el mercado de la UE y servirá para obtener los estadísticos necesarios para los dos métodos de análisis adoptados.

<sup>5</sup> Los análisis del apartado siguiente no analizan la exportación hacia los EE.UU. ya que el interés es en conocer las probabilidades hacia mercados alternativos.

**Gráfica 5. Exportación mexicana de bienes hacia la Unión Europea (miles de dólares).**



Fuente: Elaboración propia.

Empleando las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtienen los siguientes parámetros para la distribución gamma:

$$A = \ln \mu - \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n} = 15.428 - \frac{308.487}{20} = 0.004$$

$$\alpha = \frac{1}{4A} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4A}{3}} \right] = \frac{1}{(4 * 0.004)} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{(4 * 0.004)}{3}} \right] = 137.078$$

$$\beta = \frac{\mu}{\alpha} = \frac{5,015,429}{137.08} = 36,588.606$$

En cuanto a los parámetros para la distribución normal, las ecuaciones (4), (5) y (6) arrojaron los siguientes resultados:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{100,308,588}{20} = 5,015,429.40$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n - 1} = \frac{3,632,905,813,763}{19} = 191,205,569,145.421$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{191,205,569,145.421} = 437,270.590$$

A partir de los resultados anteriores se hace posible realizar la prueba de bondad y ajuste, específicamente el test conocido como Anderson-Darling<sup>6</sup>, prueba que permitirá comprobar si los datos siguen una distribución gamma y normal, situación que se presentará siempre que el resultado obtenido para AD (Anderson & Darlin, 1952) no supere el valor crítico adoptado para un nivel de confianza del 95%.

Por lo anterior, la hipótesis para aceptar que los datos pueden ser analizados con ambas distribuciones será:

*Si  $AD < 0.751$  se acepta analizar la exportación con los métodos propuestos, si no se rechaza*

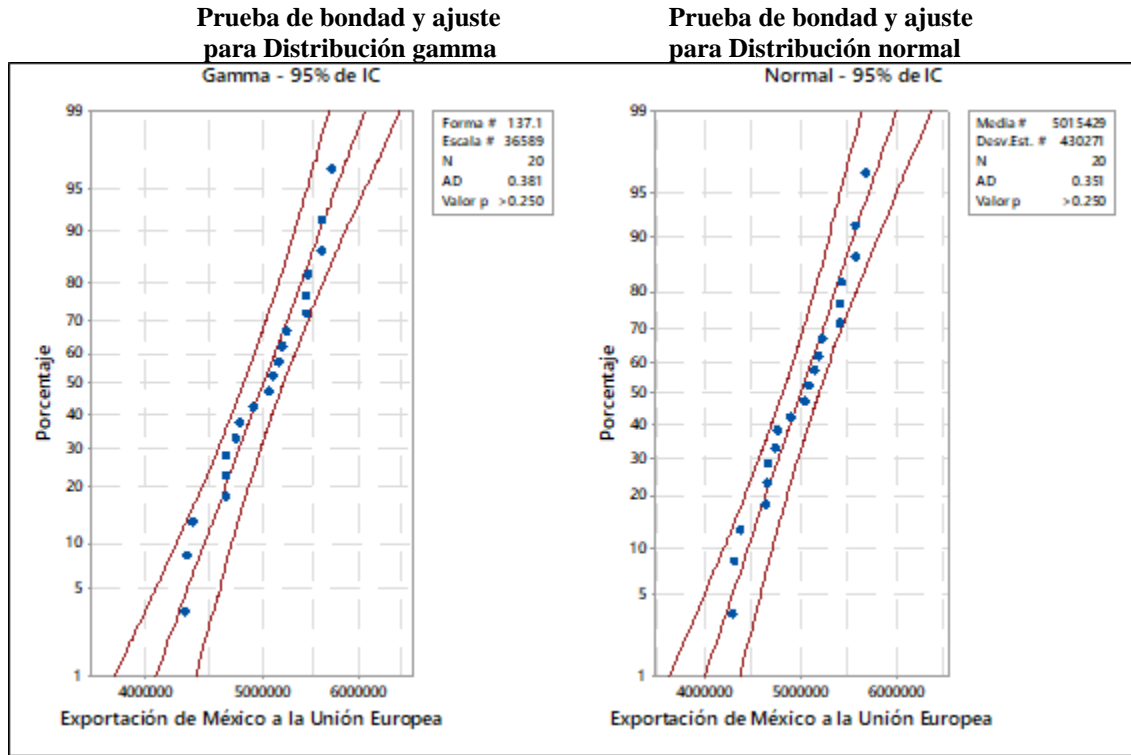
<sup>6</sup> Esta prueba es también conocida en diversos textos como  $A^2$  desde el análisis realizado por Stephens (1979a).

La ecuación para obtener AD (Stephens, 1979b) se presenta a continuación:

$$AD = - \frac{\{\sum_{i=1}^n (2i-1)[\ln z_i + \ln(1-z_{n+1-i})]\}}{n} - n \quad (7)$$

Con la ecuación 7 y los parámetros previamente calculados para la exportación hacia la UE, se obtuvo lo siguiente:

Gráfica 6



Fuente: Elaboración propia mediante Minitab 17.

Los resultados para la prueba AD que se presentan en la Gráfica 6 permiten aceptar los métodos de distribución adoptados, para gamma  $0.381 < 0.751$  y para la distribución normal fue  $0.351 < 0.751$  con base a lo anterior, se procede a calcular las probabilidades para montos de exportación iniciando con el mayor importe registrado y a partir del mismo con incrementos de 25,000 (también miles de dólares) para contrastar los resultados con respecto a China. Los estimados se presentan en la Tabla 1<sup>7</sup>.

<sup>7</sup> La Tabla 1, en su primer renglón considera, señalada con un asterisco, la exportación trimestral promedio, posteriormente se va incrementando el importe para cada renglón a razón de 50,000,000 de dólares (la tabla expresa cifras en miles); la cantidad señalada con dos asteriscos representa la máxima exportación registrada en un trimestre que en los siguientes renglones se va incrementando también a razón de 50,000,000 dólares para conocer la probabilidad de que el mercado de la UE pueda adquirir más mercancía desde México.



**Tabla 1. Parámetros y probabilidades para el mercado de China.**

Miles de dólares	Probabilidad Gamma (cola derecha)	Probabilidad Normal (cola derecha)
<b>5,015,429*</b>	48.86%	50.00%
5,065,429	44.24%	45.45%
5,115,429	39.73%	40.96%
5,165,429	35.38%	36.58%
5,215,429	31.24%	32.37%
5,265,429	27.34%	28.38%
5,315,429	23.73%	24.63%
5,365,429	20.41%	21.17%
5,415,429	17.40%	18.02%
5,465,429	14.71%	15.17%
5,515,429	12.33%	12.64%
5,565,429	10.24%	10.42%
5,615,429	8.43%	8.50%
5,665,429	6.88%	6.86%
<b>5,692,174**</b>	6.15%	6.09%
5,742,174	4.96%	4.83%
5,792,174	3.96%	3.78%
5,842,174	3.14%	2.93%
5,892,174	2.46%	2.25%

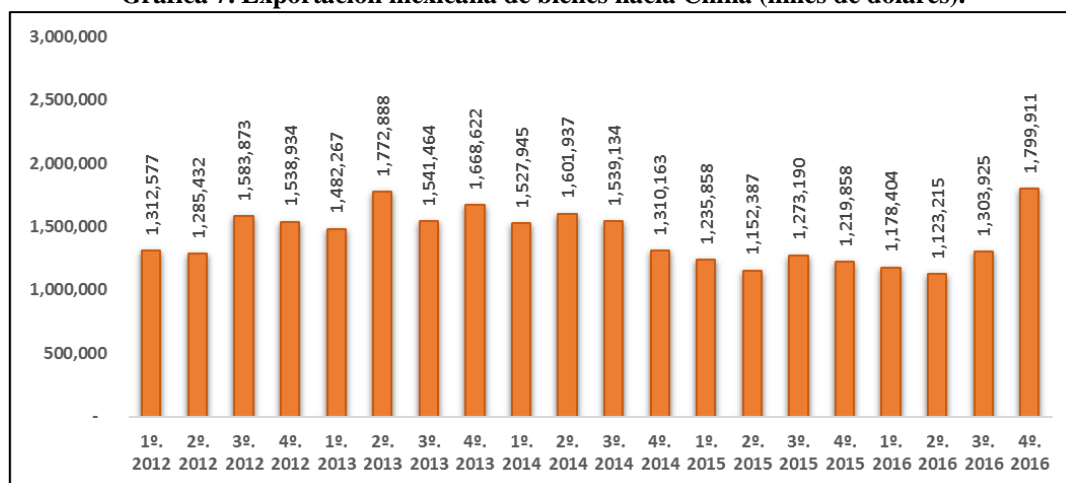
Nota\*: representa el promedio de la exportación cuatrimestral de la información analizada.

Nota\*\*: representa la cantidad máxima exportada en un trimestre de la información analizada.

Fuente: Elaboración propia.

Conservando la misma metodología descrita anteriormente, a continuación, se presenta la Gráfica 7 que concentra la exportación de México hacia China, iniciando en 2012 y hasta el último trimestre del 2016.

**Gráfica 7. Exportación mexicana de bienes hacia China (miles de dólares).**



Fuente: Elaboración propia.

Empleando las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtienen los siguientes parámetros para la distribución gamma:

$$A = \ln \mu - \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n} = 14.168 - \frac{283.159}{20} = 0.010$$

$$\alpha = \frac{1}{4A} \left[ 1 + \sqrt{\left( 1 + \frac{4A}{3} \right)} \right] = \frac{1}{(4 * 0.010)} \left[ 1 + \sqrt{\left( 1 + \frac{(4 * 0.010)}{3} \right)} \right] = 50.270$$

$$\beta = \frac{\mu}{\alpha} = \frac{1,422,599}{50.27} = 28,299.165$$

En cuanto a los parámetros para la distribución normal, las ecuaciones (4), (5) y (6) arrojaron los siguientes resultados:

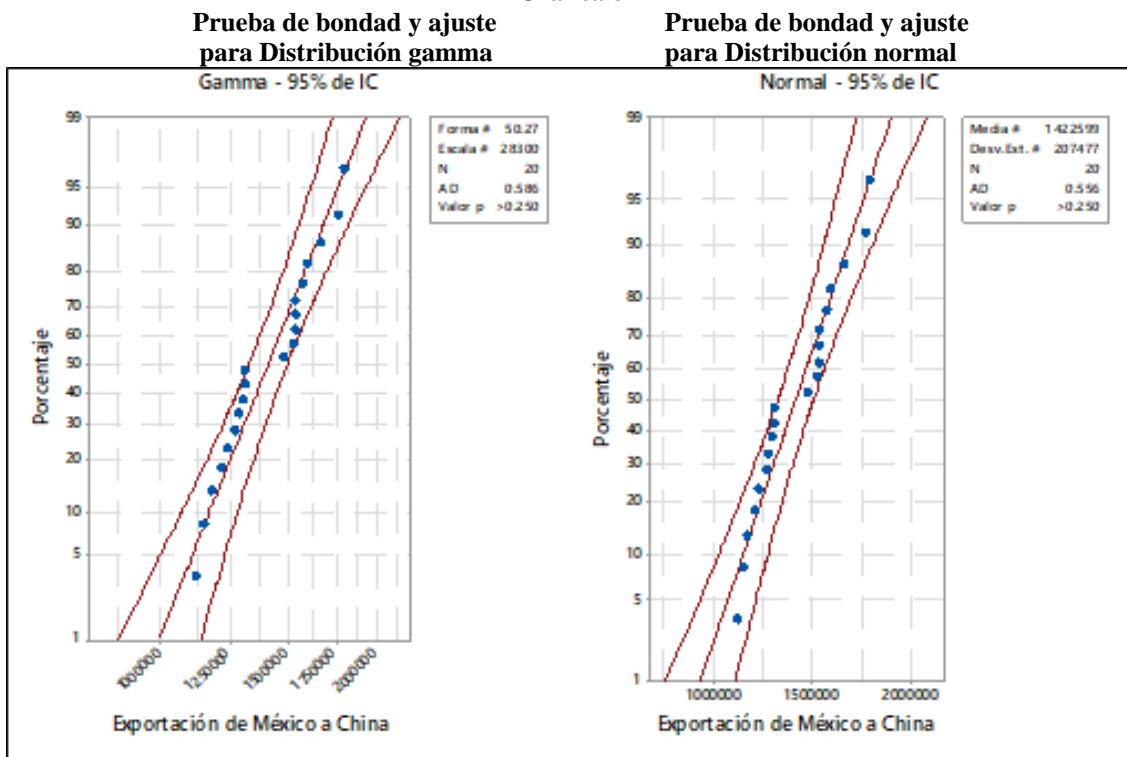
$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{28,451,984}{20} = 1,422,599.20$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n - 1} = \frac{817,887,307,941}{19} = 43,046,700,417.947$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{43,046,700,417.947} = 207,476.987$$

Con los estimados anteriores, se aplica la prueba de bondad y ajuste AD mediante la ecuación (7), presentando los resultados en la Gráfica 8.

**Gráfica 8**


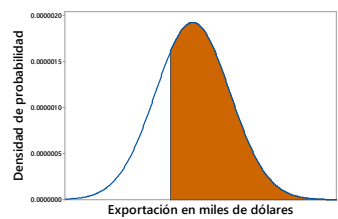


Fuente: Elaboración propia mediante Minitab 17.

Conforme a la Gráfica 8, la prueba AD resultó menor al valor crítico, para distribución gamma  $0.586 < 0.751$  por lo que se acepta como método para obtención de probabilidades; en el caso de la distribución normal resultó  $0.556 < 0.751$  por lo que también es un método de distribución aceptado para obtención de probabilidades.

A continuación, se presenta la Tabla 2<sup>8</sup> considerando diferentes importes para la exportación desde México a China:

**Tabla 2. Exportación a China desde y en adelante (miles de dólares).**

Miles de dólares	Probabilidad Gamma (cola derecha)	Probabilidad Normal (cola derecha)
		
<b>1,422,599*</b>	48.12%	50.00%
1,472,599	38.47%	40.48%
1,522,599	29.67%	31.49%
1,572,599	22.08%	23.48%
1,622,599	15.86%	16.75%
1,672,599	11.01%	11.41%
1,722,599	7.39%	7.41%
1,772,599	4.80%	4.58%
<b>1,799,911**</b>	3.74%	3.45%
1,849,911	2.31%	1.97%
1,899,911	1.39%	1.07%
1,949,911	0.81%	0.55%
1,999,911	0.46%	0.27%
2,049,911	0.25%	0.12%
2,099,911	0.14%	0.05%
2,149,911	0.07%	0.02%
2,199,911	0.04%	0.01%
2,249,911	0.02%	0.00%
2,299,911	0.01%	0.00%

Nota\*: representa el promedio de la exportación cuatrimestral de la información analizada.

Nota\*\*: representa la cantidad máxima exportada en un trimestre de la información analizada.

Fuente: Elaboración propia.

## 7. Resultados obtenidos.

Para cada uno de los mercados analizados se inició en un primer ensayo con el promedio que México exportó en un trimestre, desde 2012 y hasta 2015 agregando en los siguientes renglones o ensayos \$50,000,000 de dólares, que representan cantidades que eventualmente necesitara cubrir México debido a políticas comerciales proteccionistas de los EE.UU., las probabilidades obtenidas para continuar exportando al menos el promedio trimestral. En el caso de la UE fue de 48.86% en distribución gamma y como era de esperar del 50% para distribución normal; en cuanto a China se obtuvo que el promedio de la exportación puede permanecer para un siguiente trimestre en 48.12% mediante distribución gamma y el 50% por distribución normal.

Al incrementar la exportación a distintos niveles se observa que, por la característica de la distribución gamma con sesgo positivo, las probabilidades para que cada mercado pudiera importar más productos desde México fueron mayores en este tipo de distribución que las

<sup>8</sup> La Tabla 2, en su primer renglón considera, señalada con un asterisco, la exportación trimestral promedio, posteriormente se va incrementando el importe para cada renglón a razón de 50,000,000 de dólares (la tabla expresa cifras en miles); la cantidad señalada con dos asteriscos representa la máxima exportación registrada en un trimestre la cual, en los siguientes renglones se va incrementando también a razón de 50,000,000 dólares para conocer la probabilidad de que el mercado de la UE pueda adquirir más mercancía desde México.

obtenidas por distribución normal, por ello en los renglones que representan la mayor exportación registrada en un trimestre, en el caso de la UE que alcanzó la cantidad de \$5,692,174,000 dólares, el que se volviera a registrar exportación a partir de esa cantidad, tendría una probabilidad de 6.15% por distribución gamma y de 6.09% por distribución normal; en cuanto a los resultados para que China continúe exportando su máximo trimestral registrado de \$1,799,911,000 o más, alcanzó 3.74% por gamma y 3.45% mediante distribución normal.

Ahora bien, al incrementar las cantidades máximas hasta ahora registradas en un trimestre, en los ensayos en que se aumentaron inicialmente \$50,000,000 de dólares al máximo histórico, resultó que, para que la UE importara de México a partir de \$5,742,174,000 dólares, alcanzaría mediante gamma la probabilidad de 4.96% y mediante distribución normal solo 4.83%. En cuanto a China, el primer agregado de \$50,000,000 dólares a su máximo histórico trimestral, arrojó que para que importara desde México una cantidad a partir de \$1,849,911,00 dólares, la probabilidad gamma sería de 2.31% y en distribución normal de solo el 1.97%.

En los siguientes ensayos que implicaron agregar a los máximos históricos cantidades desde \$100,000,000 de dólares, las probabilidades descienden gradualmente, iniciando para la UE en 3.96% y 3.78% para cada distribución, pretendiendo exportar a partir de \$5,792,174,000 y en cuanto al análisis del mercado de China se podría esperar probabilidades de 1.39% para gamma y de 1.07% en normal para que importara \$1,899,911,000 dólares; en los siguientes ensayos con mayores incrementos, las probabilidades obtenidas para ambas distribuciones disminuyeron hasta prácticamente cero.

## **8. Conclusiones.**

Después de observar la clara dirección de las exportaciones de bienes desde México hacia el mundo, es y ha sido clara la dependencia hacia ciertos destinos, entre estos EE.UU., Canadá, países de la UE y China. No obstante, después de más de 20 años, al estar en riesgo las ventajas del TLCAN por cambios en políticas comerciales de la administración del Presidente Donald Trump, que incluso pudieran llevar a la cancelación del TLCAN, provoca que de manera recurrente surjan opiniones acerca de la urgente necesidad de México para diversificar su actual colocación de bienes en el extranjero, procurando obtener mejor provecho de todas las condiciones comerciales con otros países o regiones, nombrando entre éstas opiniones a la UE, por el amplio tratado comercial que se tiene desde el año 2000 y a China, por su gran dinamismo y crecimiento económico.

Por lo anterior, al desarrollar este trabajo se buscó atender el objetivo general, estimando las probabilidades para conocer, en caso de que las políticas comerciales de EE.UU. obligaran a cambiar el destino de los productos mexicanos, con cuántas posibilidades formalmente estimadas, se podría realmente argumentar que ya fuese hacia la UE o hacia China, México lograra colocar, además de las cantidades de exportación hasta ahora observadas, un mayor importe en millones de dólares, iniciando con \$50,000,000 de dólares adicionales a partir del promedio trimestral e inclusive, por encima del máximo importe registrado en un trimestre. Pudiendo decir que los resultados no son precisamente halagadores ya que tan solo en pensar conservar los promedios de exportación, para ambos casos analizados y como era de esperar, las probabilidades se encuentran cercanas al 50%.

Pero quizá lo que refleje una mayor urgencia de atención es que sin duda, de requerir fortalecer un mercado destino para las exportaciones mexicanas, éste deberá ser Europa por dos razones sustanciales. La primera es que es un mercado con Tratado en materia comercial vigente y en proceso de consolidación pero, además, las probabilidades obtenidas para lograr consolidar una mayor cantidad de exportación son mucho más convenientes que con respecto a China, tan solo pensar en la posibilidad para continuar exportando a partir del máximo importe trimestral registrado en la UE que alcanzó \$5,692,174,000 dólares, se tendrían probabilidades de entre 6.09% mediante distribución gamma y de 6.15% por distribución normal.

## Referencias

- Agosín, M., Fernández-Arias, E., Jaramillo, F., & Lora, E. (2015). *Realidad Macroeconómica Latinoamericana. Módulo I. Las restricciones a la inversión privada y el crecimiento*. USA: Banco Interamericano de Desarrollo. Recuperado de [https://indesvirtual.iadb.org/pluginfile.php/45725/mod\\_resource/content/1/MODULOS/Modulo\\_I\\_.pdf](https://indesvirtual.iadb.org/pluginfile.php/45725/mod_resource/content/1/MODULOS/Modulo_I_.pdf)
- Anderson, T., & Darlin, D. (1952). Asymptotic Theory of Certain "Goodness of Fit" Criteria Based on Stochastic Processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23(2), 193-212.
- Ang, A., & Willson, T. (2007). *Probability Concepts in Engineering. Emphasis on Applications on Civil and Environmental Engineering*. USA: John Wiley and Sons, Inc.
- Arroyo, I., Bravo, L., Llinás, H., & Muñoz, F. (2014). Distribuciones Poisson y Gamma: Una discreta y continua relación. *Prospect* 12(1), 99-107. Recuperado de <http://www.scielo.org.co/pdf/prosp/v12n1/v12n1a12.pdf>
- Bacaria, J., Osorio, M., & Artal, A. (s.f.). Evaluación del Acuerdo de Libre Comercio México - Unión Europea.
- Banco Interamericano de Desarrollo (2010). *La era de la productividad: cómo transformar las economías desde sus cimientos. Desarrollo en las Américas (DIA) 2010*. Chile: BID - Fondo de Cultura Económica. Recuperado de <https://publications.iadb.org/handle/11319/4478?locale-attribute=es>
- Blyde, J. (2014). *Fábricas Sincronizadas: América Latina y el Caribe en la Era de las Cadenas Globales de Valor*. USA: Banco Interamericano de Desarrollo. Recuperado de <https://publications.iadb.org/handle/11319/6668>
- Cruz, J. (03 de 04 de 2017). *Sitio del Instituto Mexicano de Ejecutivos en Finanzas IMEF*. Recuperado de Conferencia IMEF. Capítulo 1. Desempeño Histórico 1914-2004. Ponencia: Estabilidad y Crecimiento. Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas: <http://imef.org.mx/ponencia/2005/PONENCIAIMEF.pdf>
- Curzio, L. (2004). La integración en Norteamérica y la experiencia de Europa. En Roy, J., Chanona, A., & Domínguez, R. *La Unión Europea y el TLCAN: Integración Regional Comparada y Relaciones Mutuas*. (Primera ed., pp. 159-182). México: UNAM.
- Franco, A. (2016). *México en 2030: Superando la Referencia. América Latina y el Caribe 2030: Escenarios futuros. Atlantic Council / BID / Centro Frederick S. Pardee for International Futures*. USA: Banco Interamericano de Desarrollo. Recuperado de <https://publications.iadb.org/handle/11319/7978>

- Frontini, G., & Bonnefoy, P. (03 de 03 de 2017). Relaciones comerciales entre la UE y México. En e. Solana, *México: un destino natural y estratégico* (págs. 101-120). España: Santander - Universidad de Nebrija. Recuperado de [http://biblioteca.cunef.edu/gestion/catalogo/doc\\_num.php?explnum\\_id=1183](http://biblioteca.cunef.edu/gestion/catalogo/doc_num.php?explnum_id=1183)
- Giordano, P., & Ramos, A. (2016). *Cambio de marcha: América Latina y el Caribe en la nueva normalidad del comercio*. "Monitor de Comercio e Integración 2016". USA: Banco Interamericano de Desarrollo. Recuperado de <https://publications.iadb.org/bitstream/handle/11319/7942/Monitor-de-Comercio-e-Integracion-2016-Cambio-de-marcha-America-Latina-y-el-Caribe-en-la-nueva-normalidad-del-comercio-global.pdf>
- International Trade Centre. (28 de 03 de 2017). *Trade Map - International Trade Statistics*. Recuperado de [http://www.trademap.org/tradestat/Country\\_SelProductCountry\\_TS.aspx?nvpm=3|484|||TOTAL||2|1|1|2|2|1|2|1|1](http://www.trademap.org/tradestat/Country_SelProductCountry_TS.aspx?nvpm=3|484|||TOTAL||2|1|1|2|2|1|2|1|1)
- Jenkins, R. (2016). *Estado del arte sobre las relaciones con China. Made in CHI-LAT: Claves para renovar la convergencia entre Latinoamérica y China. Integración y Comercio*. USA: INTAL - Banco Interamericano de Desarrollo.
- Khodabin, M., & Ahmadabadi, A. (2010). Some properties of generalized gamma distribution. *Mathematical Sciences*, 4(1), 9-28. Recuperado de [http://www.sid.ir/EN/VEWSSID/J\\_pdf/1010720100102.pdf](http://www.sid.ir/EN/VEWSSID/J_pdf/1010720100102.pdf).
- Lora, E., & Pagés, C. (2011). *La Realidad Macroeconómica. Módulo 2*. USA: Banco Interamericano de Desarrollo. Recuperado de [https://indesvirtual.iadb.org/pluginfile.php/45726/mod\\_resource/content/0/MODULOS/Modulo\\_II.pdf](https://indesvirtual.iadb.org/pluginfile.php/45726/mod_resource/content/0/MODULOS/Modulo_II.pdf)
- Marczak, J., Engelke, P., Bohl, D., & Saldarriaga, A. (2016). *América Latina y el Caribe 2030: Escenarios futuros*. USA: Atlantic Council/BID/Centro Frederick S. Pardee for International Futures. Recuperado de <https://C:/Users/74999/Downloads/LAC2030-America-Latina-y-el-Caribe-2030-Escenarios-futuros.pdf>
- Monserrat, H., & Chávez, M.F. (2003). Tres modelos de política económica en México durante los últimos sesenta años. *Análisis Económico*, XVIII(37), 55-80.
- Myers, M. (2016). *Una nueva era de reformas. Made in CHI-LAT: Claves para renovar la convergencia entre Latinoamérica y China. Integración y Comercio*. USA: INTAL - Banco Interamericano de Desarrollo.
- Ortiz, A. (2014). La política comercial de México a lo largo de dos décadas del TLCAN: una visión crítica. En A. Ortiz, *TLCAN 20 años: ¿Celebración, desencanto o replanteamiento?* (pp. 133-155). México: México: UNAM / Instituto de Investigaciones Jurídicas.

- Pastor, R. (2014). El futuro de México en América del Norte: su tercer desafío. En A. (. Oropeza, *TLCAN 20 años ¿Celebración, desencanto o replanteamiento?* (Primera ed., pp. 357-374). México: UNAM / Instituto de Investigaciones Jurídicas.
- Pomory, C. (2006). A note on calculating P values from 0.15–0.005 for the Anderson-Darling normality test using the F distribution. *Journal of Applied Statistics*, 33(4), 461-462. Recuperado de <http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/02664760600677720>
- PROMEXICO. (16 de 03 de 2017). *PROMEXICO Comunicación*. Recuperado de <http://www.promexico.mx/documentos/infograficos/mexico-in-the-world-2015.pdf>
- Ramírez, J. (2014). *La competencia Estados Unidos-China: El Trans-Pacific Partnership Agreement vs el Acuerdo de Libre Comercio China-Corea-Japón. Políticas Institucionales de Integración Regional*. México: El Colegio de México.
- Sehgal, S. (2010). The Evolution of NAFTA. *India Quarterly: A Journal of International Affairs*, 66(3), 303-316. Recuperado de <http://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/097492841006600305>
- Shearer, M., & Tres, J. (2016). *Nuevas tendencias en los tratados comerciales en América Latina. Módulo I. ¿Qué son los acuerdos comerciales y cuál es su importancia?* USA: Banco Interamericano de Desarrollo.
- Stephens, M. (1979a). *The Anderson-Darling Statistic*. Stanford, USA: Department of Statistics, Stanford University. Recuperado de <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a079807.pdf>
- Stephens, M. (1979b). *The Anderson-Darling Statistic. Technical Report Num. 39*. USA: Department of Statistics, Stanford University.
- Thom, J. (1958). A note on the gamma distribution. *Monthly Weather Review*, 86(4), 117-122.
- Torres, B., & Vega, G. (2010). *Los Grandes Problemas de México Vol. XII Relaciones Internacionales*. México: El Colegio de México.
- Vega, G. (2011). El Tratado de Libre Comercio México Unión Europea (TLCUEM) Una evaluación a diez años. En E. Tremolada, *¿Europa: un marco de oportunidades?* (pp. 127-178). Colombia: Universidad Externado de Colombia.
- Vega, G. (2014). *México y Estados Unidos. La Economía Política del Libre Comercio. Antología, 1*. México: El Colegio de México.
- Villareal, R. (2004). *México en su laberinto ¿Cómo replantear el modelo económico en una era post TLCAN?* En *TLCAN 20 años ¿Celebración, Desencanto o Replanteamiento?* México: UNAM.

Wackerly, D., Mendenhall, W., & Scheafer, R.L. (2010). *Estadística Matemática con aplicaciones*. México: Cengage Learning.





## The Effect of Audit Committee and Board of Directors Characteristics' on Audit Fees and Internal Control Quality in Iran

SALEHI, MEHDI

Department of Accounting  
Ferdowsi University of Mashhad (Mashhad, Iran)  
Correo electrónico: mehdi.salehi@um.ac.ir

RASHIDI SOORESTANI, NOMAN

Department of Accounting  
Imamreza International University of Mashhad (Iran)  
Correo electrónico: nomanrashidy@yahoo.com

### ABSTRACT

This study investigates the effect of characteristics of board of directors and audit committee strength on audit fees internal control quality.

In this study, 84 companies listed on the Tehran Stock Exchange were evaluated from 2014 to 2016. Panel regression model and panel logistic regression model were used for testing hypotheses related to audit fees and the weaknesses of internal control quality, respectively.

Results showed that there is no significant relationship between the authority of board of directors and audit committee and the independence board and audit committee expertise and internal control quality weakness and also between the board power and audit fees. There is a significant relationship, however, between the board independence and audit committee authority, expertise, as well as the audit fees. Furthermore, results indicated that there is no significant relationship between board effort and audit fees and internal control quality weakness.

**Keywords:** audit fees, internal control quality, board of director, audit committee.

**JEL classification:** D21; G32; L21.

**MSC2010:** 91G50; 91G80; 91G99.

# El efecto de las características del Comité de Auditoría y de la Junta Directiva sobre los honorarios de auditoría y la calidad del control interno en Irán

## RESUMEN

Este estudio investiga el efecto de las características de la fortaleza de la junta directiva y del comité de auditoría sobre la calidad del control interno de los honorarios de auditoría.

En este estudio, un total de 84 empresas que cotizan en la Bolsa de Teherán se evaluaron de 2014 a 2016. El modelo de regresión de panel y el modelo de regresión logística de panel se utilizaron para probar hipótesis relacionadas con los honorarios de auditoría y las debilidades de la calidad del control interno, respectivamente.

Los resultados mostraron que no existe una relación significativa entre la autoridad de la junta directiva y el comité de auditoría y la experiencia de la junta de independencia y del comité de auditoría y la debilidad de la calidad del control interno y también entre el poder de la junta y los honorarios de auditoría. Sin embargo, existe una relación significativa entre la independencia de la junta y la autoridad del comité de auditoría, la experiencia y los honorarios de auditoría. Además, los resultados indicaron que no existe una relación significativa entre el esfuerzo de la junta y los honorarios de auditoría y la debilidad de la calidad del control interno.

**Palabras clave:** honorarios de auditoría, calidad de control interno, junta directiva, comité de auditoría.

**Clasificación JEL:** D21; G32; L21.

**MSC2010:** 91G50; 91G80; 91G99.



## 1. Introducción.

Carcello, Hermanson, Neal and Riley (2002) described the audit fee as the reflector of economic costs of competent auditors and declared from the auditor point of view that auditors, by balancing the costs of their available resources (costs of performing more audit) and their future losses due to legal debts, seek for a way to minimize total costs. More auditing process will decrease the chance of probable loss by auditors and represent the volume of audit operation, which minimize the total costs. One of the most important factors affecting the amount of audit fee is the board power. Historically, negotiation on audit fees has always been faced with a concern that auditors are more inclined to play managerial roles instead of supporting the capital market (BRC, 1999; SEC, 2003). Some rules were established to restore the investors' trust to financial statements and the audit committee is directly responsible for the determination of the external auditor fees (SOX, 2002).

However, some auditors reported that management will continue its monitoring role, though the audit committee is legally in charge such a function (Cohen, Krishnamoorthy & Wright, 2010). Therefore, in case we assume that the audit committee has the limit of managerial influence during audit fee negotiation, the current rules may give a false confidence to the investment. We compare the power and influence of the board and audit committee on the audit fees by presenting an approach concerning the urgency of legal liability of audit fee for the audit committee. Moreover, any alteration in fees will be assessed along with the inflation process, in that the influence of audit committee and the board could be realized more easily during this period by an ongoing test. Inflation is introduced as an external shock and, at the same time as an incompatible pressure to audit fees negotiations. Contracts that lead to the decline of economic profit are known as pressure to the decrease of expenses (Cheffers and Whalen, 2011; Christensen, Omer, Sharp & Shelley 2013; Ettredge, Fuerherm & Li, 2014; Reason, 2010a).

In most cases, the decrease of economic profit as a result of increase in the risk of bankruptcy, probable increase of potential earning of management, and decrease of internal controls could heighten the audit risk (Kane, Richardson & Graybeal 1996; ACFE, 2009; Das, Shroff & Zhang, 2009). The high risk of auditing asks for more auditing efforts and this is the indicative of the increasing pressure to heighten the audit fee (Bedard & Johnstone, 2004; Christensen et al., 2013; Doogar, Rowe & Sivadasan, 2013). The bargaining power of the board representative and the audit committee in negotiations for the audit fee is the ability of auditor in salary and insurance or denying the auditor (Moore, Tetlock, Tanlu & Bazerman, 2006). However, the more the bargaining power of each board representative or audit committee member the higher the chance of being accepted. Other features of an audit service applicant, including the size, financial situation, complexity and the like contribute to the audit fee (Simunic, 1980; O'Keefe, Simunic & Stein, 1994; Bédard & Johnstone, 2004). Study investigates how the board and audit committee power could affect the audit fee and uses other effective factors on fee as controlling items in model. Internal controls in firms are related to assessment of reliability of firms' financial statements and assessing the achievement of strategic goals and firm operation and also assess the ability performing the firms' rules. Internal controls at company level comprise the evaluation of financial report reliability, strategic objectives and company operations availability, as well as rules and regulations performance ability. Internal control is an integral section of a company management, which includes programs, methods and procedures of the organization in achieving its mission and its micro and macro goals (Standards for Internal Control in the Federal Government, 1999). Section 404 of Sarbanes-Oxley Act (U.S. House of Representatives, 2002) obligated auditors to comment about the effectiveness of firms' internal controls on financial statements (ICFR) to be ensured that the financial reporting policies and financial statement designing procedures are reliable. The aim of report (ICFR) is to inform the users of financial statements about any faults in firms reporting system for producing financial statements (PCAOB, 2004). Special aspects of corporate governance including institutional ownership, auditor selection and audit committee independence are related to probability of receiving brief internal control comments (Ashbaugh-Skaife, Collins & Kinney, 2007; Krishnan, 2005; Zhang, Zhou & Zhou, 2007).

Lack of study on the variety of boards is surprising, in that the board is on the head of an organizational, monitoring, and controlling system (Fama & Jensen, 1983). Therefore, some board

characteristics may be connected to internal control quality. Since the power of internal control has a significant relationship with management philosophy, biased managers are interested in designing and using of weaker internal control system and abuse weak points of internal control systems to invest in high risk projects (Ogneva, Subramanyam & Raghunandan, 2007). Furthermore, Fernández and Arrondo (2005) reported an indirect relationship between managerial ownership and foreign managers' proportion, which shows the reduction of monitoring function of foreign managers on internal control systems with bias increase. This study investigates how the board power contributes to internal control quality and uses other effective factors as controlling items.

## **2. Theoretical framework, related studies and hypotheses development.**

In past, most managers preferred the foreign auditors and negotiated for the audit fee with them (BRC, 1999). Under such circumstances, the main concern is that if managers control the fees, auditors may not be motivated for an impartial audit. Hence, we need a method and regulations to transfer the controlling responsibility of foreign auditors from management to the audit committee. Since 1990, BRC declared that the audit committee is in charge of foreign auditor but said nothing about the fee (BRC, 1999). In 2000, SOX completed BRC's recommendation and assigned the responsibility of setting companies' audit fee to the audit committee (SOX, 2002, section 301-2). SEC delegated the final responsibility to the audit committee, caused the interests of foreign auditors to be in line with the corporate shareholders, and elevated the trust of stock buyers to auditors' independence (SEC, 2003).

Although SOX revolved the final right of negotiation responsibility and determination of foreign auditors to the audit committee, these rules may not be sufficient to nullify the organizational contracts and the relationship between the auditor and the board (Doty, 2011). Therefore, the board could affect and decide on the audit fee through unscheduled meetings or informal negotiation sessions with the audit committee (Cohen et al., 2010). As a controlling tool in the company, the board combination is the determinant of board power. Thus, board combination is an important factor to explain members' ability to do their duties and to improve company performance. The board combination is measured by the portion of unbounded managers. The unbounded member of the board has no executive position. Unbounded members of the board help the controlling and supervising measures of the executives and decrease company representative costs. Independent boards purchase high quality audit services in order to protect the capital, reputation, avoiding of legal debt, and protecting shareholders interest. Hence, high quality boards seek for high quality audit and increased audit efforts to protect the interests of management and shareholders (Leventis & Dimitropoulos, 2010). By casting a closer look, we can see that internal control is a useful tool to solve many potential problems (Baltaci & Yilmaz, 2006). Primary investigations (Ashbaugh-Skaife et al., 2007) substantiate the relationship between weak points and the characteristics of a company, complexity, organizational changes, size, profitability, and resource investment.

A possible supervisory mechanism is corporate internal control system. McMullen et al. (1996) presented two reasons why internal control report by management can improve internal controls that both reasons could be evaluated with supervision mechanism and could decrease company's Agency cost. Firstly, such an internal control reporting could increase the top management to the internal control of company, which in turn draws the attention of top management toward the internal control system as a whole. Secondly, the internal control reporting could cause a better internal control.

### **2.1. The power of audit committee.**

Galinsky, Magee, Gruenfeld, Whitson and Liljenquist (2008) declared that power is an exclusive feature of penetration, in that it is penetrating into actions or controlling. Some studies concluded that in line with demands for extra efforts of auditors, there is a positive relationship between audit fee and audit committee expertise (Carcello et al., 2002; Abbott, Parker, Peters & Raghunandan, 2003; Vafeas & Waagelein, 2007; Hay, 2013). However, Krishnan and Visvanathan (2009) stated such a relationship is negative and inverse for companies with high earning management risk, which is in accordance with audit committee demand for more attempt to detect the risk. Griffin et al. (2008) and Bedard and

Johnstone (2004) found in common that there is a mutual effect between audit risk and long-term supervisory corporate predictions.

In past, selecting an external auditor and negotiating about audit fee was among the management duties (BRC, 1999). Such a perspective affected auditors' motivation and independence. However, the problem would be about the influence of the board power of on the audit fees.

According to investigations, no study has been conducted on the effect of the board power on audit fee in inflation conditions. Carcello et al. (2002) studied the board characteristics and audit service fees. One of the most important factors affecting the amount of audit fee is the board power. Regarding the negotiation records of audit service fee by management, there is a doubt that instead of being the advocates of the capital market, auditors in most companies are a managerial tool committee (BRC, 1999; SEC, 2003). Dao, Raghunandan and Rama (2012) investigated the effect of shareholders' opinions on auditor selection, audit service fee, and audit quality. Audit Committee has periodical relation with auditors and the board faces longer audit process, instead (Knechel, 2007; Hellman, 2011). Therefore, the financial board could affect the services fee through the confirmation of direct negotiations or formal interactions with audit committee (Cohen et al., 2010). McCracken et al. (2008) concluded that even after the SOX statement, the board continued its penetration whether to choose, retain, or dismiss the auditors.

Cohen et al. (2010), Fiolleau et al. (2013) and Dhaliwal et al. (2014) came to the same conclusion, as well. Harris (2008) and Reason (2010b) carried out studies about the role of the board in determining the audit fee and concerning the board penetration concluded that the board could affect the audit fee using a set planned professional negotiation sessions. Contracts, which cause the economic profit to be decreased were known as pressure for to cut expenses (Cheffers & Whalen, 2011; Christensen et al., 2013; Ettredge et al., 2014; Reason, 2010a). Most of the time, the decrease of economic profit could cause the increase of auditing risk through increasing the risk of bankruptcy, the potential earnings of management, and decreasing the internal control (Kane et al., 1996; ACFE, 2009; Das et al., 2009). The risk of high quality auditing calls for more auditing attempt and this requires more pressure to heighten the audit fees (Bedard & Johnstone, 2004; Christensen et al., 2013; Doogar et al., 2013). By considering the conducted research studies and importance of the board function, we supposed that the more powerful the board, the lower audit cost would be set. So, the first hypothesis is postulated as following:

H1: There is a significant relationship between board member powers' and audit fees.

Tsui et al. (2001) declared that there is a negative relationship between the audit cost and board independence. Chan et al. (2013) investigated the influence of audit committee independence and the board members on audit service fees. Carcello et al. (2002) stated that one of supervisory tools to decrease representative problems between managers and owners is to employ unbounded board members. The unbounded members are professional managers specialized in decision control. Such managers purchase high quality audit services to protect the capital, reputation, their own and shareholders' interest and to avoid legal debts. Furthermore, Ramdani and Witteloostuijn (2010) concluded that the more independent managers could do the managerial supervision tasks more effectively.

Leventis and Dimitropoulos (2010) investigated the pricing system of audit, earning quality and board independence services for 97 companies which the result showed that there is a position relationship between auditing independence and the pricing of audit services. Moreover, there is a positive relationship between the pricing of audit services and earning management and these results are for smaller companies. We expect that the unbounded managers be more inclined toward high quality audits and this would cause the audit service fees to be set at a higher level.

H2: There is a significant relationship between the independence of board members and audit fees.

Hence, by considering the abovementioned probable relationships and effects of the board on audit fee, we can explain the third hypothesis as follows:

H3: There is a significant relationship between the board effort and audit fees.

In late 1990s, BRC suggested that the final power and authority for selecting an independent auditor is the audit committee, but dictated no policy for the audit fees (BRC, 1999). In 2002, SOX modified the BRC's theory and made the audit committee totally responsible for determining audit fees (SOX, 2002). Some regulations were set to restore investor's trust to financial reports and made the audit committee is directly responsible for this purpose (SOX, 2002).

Nevertheless, some auditors express that although the audit committee is legally in charge, management is still active in controlling the auditors' relationship (Cohen et al., 2010). Thus, the current rules may establish a false trust for investors, such that the audit committee has only a restricted penetration along the negotiations on audit cost (Beck & Mauldin, 2014).

SEC governmental regulations has made the audit committee the final respondent for auditors and this would enhance their motivation and independence and could bring about more investors' trust to auditors (SEC, 2003). Zulkarnain et al. (2007) carried out a research on the functions of audit committee and its roles in selecting an external auditor and found that the committee is a medium between internal and independent auditors and is considered as the board of directors. In addition, its activities include assessing auditors' appointment, the general scope of auditing, audit results, internal financial control, and financial information to be published. Furthermore, it establishes an accounting committee in the company and casts a critical supervision on financial reports and accounting processes. In addition to selecting auditors, wage determination and retain or dismiss of auditors are among the functions of an audit committee. Therefore, audit committee reinforces auditor independence. In fact, auditor is more competent, efficient, and independent in case the audit committee is in charge for appointment and wage determination. Beasley et al. (2009) declared that within an interview sessions with audit committee members, about 31% said that most formalities of audit committee are ignored by its structure and 96% said that the audit committee serves its supervisory role. Carcello et al. (2011) said that a more powerful audit committee can decrease the audit costs by low assessment of audit risk or may increase the audit cost by asking the external audit for more attempt. Krishnan and Visvanathan (2009) obtained some documents, which claim that the audit committee is sensitive to risk. Furthermore, Brown and Wright (2008) and Dezoort et al. (2008) concluded that when the audit committee has more power it is likely to back up the auditors' stance. Accordingly, by this hypothesis we focused on the relative effects of audit committee's power on the cost of audit fee and expected that the more power of the audit committee will bring about more support of the external auditor and a higher audit fee.

H4: There is a significant relationship between power of audit committee members and audit fees.

Carcello et al. (2002), Abbott et al. (2003), Vafeas and Waagelein (2007) and Hay (2013) found that there is a positive relationship between audit fee and the specialization of audit committee in line with their request for more efforts. In contrast, Krishnan and Visvanathan (2009) conducted another research, the result of which illustrated that there is a negative relationship between audit fee and audit committee specialization, because their results were in line with low assessment of audit risk. Karim and Moizer (1996) assessed effective criteria on audit fee in Bangladesh and concluded that big companies use famous auditors, because they believe that these institutes use specialist auditors for high quality audits. Therefore, these companies are ready to pay more fees to get a better face in front of from investors.

H5: There is a significant relationship between the specialty of audit committee members and audit fees.

Jensen (1993) expressed that if executive managers induce their power to control the board, then the freedom of thought and action of all members would be influenced unfavorably and process of internal control will face serious obstacles.

The hypothesis of the probability of designing weaker internal control systems and misusing them by biased managers to raise the investment rate in unreliable and risky projects was tested (Chen and Steiner, 1999; Ogneva et al., 2007). Moreover, the hypothesis of higher motivation of experienced and older managers in performing organizational duties, like minimizing the weaknesses of internal control system was assessed, as well (Stevens et al., 1978). Since power of internal control has a significant relationship with management philosophy, biased managers are more inclined toward the establishment and use of weaker internal control systems and misuse this faulty function to invest in risky projects (Ogneva et al., 2007).

H6: There is a significant relationship between power of the board members and the weaknesses of internal control.

Fernández and Arrondo (2005) reported an indirect relationship between managerial ownership and the proportion of external managers, which is indicative of the decline of supervisory performance of external managers on internal control system with a rise in degree of biasing. In the present study, we investigate the relationship between the board specifications and different kinds of weakness points in internal control systems and their severity, which is the main subject of recent studies (Hoitash et al., 2011; Ogneva et al., 2007). Previously, U.S executive managers had special an ability to attract external managers and obedient internal managers in their board (Thomas, 2004).

In this condition, a biased executive manager should compromise with the board capabilities in monitoring managerial decisions. Managerial power theory shows that the power of executive could affect the process of rewarding and the more powerful managers usually get more rewards and shares (Henderson et al., 2010). Finally, Chidambaran et al. (2010) observed that there is a direct relationship between the board communication and CEOs and probability of fraud. We can infer from the data that by decreasing the internal quality control level and corporate monitoring systems, and not using them for powerful CEOs to reach their personal interests is a possible and simple action.

Bedard (2006) conducted a study about interior control obligations related to article 302 and 404 of Sarbanes–Oxley Act of 2002 concerning the improvement of earnings quality using unexpected discretionary accruals as a measuring tool and found that such unexpected discretionary accruals are more in the year the internal control weaknesses were disclosed, because such faulty points increases management opportunism. The financial statements may have some defects for earning management through intentional distortion in discretionary accruals and by comparing the Acts 302 and 404 we could see that that the discretionary accruals are more in 302, but for companies with effective internal control report in 404 this amount was less. Generally, results indicated that the legal regulations of Sarbanes–Oxley Act for internal control could lead to the improvement of earning quality.

Daniel et al. (2008) investigated the reaction of capital market to execution of section 302 and 404 by companies and examined whether the predicted earning and additional expenses have changed after the disclosure of weak points or not. They included that section 302 presents useful information and section 404 has no significant effect on stock (share) price or the investment expenses. Chan et al. (2005) conducted a study entitled, “earning management and corporate collective return which disclose the significance of internal control weaknesses according to section 404 of Sarbanes-Oxley Act”. The purpose of their research was to examine the companies, which disclose their internal control weaknesses according to section 404. Their results showed that, their earning management is more and their return profit is less compared with other companies.

H7: There is a significant relationship between board members’ independence and the weaknesses of internal control quality.

In addition, regarding expressed relationships and probable effects of the board on internal control quality, the eighth hypothesis can be explained as follows:

H8: There is a significant relationship between the board effort and the weaknesses of internal control quality.

Krishnan (2005) studied the period when the SOX act has not been passed and the internal control problems were recorded only in K-8 and were disclosed only for companies with changing auditors. Using collected and recorded information in K-8, he concluded that independent audit committee and audit committee with more financial specialization are more probable to have less internal control problems (Krishnan, 2005). Regarding the importance of internal controls and since internal controls are applied under audit committee's supervision and affect the company functionality, so it is expected that the power and features of audit committee and the board affect the internal controls quality.

H9: There is a significant relationship between the power of audit committee and weaknesses of internal controls quality.

Audit committee quality, certain or more financial expertise particularly, financial or nonfinancial accounting expertise are among the important factors of internal control weaknesses (Zhang et al., 2007). To improve the effectiveness of audit committee, the BRC committee recommended that each audit committee should have at least a member with financial expertise and this could emphasize on the significance of knowledge and expertise of the financial committee. In section 407, the SOX states that companies should disclose the financial expertise of their audit committee members through the periodical reports and if there is no such specialties, they should explain why, because such information is important to confront the complexity of financial reporting (Kalbers & Fogarty, 1993) and to decrease probability of representing financial reports (Abbott, Parker & Peters, 2004). Furthermore, DeZoort and Salterio (2001) concluded that audit committee members with more financial expertise could better understand the auditors' view and support the auditor in his/her confrontation with management opinion on non-expert members of the committee. Zhang et al. (2007) investigated the relationship between audit committee quality, auditor independence, and disclosure of weak points of internal control after the provision of Sarbanes-Oxley act. They classified several samples of companies with internal control defects based on type of industry, size and corporate performance and compared the items with that of companies with no defects, then evaluated each factor of audit committee quality and auditor independence for each company. Their results showed that there is a relationship between audit committee quality, auditor independence, and weaknesses of internal control. Most of the classified companies as companies with weak points of internal control have less experienced audit committee members. Additionally, most classified companies with internal control defects enjoy auditors that are more independent. Most companies that have changed their auditors recently, have weakness points, as well. Therefore, regarding the conducted studies we concluded that the more the audit committees with financial expertise, the higher the quality of the internal control.

H10: There is a significant relationship between the expertise of audit committee members and weakness of internal control quality.

Asthana and Boone (2012) conducted a study about auditing unnatural costs and audit quality (Ge & McVay 2005; Doyle, Ge & McVay, 2006) and concluded that a weak internal control of material is more probable for small, unprofitable, complex and growing corporates. Doyle, Ge and McVay (2007) studied whether such important weak points of internal control are more common in smaller, newly established, financially weak, or growing companies or not. They also evaluated to see whether such factors are different at account or corporate level or not and which suffers from the weak point more. They concluded that internal control problems are more serious in newly established companies, which are financially weak, while weak points of internal control are less at account level and these companies are safer in terms of financial operations. Ge and McVay (2005) found that disclose their major defects in internal control due to the obligations of Sarbanes-Oxley Act are more complicated, smaller, and less profitable. Doyle et al. (2007) confirmed the results of Ge and McVay (2005) also showed that companies with weak internal control are younger, growing, or reorganizing. Ashbaugh et al. (2007) came to the same conclusion showed that companies with major defects in internal control have more complicated operations and have been recognized recently and also the audit risk of these companies



(systematic risk) indicates an increasing trend and they have less financial sources for investment in internal control. Hermanson, Ivancevich and Ivancevich (2008) revealed that market reaction is negative to main defects of internal control, which are disclosed in accordance with the regulations of section 302 of Sarbanes-Oxley Act.

### **3. Research Methodology.**

The aim of present study is to investigate the impact of audit committee power and the board of directors on audit fee and the weakness of internal control quality in companies. Accordingly, some financial variables are diagnosed as to the employed model. The statistical population of present study is listed companies in Tehran stock Exchange from all industries from 2014 to 2016. Sample of the study regarding the title is elimination sampling, through which the selected companies with respect to limitations listed companies on Tehran stock Exchange with the following specifications:

1. Companies should not be affiliated with banks, holdings, financial intermediaries. This is because such companies are different from other companies in terms of nature of activities and the classification of financial statement items.
2. Company's transactions should not be stopped completely during the research period (company's symbol excluded from the exchange).
3. Companies should be listed on the Tehran Stock Exchange at least from 2014.
4. All required data should be accessible during the time of research.
5. Considering the above said conditions, a total of 84 countries were selected, which indicates the actual statistical population.

#### **3.1. Method of data collection and data analysis.**

In this paper, to collect the experimental data and to test the research hypotheses, data related to in/dependent and control variables were gathered from audited financial statements of companies listed on Tehran Stock Exchange and are available at Kadul Website (comprehensive information system for publishers). Other related data were collected from social network of stock exchange and capital market and the official website of Tehran Stock Exchange, and in some cases from informational banks of Tehran Stock Exchange (IranBors, TadbirPardaz, and NovinRahavard Softwares). To make the required computations, the collected data were transferred to Excel Software to finalize the research variables based on the computational formula and to analyze final data in R software version 3,1,1. Before testing the hypotheses and final model fitting, we investigated the descriptive statistics (central and dispersion indices, namely mean, median, standard division of variation range) and research variables.

### **4. The results.**

#### **4.1. Descriptive Statistics.**

Descriptive findings of this research including mean, median, standard of division, minimum and maximum observations are illustrated in the following Table. It is worth mentioning that the number of companies under study presented in Table 1.

Considering the results of the Tables 1 and 2, the mean of internal control quality weakness is 0.33, which means that 33 percent of corporate structures suffer from internal control weakness. Moreover, unbounded managers account for 63 percent of board members. The variable of financial expertise of audit committee members shows that on average, 84 percent audit committee members have financial expertise. Financial restatements indicate that on average, 96 percent of companies represented their financial statements. In addition, 23 percent of companies were audited by famous auditors.

**Table 1. The Descriptive statistics of the study.**

Variable	Year-firm	Symbol	Average	Mean	St.d	Min	Max
The natural log of audit fees	252	LN_FEES	6.746	6.660	0.858	3.780	9.390
Power board	252	POTENCY_CFO	0.202	0.200	0.165	0.000	0.800
Independent board members	252	BD_IND	0.629	0.600	0.226	0.000	1.000
number of meetings of the Board	252	BD_MEET	15.130	13.000	5.458	5.000	45.000
Power Audit Committee	252	POTENCY – AC	3.126	3.000	0.578	3.000	7.000
Financial expert of the Audit Committee	252	AC_ACCT_EXPERT	0.842	1.000	0.170	0.330	1.000
Inflation	252	<i>Inflation</i>	26.933	30.500	8.211	15.600	34.700
Logarithm of total sales	252	LN_SALE	13.215	13.520	1.934	1.890	18.630
Logarithm of total assets	252	LN_ASSET	13.585	13.590	1.601	9.040	19.370
LEVERAGE	252	LEVERAGE	0.707	0.670	0.372	0.200	2.950
Return on assets	252	ROA	0.153	0.110	0.183	-0.330	0.930
Operating cash flow	252	CASH_FLOW	0.047	0.030	0.061	0.000	0.460
Operational Risk	252	AR_INV	0.532	0.540	0.195	0.130	0.890
REPORTLAG	252	REPORTLAG	73.452	72.000	29.078	19.000	177.000
The number of board members	252	BD_SIZE	5.063	5.000	0.351	5.000	7.000
Male members	252	M_GE_BD	4.880	5.000	0.496	2.000	7.000
Female members	252	FEM_GE_BD	0.210	0.000	0.510	0.000	3.000

Source: Own elaboration.

**Table 2. Descriptive statistics of the study.**

Variable	Symbol	Zero		One		Total	
		Number	%	Number	%	Number	%
Quality of internal control weaknesses	CO_W	170	67	82	33	252	100
LOSS	LOSS	230	91	22	9	252	100
Foreign transactions	FOREIGN	33	13	219	87	252	100
Restatement of Financial Statements	RESTATE	0	0	252	100	252	100
Position audit firm	RESIDENCE	104	41	148	59	252	100
Audit size	BIG	194	77	58	23	252	100

Source: Own elaboration.

Model (1): processing model for hypothesis one to five

In this research, the regression method of Beck and Mauldin (2014) was employed to investigate effect of power of audit committee and the board on audit fees as follows:

$$\begin{aligned}
 \ln\_FEES = & \beta_0 + \beta_1 POTENCY\_CFO + \beta_2 BD\_IND + \beta_3 BD\_MEET + \beta_4 POTENCY\_AC \\
 & + \beta_5 AC\_ACCT\_EXPERT + \beta_6 Inflation + \beta_7 \ln\_ASSETS + \beta_8 \ln\_SALE + \beta_9 LEVERAGE + \beta_{10} LOSS + \\
 & \beta_{11} ROA + \beta_{12} CASH\_FLOW + \beta_{13} AR\_INV + \beta_{14} Ind\text{-}Code + \beta_{15} FOREIGN + \beta_{16} REPORTLAG + \\
 & \beta_{17} RESTATE + \beta_{18} RESIDENCE + \beta_{19} BIG1 + \beta_{20} BD\_SIZE + \beta_{21} M\text{-}GE\_BD + \beta_{22} FEM\text{-}GE\_BD + \varepsilon
 \end{aligned}$$

Where the independent variable of the above pattern will be defined and identified as follows:

In-FEES: natural logarithm of paid fees to auditors written in finance statements.

POTENCY-CFO: this variable indicates the power of the board. Financial expertise of the board members was considered as the criteria for measuring power and penetration and the more the financial expertise of members, the more is the power and penetration of the board.

BD-IND this variable indicates the percentage of independent board's members to all members.

We obtain such information from disclosed board data showing that several board members are bounded and some are unbounded managers.

BD-MEET: is the number of the board sessions during a fiscal year. We considered it as a criterion for measuring the extent of board efforts.

POTENCY-AC: such a variable indicates the power of audit committee.

The criterion for measuring the power and penetration of audit committee is number of committee members. We supposed that the more the number of committee members, the more its subsequent power.

AC-ACCT-EXPERT: is the number of accounting experts in audit committee, such as managers as independent auditors. The more the numbers of accounting and auditing expert of the audit committee, because of their interest in more accounting efforts, the more the audit fee would be set.

In this paper, some controlling variables are use, as well, which will be defined as follows:

Inflation: This variable indicates the inflation rate obtained from the central bank. We use this variable to indicate how much of changes in fees are resulted from changes in inflation rate.

In ASSETS: Natural logarithm of total assets.

IN SALE: Natural logarithm of total sale of company during the expected year.

LEVERAGE: Division of total debts into total assets.

LOSS: we use this variable to indicate corporate status, and if company is unprofitable and disclosed the issue, it obtains 1, otherwise 0.

ROA: Division of earnings into assets.

CASH-FLOW: A ratio of operating cash flow of company to total assets, calculated according to division of operating cash into assets.

AR-INV: This variable is achieved from sum of current assets, except for cash (accounts receivable and inventory) divided into total assets and shows the operational risk.

CODE-IND: this variable indicates kind of industry, for which the company operates.

FOREIGN: if company has international exchange we attribute one, otherwise we attribute zero.

REPORTLAG: is equal to number of days at the end of fiscal year and date of auditor's signature.

RESTATE: if company represent the financial statements we attribute one, otherwise zero.

RESIDENCE: if audited company and audit firm are in the same city, we attribute 1 otherwise 0. We set this variable because different place of company and firm would lead to the increase of audit fee and could affect the results.

BIG: If a company is audited by the audit organization, we attribute 1 otherwise 0.

BD-SIZE: is the number of board members.

M-GEN-BD: is number of male board members.

Fem-GEN-BD: IS number of female board members.

$\varepsilon_{it}$ : Random error.

#### **4.2. F Limer Test for the model related to hypothesis one to five.**

Since data analysis and hypothesis testing is taken place by the R software, after providing the required identifiable information and incorporating the data, the primary model fitting should be performed using the four common methods. These methods simple OLS method, OLS method by considering the time factor, fixed and random effects panel method. F Limer test is carried out on these four methods to:

1. Define the privileged model between OLS and fixed effects panel data. H0 hypothesis indicates that OLS is superior.

- Define the privileged model between timed OLS and fixed effects panel method. H0 hypothesis indicates that OLS is superior.

Concerning the abovementioned items, the results of F Limer test are as follows:

**Table 3. The results of F Limer (chow) test for model related to hypothesis one to five.**

Hypothesis H0	F statistic	P - Value	Result
Superiority of OLS model	4.411	0.001>	Panel model is more appropriate
Superiority of timed OLS model	4.338	0.001>	Panel model is more appropriate

Source: Own elaboration.

The results of Flimer test for the model related to research hypotheses show that the related data follow the panel method.

Hausman test for the model related to hypothesis one to five. Having finalized the use of panel data method, we need to specify whether the panel model should have fixed effects or whether it requires random effects. Therefore, we used the Hausman test, the result of which can be seen in Table 4.

**Table 4. The results of Hausman test for the model related to hypothesis one to five.**

Hypothesis H0	Chi-square statistic	P-Value	Result
Superiority of OLS model	108.437	0.001>	Fixed effects panel method is more appropriate

Source: Own elaboration.

Regarding the acceptance of null hypothesis of Hausman test, we could conclude that the method of parameter estimation is the fixed effects model.

LM test for the model related to hypothesis one to five. Prior to fitting of fixed effects model, we need to check whether we can merge time and space factors or not. Hence, we employed Lagrange Multiplier-Breusch- Pagan test (LM), the result of integrability test for the model regarding the values of Chi-square statistics deriving from Lagrange Multiplier-Breusch- Pagan test, we could conclude that the merged method of time factors is appropriate for model fitting.

Evaluating the autocorrelation of residuals. One of the features of evaluation through application of merged panel models is the absence of autocorrelation among the error terms. Breusch-Godfrey test is employed for this purpose. The results of this test on model disturbing elements, based on the R Software, are as follows:

**Table 5. The result of Breusch-Godfrey test for model related to hypothesis one to five.**

Hypothesis H0	Chi-square statistic	P-Value	Result
No serial autocorrelation among error terms	25.381	*** <0/001	serial autocorrelation is existed

Source: Own elaboration.

Since the p-value of Breusch-Godfrey test is less than 0.001, the null hypothesis of this test as to the absence of serial autocorrelation among the disturbing elements is rejected, so error terms have serial autocorrelation. The presence of serial autocorrelation among model residuals could cause a bias in model estimation. PGLM is used to resolve this problem, for better estimation of model parameters, and for the final fitting.

**Table 6. Results of final model fitting related to hypothesis one to five.**

Variable	Symbol	R <sup>2</sup>	Std Dev	t stat	P-value
Intercept	$\alpha_0$	2.509	0.973	2.578	** 0.009
Board power	POTENCY_CFO	0.209	0.243	0.862	0.388
Independent board members	BD_IND	-0.423	0.206	-2.055	*0.039
Number of meetings of the board	BD_MEET	0.005	0.008	0.606	0.544
Audit Committee Power	POTENCY_AC	-0.170	0.075	-2.252	* 0.024
Financial expert of the Audit Committee	AC_ACCT_EXPERT	0.683	0.258	2.646	** 0.008
inflation	INFLATION	-0.016	0.002	-5.857	*** 0.001>
Logarithm of total sales	LN_SALE	0.098	0.035	2.774	** 0.005
Logarithm of total assets	LN_ASSET	0.163	0.047	3.404	*** 0.001
leverage	LEVERAGE	0.097	0.109	0.883	0.377
loss	LOSS	-0.290	0.110	-2.632	** 0.008
Return on assets	ROA	-0.235	0.166	-1.415	0.157
Operating cash flow	CASH_FLOW	0.782	0.538	1.456	0.145
Operational Risk	AR_INV	0.013	0.211	0.063	0.949
Foreign transactions	FOREIGN	-0.073	0.160	-0.456	0.648
REPORTLAG	REPORTLAG	0.002	0.001	1.689	0.091
Restatement of Financial Statements	RESTATE	-0.158	0.244	-0.648	0.517
Position audit firm	RESIDENCE	0.136	0.112	1.219	0.226
Audit size	BIG	0.647	0.116	5.579	0.001>***
The number of board members	BD_SIZE	-0.113	0.299	-0.379	0.704
Male members	M_GE_BD	0.360	0.278	1.296	0.195
Female members	FEM_GE_BD	0.317	0.266	1.189	0.234

Source: Own elaboration.

Model (2) fitting model for hypothesis six to ten.

In this research, logistic regression model of Beck and Mauldin (2014) was used to evaluate the effect of audit committee and the board power on the weakness of internal control quality.

$$Co-w = \beta_0 + \beta_1 POTENCY\_CFO + \beta_2 BD\_IND + \beta_3 BD\_MEET + \beta_4 POTENCY\_AC + \beta_5 AC\_ACCT\_EXPERT + \beta_6 Inflation + \beta_7 ln\_ASSETS + \beta_8 ln\_SALE + \beta_9 LEVERAGE + \beta_{10} LOSS + \beta_{11} ROA + \beta_{12} CASH\_FLOW + \beta_{13} AR\_INV + \beta_{14} Ind-Code + \beta_{15} FOREIGN + \beta_{16} REPORTLAG + \beta_{17} RESTATE + \beta_{18} RESIDENCE + \beta_{19} BIG1 + \beta_{20} BD\_SIZE + \beta_{21} M-GE\_BD + \beta_{22} FEM-GE\_BD + \varepsilon$$

Where:

Co-w: if company shows an important weakness in its reports, we attribute one, otherwise zero. This audit report variable emphasizes on special issues regulated by auditors according to a set of presented checklists by the Stock Exchange for internal controls. In case some significant problems being explored a descriptive clause will be added in this section.

Since the above model is a type of combinational data, its appropriate estimation should be defined using the Akaic criteria (AIC). Thus, we estimate the above Logit pattern using four methods of simple Glm, time-series GLM method (only by considering the time factor), and fixed and random effects panel method and compare the AIC criteria. Each model with smaller AIC will be used as the desired and final model.

**Table 7. Results of AIC statistics for hypothesis six to ten.**

Identification Criteria	Normal Logistic model	Timed Logistic Model	Regression logistic model with fixed effects	Regression logistic model with random effects
AIC Coefficient	337.639	338.642	331.368	331.368

Source: Own elaboration.

By considering the above table and AIC values of each 4 mentioned models, we could conclude that panel logistic regression model with fixed or random effects, because of having the lowest AIC value, is the most appropriate. Since the fitting results of the two models are similar, one of two models is fitted and results were displayed in Table 8.

**Table 8. Results of final fitting of model related to hypothesis six to ten.**

Variable	Symbol	R <sup>2</sup>	Std Dev	t stat	P-value
Intercept	$\alpha_0$	1.363	0.810	1.682	0.092
Board Power	POTENCY_CFO	-0.308	0.215	-1.437	0.151
Independent board members	BD_IND	0.175	0.177	0.988	0.323
Number of meetings of the Board	BD_MEET	-0.001	0.007	-0.177	0.859
Audit Committee Power	POTENCY_AC	-0.022	0.060	-0.369	0.712
Financial expert of the Audit Committee	AC_ACCT_EXPERT	-0.346	0.210	-1.642	0.100
Inflation	INFLATION	0.003	0.003	1.001	0.316
Logarithm of total sales	LN_SALE	-0.032	0.034	0.935	0.345
Logarithm of total assets	LN_ASSET	0.073	0.043	1.662	0.096
Leverage	LEVERAGE	-0.183	0.099	-1.833	0.066
Loss	LOSS	0.037	0.112	0.332	0.739
Return on assets	ROA	-0.240	0.169	-1.423	0.154
Operating cash flow	CASH_FLOW	-0.280	0.544	-0.515	0.606
Operational Risk	AR_INV	0.185	0.197	0.936	0.349
Foreign transactions	FOREIGN	-0.128	0.125	-1.017	0.309
REPORTLAG	REPORTLAG	0.002	0.001	1.622	0.105
Restatement of Financial Statements	RESTATE	-0.735	0.207	-3.551	<0.001***
Position audit firm	RESIDENCE	0.092	0.086	1.069	0.285
Audit size	BIG	-0.149	0.094	-1.595	0.110
The number of board members	BD_SIZE	-0.330	0.251	-1.316	0.188
Male members	M_GE_BD	0.183	0.238	0.772	0.440
Female members	FEM_GE_BD	0.206	0.228	0.903	0.366

Source: Own elaboration.

## 5. Conclusion.

The first hypothesis investigated the relationship between power of the board and audit fee. Since the P-value of this variable is 0.388 and more than the significance level of 0.05, so the hypothesis is rejected and there is no significant relationship these two factors.

The first hypothesis was based on the regression model of Beck and Mauldin (2014). Despite a positive relationship between power of the board and audit fee, there is no significant relationship between these two variables. This conclusion is in conflict with results of Harris (2008), Reason (2010b), and McCracken et al. (2008) who declared that there is a negative relationship between power of the board and audit fee.

On the other hand, lack of significant relationship between power of the board and audit fee is in conflict with the results of Beck and Mauldin (2014), Carcello et al. (2002) and Cohen et al. (2010) who revealed that there is a significant relationship between the board power and audit fee.

The second hypothesis evaluated the relationship between board member Independence (unbounded members) and audit fee. Since the p-value of this variable is 0.039 and less than the significance level of 0.05, so the hypothesis is accepted and is indicative of a significant relationship between board member independence and audit fee. Since the t statistic of board member independence has a negative relationship with audit fee, it means that by increasing the percentage of independence of board members, audit fee will reflect a decreasing trend. The presence of a significant relationship between board member independence and audit fee is in conflict with the results of studies conducted by Boo and Sharpe (2008) and Leventis and Dimitropoulos (2010).

The third assumption assessed the relationship between board effort (criteria for measuring is the number of board sessions) with audit fee. Since the P-value of this variable is 0.544 and is more than the significance level of 0.05, so this hypothesis is rejected. Therefore, there is no meaningful relationship between board effort and audit fee. Lack of significant relationship between board effort and audit fee is in conflict with results of study performed by Yatim (2006).

The fourth hypothesis studied the relationship between audit committee power and audit fee. Since the P-value of this variable is 0.024 and less 0.05 at significance level, so this hypothesis is accepted and there is a significant relationship between audit committee power and audit fee. Since the t statistic of the relationship between audit committee power and audit fee is negative, it means that by increasing the power of audit committee, audit fee will indicate a decreasing trend. Such a result is in line with the results of Brown and Wright (2008), DeZoort et al. (2008), and Krishnan and Visvanathan (2009) in terms of existence of significant relationship between audit committee power and audit fee and is in conflict with them in terms of presence of positive or negative relationship.

The fifth hypothesis investigated the relationship between the financial expertises of audit committee members with audit fee. Since the p-value of this variable is 0.008 and less than the significance level of 0.05, so the hypothesis is accepted. Since the relationship between the financial expertise of audit committee members and audit fees is positive, it means that by increasing financial expertise of audit committee members the audit fees will show an increasing trend. This significant and positive relationship is in line with results of Carcello et al. (2002), Abbott et al. (2003), and Vafeas et al. (2007) but is in conflict with the results Krishnan and Visvanathan (2009) in terms of positive or negative relationship. However, in terms of existence of a relationship, all mentioned studies are in line with the result of this hypothesis.

The sixth hypothesis studied the relationship between the board power and weakness of internal control quality. Since the P-value of this variable is 0.151 and more than the significance level of 0.05, so this hypothesis is rejected. Therefore, there is no significant relationship between the board power and weakness of internal control quality. Despite the presence of a negative relationship between these two variables, no significant relationship was seen between these two variables. Such a result is in conflict with result of Jensen (1993), Stevens et al. (1978) and Ogneva et al. (2007).

The seventh hypothesis evaluated the relationship between board member independence and weakness of internal control quality. Since the P-value of this variable is 0.323 and more than the significance level of 0.05, so this hypothesis is rejected. Therefore, there is no significant relationship between board member independence and weakness of internal control quality. Lack of a significant relationship between these two variables is in conflict with the results of Fernández and Arrondo (2005), Chidambaran et al. (2010), Hoitash et al. (2011) and Ogneva et al. (2007).

The eighth hypothesis investigated the relationship between the board efforts and weakness of internal control quality. The P-value of this variable is 0.859 and more than the significance level of

0.05, so this hypothesis is rejected. Therefore, there is no significant relationship between the board effort and weakness of internal control quality.

The ninth hypothesis evaluated the relationship between audit committee power and weakness of internal control quality. The P-value of this variable is 0.712 and more than the significance level of 0.05. Therefore, this hypothesis is rejected and there is no significant relationship between audit committee power and weakness of internal control quality. This result is in conflict with the results of Krishnan (2005).

The last hypothesis assessed the relationship between financial expertise of audit committee members and weakness of internal control quality. The P-value of this variable is 0.100 and more than significance level of 0.05, so this hypothesis is rejected. Therefore, there is no significant relationship between financial expertise of audit committee members and weakness of internal control quality. This result is in conflict with results of Zhang et al. (2007).

## References

- Abbott, L.J., Parker, S., Peters, G.F., & Raghunandan, K. (2003). The association between audit committee characteristics and audit fees. *Auditing: A Journal of Practice & Theory*, 22(2), 17-32.
- Abbott, L., Parker, S., & Peters, G. (2004). Audit committee characteristics and restatements. *Auditing: A Journal of Practice and Theory*, 23(1), 69-87.
- Ashbaugh-Skaife, H., Collins, D., & Kinney, W. (2007). The Discovery and Reporting of Internal Control Deficiencies Prior to SOX-Mandated Audits. *Journal of Accounting and Economics*, 44, 166-192.
- Association of Certified Fraud Examiners (ACFE) (2009). Occupational Fraud: A Study of the Impact of an Economic Recession. Austin, TX: ACFE.
- Asthana, S.C., & Boone, J.P. (2012). Abnormal audit fee and audit quality. *Auditing: A Journal of Practice & Theory*, 31(3), 1-22.
- Baltaci, M., & Yilmaz, S. (2006). *Keeping an Eye on Sub-national Governments: Internal Control and Audit at Local Levels*. World Bank Institute. Washington. D.C. pp.1-35
- Beasley, M., Carcello, J., Hermanson, D., & Neal, T. (2009). The audit committee oversight process. *Contemporary Accounting Research*, 26(1), 65-122.
- Beck, M.J., & Mauldin, E.G. (2014). Who's Really in Charge? Audit Committee versus CFO Power and Audit Fees. *The Accounting Review*, 89(6), 2057-2076.
- Bedard, J., & Johnstone, K.M. (2004). Earnings manipulation risk, corporate governance risk, and auditors' planning and pricing decisions. *The Accounting Review*, 79(2), 277-304.
- Bedard, J. (2006). Sarbanes Oxley Internal Control Requirements and Earnings Quality. Working paper. Laval University. pp. 1-41.
- Blue Ribbon Committee (BRC). (1999). Report and Recommendations of the Blue Ribbon Committee on Improving the Effectiveness of Corporate Audit Committees. Stamford, CT: New York Stock Exchange and National Association of Securities Dealers.
- Boo, E.F., & Sharma, D. (2008). The Association Between Corporate Governance and Audit Fee of Bank Holding Companies. *Corporate governance*, 8(4), 28-45.
- Brown, H., & Wright, A. (2008). Negotiation research in auditing. *Accounting Horizons*, 22(1): 91-109.



- Carcello, J., Hermanson, D., & Ye, Z. (2011). Corporate governance research in accounting and auditing: Insights, practice implications, and future research directions. *Auditing: A Journal of Practice & Theory* 30(3), 1-31.
- Carcello, J., Hermanson, T., Neal, L., & Riley, R. (2002). Board characteristics and audit fees. *Contemporary Accounting Research*, 19 (3), 365-384.
- Chan, A.M. ., Liu, G., & Sun, J. (2013). Independent audit committee members' board tenure and audit fees. *Accounting and Finance*, 53, 1129-1147.
- Chan, K.C., Farrell, B., & Lee, P. (2005). Earnings Management and Return Earnings, Association of Firms Reporting Material Internal Control Weaknesses Under Section 404 of the Sarbanes-Oxley Act. June 15. pp.1-35.
- Cheffers, M., & Whalen, D. (2011). *Audit fees and non-audit fees: An eight year trend*. Audit Analytics May.
- Chen, C.R. & Steiner, T.L. (1999). Managerial ownership and agency conflicts: A nonlinear simultaneous equation analysis of managerial ownership, risk taking, debt policy, and dividend policy. *The Financial Review*, 34, 119-136.
- Chidambaran, N.K., Kedia, S., & Prabhala, N.R. (2010). CEO Director connections and corporate fraud. Working Paper. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2023030> (accessed September 25, 2013).
- Christensen, B., Omer, T., Sharp, N., & Shelley, M. (2013). *Pork bellies and public company audits: Have audits once again become just another commodity?* Working Paper. Texas: A&M University.
- Cohen, J., Krishnamoorthy, G., & Wright, A. (2010). Corporate governance in the post Sarbanes- Oxley era: Auditor experiences. *Contemporary Accounting Research* 27(3), 751-786.
- Daniel, B., Billings, M., & Hodder, L. (2008). Internal Control Weaknesses and Information Uncertainty. *The Accounting Review*, 83(3), 665-703.
- Dao, M., Raghunandan, K., & Rama, D (2012). Shareholder voting on auditor selection, audit fees, and audit quality. *The Accounting Review*, 87(1), 149-171.
- Das, S., Shroff, P.K. & Zhang, H. (2009). Quarterly earnings patterns and earnings management. *Contemporary Accounting Research*, 26(3), 797-831.
- DeZoort, F. T., Hermanson, D. & Houston, R. (2008). Audit committee member support for proposed audit adjustments: Pre-SOX versus post-SOX judgments. *Auditing: A Journal of Practice & Theory*, 27(1), 85-104.
- DeZoort, F., & Salterio, S. (2001). The effects of corporate governance experience and financial reporting and audit knowledge on audit committee members' judgments. *Auditing: A Journal of Practice and Theory*, 20 (September), 31-47.
- Dhaliwal, D.S., Lamoreaux, P.T., Lennox, C.S., & Mauler, L.M. (2014). Management influence on auditor selection and subsequent impairments of auditor independence during the post-SOX period. *Contemporary Accounting Research*, 32(2), 575-607.
- Doogar, R., Rowe, S., & Sivadasan, P. (2013). Asleep at the wheel (again)? Bank audits during the financial crisis. *Contemporary Accounting Research*, 32(1), 358-391.
- Doty, J.R. (2011). The reliability, role, and relevance of the audit: A turning point. *The CPA Journal* August: 31-36.

- Doyle, J., Ge, W., & McVay, S. (2006). Determinants of weaknesses in internal control over financial reporting. Working paper, University of Utah, University of Michigan and New York University.
- Doyle, J., Ge, W., & McVay, S. (2007). Accruals Quality and Internal Control over Financial Reporting. *The Accounting Review*, 82(5), 1141-1170.
- Ettredge, M., Fuerherm, E., & Li, C. (2014). Fee pressure and audit quality. *Accounting, Organizations and Society*, 39(4), 247-263.
- Fama, E.F., & Jensen, M.C. (1983). Separation of ownership and control. *Journal of Law and Economics*, 26(2), 301-326.
- Fernández, C. & Arrondo, R. (2005). Alternative internal controls as substitutes of the board of directors. *Corporate Governance: An International Review*, 13, 856-866.
- Fiolleau, K., Hoang, K., Jamal, K., & Sunder, S. (2013). How do regulatory reforms to enhance auditor independence work in practice? *Contemporary Accounting Research*, 30(3), 864-890.
- Galinsky, A., Magee, J., Gruenfeld, D., Whitson, J., & Liljenquist, K. (2008). Power reduces the press of the situation: Implications for creativity, conformity, and dissonance. *Journal of Personality and Social Psychology*, 95(6), 1450-1466.
- Ge, W., & McVay, S. (2007). The Disclosure of Material Weaknesses in Internal Control after the Sarbanes-Oxley Act. *Accounting Horizons*, 19(3), 137-158.
- Ge, W., & McVay, S. (2005). The Disclosure of material weaknesses in internal control after the Sarbanes-Oxley Act. *Accounting Horizon*, 19 (3), 137-158.
- General Accounting Office (GAO), (1992), Letter from Donald H. Chapin, Assistant Comptroller General, GAO, to Robert L. May, Chairman, Committee of Sponsoring Organizations of the Treadway Commission. (October 30), Journal of Accountancy, 1993.
- Griffin, A., Lont H., & Sun, Y. (2008). Agency Problems and Audit fees: Further Tests of the Free cash Flow Hypothesis. *Journal of Finance*, 1, 1-35.
- Harris, R. (2008). How to ax your auditor. CFO January 28. Accessed at <http://www.cfo.com/printable/article.cfm/10595337>
- Hay, D. (2013). Further evidence from meta-analysis of audit fee research. *International Journal of Auditing*, 17, 162-176.
- Hellman, N. (2011). Chief financial officer influence on audit planning. *International Journal of Auditing*, 15, 247-274.
- Henderson, B.C., Masli, A., Richardson, V.J., & Sanchez, J.M. (2010). Layoffs and CEO compensation: Does CEO power influence the relationship? *Journal of Accounting, Auditing and Finance*, 25, 673-707.
- Hermanson, D.R., Ivancevich, D.M., & Ivancevich, S.H. (2008). Tone at the Top: Insights from Section 404. *Strategic Finance*, 90(5), 39-45.
- Hoitash, U., Hoitash, R., & Johnstone., K. (2011). Internal Control Material Weaknesses and CFO Compensation, Working paper, 57, pp.1-31. Madison: University of Wisconsin.
- Jensen, M. C. (1993). The modern industrial revolution, exit, and the failure of internal control systems. *Journal of Finance*, 48, 831-880.

- Kalbers, L., & Fogarty, T. (1993). Audit committee effectiveness: An empirical investigation of the contribution of power. *Auditing: A Journal of Practice & Theory* (Spring), 24-49.
- Kane, G.D., Richardson, F.M., & Graybeal, P. (1996). Recession-induced stress and the prediction of corporate failure. *Contemporary Accounting Research*, 13(2), 631-650.
- Karim, A., & Moizer, P. (1996). Determinants of audit fees in Bangladesh. *International Journal of Accounting*, 31(4), 497-509.
- Knechel, W.R. (2007). The business risk audit: Origins, obstacles and opportunities. *Accounting, Organizations and Society*, 32(4-5), 383-408.
- Krishnan, G., & Visvanathan, G. (2009). Do auditors price audit committee's expertise? The case of accounting vs. non-accounting financial experts. *Journal of Accounting, Auditing & Finance*, 24(1), 115-144.
- Krishnan, J. (2005). Audit committee financial expertise and internal control: An empirical analysis. *The Accounting Review*, 80(2), 649-675.
- Leventis, S., & Dimitropoulos, P.E. (2010). Audit Pricing, quality of earning and board independence: The Cose of the Athens stock exchange. *International Journal of Cardiology*, 26, 325-332.
- McCracken, S., Salterio, S., & Gibbins, M. (2008). Auditor-client management relationships and roles in negotiating financial reporting. *Accounting, Organizations and Society*, 33, 362-383.
- McMullen, D.A., Raghunandan, K., & Rama, D.V. (1996). Internal control reports and financial reporting problems. *Accounting Horizons*, 10, 67-75.
- Moore, D. A., Tetlock, P. E., Tanlu, L., & Bazerman, M. H. (2006). Conflicts of interest and the case of auditor independence: Moral seduction and strategic issue cycling. *Academy of Management Review*, 31(1), 10-29.
- Ogneva, A., Subramanyam, K. R., & Raghunandan, K. (2007). Internal Control Weakness and Cost of Equity: Evidence from SOX Section 404 Disclosures. *The Accounting Review*, 82(5), 1255-1297.
- O'Keefe, T., Simunic, D., & Stein, M. (1994). The production of audit services: Evidence from a major public accounting firm. *Journal of Accounting Research*, 32, 241-261.
- Public Company Accounting Oversight Board (PCAOB).(2004). Auditing Standard No.2-An audit of internal control over financial reporting performed in conjunction with an audit of financial statements.
- Ramdani, D., & Witteloostuijn, A.V. (2010). The Impact of Board Independence and CEO Duality on Firm Performance: A Quantile Regression Analysis for Indonesia, Malaysia, South Korea and Thailand. *British Journal of Management*, 21, 607-626.
- Reason, T. (2010a). Auditing your auditor. CFO (April): 36-42.
- Reason, T. (2010b). Fees still falling, though not as dramatically. CFO (September). Accessed at <http://ww2.cfo.com/accounting-tax/2010/09/fees-still-falling-but-not-as-dramatically/>.
- Securities and Exchange Commission (SEC). (2003). Standards related to listed company audit committees. Accessed at <http://www.sec.gov/rules/final/33-8220.htm>
- Simunic, D. (1980). The pricing of audit services: Theory and evidence. *Journal of Accounting Research*, 18 (1), 161-190.
- SOX (2002). The Sarbanes-Oxley Act. Available at: <https://www.dau.edu/cop>

- Standards for Internal Control in the Federal Government, (1999), United States General Accounting Office (GAO), November, pp.1-4.
- Stevens, J.M., Beyer, J.M., & Trice, H.M. (1978). Assessing personal role, and organizational predictors of managerial commitment. *Academy of Management Journal*, 18, 74-81.
- Thomas, R.S. (2004). Explaining the international CEO pay gap: Board capture or market driven? *Vanderbilt Law Review*, 57,1171-1267.
- Tsui, J.S.L., Jaggi, B., & Gul, F.A. (2001). CEO domination, growth opportunities, and their impact on audit fees. *Journal of Accounting, Auditing and Finance*, 16(3), 189-208.
- U.S. House of Representatives (2002). The Sarbanes-Oxley Act of 2002. Public Law 107-204. Washington, D.C.: Government Printing Office.
- Vafeas, N., & Waagelein, J.F. (2007). The association between audit committees, compensation incentives, and corporate audit fees. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 28, 241-255.
- Yatim, P. (2006). Internal Governance Structures, Board Ethnicity, and External Audit Fees of Malaysian Listed Firms. Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy.
- Zhang, Y., Zhou, J., & Zhou, N. (2007). Audit Committee Quality, Auditor Independence, and Internal Control Weaknesses. *Journal of Accounting and Public Policy*, 26(3), 300-327.
- Zulkarnain, S.M., Hamid, M.A.A., Saad, S.S.M., & Jonathan, G.E. (2007). Audit Committee Authority and Effectiveness: The Perceptions of Malaysian Senior Managers. *Journal of Finance and Economics*, 8(1), 41-56.



## Efectos de la pedagogía y el compromiso educativo sobre el logro académico de los estudiantes de educación media

ASTORQUIZA BUSTOS, BILVER ADRIÁN

Facultad de Ciencias Contables, Económicas y  
Administrativas

Universidad de Manizales (Colombia)

Correo electrónico: bilvera@umanizales.edu.co

### RESUMEN

Este artículo estudia por medio de los modelos lineales jerárquicos, la hipótesis de incidencia positiva que las variables de pedagogía y compromiso educativo generan sobre el desempeño académico. Para ello, son analizados las puntuaciones obtenidas por 62769 estudiantes de educación media en las pruebas PISA 2012 en 12 países. Al precisar que los procesos educativos adoptan una estructura jerárquica definida en dos niveles, estudiantes y planteles educativos, la especificación econométrica empleada conduce a resultados ostensiblemente mejores a los que se obtendría de una especificación tradicional. Entre los resultados se encuentra que el desempeño educativo en seis países es explicado en una mayor proporción por variables del entorno familiar y características del alumnado, mientras que en los seis restantes es explicado por el entorno escolar. De igual forma, los resultados validan la hipótesis de investigación formulada en el documento: la pedagogía y el compromiso educativo inciden positivamente sobre el desempeño académico. Así, la formulación de programas que fomenten dichas prácticas al interior de los planteles educativos debe formar parte de la agenda educativa. Por último, se encontró que el sexo del estudiante no aporta explicación alguna que refiera a existencia de brechas educativas pues los resultados son diferentes entre países, mientras que la no repetición de curso y la ausencia escolar, la dotación de elementos escolares en el hogar, el nivel de formación de los padres, entre otros factores, se asocian con sobresalientes resultados en el logro académico.

**Palabras clave:** análisis multinivel, entorno escolar, entorno familiar, logro académico, economía de la educación.

**Clasificación JEL:** C51; H52; I21; I28.

**MSC2010:** 62P20; 97B10.

# Effects of pedagogy and educational commitment on the academic performance of middle school students

## ABSTRACT

This article studies from the hierarchical linear models, the hypothesis of positive incidence that the variables of pedagogy and educational commitment generate on the academic performance. For this, the scores obtained by 62769 middle school students in the 2012 PISA tests in 12 countries are analyzed. By specifying that educational processes adopt a hierarchical structure defined in two levels: students and schools; the econometric specification used leads to results ostensibly better compared to those generated from a traditional specification. Among the results, we have that the educational performance in six countries is explained in a greater proportion by variables of the family environment and student's characteristics, while in six it is explained by the school environment. Similarly, the results confirm the research hypothesis formulated in the document: pedagogy and educational commitment have a positive impact on academic performance, therefore, the formulation of programs that encourage such practices within the schools should be part of the educational policy. Finally, it was found that the sex of the student does not provide any explanation that refers to the existence of educational gaps because the results are dissimilar between countries, while the non-repetition and absence from school, the provision of school elements at home, the level of parent training, among other factors, are associated with outstanding results in academic achievement.

**Keywords:** multilevel analysis, school environment, family environment, academic performance, economics of education.

**JEL classification:** C51; H52; I21; I28.

**MSC2010:** 62P20; 97B10.



## 1. Introducción.

Los países con una población de elevadas cualificaciones académicas se identifican como aquellos que logran alcanzar un mejor bienestar social y desarrollo económico, por cuanto la educación es considerada como un instrumento indispensable para que los individuos potencien sus capacidades, sean competitivos y logren desenvolverse con mayor autonomía en cualquier situación de la vida cotidiana. Por esta razón, en la última década investigadores sociales en Colombia se interesaron en analizar los factores asociados con el incremento de las competencias de los ciudadanos, especialmente en el alumnado, trayendo nuevamente a discusión un tema que se ha tratado con rigurosidad desde la academia de los años sesenta por Schultz (1961), Denison (1962) y Becker (1962) en el campo de economía de la educación.

Sin embargo, pese a la existencia de numerosos estudios que han tratado este tema de coyuntura, y de las políticas definidas por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (ampliar la cobertura educativa, mejorar la eficiencia del sector educativo y la calidad de la educación), aún limita el entendimiento del por qué Colombia continúa ocupando los últimos lugares en pruebas internacionales que se especializan en medir las competencias de los alumnos en áreas claves para el desarrollo académico como la lectura, las matemáticas y las ciencias. Lo anterior, conduce a pensar en la existencia de especificidades que, posiblemente, no han sido abordadas.

De manera que, para explorar los componentes que conducen al bajo desempeño de los alumnos colombianos en pruebas internacionales como las diseñadas en el Programa Internacional para la Evaluación de Alumnos (PISA por sus siglas en inglés), esta investigación se orienta en responder la pregunta: *¿cuál es la incidencia entre las características del “entorno escolar” y del “entorno familiar” sobre el logro académico de los alumnos que presentaron las pruebas PISA 2012?*, articulando de manera implícita dos efectos que van más allá de condensar características del clima escolar (número de bibliotecas, dotación escolar, jornadas educativas, entre otras) y que bien pueden ser intervenidas por el Estado en el corto y/o medio plazo a través de políticas públicas.

El primer efecto plantea una relación entre el alumno y el maestro, admitiendo que esta interacción propicia el aprendizaje y la transmisión de conocimientos. Lo anterior, junto con la percepción de intimidación escolar y la identificación de habilidades heterogéneas en los cursos se denomina en esta investigación como variables de “pedagogía”. El segundo efecto es “compromiso educativo”, el cual hace referencia a la identificación de los mecanismos implementados por los planteles educativos en pro de mejorar las condiciones académicas de sus alumnos, atribuido en cierta medida a la revisión continua de sus estructuras curriculares y su posterior comparación con otras entidades educativas tanto nacionales como internacionales. Por ello, pese a que la pregunta formulada busca contrastar la incidencia entre las características del entorno familiar y escolar sobre el logro académico, se precisa una mayor atención a estos dos efectos, pues forman parte del aporte que esta investigación realiza a la literatura de la Economía de la Educación.

Es así como al estudiar la incidencia de la pedagogía y el compromiso educativo sobre el logro académico, junto con los factores de entorno familiar y escolar es expuesta la relación disímil que estos componentes tienen sobre los sistemas educativos; en algunas economías los efectos se ven condicionados por el nivel de desarrollo. Por tal razón, se desarrolla un ejercicio comparativo entre los resultados de la modelación econométrica realizada para Colombia y un conjunto de países caracterizados por haber alcanzado en las pruebas PISA los primeros puestos (China-Shanghái, Corea, Finlandia y Singapur), posiciones intermedias (Alemania, Francia, Canadá, Bélgica) y posiciones bajas (Brasil, Chile, Uruguay) a partir de la técnica de modelos jerárquicos lineales, cuya relevancia teórica radica en reconocer la estructura jerarquía existente en el proceso educativo (alumnos y planteles educativos).

La inferencia econométrica se realiza para cada uno de los países mencionados, pues tal como sugiere Hanushek (2008) se reconoce la existencia de brechas en ingresos nacionales, matrículas ofertadas, calidad de las instituciones educativas, años de educación promedio de la sociedad, entre otros factores que fácilmente pueden incidir en el desempeño de los alumnos. Sin embargo, considerarlos en la investigación se justifica en la medida que durante el análisis se exhiben algunas particularidades de sus sistemas educativos, dando paso a la definición de un perfil educativo meta. En consistencia con lo presentado, como hipótesis central se somete a prueba la afirmación: *los efectos de pedagogía y compromiso educativo inciden positivamente en el logro académico, en especial, para aquellos alumnos que pertenecen a economías desarrolladas.*

El desarrollo de esta investigación considera secuencialmente una breve apartado sobre enfoques metodológicos en economía de la educación (primera sección), una aproximación metodológica que sintetiza la fuente de los datos, la descripción de las variables explicativas y la especificación del modelo (segunda sección); el proceso de modelación, los resultados del ejercicio econométrico y la validación de los supuestos de la técnica (tercera sección); finalizando con las conclusiones y limitaciones del documento como apartado final.

## **2. Revisión de Literatura.**

La economía de la educación distingue dos enfoques metodológicos que ostentan gran aceptación: el entorno familiar y el entorno escolar. El primer enfoque fue adoptado por autores como Coleman (1968), Spady (1973), Ermisch & Francesconi (2001), Galor & Zeira (1993), Lazear (1980), Mayer & Peterson (1999), Vivas (2008), Jencks (1972), entre otros. Este enfoque analiza los efectos que tienen sobre el logro académico, el tamaño medio del hogar, la calidad de los entornos locales, la educación de los padres, los niveles de riqueza inicial con los que cuenta el hogar, bajo la premisa de que es en los hogares donde se fundamentan los valores y las herramientas iniciales que crean competencias y habilidades en los alumnos, del mismo modo que es en el hogar donde se toma la decisión de acceder o no al sistema educativo.

El segundo enfoque es desarrollado por Barrientos (2008), Betts y Shkolnik (2000), Casas, Gamboa y Piñeros (2002), Kane (2006), Raudenbush y Bryk (2002), Tobón, Posada y Ríos (2009). En este enfoque se argumenta que la calidad de los maestros, el tipo de plantel, las bibliotecas disponibles y el tamaño de la clase tienen efectos decisivos en el logro académico incluso superiores a los alcanzados por el entorno familiar, pues explican una mayor proporción de la varianza total del logro académico (Tobón et al., 2009, p. 326). A su vez, este enfoque exhibe la relevancia del entorno escolar en el proceso formativo del alumno en la medida en que, este espacio permite desarrollar sus capacidades cognitivas y, al estar inmerso en el ámbito académico, le brinda autonomía en la decisión de apropiarse o no del conocimiento impartido por los maestros durante las clases.

En consecuencia, al explorar los dos enfoques metodológicos presentados en esta investigación, se encontró una literatura dirigida más hacia las características asociadas al entorno escolar, en comparación con aquellos estudios que abordan el entorno familiar. Pese a ello, se hizo evidente que las argumentaciones expuestas en ambos casos condensan resultados consistentes que merecen evaluarse en investigaciones que empleen el análisis jerárquico y, dado que, contribuyen en la fundamentación metodológica de la estimación econométrica, se presentan a continuación una revisión de literatura nacional e internacional sobre este tema.

En Colombia, la investigación pionera en este campo fue realizada por Piñeros y Rodríguez (1998). Los autores emplearon datos del Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES) de 1997 encontrando diferencias entre la calidad de la educación ofertada en instituciones del sector oficial y no oficial, sugiriendo que las instituciones oficiales cuentan con una desventaja en la calidad educativa. Adicionalmente, detallan que la diferencia de género está



dada en favor de los niños y que los tiempos de desplazamiento hacia el centro educativo muestra una relación negativa con los resultados académicos.

Sin embargo, si bien se ha mantenido en vigencia el anterior postulado sobre calidad educativa a favor de las instituciones privadas y, por ende, contribuye en la explicación de la obtención de mejores resultados por parte de sus alumnos en pruebas nacionales como bien es documentado en la investigación de López (2010), autores como Núñez, Steiner, Cadena y Pardo (2002) encuentran que la eficiencia en la educación de los planteles públicos está dada para la población de los estratos socioeconómicos más bajos. De esta forma, al complementar la anterior apreciación con la investigación de Correa (2004) donde se explora el logro educativo con técnicas multinivel, es posible argumentar que las políticas educativas se justifican en la medida que conducen a mejorar la educación provista por las instituciones públicas, quienes terminaran afectando directamente la población que se beneficia de dicha educación, mención realizada por este último autor.

Sarmiento, Becerra y González (2000) y Gaviria y Barrientos (2001) prestan mayor atención a los efectos de los factores externos al entorno escolar sobre el logro académico. Los segundos autores manifiestan que los problemas en la educación son resultado de la estructura organizacional (distinción entre públicos y privados) y de los incentivos que tienen los alumnos al decidir si continúan con su proceso formativo. Entre tanto, los primeros afirman que el factor socioeconómico captado por la inversión en educación y el ingreso de los padres juega un papel sustancial en el aprendizaje, potencializado con el tipo de plantel educativo, en especial los privados.

Por su parte, Vivas (2008) establece que los factores asociados al entorno familiar y los efectos de vecindad que introducen las preferencias de localización espacial por parte de los agentes sociales, condicionan tanto el ingreso al sistema educativo como también los resultados alcanzados por los alumnos. Para este autor la educación permite el desarrollo de habilidades bajo el condicionante del nivel socioeconómico del alumno, el cual es un factor clave en el proceso de aprendizaje y contribuye en la explicación del máximo nivel de escolaridad que logran alcanzar. En este mismo orden de ideas, Ramos, Duque y Nieto (2012) también encuentra que la localización geográfica de los centros educativos justifica la brecha de los resultados obtenidos por el país en pruebas internacionales como las PISA en los años 2006 y 2009. Sin embargo, manifiesta que la desventaja se origina por efectos de entorno familiar como la educación de los padres, en especial el de las madres y, por tanto, mejorar la calidad de vida en los hogares debería constituirse como una política educativa.

La investigación de Zambrano (2013) ostenta una primera aproximación por introducir la pedagogía como estrategia educativa para el incremento en el desempeño educativo. El autor al indagar sobre las disparidades en la calidad de la educación a nivel alumno y plantel educativo para las pruebas de matemáticas en Colombia con datos del Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS por sus siglas en inglés), encontró que el 57.4% de la varianza en el rendimiento es explicada por el nivel alumno, donde los mejores resultados provienen de los planteles educativos privados, que se encuentran emplazados en zonas geográficas urbanas, y determinado de igual forma por el gusto que sienten los alumnos por la materia y el plantel educativo. De esta forma, una de sus conclusiones se enfoca en invitar a las entidades educativas al fomento de procesos pedagógicos que refuercen estos gustos.

En el contexto internacional se destaca inicialmente el estudio realizado por Hanushek (1971) quien resalta la importancia del nivel socioeconómico del alumno y su efecto positivo sobre el logro académico, resultado atribuido a la utilización de un lenguaje más formal en el aula que permite una mejor comprensión de la enseñanza dictada por maestros con altas cualificaciones. En esta misma línea de ideas, autores como Galor y Zeira (1993) y Spady (1973) encontraron una relación directa entre desempeño educativo y nivel socioeconómico de los padres del alumno, el cual es determinado por el stock de capital humano que han acumulado. Por su

parte, Lee y Barro (2001) argumentan que, si bien las características familiares tienen un efecto significativo sobre el desempeño de los alumnos, cursos de menor tamaño contribuye en mayor medida a mejorar los resultados educativos.

Entre tanto, Cohen, Raudenbush y Ball (2003) definen a los planteles educativos como facilitadores del aprendizaje, conjugando con anterioridad la premisa de Hanushek (2008), quien argumentó que la calidad de los maestros y el tamaño de la clase son elementos esenciales para el proceso formativo. Los autores encuentran que el tamaño de la clase es un factor a considerar pues si el alumno está rodeado de compañeros con una sana motivación y con un buen nivel educativo, es posible pensar que se fortalece y mejora el proceso formativo del aula de clases en conjunto; argumento que también es presentado por Hanushek, Markman y Rivkin (2003) al recomendar la interacción entre los alumnos con notas sobresalientes con los que presentan rezago formativo.

El potencial predictivo del análisis multinivel en los estudios que profundizan en la descomposición de la varianza no explicada del logro académico es consistente, puesto que, al comparar la investigación realizada por Orrego (2009) para España con los obtenidos en los estudios de Calero y Escardíbul (2007) y Martín, Asencio, Ordóñez y Romero (2009) se conjetura que las características propias del alumno priman sobre el entorno escolar (Cordero, Manchón, & Simancas, 2012, p. 84), tal como se validan en los hallazgos de la presente investigación.

Finalmente, Cervini (2004) introduce el concepto de equidad en el aprendizaje para justificar la importancia de emprender análisis que conduzcan a mejorar el logro educativo. Para este autor todos los individuos deberían contar con un aprendizaje básico y cualquier desigualdad en el aprendizaje se configura como una violación al principio de igualdad. Partiendo de dicha precisión, el autor al analizar los resultados en las pruebas de matemáticas y lenguaje de 126,590 alumnos argentinos encontró que factores como repetir cursos, la restricción en el acceso al capital cultural como los libros, y las condiciones familiares como el estado laboral de los padres que implique la vinculación del alumno al mercado laboral, están asociados con bajos rendimientos.

### **3. Aproximación Metodológica.**

#### **3.1. Descripción de datos y variables explicativas.**

Los datos de la investigación provienen de PISA 2012, los cuales permiten evaluar la calidad de la educación de los países miembros y asociados, como en el caso de Colombia<sup>1</sup>, de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). PISA evalúa las competencias en lectura, matemáticas y ciencias de los alumnos de grado séptimo hasta once de bachiller con edades entre los 15 y los 16 años con el objetivo de revisar los conocimientos, aptitudes y competencias adquiridas durante el proceso formativo del alumno.

Para conocer los efectos que las variables del entorno escolar, del alumno y, puntualmente, el de pedagogía y compromiso educativo tienen sobre el logro académico se plantea un análisis comparativo entre los resultados alcanzados por los alumnos colombianos y los alumnos de algunas economías que se han ubicado en las primeras posiciones de las pruebas (China-Shanghái, Corea, Finlandia, Singapur), en posiciones intermedias (Alemania, Francia, Canadá, Bélgica) y en posiciones bajas (Brasil, Chile, Uruguay). De lo anterior, se consolida una muestra total de 62 769 observaciones, las cuales representan cerca de 3 637 408 alumnos una vez se introduce el factor de expansión.

---

<sup>1</sup> Este país ingreso como miembro de la organización en el año 2018.

En lo referente a la elección de variables, se sustentan en la definición de los modelos de oferta y demanda de servicios educativos realizada por Piñeros & Rodríguez (1998) y en el lineamiento seguido por Cano (2006) al introducir variables de percepción, tanto del maestro como de los directores del plantel educativo y de reconocimiento autónomo del alumno. No obstante, el sustento conceptual emplea parte del argumento teórico de Vivas (2008), donde se fundamenta la oferta como la asociación entre los resultados y las dotaciones escolares que el alumno posee dentro de su proceso formativo; y la demanda como los factores que permiten acceder a la educación.

Inicialmente, la variable explicativa definida como compromiso educativo se construye a partir de la respuesta sí o no a la pregunta *¿el plantel educativo usa las evaluaciones de los alumnos para (...)?* Los tres componentes principales de la variable son: i) autoevaluación y mejoramiento de la estructura curricular, ii) comparación con otras instituciones y iii) eficiencia docente en la transmisión del conocimiento. Por tanto, los planteles que afirman realizar al menos uno de los componentes se asocia con el compromiso educativo por cuanto evaluar la calidad de la educación demuestra el interés que tienen por mejorar continuamente, mientras que los planteles que no realizan ninguna de estas actividades se considera que no están comprometidos con mejorar la educación.

Ahora, para explorar los aspectos pedagógicos fue necesario recurrir al análisis de la percepción del clima escolar contestadas por el rector al siguiente interrogante: *¿en su plantel, en qué medida es el aprendizaje de los alumnos impedido por los siguientes fenómenos?*, seleccionando cuatro variables: i) intimidación escolar, ii) baja expectativa que los alumnos tienen hacia los maestros, iii) la consideración de si los maestros son estrictos y iv) si existen habilidades heterogéneas entre los alumnos de un mismo curso. Esta última variable profundiza en el hecho en que los maestros enseñan a los alumnos con niveles cognitivos disímiles dentro de la misma clase.

En complementariedad con las variables explicativas que se introducen para mejorar la especificación econométrica y que exhiben características del alumno y de su entorno familiar permiten indagar las posibles diferencias en los resultados originadas por cuestiones de sexo; el nivel de escolaridad y la vinculación laboral de los padres (ocupados o desempleados); el tipo de hogar donde se examina si el alumno vive con el padre y la madre, o por el contrario, convive con uno de ellos u otros familiares; y la dotación en el hogar que evalúa la tenencia de al menos uno de los siguientes recursos: poseer escritorio, computador, conexión a internet, literatura clásica, DVD o un lugar de estudio.

En cuanto a las características del entorno escolar se tiene el tipo de plantel (instituciones públicas y privadas), la localización del plantel, el tamaño de la clase, la diferencia de resultados originadas en los planteles con maestros de tiempo parcial frente a aquellos que no y el ofrecimiento de actividades estudiantiles como banda, periódico estudiantil, equipos deportivos y clubes de matemática, ajedrez, informática o arte. Esta última variable se articula bajo la premisa de que actividades extracurriculares pueden estar asociadas con buenos resultados por cuanto permite la interacción entre alumnos y la puesta en práctica de ciertos conocimientos.

Así mismo, se introducen variables características de la demanda educativa desde la dimensión de antecedentes escolares: repetición de curso y absentismo. En la investigación de (Hernández, Rosário, de Tejada, Martínez, & Ruiz, 2006, p. 418) se expone que la primera variable es de comprobada relevancia en la explicación del “éxito escolar”, y si bien es probable que se encuentre condicionada por factores que no dependen exclusivamente del alumno, su inclusión obedece a una robusta especificación del modelo. Justamente, se espera que el resultado obtenido por los alumnos que repiten al menos una vez un curso del bachillerato y aquellos que se ausentan en la misma frecuencia, obtengan menores resultados en comparación con los que nunca han repetido curso y tampoco se han ausentado.

De igual forma, se estudia si el plantel educativo presenta escasez de maestros cualificados en las áreas evaluadas en PISA, de materiales de instrucción (libros), edificios escolares y aulas de clase, desde la visión de la capacidad o no que el plantel tenga para solucionar la carencia de estos factores. El signo esperado, la metodología de codificación y las estadísticas descriptivas están en los anexos 1 y 2 respectivamente.

Finalmente, la variable dependiente corresponde a la media muestral de los valores plausibles de PISA 2012 como proxy del logro académico. En la prueba se evalúan las competencias en lectura, ciencias y matemáticas, donde cada competencia cuenta con cinco valores plausibles, lo cual hace necesario calcular el valor promedio, dando como resultado un único valor que no se ve afectado por la agrupación debido a que las puntuaciones siguen una distribución normal, siendo uno de los supuestos fundamentales en los modelos multinivel, el cual es probado más adelante. La forma funcional de las variables junto con los principales estadígrafos se presenta en los anexos 1 y 2 respectivamente.

### 3.2. Síntesis general de los modelos lineales jerárquicos.

La fundamentación analítica de los modelos jerárquicos se expone con detenimiento en los trabajos de Bryk y Raudenbush (1992), Goldstein (1995), Hox (2002) y Snijders y Bosker (1999). No obstante, esta investigación sigue la notación y línea argumental de Gaviria y Castro (2005), precisando que el desarrollo de estos modelos es propio del campo de la educación y dada la facilidad analítica de los mismos, los investigadores económicos adoptaron la teoría y la complementaron con técnicas y formulaciones econométricas de mayor robustez. El desarrollo estadístico del modelo jerárquico y del modelo no condicionado se presenta a continuación.

$$\gamma_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{1ij} + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

La ecuación 1 representa la especificación general de un modelo multinivel, donde los subíndices  $i$  y  $j$  indican el alumno y el plantel educativo, por tanto, las variables descritas con ellos hacen alusión al comportamiento del modelo así:  $X_{1j}$  es la variable asociada a las características del alumno  $i$  que pertenece al plantel  $j$ ,  $\gamma_{ij}$  es el indicador del logro académico promedio del alumno,  $\beta_{0j}$  es el rendimiento esperado del plantel cuando  $X_{1j}$  es igual a cero y  $\beta_{1j}$  capta el incremento (disminución) en el logro académico causado por la variación unitaria de las características del alumno. Entre tanto,  $\varepsilon_{ij}$  es el término de la ecuación que se aparta del rendimiento esperado del alumno según su vector de características, asumiendo que la varianza es homogénea en todos los planteles  $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . Como  $\beta_{0j}$  y  $\beta_{1j}$  son los valores de cada plantel, al contar el modelo con una distribución bivariada normal en el sentido en que cada coeficiente integra un componente invariable y uno aleatorio dada la heterogeneidad entre planteles, los coeficientes se convierten en variables aleatorias en el nivel macro, lo cual hace que sean representadas así:

$$\beta_{0j} = \beta_0 + \mu_{0j} \quad (2)$$

$$\beta_{1j} = \beta_1 + \mu_{1j} \quad (3)$$

Una vez se descompone  $\beta_{0j}$  (ecuación 2) se obtiene una parte invariable captada por  $\beta_0$  (logro académico promedio en la población de planteles) y una parte aleatoria  $\mu_{0j}$  (logro

diferencial del plantel  $j$ ) que forma parte del modelo en el segundo nivel. De modo análogo,  $\beta_{1j}$  (ecuación 3) se descompone en  $\beta_1$  que conforma la parte invariante y representa la variación media del rendimiento en la prueba PISA causada por la variación de  $X_1$  en la población de planteles, y un término  $\mu_{1j}$  que hace parte de la aleatoriedad del modelo en el segundo nivel y representa el incremento diferencial en el rendimiento por el aumento de  $X_1$  en plantel  $j$ .

$$\begin{aligned} E(\beta_{0j}) &= \beta_0 & V(\beta_{0j}) &= \sigma_{\mu_0}^2 & Cov(\beta_{0j}, \beta_{1j}) &= \sigma_{\mu_0, \mu_1} \\ E(\beta_{1j}) &= \beta_1 & V(\beta_{1j}) &= \sigma_{\mu_0}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

La ecuación 4 muestra las propiedades estadísticas de la distribución bivariada de  $\beta_{0j}$  y  $\beta_{1j}$ . El supuesto de la variación en los planteles o macro-niveles es fundamental cuando se aborda el análisis de modelos jerárquicos, si esta variación no existiera, este tipo de modelación no sería adecuada. Así, al introducir variables del segundo nivel, el modelo referente al micro-nivel no sufre ningún cambio (ecuación 1), mientras que el macro-nivel (ecuaciones 2 y 3) sufre alteraciones quedando de la siguiente forma:

$$\beta_{0j} = \beta_{00} + \beta_{01}Z_{1j} + \mu_{0j} \quad (5)$$

$$\beta_{1j} = \beta_{10} + \beta_{11}Z_{1j} + \mu_{1j} \quad (6)$$

Al combinar las anteriores ecuaciones se llega a una notación compacta de los modelos multinivel bietápico para  $N$  variables explicativas asociadas a los  $i$  alumnos (nivel 1) y  $L$  variables explicativas asociadas a los planteles (nivel 2) de la siguiente forma:

$$\gamma_{ij} = \beta_{0j} + \sum_{n=1}^N \beta_{nj}X_{nij} + \varepsilon_{ij} \quad \text{donde } \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon}^2) \quad (7)$$

$$\beta_{nj} = \beta_{n0} + \sum_{l=1}^L \beta_{nl}Z_{lj} + \mu_{nj} \quad \text{donde } \mu_{nj} \sim N(0, T) \quad (8)$$

El modelo no condicionado es una herramienta metodológica que permite fundamentar la implementación de las jerarquías; al no contar con variables explicativas indica si realmente es adecuado incluir variables en los niveles definidos a partir de la regresión. Si al estimarse este modelo se obtiene como resultado una varianza estadísticamente significativa e igual a cero para los macro-niveles, no tendría sentido incluir variables explicativas. De las ecuaciones 9 y 10 se define que  $\sigma_{\mu_0}^2$  es la varianza entre los planteles educativos y  $\sigma_{\varepsilon}^2$  es la varianza entre los alumnos.

$$\gamma_{ij} = \beta_{0j} + \varepsilon_{ij} \quad \text{Nivel uno} \quad (9)$$

$$\beta_{0j} = \beta_0 + \mu_{0j} \quad \text{Nivel dos} \quad (10)$$

$$\gamma_{ij} = \beta_0 + \mu_{0j} + \varepsilon_{ij} \quad \text{donde } \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon}^2) \text{ y } \mu_{0j} \sim N(0, \sigma_{\mu_0}^2) \quad (11)$$

#### 4. Resultados de la modelación econométrica.

La estimación de los componentes del modelo no condicionado son el punto de partida del análisis. En la tabla 1 se muestran los coeficientes estimados para  $\beta_{0ij}$  (parte fija del modelo), los

cuales representan el intercepto del modelo no condicionado, es decir, el logro académico promedio de los alumnos en las pruebas PISA 2012 junto con sus respectivos errores típicos (entre paréntesis); se confirma la significancia estadística de los estimadores a partir del test de Wald. Entre tanto, los coeficientes de la parte aleatoria también son significativos y dado que corresponden a las varianzas estimadas para cada nivel, se encuentra una variación sin explicar del logro académico promedio de los alumnos ( $\sigma_e^2$ ) y los planteles ( $\sigma_{\mu 0}^2$ ), haciendo que la estrategia empírica busque disminuir dicha varianza una vez se introducen de manera secuencial las variables explicativas.

**Tabla 1. Estimación del modelo no condicionado por países.**

Países	Parte Fija	Parte Aleatoria		Correlación intraclase	IGLS Deviance
	$\beta_{0ij}$	$\sigma_{\mu 0}^2$	$\sigma_e^2$	$\rho_e$	-2*loglikelihood
Alemania	518.102(5.150)	4834.029(436.093)	3099.997(89.157)	<b>39.07%</b>	29337.834
Bélgica	521.542(4.572)	5102.911(435.671)	3805.230(105.065)	<b>42.72%</b>	63688.148
Brasil	418.984(4.302)	2864.036(355.146)	2792.954(84.738)	<b>49.37%</b>	34039.971
Canadá	517.956(1.419)	1360.661(93.442)	5125.435(66.296)	<b>79.02%</b>	194049.373
Chile	452.153(4.392)	3521.707(266.293)	2612.916(63.551)	<b>42.59%</b>	46839.722
Colombia	401.623(2.686)	1988.986(232.577)	2805.374(56.842)	<b>58.51%</b>	59513.127
Corea	548.187(4.632)	2960.452(377.183)	4664.718(166.914)	<b>61.18%</b>	44455.213
Finlandia	517.782(1.870)	680.910(105.455)	6072.539(119.203)	<b>89.92%</b>	73614.412
Francia	503.662(5.186)	5013.923(536.423)	3366.693(95.325)	<b>40.17%</b>	30108.111
Shanghái	600.848(5.276)	3934.754(399.032)	3587.886(150.620)	<b>47.69%</b>	46969.550
Singapur	560.369(4.863)	3392.014(393.096)	5849.954(188.206)	<b>63.30%</b>	51516.848
Uruguay	415.469(4.631)	3354.039(355.446)	3392.987(97.939)	<b>50.28%</b>	34003.374

Fuente: Elaboración propia a partir de PISA 2012 (OCDE, 2014).

Ahora bien, con el fin de cuantificar cuál de los efectos asociados al nivel alumno o plantel aporta mayor explicación a la varianza desconocida del modelo, se procede a la estimación del coeficiente de correlación intraclase, estadístico que permite generar una primera aproximación sobre la dependencia del logro académico, ya sea por cuestiones asociadas al entorno familiar y del alumno, o del entorno escolar. De esta forma, al calcular el coeficiente con la varianza del nivel alumno se encuentra que en Finlandia (89.92%), Canadá (79.02%) Singapur (63.3%), Corea (61.18%), Colombia (58.51%) y Uruguay (50.28%) el total de la varianza desconocida es explicada, en mayor proporción, por la heterogeneidad que presentan las características del alumno y de su entorno familiar. Mientras en Alemania (39.07%), Francia (40.17%), Bélgica (42.72%), Chile (42.59%), Shanghái (47.69%), Brasil (49.37%) la diferenciación del logro académico es explicada por el nivel plantel. Ante estos resultados, la investigación se encauza en introducir variables que permitan disminuir la varianza no explicada, todo lo anterior, introduciendo el factor de expansión como ponderador de la varianza. En la tabla 2 se presentan los coeficientes estimados para cada uno de los países.

Los resultados sugieren que el compromiso educativo incide positivamente en el logro académico, pero no es un efecto generalizado en todas las economías en estudio. La variable

presentó el signo esperado y una significancia estadística en Finlandia (15.540), Bélgica (24.620), Singapur (15.640) y Shanghái (16.783), países que se caracterizan por mantenerse entre las primeras posiciones de PISA. Por tanto, configurar y alentar el desarrollo de estas prácticas al interior de los planteles en Colombia posiblemente generarían una mejora en el desempeño de los alumnos pues, claramente, los perfiles meta en educación deben estar orientados a implementar estrategias que mejoren sus cualificaciones y éstas deberían estar sustentadas en los procesos exitosos seguidos por otros países.

La percepción de intimidación escolar en los planteles educativos es un fenómeno de varias décadas, sin embargo, recientemente ha cobrado una mayor atención por cuanto ha logrado permear el equilibrio psicológico y la forma en cómo se relacionan los alumnos dentro de distintos contextos sociales. El modelo estimado muestra como en Bélgica, Canadá, Finlandia, Francia, Shanghái y Singapur la presencia de intimidación escolar impide el aprendizaje en los alumnos y está correlacionada con la obtención de 12.56 y 29.97 puntos menos en el logro académico promedio.

Las bajas expectativas que el alumno forme sobre su maestro impiden el aprendizaje por cuanto el intercambio de conocimiento puede verse afectado por la falta de credibilidad en los temas enseñados. Es así como en Corea, Singapur, Alemania, Colombia, Bélgica, Canadá, Chile y Uruguay la presunción es comprobada, a manera de hipótesis, por el modelo. Los resultados dan paso a repensar en la importancia que tiene la relación entre el alumno y el maestro, pues al ser el canal directo de transmisión del conocimiento es clave que no sólo se transmita con claridad, sino que también se mantenga al alumno interesado en el aprendizaje.

La presencia de maestros estrictos en los planteles está asociada con mayores logros académicos en Alemania, Canadá y Francia, arrojando un signo contrario al sugerido para su interpretación; lo anterior expone dos claros retos teóricos producto de la falta de definición técnica que las pruebas PISA auscultan de la variable. La primera de ellas es que la connotación de severidad de un maestro puede estar asociada con la rigurosidad con que se transmite el conocimiento; mientras que la segunda se logra orientar en la formalidad del lenguaje al interior de los cursos; estando ambas interiorizadas en la investigación.

Ahora bien, cursos con habilidades heterogéneas entre alumnos se asocian con resultados menores en Corea, y Francia, mientras que Brasil exhibe un resultado contrario al sugerir que los planteles con cursos caracterizados por contar con niveles de habilidades heterogéneas obtienen 13.534 puntos más que los cursos con cierta homogeneidad. Si bien, Brasil no capta el sentido que se desprende teóricamente de la variable expuesta, y pese a la falta de significancia de gran parte de los países, es adecuado sugerir que la política educativa debería fomentar la estabilización de las habilidades cognitivas del alumno al interior de los cursos, o en su defecto, propiciar espacios adicionales donde los alumnos puedan nivelarse, todo ello a partir de la incorporación de herramientas de acompañamiento escolar como sugiere Ghouali (2007).

**Tabla 2. Modelo entorno familiar, escolar, factores pedagógicos y de compromiso educativo**

Variables/Paises	PUNTAJES ALTOS EN PRUEBAS PISA 2012				REFERENCIA	PUNTAJES INTERMEDIOS EN PRUEBAS PISA 2012				PUNTAJES BAJOS EN PRUEBAS PISA 2012		
	Corea	Finlandia	Shanghái	Singapur	Colombia	Francia	Alemania	Bélgica	Canadá	Chile	Brasil	Uruguay
Niño	-2.203(2.956)	-15.026(2.034)*	4.322(1.935)**	-9.014(2.479)*	14.691(1.488)*	7.996(2.344)*	8.351(2.215)*	8.175(1.814)*	-2.865(1.195)**	15.415(1.618)*	10.734(2.278)*	7.859(2.285)*
Plantel Privado	4.116(8.937)	1.935(7.207)	31.759(13.537)**	-37.097(28.597)	19.626(6.968)*	9.040(8.627)	16.874(17.239)	47.181(7.722)*	35.270(4.106)*	31.992(6.505)*	67.284(10.173)*	46.798(8.386)*
Plantel Localizado en Ciudad	22.724(11.737)**	-4.003(3.354)	0.000(0.000)	0.000(0.000)	18.828(4.697)*	-7.753(7.716)	-6.800(10.127)	-7.762(9.074)	-0.217(2.380)	19.707(6.042)*	5.949(5.952)	17.923(5.412)*
Repente	-20.193(6.137)*	-69.891(8.756)*	-41.246(8.967)*	-61.161(8.694)*	-35.649(1.484)*	-22.415(5.387)*	-27.899(3.522)*	-56.022(2.866)*	-65.171(3.141)*	-53.298(4.087)*	-39.130(3.073)*	-54.260(3.483)*
Ausentarse	-74.223(9.152)*	-41.461(3.085)*	-49.357(15.738)*	-26.673(3.472)*	-7.225(4.036)**	-17.316(3.896)*	-11.569(5.728)**	-27.294(4.862)*	-24.116(1.401)*	-15.482(3.402)*	-2.386(2.512)	-4.129(2.355)**
Madre Educación Técnico/Universitaria	9.093(2.592)*	20.377(2.475)*	-2.591(2.671)	7.100(2.988)**	8.587(1.669)*	9.407(2.698)*	4.152(2.456)**	1.078(2.436)	9.214(1.359)*	7.899(1.946)*	5.513(2.308)**	7.730(2.760)*
Madre Empleada	19.767(8.492)**	25.605(4.592)*	17.908(7.797)**	19.885(7.600)*	11.144(2.408)*	20.314(5.380)*	-8.832(5.788)	9.625(4.352)**	18.489(2.915)*	5.711(3.367)**	9.735(3.273)*	0.424(4.824)
Padre Educación Técnico/Universitaria	9.746(2.588)*	13.701(2.419)*	10.266(2.461)*	12.822(3.559)*	4.300(1.677)*	9.766(2.839)*	5.440(2.573)**	3.717(2.584)	9.129(1.395)*	4.191(1.928)**	7.193(2.225)*	4.299(2.627)**
Padre Empleado	-6.668(8.646)	8.850(4.284)**	-9.488(6.560)	0.640(8.815)	0.432(3.180)	1.531(6.763)	5.917(7.821)	15.042(5.224)*	2.645(3.738)	-10.467(4.867)**	7.779(4.744)**	6.536(5.277)
Vive Con Padre Y Madre	18.109(3.866)*	16.406(2.345)*	0.820(2.358)	14.416(3.489)*	14.433(1.576)*	5.971(2.939)**	1.870(3.107)	8.709(2.652)*	11.852(1.605)*	4.856(1.910)*	6.970(2.387)*	14.787(2.635)*
Dotación Hogar	1.147(2.253)	28.296(1.914)*	7.230(1.869)*	13.479(2.905)*	6.081(2.021)*	27.414(2.450)*	10.986(2.379)*	15.859(1.787)*	17.760(1.192)*	11.566(1.788)*	4.232(2.481)**	6.015(2.174)*
Tamaño Clase	-9.942(17.404)	53.467(29.238)**	11.345(9.248)	-20.922(17.699)	14.828(8.343)*	60.015(8.333)*	49.839(8.666)*	15.249(10.726)	20.445(2.324)*	-1.736(8.924)	29.314(11.575)**	13.440(5.391)**
Maestros Tiempo Parcial	7.757(10.606)	-0.304(5.284)	-27.527(10.676)**	-4.487(14.052)	1.340(4.729)	51.043(51.627)	0.000(0.000)	81.758(18.978)*	13.575(4.640)*	17.257(7.991)**	-1.211(8.350)	25.998(14.612)**
Habilidades Heterogéneas	-25.956(12.552)**	-9.842(6.755)	21.946(16.553)	-3.529(18.160)	-11.021(8.154)	-27.183(12.228)**	5.836(15.072)	-21.414(13.855)	-3.334(3.702)	-6.283(8.873)	13.534(7.085)**	-5.164(10.271)
Escasez Materiales	-0.743(8.266)	-1.766(3.544)	10.553(10.301)	13.507(11.344)	-14.232(7.437)**	-35.134(7.113)*	12.036(9.664)	-13.831(7.751)**	-2.123(2.481)	-5.335(6.150)	-9.385(6.007)	-0.751(5.114)
Escasez de Maestros	7.538(9.282)	-2.121(3.060)	-10.409(8.051)	-3.749(8.552)	0.846(3.619)	1.820(6.374)	-24.488(8.656)*	-10.556(6.977)	-0.815(2.237)	-3.423(4.478)	-6.324(5.286)	0.986(4.740)
Escasez Espacios Educativos	25.957(12.691)**	5.182(5.165)	13.010(11.353)	5.839(8.300)	-1.123(6.705)	21.786(10.668)**	2.142(11.188)	4.864(10.436)	7.159(2.747)*	-9.283(7.215)	-6.298(9.656)	-8.998(6.998)
Escasez de Edificios	-11.587(12.140)	-3.826(5.061)	-11.013(13.058)	3.688(7.996)	0.835(8.657)	5.017(9.899)	-10.036(11.373)	-11.558(10.436)	-0.853(2.844)	-7.753(7.036)	8.168(10.405)	-15.794(8.160)
Actividades Escolares	13.565(8.197)**	0.000(0.000)	55.212(9.615)*	70.880(17.254)*	-6.571(8.465)	44.933(28.497)	47.973(19.044)**	-18.550(21.515)	17.185(3.994)*	33.851(13.146)*	-42.820(11.884)*	-110.506(10.821)**
Compromiso Educativo	10.378(8.094)	15.540(5.804)*	16.783(8.218)**	15.640(8.656)**	5.261(4.178)	-2.496(13.455)	11.766(16.129)	24.620(13.459)**	-1.155(2.807)	1.445(6.621)	5.838(5.816)	-4.132(9.279)
Intimidación Escolar	-9.039(11.913)	-13.322(7.902)**	-19.240(8.805)**	-28.234(9.797)*	-5.631(5.767)	-29.967(6.795)*	-18.045(18.287)	-26.997(8.561)*	-12.564(3.486)*	6.604(7.463)	0.747(7.090)	-0.348(5.756)
Bajas Expectativas Del Alumno	-29.142(13.456)**	-0.968(3.068)	-4.124(11.057)	-21.235(9.052)**	-8.868(5.253)*	-6.534(7.953)	-22.757(9.813)**	-17.999(7.800)**	-7.771(2.542)*	-29.828(7.246)*	-1.644(8.680)	-20.942(7.233)*
Maestros Estrictos	12.336(9.839)	-2.870(3.511)	4.339(11.776)	11.597(9.068)	0.270(6.113)	24.297(7.478)*	16.690(10.255)*	12.784(8.014)	4.843(2.656)**	10.379(7.682)	3.318(7.553)	6.598(6.210)
Intercepto	511.587(28.127)*	474.629(13.008)*	553.582(18.158)*	575.873(27.403)*	374.319(13.803)*	388.542(55.432)*	515.815(24.366)*	434.068(24.837)*	461.697(7.977)*	422.867(15.689)*	339.951(18.799)*	391.627(18.947)*
Observaciones	<b>3902</b>	<b>6344</b>	<b>4215</b>	<b>4437</b>	<b>5451</b>	<b>2694</b>	<b>2644</b>	<b>5671</b>	<b>16923</b>	<b>4316</b>	<b>3115</b>	<b>3057</b>
Escuelas	<b>147</b>	<b>282</b>	<b>146</b>	<b>152</b>	<b>306</b>	<b>200</b>	<b>195</b>	<b>257</b>	<b>839</b>	<b>194</b>	<b>166</b>	<b>169</b>
( $\sigma^2$ )	4486.256(152.135)	5260.631(95.467)	3494.499(143.002)	5559.374(168.952)	2464.900(53.271)	3109.079(82.594)	2975.655(85.028)	3423.542(94.257)	4760.667(60.518)	2425.257(56.992)	2580.865(78.729)	3054.365(81.425)
( $\sigma^2_{\text{aj}}$ )	1981.168(262.070)	347.846(49.930)	2154.772(300.349)	2042.664(265.330)	1052.518(112.405)	1554.427(185.305)	3037.632(336.886)	2613.884(269.020)	732.043(47.638)	1387.187(140.483)	1114.047(148.685)	787.660(119.414)
Modelo Nulo	7825.17	6753.449	7522.64	9241.968	4794.36	8380.616	7934.026	8908.141	6486.096	6134.623	5656.99	6746.026
Modelo	6467.424	5808.477	5649.271	7802.038	3517.418	4863.506	6013.287	6037.426	5492.71	3812.444	3694.912	3842.025
Pseudo $R^2$ Longford	<b>15.18%</b>	<b>16.95%</b>	<b>24.90%</b>	<b>17.74%</b>	<b>26.63%</b>	<b>44.35%</b>	<b>24.21%</b>	<b>32.23%</b>	<b>15.32%</b>	<b>37.85%</b>	<b>34.68%</b>	<b>43.05%</b>
Deviance Nulo	44455.213	7361.412	46969.55	51516.848	59513.127	30108.111	29337.834	63688.148	194049.373	46839.722	34039.971	34003.374
Deviance Modelo	44253.566	72609.356	46777.875	51226.329	58671.615	29699.549	29153.494	62953.292	192450.612	46365.692	33864.55	33485.38
Diferencia	201.647	1005.056	191.675	290.519	841.512	408.562	184.34	734.856	1598.761	474.03	375.421	517.994

Nota 1: Coeficiente significativo al: \*0.01 \*\*0.05 \*\*\*0.1

Nota 2: Los bajos coeficientes de ajuste del pseudo  $R^2$  de Longford (1993) para Finlandia, Canadá, Singapur y Corea se explica a partir del modelo no condicionado, el cual sugería evaluar características familiares y de alumnos para estos países con el fin de mejorar la explicación de la varianza no conocida.

Fuente: Elaboración propia a partir de PISA 2012 (OCDE, 2014).



Pese a la existencia de brechas en el logro académico entre niños y niñas no se logra establecer una tendencia que sugiera que las posiciones alcanzadas por los países están condicionadas por el sexo del alumno. Mientras que en Chile, Colombia, Brasil, Bélgica, Alemania, Francia, Shanghái y Uruguay los niños obtienen en promedio entre 4.32 y 15.41 puntos más que las niñas, en Finlandia, Singapur y Canadá el efecto diferencial está a favor de las niñas, y en Corea del Sur no prevalecen diferencias. Sin embargo, la diferencia de 14.69 puntos entre los niños y las niñas en Colombia evidencia una heterogeneidad en el aprendizaje que merece mayor atención, en el sentido en que mejorar en las pruebas implica que los niveles de aprendizaje deben ser uniformes.

La proporción de planteles (públicos o privados) en cada país logra reflejar parcialmente sus estructuras educativas. Así, los resultados econométricos no están condicionados por esta proporción debido a que, en países como Shanghái, Brasil, Colombia, Uruguay y Canadá, poco más del 64% de sus instituciones son públicas pero el logro académico obtenido por sus alumnos es inferior al obtenido en las instituciones privadas en aproximadamente 40 puntos, encontrando la mayor disimilitud en Brasil con 67.284 puntos y la menor en Colombia con 19.626. Además, la estructura educativa analizada muestra que cerca del 75% de las instituciones en Chile y Bélgica son privadas manteniendo en firme la brecha de resultados.

Los alumnos que han repetido al menos una vez algún curso del ISCED 2 o que se han ausentado de clases obtienen resultados ostensiblemente más bajos que aquellos que nunca han cometido el hecho. En Finlandia, Canadá y Singapur los alumnos que repiten curso obtienen entre 68.89, 65.17 y 61.16 puntos menos que los que nunca han repetido algún curso, mientras el absentismo se asocia con bajos rendimientos, en especial, en Corea del Sur donde el logro académico disminuye en promedio 74.22 para los alumnos que se han ausentado al menos una vez.

Lo anterior confirma el grave inconveniente que el absentismo y la repetición de curso escolar forja sobre los procesos formativos de los alumnos. Sin embargo, pese a que en todos los países las dos variables son significativas, exceptuando a Brasil para la variable absentismo escolar, y la diferencia entre logros académicos es considerablemente alta, no es posible interpretar que la eliminación de estos eventos conllevaría al aumento en el logro académico en la medida que no es un causante directo, sino más bien un efecto asociado al retraso cognitivo del alumno frente a los que siguen un proceso educativo continuo, y por tanto, se deben pensar en políticas diferenciadoras orientadas a prestar atención particular a los alumnos con estas características que convencionalmente se dan por cuestiones de vinculación temprana al mercado laboral o falta de recursos económicos en el hogar.

La localización del plantel en zonas distintas a las ciudades (incluyendo capitales) se asocia con diferenciales negativos. La puntuación obtenida por los alumnos de Chile, Corea y Uruguay que estudian en planteles ubicados en ciudades oscila entre 17.9 y 22.72 puntos más que aquellos pertenecientes a planteles ubicados en municipios, pueblos o villas, entendidos como zonas de menor desarrollo, pero sin poder precisar que son rurales debido a que las pruebas PISA no aportan esta información. En Colombia, 18.83 puntos es la diferencia promedio entre el logro académico de los alumnos que asisten a planteles ubicados en ciudades frente a los situados en municipios, pueblos o villas, convirtiéndose en una preocupación latente por cuanto el 21.10% de los alumnos evaluados en esta muestra están fuera de las ciudades. Los resultados introducen el componente de emplazamiento que bien merece ser profundizado en posteriores investigaciones dado que, al ser significativo en cuatro de los doce países<sup>2</sup>, el estudio sólo permite concluir que la calidad educativa no es homogénea

---

<sup>2</sup> El coeficiente igual a cero en Shanghái y Singapur es resultado de la no variabilidad de la muestra evaluada, puesto que el porcentaje de los alumnos ubicados en las ciudades es del 100%.

entre instituciones, soslayando las características propias de los planteles como por ejemplo la dotación escolar o la calidad de los maestros en zonas distantes a las urbes.

El nivel educacional del padre y la madre se relacionan positivamente con el logro académico del alumno. En países como Finlandia, Francia, Corea y Canadá el nivel de escolaridad de la madre tiene mayor magnitud que en el resto de países, lo cual sugiere que aquellos alumnos con madres tituladas de profesiones técnicas o universitarias obtienen 20.377, 9.407, 9.093 y 9.214 puntos más en comparación con los alumnos que tienen madres tituladas con educación secundaria o menos.

Por su parte, la escolaridad del padre tiene coeficientes igualmente positivos encontrando que los de mayor magnitud están en las economías presentadas previamente. Esta característica también muestra que la brecha de logro académico atribuida a la escolaridad de los padres se reduce a medida que el análisis pasa de países con mejores puntajes a menores, sugiriendo que la presencia de padres más cualificados en términos formativos, están en las economías con mayor desarrollo económico y, por tanto, el efecto es mayor cuando no se presenta la característica.

La posición ocupacional de los padres tiene dos alternativas de interpretación. La primera propone que padres/madres ocupados son un proxy del nivel económico del hogar y, por tanto, se espera que envíen a sus hijos al plantel, siendo el signo esperado positivo. La segunda alternativa permite explicar la presencia de signos negativos pues se relaciona con la asistencia académica provista en el hogar por parte de los padres. Hogares donde algunas de las figuras paternas tengan tiempo libre pueden emplear una parte en acompañar al alumno en la elaboración de actividades académicas y así ejercer una mayor atención al desarrollo cognitivo.

En Alemania y Uruguay el estado ocupacional de la madre no es significativo mientras para el resto sí, y al contar con signo positivo, la reflexión se esboza de acuerdo a la primera alternativa de interpretación de la variable, encontrando adicionalmente que gran parte de los países con madres ocupadas son aquellos que ocupan posiciones altas e intermedias de PISA y que, a su vez, cuentan con una mayor magnitud en comparación con los países de posiciones bajas. En relación a la ocupación del padre, el signo negativo se obtuvo en Chile, mientras en Bélgica, Brasil y Finlandia el signo es positivo.

Una variable adicional que permite consolidar el argumento sobre asistencia académica por parte de la madre y el padre hacia el alumno es la que enuncia si vive con ambas figuras. Los resultados apuntan al hecho de que en hogares donde está presente la característica los alumnos obtienen entre 4.856 (alumnos chilenos) y 18.109 (alumnos coreanos) puntos más que aquellos alumnos en convivencia monoparental o con otros miembros del hogar. En relación con los alumnos colombianos que conviven con ambas figuras familiares, obtienen en promedio 14.433 puntos más, siendo el cuarto país con mayor magnitud.

La variable dotación hogar condensa la tenencia por parte de los alumnos de al menos uno de ciertos elementos sindicados positivamente con el logro académico como escritorios, ordenadores, literatura clásica, internet y un lugar de estudio. En todos los países, exceptuando Corea, persiste la significancia estadística, donde la magnitud del coeficiente es mayor en Finlandia, Francia y Canadá con una diferencia positiva entre 28.296, 27.414 y 20.445 puntos a favor de los alumnos que poseen al menos uno de los elementos, mientras en Brasil, Colombia, Shanghái y Uruguay la magnitud está entre 4.232 y 7.230. No obstante, como limitante de la investigación está el hecho de no evaluar de manera particular cada uno de los elementos asociados con la variable, recogiendo así efectos conjuntos.

El tamaño de la clase es la variable que más interés ha despertado entre los teóricos, pues goza de gran preeminencia en los estudios educativos pese a que sus disímiles resultados dista de unificar consensos. En Alemania (49.839), Francia (60.015), Brasil (29.314), Canadá (20.445), Finlandia (53.467), Uruguay (13.440) y Colombia (14.828) la diferencia está a favor de los cursos con más de 25 alumnos, mientras Chile, Corea, Singapur, Bélgica y Shanghái no existe diferencia.

Si bien, los resultados son contrarios a lo esperado, la generalidad presentada en los países sugiere conformar tamaños de clase mayor a 25 alumnos, pero la pregunta secular que no es contestada en la investigación debido a que la concentración de alumnos en determinados cursos no permite una mayor segmentación de los mismo es: ¿cuál es el tamaño óptimo de un curso de secundaria? Hoxby (2000) en su investigación plantea que la falta de consenso se explica por el grado de heterogeneidad de habilidades al interior de los cursos, práctica realizada habitualmente por los planteles en aras de diferenciar a los alumnos con alto y bajo potencial cognitivo.

El material de instrucción (posesión de textos académicos en el plantel) refleja el grado de acercamiento entre el alumno y el conocimiento al ser un instrumento de aprendizaje de fácil acceso, por tanto, su escasez debería reflejar una correspondencia negativa con el logro académico; resultado que se da con los alumnos de Francia, Bélgica y Colombia cuyo diferencial oscila entre 13.831 y 35.134. Por otra parte, no contar con mecanismos para actuar ante la escasez o falta de maestros cualificados para las competencias de matemáticas, ciencias y lenguaje por parte de los planteles está relacionado con logros académicos negativos sólo en Alemania, mientras para el resto de los países la variable no es significativa. La evidencia estadística sugiere que los alumnos alemanes que pertenecen a planteles que no están en capacidad de actuar ante la escasez de maestros obtienen 24.488 puntos menos.

En cuanto a las actividades extracurriculares, se relacionan positivamente con el logro académico. Realizar actividades que demanden concentración y agilidad mental como el juego de ajedrez o los clubes de matemáticas, informática y arte conllevan al desarrollo de habilidades cognitivas fuera de la clase que, si bien no es medible, refleja la capacidad de análisis y conexiones lógicas que los alumnos son capaces de efectuar en situaciones reales tal como lo presenta el informe de la OCDE (2014, p. 63,193,233) al explicar los niveles de competencia.

Con lo anterior, el fomento de estas actividades escolares en los planteles de Alemania, Canadá, Chile, Corea, Shanghái y Singapur guarda una relación positiva con el logro académico de sus alumnos, quienes obtienen entre 13.565 y 70.680 puntos más que los alumnos matriculados en planteles donde no se ofrece ninguna actividad; mientras en Brasil y Uruguay la provisión de actividades escolares se relacionan de forma negativa con el logro académico, resultados que para justificarlos requieren de un análisis profundo sobre la estructura educativa de estos países, no siendo el objetivo del documento pues no estamos en el orden de las humanidades y el ejercicio requerido para esto es cualitativo.

#### **4.1. Validación de los supuestos del modelo jerárquico.**

Los modelos jerárquicos sugieren el cumplimiento de tres supuestos iniciales que merecen ser examinados. El primero de los supuestos es la normalidad de la variable dependiente que justifica la agregación de los valores plausibles de las pruebas PISA en un solo término y para ello se emplea el estadístico conocido como coeficiente intercuantil, que de ser cercano a 1.3 se comprueba la hipótesis de normalidad en el conjunto de datos analizado.

Al examinar de manera independiente las puntuaciones promedio por competencias en cada país (tabla 3) se corrobora el supuesto de normalidad. Por tanto, pese a que las pruebas PISA evalúan

las competencias en lectura, ciencias y matemáticas que a su vez están construidas con base a cinco valores plausibles, el proceso de agrupación a través de una media muestral que da como resultado un único valor correspondiente al logro académico promedio por alumno es acertado.

**Tabla 3. Prueba de normalidad de puntuaciones promedio por competencias y países.**

<i>Países</i>	<i>Matemáticas</i>			<i>Ciencias</i>			<i>Lectura</i>		
	Intervalo	$\sigma$	Coefficiente	Intervalo	$\sigma$	Coefficiente	Intervalo	$\sigma$	Coefficiente
<i>Bélgica</i>	127.434	91.847	<b>1.387</b>	116.748	87.850	<b>1.329</b>	118.352	87.858	<b>1.347</b>
<i>Brasil</i>	106.870	78.079	<b>1.369</b>	101.362	74.217	<b>1.366</b>	106.980	77.744	<b>1.376</b>
<i>Canadá</i>	115.283	82.290	<b>1.401</b>	114.603	84.304	<b>1.359</b>	114.037	84.251	<b>1.354</b>
<i>Chile</i>	120.696	81.384	<b>1.483</b>	114.370	77.875	<b>1.469</b>	97.938	71.644	<b>1.367</b>
<i>Colombia</i>	95.108	71.901	<b>1.323</b>	96.419	70.749	<b>1.363</b>	102.537	74.340	<b>1.379</b>
<i>Alemania</i>	124.708	88.845	<b>1.404</b>	114.556	84.673	<b>1.353</b>	113.248	80.989	<b>1.398</b>
<i>Finlandia</i>	112.167	82.521	<b>1.359</b>	122.156	90.098	<b>1.356</b>	121.703	90.245	<b>1.349</b>
<i>Francia</i>	122.215	86.879	<b>1.407</b>	113.484	85.867	<b>1.322</b>	118.954	92.435	<b>1.287</b>
<i>Corea</i>	131.874	93.571	<b>1.409</b>	102.014	76.406	<b>1.335</b>	105.983	80.348	<b>1.319</b>
<i>Shanghái</i>	130.472	95.090	<b>1.372</b>	104.066	75.290	<b>1.382</b>	100.560	73.778	<b>1.363</b>
<i>Singapur</i>	144.493	100.085	<b>1.444</b>	143.417	100.086	<b>1.433</b>	130.637	94.264	<b>1.386</b>
<i>Uruguay</i>	115.361	82.929	<b>1.391</b>	116.188	86.251	<b>1.347</b>	115.320	85.899	<b>1.342</b>

Fuente: Elaboración propia a partir de PISA 2012 (OCDE, 2014).

El segundo supuesto hace referencia a que los componentes aleatorios y los valores pronosticados son ortogonales (independencia). Con las gráficas presentadas en el anexo 3 se comprueba la no existencia de tendencia y a partir del cálculo del coeficiente de correlación se afirma esta apreciación. En Bélgica, Colombia, Canadá y Finlandia en el nivel plantel se determinó una correlación promedia de 0.166 que en términos estadísticos no implica correlaciones altas y, por tanto, se puede concluir que también cumplen con el supuesto.

Finalmente, el tercer supuesto hace referencia a la normalidad del término error, contraste que se efectúa con un análisis gráfico de los residuales y es complementado con el test Jarque-Bera presentado en el anexo 4. Se encontró que la distribución de los errores es normal en Alemania, Chile, Brasil, Uruguay y Francia, mientras en Colombia, Canadá, Corea del Sur, Finlandia, China-Shanghái, Singapur y Bélgica el supuesto no se cumple para el nivel alumno y en el último país tampoco se cumple en el nivel plantel. El incumplimiento del supuesto está dado por la alta heterogeneidad en los logros académicos de los alumnos y su concentración en cada uno de los niveles de competencia; sin embargo, lo anterior no afecta la insesgadez de los coeficientes estimados.

## 5. Conclusiones.

Las características del alumno y del entorno familiar resaltan el papel del hogar como orientador del aprendizaje, pues convivir con la figura paterna y materna, el nivel de escolaridad de los padres y su vinculación laboral sugieren una relación positiva con el desempeño escolar. Por otra parte, es evidente la brecha en la calidad de la educación existente entre instituciones públicas y privadas aun cuando la proporción al interior de ciertos países evidencia estructuras educativas públicas.

La persistencia de habilidades homogéneas al interior de los cursos puede ser una característica controlada por los sistemas educativos de cada país, que al igual que el tamaño de los cursos se asocian positivamente con el logro académico. Si bien, una estrategia sería la conformación de cursos de acuerdo al nivel cognitivo del alumno, señalizados por sus resultados en pruebas nacionales y evaluaciones internas de los planteles educativos, las estrategias pedagógicas de acompañamiento escolar entre alumnos con habilidades disímiles se constituyen en una alternativa de política.

Las características del entorno escolar vía dotación de elementos como la tenencia o no de textos, edificios y aulas de clase, muestra una asociación diferencial entre países y consistencia analítica pues su escasez se relaciona con una disminución del logro académico en países como Francia, Bélgica y Colombia. Así mismo, se encontró un hecho interesante que relaciona el tamaño de la clase y la escasez de aulas de clase. En países donde el tamaño de la clase es mayor y que a su vez se asocian con un logro académico positivo, la escasez de aulas se convierte en un factor que permite mantener esta relación. No obstante, la discusión sobre el tamaño de la clase sigue abierta por cuanto no se llega a un consenso dada la proporcionalidad de alumnos por cursos entre países, convirtiéndose en una extensión para futuros trabajos el profundizar sobre esta característica que se sugiere sea controlada desde la heterogeneidad de habilidades.

La investigación evalúa los efectos que la pedagogía y el compromiso educativo generan sobre el logro académico, encontrando una relación positiva entre las variables definidas para someter a prueba la hipótesis planteada. Simultáneamente, se encontró consistencia entre la intimidación escolar y las expectativas que los alumnos forman de los maestros, relación negativa que se da cuando las expectativas son bajas de los alumnos residentes en Corea, Singapur, Colombia, Alemania, Bélgica, Canadá, Chile y Uruguay. Estas características sugieren que en los planteles donde existe una percepción de intimidación escolar y una baja relación entre actores educativos se impide el aprendizaje, se dan bajos resultados en las pruebas.

Propender a una disminución del absentismo y la repitencia escolar; mejorar las condiciones estructurales de la economía para que el acceso a la educación y la inserción al mercado laboral sean procesos dinámicos, en especial para los padres de familia; fomentar practicas académicas extracurriculares; crear cátedras morales y éticas que estimulen el respeto y la tolerancia hacia los compañeros con el fin de disminuir la intimidación escolar; solidificar el vínculo maestro-alumno a partir de ejercicios de comunicación fuera de los espacios académicos son factores que permiten sugerir un perfil educativo meta. Adicionalmente, debe reconocerse socialmente la importancia que los maestros tienen en la educación y, por tanto, es decisivo brindar condiciones que permita elevar sus titulaciones académicas.

Los modelos multinivel son una herramienta metodológica que contribuye en la correcta evaluación de las características asociadas al proceso formativo de los alumnos dada su capacidad para dividir la varianza desconocida en niveles, siendo dos los analizados en la investigación, los alumnos y los planteles. Así mismo, se encontró una consistencia en las estimaciones en relación a la preponderancia de profundizar en las características que estuvieran asociados a un determinado nivel y que tuvieran un mayor predominio en la explicación de la varianza en cada país.

Los resultados disímiles entre países producto del análisis econométrico permiten corroborar la hipótesis planteada. Es evidente que las variables explicativas examinadas se relacionan de distintas formas al interior de cada contexto educativo y en ciertos casos guardan cierto grado de homogeneidad en cuanto a su relación con la variable dependiente.

El mejoramiento de la calidad de educación es un proceso arduo, que conlleva a repensar en los modelos educativos que se siguen al interior de cada país y para ello es importante tener en cuenta fundamentos teóricos y empíricos que permitan a los hacedores de política enfocarse en las características del entorno familiar o escolar que se asocien a una mejora en el logro académico del alumnado. Con lo anterior, a nivel técnico se recomienda el uso de los modelos jerárquicos para analizar el fenómeno de la educación, tanto en niveles como en métodos más sofisticados como los modelos jerárquicos probabilísticos, pues métodos convencionales no captan las unidades de análisis de manera adecuada.

Finalmente, los especialistas en educación fueron los primeros en usar estructuras jerárquicas en sus análisis, por tanto, es claro que la multidisciplinariedad de los campos se reforzaría con experimentos económicos que permitiesen acercar a los investigadores sociales a respuestas tentativas que la sola base de datos PISA de logro académico no permiten abarcar, generando el siguiente interrogante: ¿existe un nivel adicional que mejore la comprensión del logro académico?

## **Agradecimientos**

Esta investigación es un subproducto derivado del proyecto: “Determinantes del Logro Académico en los Alumnos de Secundaria: Un Análisis de la Incidencia del Entorno Escolar a través de las Pruebas Pisa 2012 con Modelos Lineales Jerárquicos”, financiado por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES). Las ideas, opiniones, tesis y argumentos expresados son de autoría exclusiva del autor y no representa el punto de vista del Instituto.

## **Referencias**

- Barrientos, M.J. (2008). Calidad de la educación pública y logro académico en Medellín 2004-2006. Una aproximación por regresión intercuartil. *Lecturas de Economía*, 68, 121-144.
- Becker, G.S. (1962). Irrational behavior and economic theory. *Journal of Political Economy*, 70(1), 1-13.
- Betts, J.R., & Shkolnik, J.L. (2000). The effects of ability grouping on student achievement and resource allocation in secondary schools. *Economics of Education Review*, 19(1), 1-15.
- Bryk, A.S., & Raudenbush, S.W. (1992). *Hierarchical linear models for social and behavioral research: Applications and data analysis methods*. Newbury Park, CA: SAGE.
- Calero, J., & Escardíbul, J.O. (2007). *Evaluación de servicios educativos: el rendimiento en los centros públicos y privados medido en PISA-2003*. IEB Working Paper 2007/07.
- Cano, F. (2006). Factores de logro cognitivo en la escuela primaria colombiana. Estudio realizado sobre una muestra de planteles grados 3º, 5º (1993-1994). *Estudios Sobre Eficacia Escolar En Iberoamérica*, 15, 33-60.
- Casas, A.F., Gamboa, L.F., & Piñeros, L.J. (2002). *El efecto escuela en Colombia, 1999-2000*. Bogotá, Colombia: Editorial Universidad del Rosario.
- Cervini, R. (2004). Nivel y variación de la equidad en la educación media de Argentina. *Revista Iberoamericana de Educación*, 34(1), 1-18.
- Cohen, D., Raudenbush, S., & Ball, D. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 25(2), 119-142.
- Coleman, J. (1968). The concept of equality of educational opportunity. *Harvard Educational Review*, 38(1), 7-22.

- Cordero, J. M., Manchón, C., & Simancas, R. (2012). Análisis de los condicionantes del rendimiento educativo de los alumnos españoles en PISA 2009 mediante técnicas multinivel. *Presupuesto y Gasto Público*, 67, 71-96.
- Correa, J. J. (2004). Determinantes del rendimiento educativo de los estudiantes de secundaria en Cali: un análisis multinivel. *Sociedad y Economía*, 6, 81-105.
- Denison, E. F. (1962). *Sources of economic growth in the United States and the alternatives before us*. New York, USA: Committee for Economic Development.
- Ermisch, J., & Francesconi, M. (2001). Family matters: Impacts of family background on educational attainments. *Economica*, 68(270), 137-156.
- Galor, O., & Zeira, J. (1993). Income distribution and macroeconomics. *The Review of Economic Studies*, 60(1), 35-52.
- Gaviria, A., & Barrientos, J. H. (2001). Determinantes de la calidad de la educación en Colombia. *Archivos de Economía*, 1(159), 88.
- Gaviria, J. L., & Castro, M. (2005). Modelos jerárquicos lineales. Serie Cuadernos de Estadística, (29).
- Ghouali, H. (2007). El acompañamiento escolar y educativo en Francia. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 12(32), 207-242.
- Goldstein, H. (1995). *Multilevel Statistical Models 2nd edition*. Bristol, United Kingdom: Hodder Education.
- Hanushek, E. (1971). Teacher characteristics and gains in student achievement: Estimation using micro data. *The American Economic Review*, 61(2), 280-288.
- Hanushek, E. A. (2008). The Economic benefits of improved teacher quality. In *Governance and performance of education systems* (pp. 107-135). Springer.
- Hanushek, E., Markman, J., & Rivkin, S.G. (2003). Does peer ability affect student achievement? *Journal of Applied Econometrics*, 18(5), 527-544.
- Hernández, F., Rosário, P., de Tejada, J.D., Martínez, P., & Ruiz, E. (2006). Promoción del aprendizaje estratégico y competencias de aprendizaje en estudiantes de primero de universidad: evaluación de una intervención. *Revista de Investigación Educativa*, 24(2), 615-632.
- Hox, J. (2002). *Quantitative methodology series. Multilevel Analysis Techniques and Applications*. Mahwah, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Hoxby, C.M. (2000). The effects of class size on student achievement: New evidence from population variation. *The Quarterly Journal of Economics*, 115(4), 1239-1285.

- Jencks, C. (1972). *Inequality: A reassessment of the effect of family and schooling in America*. New York, USA: Basic Books.
- Kane, T.J. (2006). Chapter 23 Public Intervention in Post-Secondary Education. *Handbook of the Economics of Education*, 2, 1369-1401.
- Lazear, E.P. (1980). *Family Background and Optimal Schooling Decision*. National Bureau of Economic Research Cambridge, Mass., USA.
- Lee, J.W., & Barro, R.J. (2001). Schooling quality in a cross-section of countries. *Economica*, 68(272), 465-488.
- López, S.F. (2010). El papel de los incentivos y los docentes en la calidad de la educación oficial de Medellín. Trabajo de Grado No Publicado de Maestría (Meritoria), Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Martín, E.L., Asencio, E.N., Ordóñez, X.G., & Romero, S.J. (2009). Estudio de variables determinantes de eficiencia a través de los modelos jerárquicos lineales en la evaluación PISA 2006: el caso de España. *Education Policy Analysis Archives*, 17(1), 1-24.
- Mayer, S.E., & Peterson, P.E. (1999). *Earning and learning: How schools matter*. Brookings Institution Press.
- Núñez, J., Steiner, R., Cadena, X., & Pardo, R. (2002). ¿Cuáles colegios ofrecen mejor educación en Colombia? *Archivos de Economía*, 193, 1-56.
- Organisation for Economic Co-operation and Development (2014). *PISA 2012 results: What students know and can do* (volume I, revised edition, February 2014): Student performance in mathematics, reading and science. OECD Publishing.
- Orrego, M. (2009). *Incidencia del entorno escolar en el rendimiento académico de los alumnos de secundaria: comparaciones internacionales con base en las pruebas de PISA 2006*. Universidad del Valle. Cali: Facultad de Ciencias Sociales y Económicas. Economía.
- Piñeros, L. J., & Rodríguez, A. (1998). *Los insumos escolares en la educación secundaria y su efecto sobre el rendimiento académico de los estudiantes: un estudio en Colombia*. Washington, DC: The World Bank/Latin America and the Caribbean Region/Department of Human Development.
- Ramos, R., Duque, J.C., & Nieto, S. (2012). *Decomposing the rural-urban differential in student achievement in Colombia using PISA microdata*. Working Paper 23, 1-28.
- Raudenbush, S.W., & Bryk, A.S. (2002). *Hierarchical linear models: Applications and data analysis methods* (Vol. 1). Sage.
- Sarmiento, A., Becerra, L., & González, J. I. (2000). La incidencia del plantel en el logro educativo del alumno y su relación con el nivel socioeconómico. *Coyuntura Social, Fedesarrollo*, 264, 53-63.



- Schultz, T.W. (1961). Investment in human capital. *The American Economic Review*, 51(1), 1-17.
- Snijders, T., & Bosker, R. (1999). *Multilevel modeling: An introduction to basic and advanced multilevel modeling*. London, United Kingdom: SAGE.
- Spady, W.G. (1973). The Impact of School Resources on Students. *Review of Research in Education*, 1(1), 135-177.
- Tobón, D., Posada, H. M., & Ríos, P. (2009). Determinants of the performance of the schools in Medellín in the High-School Graduation-Year Test (ICFES). *Cuadernos de Administración*, 22(38), 311-333.
- Vivas, H. (2008). *Educación, background familiar y calidad de los entornos locales en Colombia (Tesis Doctoral)*. Departamento d'Economia Aplicada, Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Barcelona.
- Zambrano, J. C. (2013). Análisis multinivel del rendimiento escolar en matemáticas para cuarto grado de Educación Básica Primaria en Colombia. *Sociedad y Economía*, 25, 205-235.

## Anexos

### Anexo 1. Variables seleccionadas y metodología de construcción.

	Variable	Signo Esperado	Construcción (A partir de los cuestionarios Alumno y Plantel de las pruebas PISA 2012)
CARACTERÍSTICAS DEL ALUMNO Y DEL ENTORNO FAMILIAR	<i>Niño</i>	(+)	0=Niña 1=Niño
	<i>Repitente</i>	(-)	0=Nunca 1= Al menos una vez
	<i>Ausentarse</i>	(-)	0=Nunca 1= Al menos una vez
	<i>Vive con Padre y Madre</i>	(+)	0= Otro Miembro del Hogar 1= Si vive con el Padre y Madre
	<i>Madre Educación Técnica/ Universitaria</i>	(+)	0= No tiene 1= Si tiene
	<i>Madre Empleada</i>	(+)	0= No trabaja 1= Está Empleada
	<i>Padre Educación Técnica/ Universitaria</i>	(+)	0 = No tiene 1= Si tiene
	<i>Padre Empleado</i>	(+)	0= No trabaja 1= Está Empleado
	<i>Dotación Hogar</i>	(+)	0=No tiene nada de lo mencionado 1= Posee al menos uno de estas dotaciones: escritorio, un computador, conexión a internet, literatura clásica, DVD y un lugar de estudio
CARACTERÍSTICAS DEL ENTORNO ESCOLAR Y DOTACIONES DEL PLANTEL	<i>Plantel Privado</i>	(+)	0=Pública 1=Privada
	<i>Plantel Localizado en Ciudad</i>	(+)	1= Ciudad 0= Municipio/Villa
	<i>Tamaño de Clase</i>	(-)	0= 25 alumnos o menos 1=26 alumnos o más
	<i>Maestros tiempo Parcial</i>	(-)	0= No tienen 1=Si tienen
	<i>Escasez Materiales</i>	(-)	0= No hay escasez 1= Hay escasez
	<i>Escasez Espacios Educativos</i>	(-)	0= No hay escasez 1= Hay escasez
	<i>Escasez de Edificios</i>	(-)	0= No hay escasez 1= Hay escasez
	<i>Escasez de Maestros</i>	(-)	0= No hay escasez 1= Hay escasez
	<i>Actividades Escolares</i>	(+)	0= No ofrece ninguna de las actividades 1=Ofrece al menos una de las actividades
COMPROMISO EDUCATIVO Y PEDAGOGÍA	<i>Compromiso Educativo</i>	(+)	0= No lo están 1=Si están comprometidos
	<i>Intimidación Escolar</i>	(-)	0= No Impide el aprendizaje 1= Si impide el aprendizaje
	<i>Habilidades Heterogéneas</i>	(-)	0= No Impide el aprendizaje 1= Si impide el aprendizaje
	<i>Bajas Expectativas del Alumno</i>	(-)	0= No Impide el aprendizaje 1= Si impide el aprendizaje
	<i>Profesores Estrictos</i>	(-)	0= No Impide el aprendizaje 1= Si impide el aprendizaje

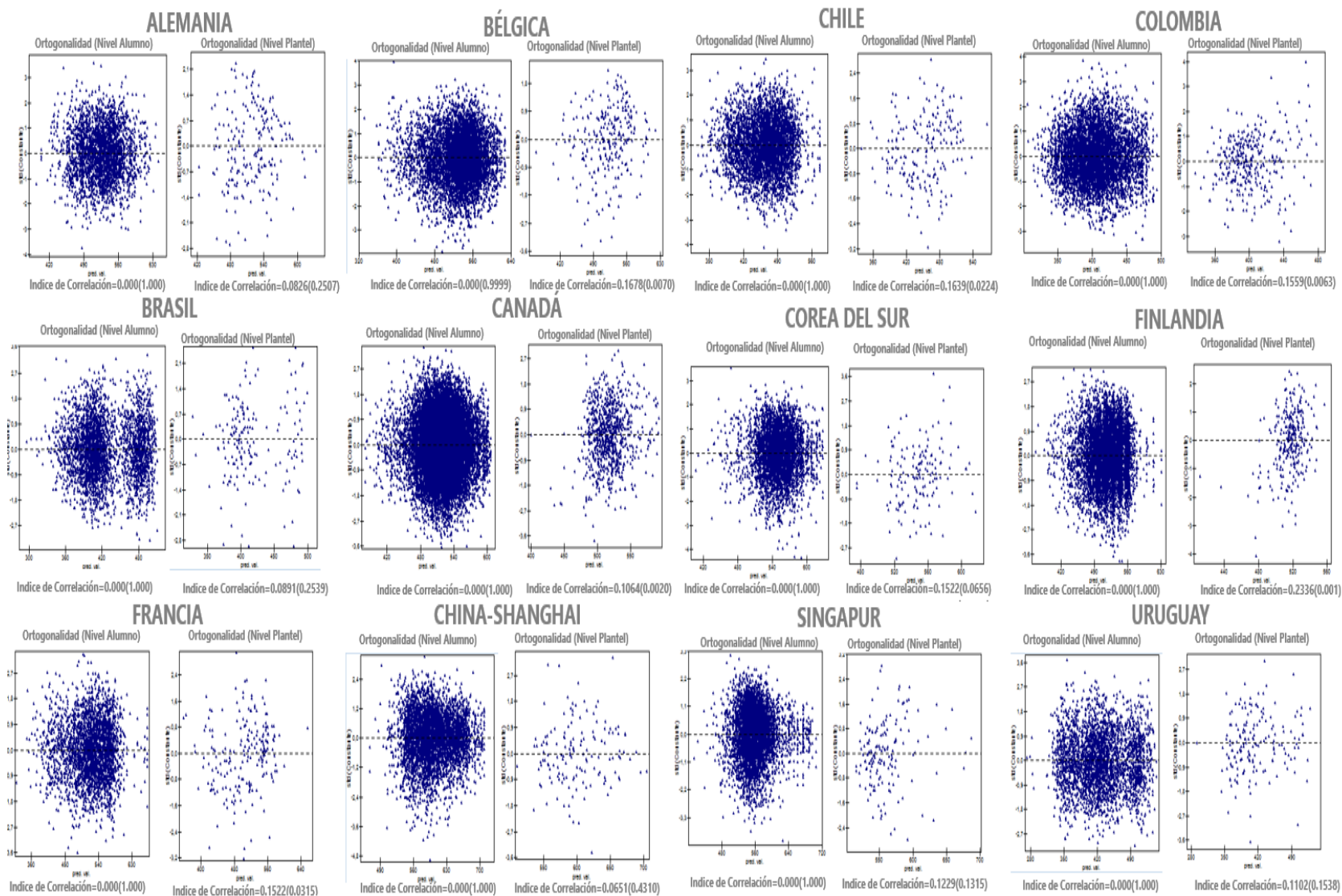
Fuente: Elaboración propia con base en los Codebook de PISA 2012 (OCDE, 2014).

## Anexo 2. Estadísticos descriptivos con muestra agregada.

VARIABLES					
Variable Dependiente	Mínimo	Máximo	Medía	Desv. Típica	Número de Observaciones
Logro Académico	176.669	859.766	511.996	97.268	62769
<b>Regresores Nivel Alumno</b>					
<i>Niño</i>	0	1	0.4874699	0.4998470	62769
<i>Repitente</i>	0	1	0.0786535	0.2691993	62769
<i>Ausentarse</i>	0	1	0.1120298	0.3154057	62769
<i>Vive Con Padre Y Madre</i>	0	1	0.8029601	0.3977659	62769
<i>Madre Con Educación Técnica o Universitaria</i>	0	1	0.6006627	0.4897661	62769
<i>Madre Empleada</i>	0	1	0.9536077	0.2103349	62769
<i>Padre Con Educación Técnica o Universitaria</i>	0	1	0.6326849	0.4820772	62769
<i>Padre Empleado</i>	0	1	0.9695550	0.1718096	62769
<i>Dotación Hogar</i>	0	1	0.3653077	0.4815202	62769
<b>Regresores Nivel Plantel</b>					
<i>Plantel Privado</i>	0	1	0.2539311	0.4352621	62769
<i>Plantel Localizado En Ciudad</i>	0	1	0.5470853	0.4977820	62769
<i>Tamaño De Clase</i>	0	1	0.6371776	0.4808180	62769
<i>Maestros Tiempo Parcial</i>	0	1	0.8659848	0.3406714	62769
<i>Escasez Materiales</i>	0	1	0.4800937	0.4996076	62769
<i>Escasez Espacios Educativos</i>	0	1	0.5872007	0.4923412	62769
<i>Escasez de Edificios</i>	0	1	0.6185697	0.4857417	62769
<i>Escasez de Maestros</i>	0	1	0.3340662	0.4716667	62769
<i>Actividades Escolares</i>	0	1	0.1010053	0.3013381	62769
<i>Compromiso Educativo</i>	0	1	0.2793576	0.4486871	62769
<i>Intimidación Escolar</i>	0	1	0.7581927	0.4281815	62769
<i>Habilidades Heterogéneas</i>	0	1	0.8845131	0.3196112	62769
<i>Bajas Expectativas Del Alumno</i>	0	1	0.5677165	0.4953972	62769
<i>Profesores Estrictos</i>	0	1	0.6902611	0.4623896	62769

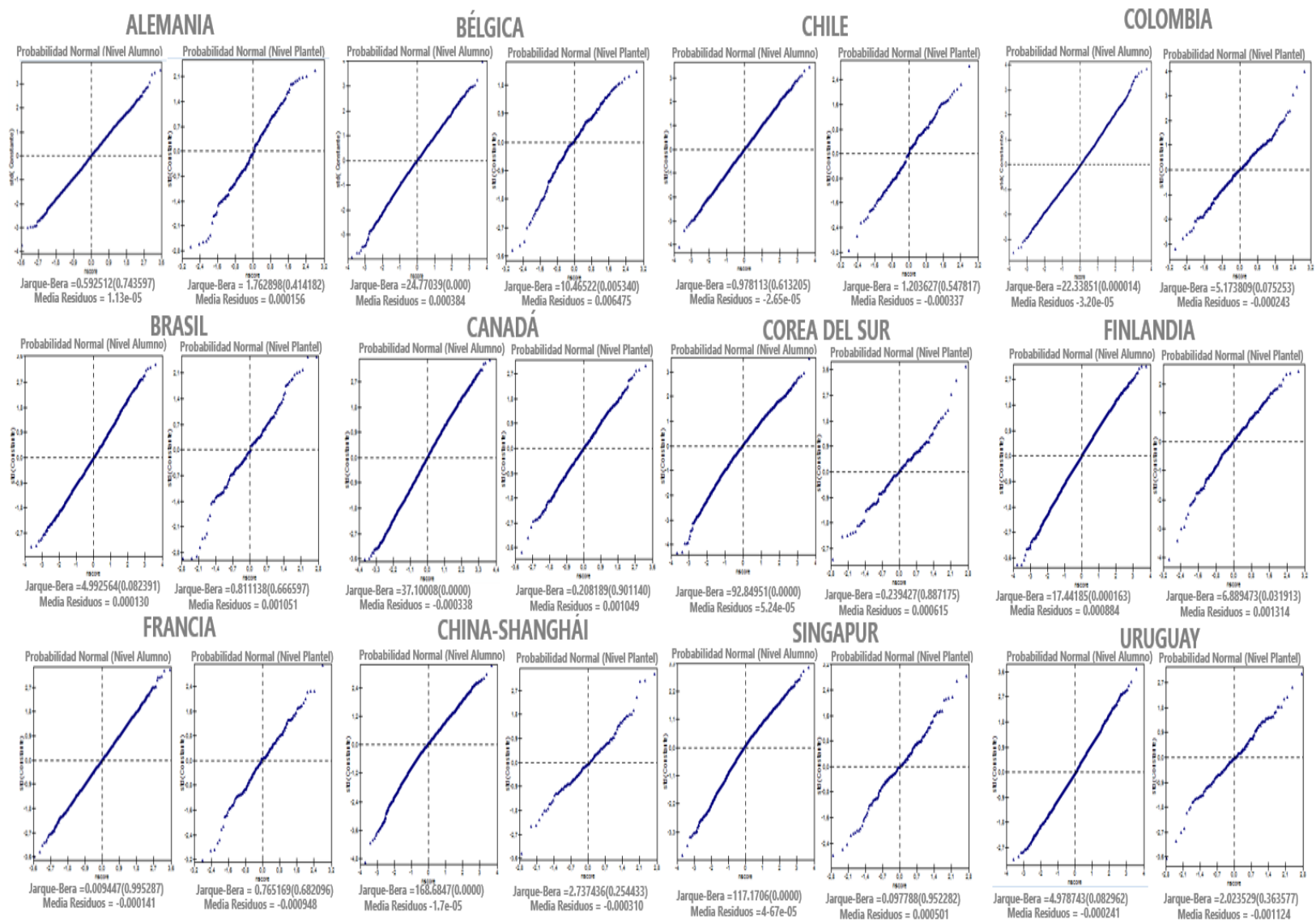
Fuente: Elaboración propia a partir de PISA 2012 (OCDE, 2014).

### Anexo 3. Supuesto de ortogonalidad residuales.



Fuente: Elaboración propia a partir de PISA 2012 (OCDE, 2014).

## Anexo 4. Supuesto de normalidad residuales.



Fuente: Elaboración propia a partir de PISA 2012 (OCDE, 2014).



## Creación de un índice de movilidad para rankings de hoteles

XIMÉNEZ DE SANDOVAL, JOSÉ LUIS

Departamento de Economía Aplicada (Estructura Económica)  
Facultad de Turismo. Universidad de Málaga  
Correo electrónico: joseluis.xs@uma.es

FERNÁNDEZ-MORALES, ANTONIO

Instituto Universitario de Investigación de Inteligencia e Innovación Turística (i3t)  
Universidad de Málaga  
Correo electrónico: afdez@uma.es

GUEVARA-PLAZA, ANTONIO

Instituto Universitario de Investigación de Inteligencia e Innovación Turística (i3t)  
Universidad de Málaga  
Correo electrónico: guevara@uma.es

### RESUMEN

Los rankings de hoteles ejercen gran influencia sobre los turistas a la hora de elegir un hotel. Los hoteleros también se esfuerzan por aparecer en lo más alto de la clasificación. Sin embargo, la evolución de estos rankings a lo largo del tiempo ha sido poco estudiada, por lo que es necesario profundizar en su análisis debido a las importantes implicaciones que tiene para los empresarios. ¿Permanecen los hoteles en las mismas posiciones o por el contrario experimentan grandes cambios en la clasificación? Este trabajo trata de aportar nuevas herramientas para el análisis de estos rankings con la creación de un índice que mide la movilidad de un hotel en el ranking de su ciudad. Se aplicará el modelo a una muestra de 727 hoteles con datos extraídos de Tripadvisor en cinco ciudades españolas (Barcelona, Madrid, Sevilla, Valencia y Zaragoza).

**Palabras clave:** TripAdvisor, ranking, hoteles, movilidad, minería de datos.

**Clasificación JEL:** L83; Z31; O33.

**MSC2010:** 91B82; 62P20; 62G30.

# Designing a hotel ranking mobility index

## ABSTRACT

Hotel rankings exert great influence on tourists when choosing a hotel. The hoteliers also strive to appear at the top of the ranking. However, the evolution over time of these rankings has been little studied, so it is necessary due to the important implications for entrepreneurs to deepen the analysis to answer questions like this: Do the hotels stay in the same (or quite similar) positions or do they experience big changes in the classification? This work tries to provide new tools for the analysis of these rankings with the creation of an index that measures the mobility of a hotel in the ranking. The model will be applied to a sample of 727 hotels with data extracted from Tripadvisor in five Spanish cities (Barcelona, Madrid, Seville, Valencia and Zaragoza).

**Keywords:** TripAdvisor, ranking, hotels, mobility, data mining.

**JEL classification:** L83; Z31; O33.

**MSC2010:** 62P20; 62G30.



## 1. Introducción.

Por varias razones los seres humanos nos sentimos atraídos por las listas. Nos ahorran esfuerzos para clasificar y elegir. Nos ayudan a ordenar, a tomar decisiones. Son básicamente útiles. Si bien las listas son casi tan antiguas como el ser humano, y así lo indica Umberto Eco (2011) cuando nos recuerda que el primer ejemplo de lista aparece en la *Ilíada* de Homero; este autor italiano también reconoce que la gran madre de todas las listas, infinita por definición porque está en continuo desarrollo es la World Wide Web.

Es en esta inmensa red donde surge en el año 2000 una empresa que ha revolucionado el sector turístico precisamente por sus listas: Tripadvisor. Ordena y clasifica hoteles, restaurantes y destinos de los cinco continentes a partir de los comentarios y valoraciones de los usuarios para facilitarnos la toma de decisiones.

La gran influencia que los rankings de hoteles ejercen sobre los clientes cuando estos van a elegir el establecimiento donde alojarse es reconocida por expertos en la materia, académicos y profesionales (Ghose, Ipeirotis, & Li, 2012). También los empresarios se ven afectados por estas clasificaciones en la medida en que una buena o mala posición puede influir no sólo en su reputación sino en el número de reservas y, por tanto, en la cifra de negocio (Callarisa-Fiol, Sánchez-García, Moliner, & Forgas-Coll, 2012).

Pese a la gran cantidad de trabajos académicos que en los últimos años han analizado esta aplicación (Miguéns, Baggio, & Costa, 2008; O'Connor, 2008; Melián, Bulchand, & González, 2010; Smyth, Wu, & Greene, 2010; O'Connor, 2010; González, Gidumal, & López-Valcárcel, 2010; Jeacle & Carter, 2011; Lee, Law, & Murphy, 2011; Vázquez, 2011; Tuominen, 2011; Callarisa-Fiol et al., 2012; Ayeh, Au, & Law, 2013; Filieri, Alguezaui, & McLeay, 2015; Kladou & Mavragani, 2015; Molinillo, Ximénez de Sandoval, Fernández-Morales, & Coca-Stefaniak, 2016) la movilidad de estos rankings, esto es, cómo evolucionan las posiciones de los hoteles a lo largo del tiempo, ha sido muy poco estudiada en la literatura científica.

Las revisiones bibliográficas más recientes (Chen & Law, 2016; Kwok, Xie, & Richards, 2017; Sotiriadis, 2017) dan buena muestra de ello al no mencionar ningún trabajo que se haya ocupado en estos últimos años de analizar las variaciones en la clasificación.

Es necesario, por tanto, que investigadores y expertos estudien el comportamiento de los algoritmos encargados de clasificar y ordenar los establecimientos hoteleros. Así podremos entender por qué hay ciudades como Madrid o Valencia donde los hoteles que eran número 1 del ranking TripAdvisor en junio de 2015, siguen en esa misma posición en febrero de 2018 (Hotel Orfila y Caro Hotel respectivamente), mientras que en ciudades como Barcelona o Sevilla, dos hoteles logran conquistar el puesto número uno en sus respectivas ciudades tan sólo unos meses después de su inauguración. El Hotel Mercer Sevilla, abierto en noviembre de 2016, alcanzó el primer puesto del ranking TripAdvisor un año después, en una ciudad con más de 170 hoteles, mientras que el hotel H10 Casa Mimosa, inaugurado en septiembre de 2016, llegó al número 1 del ranking de Barcelona en abril de 2017, apenas siete meses después de su apertura, en una ciudad con más de 500 hoteles.

Los ejemplos anteriores nos invitan a profundizar en el estudio de estos influyentes rankings para tratar de averiguar cómo funcionan y detectar y alertar sobre posibles ineficiencias o anomalías en su algoritmo.

Por todo ello, el primer objetivo de nuestro trabajo es el de contribuir al desarrollo de un marco conceptual que defina una nueva línea de investigación en turismo centrada en el análisis de los rankings de hoteles y restaurantes. Para ello presentaremos los principales conceptos que ayuden a definir este nuevo campo de estudio.



A continuación, expondremos detalladamente una novedosa metodología para la creación de un índice que nos permita cuantificar la movilidad de los establecimientos (ya sean hoteles o restaurantes) en el ranking de TripAdvisor. Además, se presentará una clasificación de hoteles en función del grado de movilidad.

Como tercer objetivo de nuestro estudio, queremos llamar la atención sobre las importantes implicaciones que la movilidad de los rankings puede llegar a tener para los agentes implicados en la industria hotelera, especialmente empresarios, inversores y profesionales del sector.

La estructura de nuestro trabajo es la siguiente. En primer lugar, realizamos una revisión bibliográfica sobre Tripadvisor y los rankings de hoteles. Posteriormente, en la sección 3 definimos los conceptos de ranking y presentamos las principales implicaciones de este concepto para los empresarios e inversores. En la sección 4, definimos la movilidad desde dos perspectivas: macro y micro. A continuación, detallamos los principales elementos que componen la metodología aplicada, a saber, el Vector Trayectoria y el Vector Movilidad. Además se analizan los dos componentes fundamentales de la movilidad (Tendencia y Volatilidad). Por último, formulamos los índices de Tendencia y Volatilidad, así como el índice de Movilidad. En la sección 6 presentamos una clasificación de los hoteles en función de la movilidad, mientras que las secciones 7 y 8 corresponden a la descripción de la muestra y a la presentación de resultados. Finalmente, recogemos las conclusiones y sugerencias para futuras investigaciones en esta materia.

## **2. Revisión bibliográfica.**

Smyth et al. (2010) publican uno de los primeros trabajos que analizan y cuantifican la evolución en Tripadvisor de los hoteles, aunque en este caso tan sólo se centran en la variación de las puntuaciones a lo largo del tiempo. Estos autores estudian más de 30.000 comentarios sobre hoteles irlandeses y los comparan con 50.000 comentarios de hoteles de Las Vegas durante dos años.

Comprueban que el 64% de los hoteles irlandeses con una puntuación previa entre 2 y 3 puntos, tenían al final del periodo analizado una puntuación superior a 3. Además, descubren que mientras la puntuación media de los hoteles de Las Vegas se había mantenido constante en torno a 3,8 puntos en los últimos dos años, los hoteles de Irlanda pasaron en el mismo periodo de una puntuación media de 3,6 a 3,8.

Para los autores, estos cambios se deben a lo que ellos han llamado “El Efecto TripAdvisor”. Mientras en los hoteles de Las Vegas hace ya tiempo que se alcanzó un nivel aceptable de calidad, los hoteleros en Irlanda, conscientes de que unas valoraciones negativas en TripAdvisor podían dañar la imagen de sus establecimientos, se esforzaron por mejorar sus niveles de calidad y evitar así los comentarios negativos.

También Jurca, Garcin, Talwar y Faltings (2010) analizan la evolución a lo largo del tiempo de la posición de un hotel en el ranking, en este caso, a medida que van apareciendo nuevos comentarios. Estudian un hotel concreto de Nueva York y los resultados muestran que utilizando la mediana en lugar de la media aritmética se obtienen rankings más estables. Para estos autores, cuando la clasificación se basa en la media aritmética de las valoraciones, el usuario tiende a exagerar su puntuación para influir en la calificación global del hotel. Así, por ejemplo, un usuario cuya valoración personal (un 3) esté por debajo de la calificación global media del hotel (un 4), tiene un incentivo para dar una puntuación exageradamente negativa (un 1) sobre ese establecimiento con la intención de que la media global baje y se acerque a la puntuación que él considera debe tener ese hotel.

Por el contrario, si se utiliza la mediana, al ser ésta menos sensible a los valores extremos, el propio usuario no tendría incentivos para exagerar su puntuación (tanto positiva como negativa) y sería el primer interesado en proporcionar la valoración más exacta posible.

O'Mahony y Smith (2009) plantean el problema del exceso de información a disposición del usuario y ponen de manifiesto el gran volumen de producción de nuevas opiniones por parte de los usuarios y el hecho de que un gran número de ellas no son de interés.

Esta gran cantidad de comentarios publicados por los turistas ha generado también gran preocupación en el sector ante la posibilidad de fraude. Ong (2012) se preguntó si la cantidad de comentarios afecta a la fiabilidad percibida de los mismos concluyendo que efectivamente un alto número de opiniones puede proporcionar credibilidad. Los usuarios son conscientes de la posibilidad de que algunos comentarios sean falsos, pero cuando el número de estos es elevado (cientos) entonces el impacto de la manipulación de un comentario falso disminuye drásticamente.

Para Ott, Cardie y Hancock (2012), las webs con una baja dificultad para escribir comentarios y ponerlos al alcance de una gran audiencia, tienen un mayor nivel de falsos comentarios que aquellas páginas con mayores dificultades para exponer un comentario. Sus resultados señalan que sitios como Hotels.com tienen una tasa aproximada del 2% y TripAdvisor está en el 4% de comentarios fraudulentos.

Fruto de esta preocupación por el fraude, en 2014 la Comisión Europea (European Commission, 2014) publicó un informe específico sobre los comentarios online de los clientes en el sector hotelero donde, entre otras recomendaciones, indicaba que las webs de opiniones deben tomar medidas para verificar que sus usuarios se alojaron realmente en el establecimiento sobre el que están opinando.

En este sentido, como señala Biffaro (2015), en diciembre de 2014 la ICA (Italian Competition Authority) sancionó con una multa de 500.000 euros a Tripadvisor por infringir varios artículos del código de comercio italiano. El ICA encontró desleal la falta de medidas por parte de Tripadvisor para atajar las opiniones engañosas. Pero, como indica Hensens (2010) la mayor medida que tiene Tripadvisor para luchar contra los comentarios fraudulentos es el elevado número de opiniones por hotel. Su investigación sobre el fraude en los comentarios refleja que los hoteles con mayor número de opiniones son más insensibles a los comentarios falsos, considerando que a partir de 100 opiniones un hotel es prácticamente inmune a los comentarios fraudulentos.

Hemos querido dejar para el final un trabajo difícil de catalogar que, aunque se aleja en cierto modo del núcleo de nuestra investigación merece ser tenido en consideración por la originalidad con la que analizan la temática de los comentarios online. Para estos autores (Scott & Orlikowski, 2012) aunque los mecanismos de rankings no son nuevos, han adquirido gran capacidad de influencia y poder cuando se ejecutan a través de las tecnologías de la web 2.0, redistribuyendo la responsabilidad.

El estudio se centra en pequeños negocios de una remota zona geográfica no identificada para la que TripAdvisor ha cambiado las reglas del juego. Los autores analizan la implicación moral y estratégica de esta transformación. Estos autores han estado particularmente interesados en examinar el concepto de responsabilidad aplicado a las redes sociales, basado en la idea de la sabiduría de la multitud y la inteligencia colectiva. El poder de los ranking está en su capacidad de presentarse como una herramienta objetiva sin sesgo, mostrando la verdad, imponiendo su manera de ver las cosas pero sin ser visto.

TripAdvisor tiene un efecto material en los negocios y en la gestión. De hecho, para ciertas empresas del sector turístico una mejor o peor calificación en el ranking puede suponer la diferencia entre las ganancias o las pérdidas, sobreviviendo una temporada o teniendo que cerrar.

Por tanto, es necesario tomar en serio las relaciones de responsabilidad que se producen en TripAdvisor, ya que el resultado es en la práctica una nueva especie de autoridad que determina nuestras decisiones.

### **3. La movilidad de los rankings.**

Como ya se indicó anteriormente, el concepto de movilidad de los rankings ha sido poco estudiado por investigadores y profesionales. Por tanto, creemos necesario presentar algunos conceptos.

Definimos en primer lugar un ranking como un sistema dinámico donde los distintos elementos que lo componen pueden cambiar de posición a lo largo del tiempo. Definimos a continuación la movilidad de un ranking como la medida de los cambios que se producen durante un periodo determinado de tiempo en las posiciones que ocupan los elementos que aparecen en la clasificación.

En función del grado de movilidad, nos encontraremos, por un lado, con ciudades donde la clasificación de los hoteles presenta poca movilidad. En este caso, los hoteles permanecen en las mismas (o similares) posiciones a lo largo del tiempo, y en consecuencia, los establecimientos situados en la zona alta del ranking seguirán muy probablemente en esa misma zona en el futuro. Igualmente, aquellos hoteles situados en las zonas media y baja también permanecerán en esas zonas en los próximos meses o años. Hablaremos en este caso de “Rankings Sólidos”.

En el extremo opuesto, nos encontraremos con rankings de máxima movilidad, donde los hoteles circulan con facilidad entre las zonas alta, media y baja. Los hoteles que hace unos meses estaban situados en las mejores posiciones, estarán ahora en la zona baja, y aquellos que ocupaban los peores puestos, serán ahora los primeros de la clasificación. Hablaremos entonces de “Rankings Líquidos”.

Cuando estudiamos la movilidad de un ranking en una ciudad concreta, estamos tratando de conocer cómo evolucionan las posiciones de los distintos hoteles en la clasificación a lo largo del tiempo. Esto tiene importantes implicaciones para los empresarios, trabajadores y profesionales del sector.

#### **3.1. Implicaciones para los empresarios.**

Podemos preguntarnos por ejemplo si los hoteleros estarían tan preocupados en mejorar su posición en la clasificación si supieran que el puesto que ocupan actualmente apenas va a variar en el futuro, porque el ranking de hoteles de su ciudad presenta un nivel de movilidad muy bajo.

En circunstancias así, los hoteles situados en la zona alta continuarán, en su mayoría, disfrutando de una posición privilegiada, en términos de visibilidad, reputación, etc., mientras que la mayor parte de los hoteles situados en la zona media y baja seguirán por largo tiempo en esas mismas (o similares) posiciones con unas probabilidades mínimas de alcanzar los mejores puestos.

Entonces, ante un ranking sólido, no tendrá sentido relacionar objetivos, políticas retributivas, incentivos al personal o medidas del desempeño a corto o medio plazo con una más que improbable mejora en la posición en el ranking.

Así mismo, las compañías hoteleras con establecimientos en varias ciudades deberían tener en cuenta el índice de movilidad del ranking de cada localidad. Sería un grave error comparar la evolución de las posiciones de sus hoteles en ciudades con índices de movilidad sensiblemente distintos. Una gestión similar puede tener efectos muy diferentes en la clasificación debido al nivel de movilidad del ranking de cada ciudad.

Las implicaciones para empresarios también afectan a los procesos de adquisición o apertura de nuevos establecimientos. Así, los inversores y las propias compañías hoteleras, deben plantearse la cuestión de si preferirán invertir en ciudades donde los rankings sean sólidos o, por el contrario, les resultarán más atractivas las ciudades con rankings líquidos, donde hay una mayor facilidad para alcanzar los mejores puestos en la clasificación, aunque también para caer a las posiciones más bajas. Para abordar esta cuestión, debemos distinguir entre la adquisición de un establecimiento ya existente o bien la apertura de uno nuevo.

Cuando la opción es comprar un hotel en funcionamiento, los inversores deben saber que, si adquieren un establecimiento situado en la zona media o baja del ranking en una ciudad con escasa movilidad, las posibilidades de situar su hotel a medio plazo en lo más alto de la clasificación son mínimas. En consecuencia, si el objetivo es llegar a estar entre los mejores en ciudades con rankings sólidos, deberían limitar sus compras a hoteles ya situados en la zona alta de la clasificación, al margen de otras consideraciones como la estrategia competitiva o la rentabilidad de la operación.

Si lo que se plantea es la apertura de un nuevo establecimiento, puede ser una gran oportunidad invertir en ciudades con poca movilidad. Un nuevo hotel tiene una gran ventaja con respecto a los ya existentes, pues tiene la posibilidad de alcanzar en muy poco tiempo las mejores posiciones, precisamente por ser nuevo. Si además hay poca movilidad, cuando logre una buena posición podrá permanecer en ella por mucho tiempo. El hotel H10 Casa Mimosa (Barcelona, España) es un buen ejemplo de esto. Se inauguró en septiembre de 2016 y llegó al número 1 del ranking de la ciudad condal en abril de 2017, apenas siete meses después de su inauguración, en una ciudad con más de 500 hoteles. En febrero de 2018 continuaba en esa posición.

Por consiguiente, en el proceso de compra de un hotel en ciudades con poca movilidad, habría que añadir una prima al precio de compraventa si el establecimiento se encuentra situado entre los mejores, ya que es muy probable que permanezca en esa misma posición a medio y largo plazo, por el hecho de estar en una ciudad con poca movilidad.

En sentido contrario, se debería aplicar un descuento al precio de compraventa en caso de que el establecimiento estuviera situado en la zona media o baja del ranking, ya que muy probablemente también seguirá en esos puestos a medio y largo plazo.

No sería extraño entonces que, ante esta falta de movilidad en las posiciones de la mayoría de los hoteles en el ranking, los hoteleros dejaran de insistir a sus clientes para que comenten sus experiencias en estas páginas si saben que no servirán para mejorar su posición. Al margen de que ciertamente estos comentarios pueden proporcionar información muy útil para corregir errores o realizar mejoras en las instalaciones y los servicios prestados, no es menos cierto que los empresarios, pueden sentir cierta sensación de estar haciéndole el trabajo gratis a TripAdvisor. Mientras el esfuerzo del empresario en captar nuevos comentarios de sus clientes no se va a traducir en una mejora de su posición en el ranking, TripAdvisor estará viendo crecer su base de datos de fotografías, comentarios y valoraciones de usuarios a coste cero.

Los rankings líquidos, donde los hoteles fluyen entre las posiciones altas, medias y bajas con mucha facilidad, podrían identificarse con una planta hotelera muy competitiva con un alto grado de homogeneidad en cuanto a la calidad de los establecimientos y por tanto con valoraciones muy similares. Aquí, una pequeña variación en la puntuación puede provocar que

un hotel pase de estar en lo más alto a estar en la zona media o baja. Pero en estos casos, el hecho de estar en la zona alta, media, o baja ya no sería tan determinante para elegir un establecimiento, pues los clientes más que un ranking, estarían consultando un listado de hoteles donde todos tendrían un nivel de calidad similar y no habría diferencias significativas entre los de arriba y los de abajo.

En cualquier caso, TripAdvisor y Booking son quienes deciden mediante el diseño de sus algoritmos de clasificación, si el ranking debe tener más o menos movilidad.

En definitiva, la movilidad de los rankings existe, aunque hasta el momento nadie la haya cuantificado. Nosotros lo estamos haciendo por primera vez, pues resulta evidente que puede ejercer una influencia considerable sobre las empresas hoteleras. Lo que no vamos a hacer es juzgarla, es decir, considerarla como una característica positiva o negativa en sí misma. Siempre encontraremos grupos interesados en que el ranking de hoteles de una ciudad sea rígido, sólido. Pero también habrá en la misma ciudad otros colectivos interesados en que el ranking sea líquido.

En cualquier caso, es evidente la complejidad de este concepto y los innumerables pros y contras que ofrece a empresarios y profesionales. La movilidad será al mismo tiempo positiva para unos y negativa para otros.

#### **4. Micro y Macro movilidad.**

El análisis de la movilidad puede realizarse desde dos puntos de vista: Micro y Macro. La Micromovilidad estudia la trayectoria individual de cada elemento de la clasificación, mientras que la Macromovilidad, analiza el ranking en su conjunto.

Con la Micromovilidad analizamos la evolución individual en la clasificación de cada establecimiento, estudiando la tendencia (ascendente, descendente o neutra). Comparamos también el nivel de movilidad de distintos hoteles o bien la movilidad de un establecimiento en varios periodos de tiempo. Tratamos de responder en definitiva a preguntas del tipo: ¿Tiene más movilidad el hotel X o el Y? ¿Ha tenido más movilidad el Hotel Z en el año 1 que en el año 2?

Con la Macromovilidad, por el contrario, comparamos los rankings de distintas ciudades, identificamos si hay más hoteles que suben, bajan o permanecen en la misma posición, medimos el número de posiciones que por término medio suben o bajan los hoteles en la clasificación de una ciudad y obtenemos los índices de movilidad de los rankings en su conjunto. Tratamos de responder en este caso a preguntas del tipo ¿Hay más movilidad en el ranking de Barcelona o de Madrid? ¿Ha aumentado la movilidad en el ranking de hoteles de Valencia respecto al año anterior?

En este trabajo queremos aportar una nueva herramienta para el análisis de la movilidad de los hoteles en el ranking con la creación de un índice de Micromovilidad, que cuantifique el grado de movilidad de la trayectoria de un hotel a lo largo del tiempo.

#### **5. Metodología.**

Para llevar a cabo el análisis de la movilidad, es necesario en primer lugar recoger de forma periódica y prolongada en el tiempo la información sobre las posiciones que ocupan los hoteles en la clasificación en cada momento.

Una vez se han obtenido todos los datos, se obtiene la trayectoria de cada hotel. Definimos la trayectoria individual de un establecimiento como el conjunto ordenado de las distintas posiciones que ha ocupado en la clasificación a lo largo de un periodo de tiempo. El análisis de estas trayectorias constituye el objeto fundamental en el estudio de la movilidad de los rankings.

## 5.1. El Vector Trayectoria.

La trayectoria individual de cada hotel, quedará representada matemáticamente a través de un vector que llamaremos Vector Trayectoria, que recoge las diferentes posiciones que ha ocupado a lo largo del tiempo en el ranking,

Para iniciar el estudio de la movilidad es necesario, por tanto, configurar el vector trayectoria, lo que supone fijar los siguientes tres parámetros:

1. Dimensión (T): Se define como el número de observaciones disponibles para cada hotel o elemento.
2. Periodicidad (P): Las observaciones se realizarán con periodicidad diaria, semanal, quincenal, mensual, trimestral, etc.
3. Número de zonas (cuantiles) en que se divide el ranking (Q): Es necesario determinar si el ranking se divide en deciles ( $Q = 10$ ), cuartiles ( $Q = 4$ ), percentiles ( $Q = 100$ ), etc. En los casos de rankings pequeños ( $N < 100$ , siendo  $N$  el número total de hoteles o elementos incluidos en el ranking) o cuando se requiera una precisión máxima, puede ser preferible indicar la posición exacta que ocupa cada elemento en la clasificación. En estos casos,  $Q = N$ .

El vector trayectoria  $\mathbf{x}$ , resumirá la información de la evolución temporal que ha experimentado un componente del ranking. Este vector tiene  $T$  elementos ( $x_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ ) que representan la zona o posición que ocupa en el ranking en el momento  $t$ .

$$\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_T)$$

En estudios estadísticos y económicos es frecuente identificar los cuantiles más elevados con los valores más “favorables” o “excelentes”. Por ejemplo, Jenkins, Brandolini, Micklewright, Nolan, & Basso (2012), al analizar la renta de los hogares en 21 países, sitúan en el decil 1 a los hogares más pobres y en el decil 10 a los hogares con más renta. Milanovic (2015) al estudiar la desigualdad sitúa a los individuos con menos rentas en el percentil 1. También en el estudio sobre discriminación salarial de Río, Gradín y Cantó (2011), el decil 1 corresponde a los salarios más bajos y el decil 10 a los más altos. Por último, Budria (2010) al comparar los salarios en el sector público y privado, clasifica a los individuos en la muestra por deciles, siendo el decil 1 el de menores salarios y el decil 10 el de mayores.

En nuestro caso, dado que en un ranking de hoteles el puesto número 1 se asocia al mejor establecimiento, cuando trabajamos con cuantiles, el decil 1 corresponde a la zona mejor y el decil 10 a la zona peor del ranking.

Así, por ejemplo, para un ranking dividido en deciles,  $Q = 10$ , el vector trayectoria  $\mathbf{x} = (6 \ 7 \ 5 \ 5 \ 6)$  indica que en el primer periodo analizado el hotel estaba situado en el decil 6, bajó en el segundo periodo al decil 7, subió en el tercer periodo al decil 5, continuó en el cuarto periodo en el decil 5 y finalmente bajó al decil 6.

En definitiva, el vector trayectoria es el objeto fundamental del análisis de la movilidad, porque nos ofrece la información necesaria para realizar cualquier tipo de estudio posterior, ya que recoge las distintas posiciones por las que ha pasado un hotel a lo largo del tiempo.

## 5.2. El Vector Movilidad.

Utilizando la información recogida en el vector trayectoria, vamos a definir un conjunto de variables que nos ayudarán a conocer el comportamiento de un hotel a lo largo del tiempo, y a

medir su grado de movilidad. Todo esto nos permitirá posteriormente clasificarlo y compararlo con otros hoteles.

Aunque estas variables las utilizaremos para crear nuestros índices de movilidad, también nos ofrecen por sí mismas información suficiente para encontrar evidencias sobre la mayor o menor movilidad de un hotel (si realizamos el análisis de forma individual) o de un ranking (si se analizan de forma agregada).

Utilizaremos cuatro variables obtenidas a partir del vector trayectoria que aportan información diversa y complementaria acerca de la movilidad de cada elemento del ranking, y que están relacionadas con el número de saltos o cambios que ha experimentado en su trayectoria ( $M_1$ ) y la distancia recorrida en dichos cambios ( $M_2, M_3, M_4$ ).

$M_1$ : Esta variable se define como el número de cambios o saltos experimentados por un elemento del ranking en la trayectoria observada  $x$ .

Si definimos la variable  $c_t$  (que refleja si ha habido cambio entre el momento  $t-1$  y  $t$ ) como:

$$c_t = \begin{cases} 1 & x_t - x_{t-1} \neq 0 \\ 0 & x_t - x_{t-1} = 0 \end{cases}, \quad t = 2, \dots, T \quad (1)$$

tendremos que  $M_1$  se obtiene mediante:

$$M_1 = \sum_{t=2}^T c_t \quad (2)$$

El valor mínimo de  $M_1$  es 0 y su máximo es  $T-1$ .

$M_2$ : Esta variable se define como la distancia media recorrida por un elemento del ranking entre cada dos periodos consecutivos, ya sea positiva o negativa, en su trayectoria observada  $x$ .

$$M_2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T |x_t - x_{t-1}| \quad (3)$$

El rango de valores que puede tomar  $M_2$  es  $(0, Q-1)$ .

Entre toda la información que nos ofrece el análisis de las trayectorias individuales de los hoteles, quizás la variable más asociada al concepto de movilidad sea la distancia recorrida por el hotel entre su posición inicial y final ya que, de forma intuitiva, cuando queremos analizar cómo ha evolucionado un hotel a lo largo del tiempo lo primero que hacemos es comparar su posición al inicio y al final del periodo. La variable  $M_3$  nos permite cuantificar esta información.

$M_3$ : Esta variable se define como la distancia entre el primer y último valor observado del vector trayectoria  $x$ :

$$M_3 = x_1 - x_T \quad (4)$$

Así, diremos que un hotel con una trayectoria (6 6 5 5 4) ha mejorado su posición dos deciles a lo largo del periodo ( $M_3 = 2$ ), mientras que el hotel con trayectoria (3 4 5 5 6) ha empeorado su situación en el ranking entre el momento inicial y final en tres deciles ( $M_3 = -3$ ). Esta variable toma valores positivos y negativos, indicando los primeros una mejora en la clasificación y los segundos un empeoramiento en la posición en el ranking. La variable  $M_3$  oscila

entre un valor mínimo de  $M_3 = 1 - Q$  (en nuestro ejemplo  $Q = 10$ ), que corresponde a una caída máxima en la clasificación pasando del primer al último cuantil; y el valor máximo  $M_3 = Q - 1$ , que indica una subida desde la zona más baja a la zona más alta del ranking.

Aunque la distancia entre la posición inicial y final aporta gran información para determinar la movilidad de un hotel a lo largo del tiempo, es conveniente completar el análisis con la información que proporciona la distancia entre el cuantil máximo y mínimo visitado, con independencia del momento en el que se haya hecho. Así, por ejemplo, la trayectoria (3 4 5 4 3), aunque no presenta cambios entre la posición inicial y final ( $M_3 = 0$ ), sí muestra por el contrario un cambio de dos deciles a lo largo del periodo entre el máximo y el mínimo, lo que nos indica cierto grado de movilidad, que la variable  $M_3$  no refleja. Por este motivo, utilizamos también la variable  $M_4$ .

$M_4$ : Esta variable se define como la distancia entre los valores mayor y menor del vector trayectoria observado  $x$ :

$$M_4 = \max_t(x_t) - \min_t(x_t), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (5)$$

Cuantifica, por tanto, la distancia entre el máximo y el mínimo cuantil por donde el establecimiento ha pasado, con independencia del momento en el que se hayan alcanzado dichas posiciones. Esta variable tiene un valor mínimo  $M_4 = 0$  cuando no hay diferencias entre la posición máxima y mínima y un valor máximo  $M_4 = Q - 1$ .

Como vemos, todos estos indicadores ofrecen información diferente y útil para conocer la movilidad de un hotel a través de su vector trayectoria. Por ello, podemos construir el vector movilidad  $\mathbf{m}$  asociado a un vector trayectoria observado  $x$  con estas cuatro variables:

$$\mathbf{m} = (M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4) \quad (6)$$

A modo de ejemplo, podemos obtener el vector movilidad para un hotel cuya trayectoria en un ranking dividido en cuartiles durante cinco periodos consecutivos de tiempo ha sido  $x = (1 \ 4 \ 4 \ 1 \ 3)$ . Entonces,  $M_1 = 3$ ,  $M_2 = 2$ ,  $M_3 = -2$  y  $M_4 = 3$ . La trayectoria  $x$  quedaría asociada al vector movilidad  $\mathbf{m} = (3 \ 2 \ -2 \ 3)$ .

A partir del vector movilidad de cada hotel podremos obtener el índice de movilidad, objetivo principal de nuestro estudio.

### 5.3. Componentes de la Movilidad.

Hemos definido la movilidad de un hotel en un ranking como la medida de los cambios que experimenta en la clasificación durante un periodo de tiempo. Esta movilidad, es el resultado del efecto conjunto de dos componentes: la tendencia y la volatilidad, para los que elaboramos sendos índices parciales de movilidad.

#### 5.3.1. Tendencia

El concepto de tendencia ha sido ampliamente estudiado en los análisis de series temporales (Mills, 2011; Kirchgässner, Wolters, & Hassler, 2013; Box, Jenkins, Reinsel, & Ljung, 2015). En nuestro caso, la tendencia se limita a indicar la dirección de la trayectoria, y se mide por la diferencia entre la posición inicial y final del hotel en la clasificación. Así, una tendencia será ascendente si al final del periodo analizado el hotel se encuentra clasificado en mejor posición que al inicio, presentando por el contrario una tendencia descendente cuando la posición que ocupa al final del periodo es peor que la que ocupaba inicialmente. Hablaremos además de



tendencia fuerte o débil en función del valor de esas diferencias. Si no hay cambios en la posición inicial y final, diremos que el hotel presenta tendencia neutra.

Aunque ya quedó aclarado anteriormente, debemos recordar que cuando hablamos de posición, nos estaremos refiriendo bien al cuantil donde se encuentre situado el hotel (decil, cuartil, etc.) o bien a la posición exacta que ocupa en la clasificación, según se haya decidido o no dividir el ranking por zonas.

El índice de tendencia se obtiene utilizando el elemento  $M_3$  del vector movilidad. Siendo  $Q$  el número de zonas en que se divide el ranking (deciles, quintiles, cuartiles...), el índice de tendencia (IT) se define mediante la siguiente expresión:

$$IT = \frac{M_3}{Q - 1} \quad (7)$$

Este índice nos muestra la relación entre el valor que toma la variable  $M_3$  para un hotel y un periodo concreto (en el numerador), y el valor máximo que esa variable puede tomar ( $Q - 1$ ).

El índice IT varía, por tanto, entre +1 y -1, donde  $IT = +1$  (tendencia máxima ascendente) nos indicará que el hotel ha pasado de la peor a la mejor zona del ranking, mientras que  $IT = -1$  corresponderá a un hotel que ha pasado de la mejor a la peor zona (tendencia máxima descendente). Por último, hablaremos de tendencia neutra,  $IT = 0$ , cuando la posición inicial y final del hotel en el ranking sea la misma ( $M_3 = 0$ ). Además, hablaremos de tendencia fuerte, media o débil en función del valor que tome el índice de tendencia.

### 5.3.2. Volatilidad

La segunda componente de la movilidad es la volatilidad, que mide la variabilidad en el comportamiento de un hotel en el ranking y vendrá determinada en primer lugar por el número de cambios producidos en su trayectoria a lo largo del tiempo, y en segundo lugar por la dimensión de dichos cambios. Mediremos por tanto la volatilidad de un hotel por el número de saltos que se producen en su trayectoria y por la amplitud de esos saltos, cuantificados por las variables  $M_1$  y  $M_2$  del vector movilidad  $m$ .

Así, cuanto mayor sea el número de saltos que presenta el hotel a lo largo de su trayectoria, y mayor la amplitud de los mismos, mayor será la volatilidad de ese hotel. Si no hay saltos en toda la trayectoria, diremos que el hotel presenta volatilidad nula.

La componente derivada del número de saltos se define como la relación entre el número de saltos ( $M_1$ ) en la trayectoria del hotel (numerador) y el número máximo de saltos posibles, ( $T - 1$ ) donde  $T$  es el número total de periodos analizados.

Por tanto, el primer componente del Índice de volatilidad se obtiene:

$$IV_1 = \frac{M_1}{T - 1} \quad (8)$$

y toma valores entre 0 y 1.  $IV_1$  será igual a 0 cuando no se produzca ningún salto en toda la trayectoria, lo que indicará que el hotel ha permanecido en la misma posición durante todo el periodo de tiempo analizado. En cambio,  $IV_1$  será igual a 1 cuando se haya producido un salto en la clasificación en cada uno de los periodos analizados.

El segundo componente de la volatilidad cuantifica la amplitud de esos saltos. Para construir el segundo componente del índice de volatilidad, normalizaremos el elemento  $M_2$  del

vector movilidad  $m$ , que es el promedio de las diferencias en valor absoluto entre las posiciones cada dos periodos consecutivos, dividiéndolo por el máximo que puede alcanzar,  $Q-1$ :

$$IV_2 = \frac{M_2}{Q-1} \quad (9)$$

De esta forma,  $IV_2$  toma valores entre 0 y 1.

Finalmente, el índice de volatilidad,  $IV$ , estará compuesto por el promedio de los dos índices parciales  $IV_1$  e  $IV_2$ :

$$IV = \frac{IV_1 + IV_2}{2} \quad (10)$$

En general, la interpretación del índice de volatilidad depende de ambas componentes. Tendremos, en primer lugar, hoteles con mucha volatilidad, cuando tengan muchos saltos en su trayectoria, y estos sean de gran amplitud. Hablaremos de hoteles con poca volatilidad, cuando tengan pocos saltos y estos además sean de poca amplitud. Por último, nos encontraremos con trayectorias con un nivel medio de volatilidad cuando o bien tengan muchos saltos, pero de poca amplitud, o bien tengan pocos saltos, pero estos sean de gran amplitud.

Es importante señalar que los saltos vendrán condicionados por el modo en que definamos la posición de un hotel en el ranking. Si deseamos medir la posición con la máxima precisión posible consideraremos un salto cuando el hotel cambie su posición exacta en el ranking entre dos momentos consecutivos, al pasar por ejemplo del puesto 186 al 193.

Pero si por el contrario hemos considerado más conveniente definir la posición en el ranking por el cuantil en que se encuentre el hotel (decil, percentil, quintil, etc.) en lugar de su posición exacta, habrá un salto si el hotel está situado en cuantiles distintos en dos momentos consecutivos. Nótese entonces que, aunque la posición exacta haya variado, el hotel puede permanecer en el mismo cuantil durante los periodos analizados y por tanto no se habrá producido ningún salto.

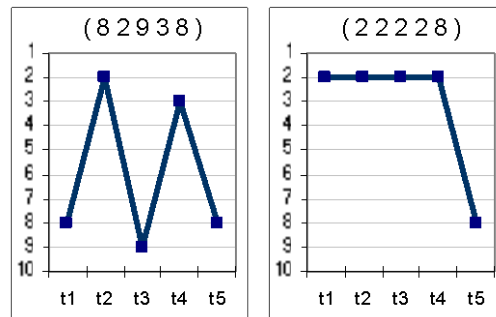
### 5.3.3. El Índice de Movilidad

Dado que nuestro objetivo en este trabajo es diseñar un índice que cuantifique la movilidad de la trayectoria de un hotel en un periodo de tiempo determinado y que como hemos definido anteriormente, la movilidad tiene dos componentes, el índice de movilidad de la trayectoria de un hotel en un ranking ( $IM$ ) será un índice compuesto. Estará formado por la combinación del índice de volatilidad  $IV$  y del índice de tendencia  $IT$ , dando la misma ponderación a ambos. Teniendo en cuenta que el índice de tendencia puede tener signo positivo o negativo, tomaremos su valor absoluto para construir el índice de movilidad:

$$IM = \frac{1}{2}|IT| + \frac{1}{2}IV \quad (11)$$

El hecho de que la tendencia y la volatilidad tengan el mismo peso a la hora de medir la movilidad en nuestra propuesta, es una cuestión que plantea algunas controversias. Ilustraremos esta discusión con dos ejemplos extremos, los hoteles A y B, con trayectorias respectivas (8 2 9 3 8) y (2 2 2 2 8), representadas en el gráfico 1.

**Gráfico 1. Ejemplo: trayectorias de A y B.**



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos extraídos de TripAdvisor (2016).

El Hotel A presenta una trayectoria con muchos cambios en su posición en el ranking a lo largo del tiempo (mucha volatilidad) pero que al final del periodo se encuentra en la misma posición que al inicio (tendencia neutra). En cambio, el Hotel B permanece sin cambios durante la mayor parte del tiempo (mínima volatilidad) pero en el último periodo varía drásticamente su posición en el ranking, lo que provoca una gran diferencia entre la posición inicial y final (fuerte tendencia).

Es obligado entonces responder a la siguiente pregunta: ¿Qué hotel debemos considerar que tiene más movilidad? Según nuestro modelo los dos presentan un índice de movilidad similar en valores absolutos (0,417 para el hotel A y 0,438 para el hotel B) como se recoge en la tabla 1.

**Tabla 1. Ejemplo: movilidad de los hoteles A y B.**

Hotel	Vector trayectoria	Vector movilidad	Índices				
			IV <sub>1</sub>	IV <sub>2</sub>	IV	IT	IM
A	(8 2 9 3 8)	(4 6 0 7)	1,00	0,667	0,833	0,000	0,417
B	(2 2 2 2 8)	(1 1,5 -6 6)	0,25	0,167	0,208	-0,667	0,438

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos extraídos de TripAdvisor (2016).

Decidir si el hotel A tiene un grado de movilidad mayor o menor que el hotel B siempre será un asunto problemático. En estos dos casos extremos elegidos por el investigador para ilustrar la cuestión, podría discutirse sin llegar a un consenso cuál de los dos hoteles presenta un mayor grado de movilidad.

Unos analistas defenderán que el hotel A es claramente más dinámico que el hotel B, si nos fijamos en los constantes cambios producidos en su posición. Pero también habrá quien defienda que el hotel B es más dinámico que el A, si lo que importa es la diferencia entre la posición inicial y la final.

Desde nuestro punto de vista, consideramos que la movilidad tiene dos componentes (la volatilidad y la tendencia) y que ambas tienen el mismo peso, y por tanto para tener un alto grado de movilidad es necesario tener un alto grado tanto de volatilidad como de tendencia.

En todo caso, creemos que el considerar la movilidad como combinación de estas dos variables nos permite caracterizar mejor la trayectoria y por tanto explicar mejor el comportamiento de un hotel.

También queremos destacar, que el grado de movilidad no permanece constante a lo largo del tiempo. De hecho, en el ejemplo anterior, si hubiéramos concluido nuestro análisis en el

periodo  $t_4$  en lugar de  $t_5$ , el hotel A hubiera presentado una movilidad extrema y el hotel B una movilidad nula.

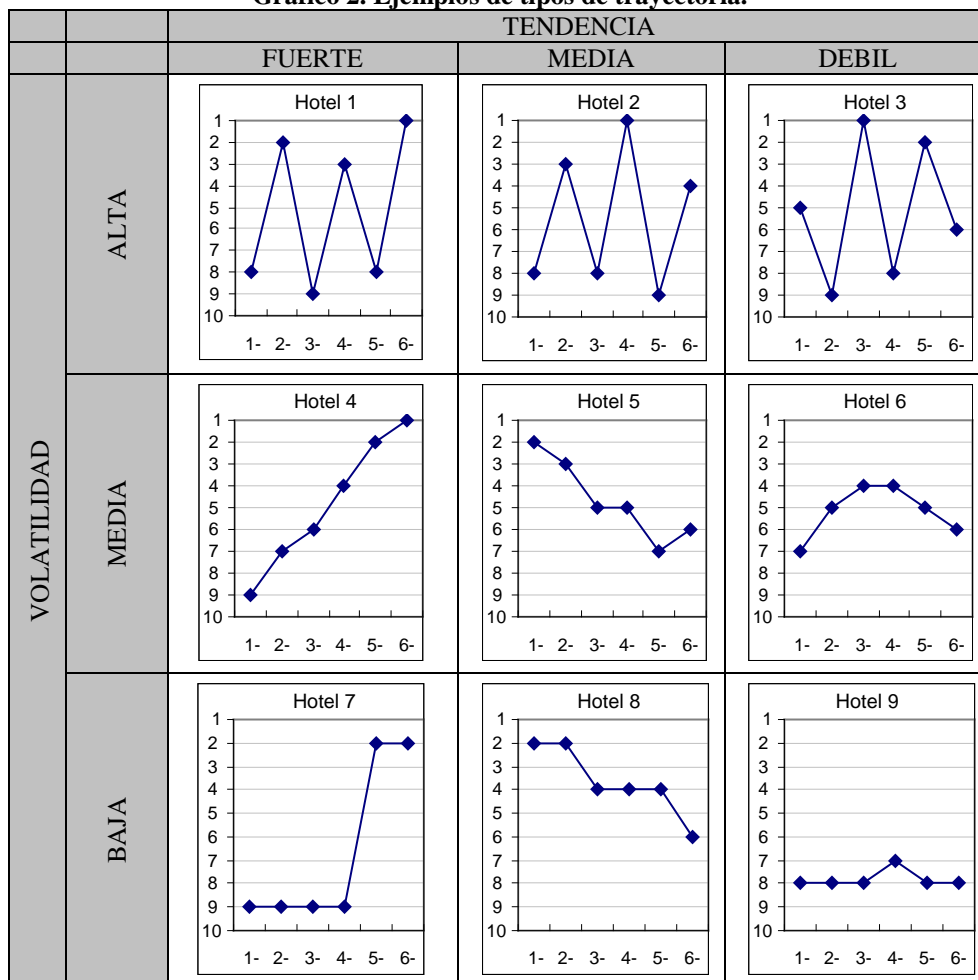
Todas estas circunstancias, lejos de ser complicaciones para el análisis, son interesantes retos para abrir nuevas líneas de investigación sobre el comportamiento de la movilidad. Habrá hoteles que presenten un grado de movilidad similar a lo largo del tiempo mientras que otros presentarán cambios bruscos en su movilidad como así ocurre en nuestros dos ejemplos anteriores.

## 6. Clasificación de los hoteles por su movilidad.

Si hemos definido la movilidad como el resultado de la combinación de volatilidad y tendencia, podríamos clasificar las trayectorias en función de los indicadores de volatilidad y de tendencia. Con fines descriptivos, y para facilitar el análisis consideraremos “alta/fuerte” una componente cuyo indicador (en valor absoluto en el caso del índice de tendencia) supere el valor 0,7. En el extremo opuesto, la consideraremos “baja/débil” si el indicador es inferior a 0,3. Con valores comprendidos entre 0,3 y 0,7 denominaremos “media” la componente de la movilidad.

En el gráfico 2 aparecen representadas diferentes trayectorias que nos podríamos encontrar al analizar la evolución en el ranking de un hotel a lo largo del tiempo en función de su grado de volatilidad (alta, media y baja) y de tendencia (fuerte, media débil), para un ranking clasificado en deciles y observado en seis momentos del tiempo.

**Gráfico 2. Ejemplos de tipos de trayectoria.**



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos extraídos de TripAdvisor (2016).

Para las trayectorias de los ejemplos del gráfico 2, se han obtenido los vectores de movilidad y sus correspondientes índices que se muestran en la tabla 2.

**Tabla 2. Vectores movilidad e índices de los ejemplos del gráfico 2.**

Hotel	Vector movilidad	Índices				
		IV <sub>1</sub>	IV <sub>2</sub>	IV	IT	IM
1	(5 6,2 7 8)	1	0,689	0,844	0,778	0,811
2	(5 6 4 8)	1	0,667	0,833	0,444	0,639
3	(5 5,8 -1 8)	1	0,644	0,82	-0,11	0,47
4	(5 1,6 8 8)	1	0,178	0,589	0,889	0,739
5	(4 1,2 -4 5)	0,8	0,133	0,47	-0,44	0,46
6	(4 1 1 3)	0,8	0,111	0,456	0,111	0,283
7	(1 1,4 7 7)	0,2	0,156	0,178	0,778	0,478
8	(2 0,8 -4 4)	0,4	0,089	0,24	-0,44	0,34
9	(2 0,4 0 1)	0,4	0,044	0,222	0	0,111

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos extraídos de TripAdvisor (2016).

Teniendo en cuenta la clasificación propuesta, se pueden catalogar los hoteles en función de su grado de movilidad, medido por el índice de movilidad IM del siguiente modo:

1. Hoteles con Movilidad Alta ( $IM > 0,7$ ): Corresponde a hoteles con distintas combinaciones de tendencia fuerte y media con volatilidad alta y media.
2. Hoteles con Movilidad Media ( $0,3 \leq IM \leq 0,7$ ): Corresponde a hoteles cuyas trayectorias presentan distintas combinaciones de tendencia fuerte, media y débil con volatilidad alta, media y baja.
3. Movilidad Baja ( $IM < 0,3$ ): Corresponde a hoteles que han mostrado trayectorias con distintas combinaciones de tendencia media y débil con volatilidad media y baja. Aunque el valor 0 estará por tanto incluido en este apartado, a efectos informativos se indicará en una categoría especial (Movilidad Nula) dada su notoriedad.

## 7. Muestra de hoteles.

Aunque este trabajo forma parte de un proyecto de investigación más amplio que tiene por objetivo estudiar el funcionamiento y la evolución de los rankings de hoteles y restaurantes en las principales ciudades del mundo, en este artículo analizamos los rankings de hoteles de Tripadvisor de las cinco mayores ciudades de España por número de habitantes (Instituto Nacional de Estadística, 01/01/2015): Madrid (3.141.991), Barcelona (1.604.555), Valencia (786.189), Sevilla (693.878) y Zaragoza (664.953).

Desde junio de 2015 y de forma ininterrumpida se han ido extrayendo semanalmente las posiciones que los distintos hoteles ocupan en los rankings de estas ciudades. Debido a que la movilidad detectada tanto semanal como mensual era mínima, se decidió utilizar los datos trimestrales, donde ya se aprecian ciertos niveles de movilidad.

Por tanto, el presente trabajo analiza la evolución trimestral a lo largo de un año (de junio de 2015 a junio de 2016) de los rankings de las cinco primeras capitales de provincia españolas por número de habitantes (ver Tabla 3).

De este modo, para el periodo objeto de estudio, disponemos de cinco posiciones en el ranking para cada hotel (Jun-15, Sep-15, Dic-15, Mar-16 y Jun-16). Una vez procesada esta información, se han obtenido los vectores trayectoria para cada establecimiento, reflejando la evolución de sus posiciones a lo largo del periodo.

**Tabla 3. Datos de la muestra.**

Ciudad	(1) Hoteles en la muestra	(2) Hoteles en Tripadvisor	(3) = (1) / (2) %
Barcelona	271	524	51,72%
Madrid	250	447	55,93%
Sevilla	104	176	59,09%
Valencia	55	100	55,00%
Zaragoza	47	80	58,75%
Total	727	1.327	54,79%

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos extraídos de TripAdvisor (2016).

Debemos señalar, por último, que los rankings han sido divididos en deciles ( $Q = 10$ ), por lo que las posiciones que toman los hoteles variarán de 1 a 10 (donde el decil 1 corresponde a la zona más alta y el decil 10 a la zona más baja).

Del total de hoteles que aparecen en el ranking de TripAdvisor (1.327), se eliminaron de la muestra los establecimientos que no tenían comentarios, ni a la fecha de inicio de la investigación ni en ninguno momento posterior. Estos son pequeños establecimientos sobre los que nadie ha opinado. Como no tienen valoraciones de clientes tampoco tienen una puntuación global media. En estos casos TripAdvisor no asigna al hotel ninguna posición numérica y los sitúa al final del ranking.

Los autores, como es habitual en investigaciones de carácter longitudinal, también se han encontrado con elementos faltantes en algún momento. La pérdida o no disponibilidad de una proporción variable de los datos correspondientes a los sujetos seleccionados es siempre una realidad a considerar en todo estudio de investigación (Durán, 2005) y uno de los problemas metodológicos en estudios longitudinales (Twisk & De Vente, 2002).

En nuestro caso, se han suprimido aquellos hoteles con datos faltantes en al menos un periodo. En consecuencia, la muestra está compuesta por todos aquellos hoteles para los que se dispone de información en todos y cada uno de los momentos en que se tomaron datos durante el estudio.

No obstante, es importante identificar las causas de esta pérdida de información para realizar una adecuada interpretación de los resultados (Twisk & De Vente, 2002). Así, en nuestro caso, las razones por las que un hotel puede no aparecer en alguno de los momentos en que se tomaron los datos son básicamente cuatro:

1. Apertura de nuevos hoteles: Si un hotel no existía al inicio de nuestra investigación en junio de 2015, pero se inauguró en algún momento posterior, tendremos datos faltantes en los primeros periodos.
2. Cierres: Si un hotel estaba abierto al público en junio de 2015 pero ha cesado su actividad en algún momento posterior, nos encontraremos con datos faltantes en los últimos periodos de nuestro estudio.
3. Incidencias técnicas: El proceso de extracción de datos se realiza de forma automatizada por lo que cualquier incidencia técnica en servidores, ordenadores, conexión a Internet, o cambios en el diseño de la página web de TripAdvisor puede provocar la existencia de datos faltantes.

4. Por último, no podemos descartar errores humanos en la manipulación y el procesamiento de la información.

Los datos perdidos durante una investigación pueden causar principalmente dos tipos de problemas. En primer lugar, al reducirse el número de casos analizados se puede producir una pérdida de potencia o precisión en los resultados. En segundo lugar, los datos faltantes pueden afectar a la validez de los resultados debido a posibles sesgos (Deeg, 2002; Durán 2005).

En nuestro caso, y aunque se podrían aplicar diversas técnicas para reemplazar matemáticamente los datos perdidos (Engels & Diehr, 2003), no lo hemos considerado necesario ya que la muestra (727 hoteles con datos en todos los periodos) era suficientemente representativa, por lo que ni la precisión ni la validez de los resultados se han visto afectadas de forma significativa por los datos faltantes.

## **8. Resultados.**

En este apartado aplicaremos a los hoteles seleccionados en la muestra la metodología de análisis de la movilidad del ranking de Tripadvisor expuesta en la sección 5. Primero analizaremos los datos en conjunto y posteriormente realizaremos un análisis comparado entre las ciudades.

### **8.1. Análisis de la muestra.**

Para realizar el análisis de los índices hemos segmentado los valores obtenidos en cuatro categorías, de acuerdo con la metodología descrita en la sección anterior: Nivel Nulo, Bajo/Débil, Medio y Alto/Fuerte.

Además, para facilitar el análisis estudiaremos todos los índices con signo positivo (es decir, los valores del índice de tendencia se toman en valor absoluto), dado que para el presente estudio no es tan relevante el signo como la cuantía del índice.

La tabla 4 muestra la distribución de frecuencias para los tres índices: Volatilidad (IV), Tendencia (IT) y Movilidad (IM) del conjunto total de hoteles en la muestra. Se observa que el porcentaje de hoteles con índice nulo es muy significativo en los tres casos, especialmente en el caso del índice de tendencia donde el 76,62% de los hoteles presenta un valor igual a 0, lo que indica que para estos establecimientos no ha habido cambios entre su posición inicial y final. Agrupando los índices en los segmentos antes señalados, comprobamos que para los tres índices el porcentaje del segmento bajo/débil es el mayoritario. Sin embargo, la distribución de frecuencias de los tres índices muestra diferencias significativas.

Si clasificamos todas las trayectorias observadas en la muestra conjuntamente por su grado de volatilidad y su nivel de tendencia, de acuerdo con la metodología propuesta, (tabla 5) se observa que el 88,31% de los hoteles tienen Volatilidad Baja y Tendencia Débil, por lo que podemos concluir esta sección señalando que es muy elevado el porcentaje de hoteles con un nivel de movilidad bajo o nulo.

**Tabla 4. Distribución de frecuencias de los índices de movilidad (%).**

TIPO	NIVEL	IV	IT	IM
Alto/Fuerte	(0,9 - 1]	0%	0%	0%
	(0,8 - 0,9]	0%	0%	0%
	(0,7 - 0,8]	0%	0%	0%
Medio	(0,6 - 0,7]	0%	0%	0%
	(0,5 - 0,6]	2,61%	0%	0%
	(0,4 - 0,5]	7,98%	0,14%	0,14%
	(0,3 - 0,4]	1,10%	0,14%	3,16%
Bajo/Débil	(0,2 - 0,3]	21,46%	1,10%	9,22%
	(0,1 - 0,2]	33,29%	22,01%	26,82%
	(0 - 0,1]	0%	0%	27,10%
Nula	0	33,56%	76,62%	33,56%
TOTAL		100%	100%	100%

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos extraídos de TripAdvisor (2016).

**Tabla 5. Clasificación de las trayectorias observadas (%).**

Volatilidad	Tendencia			Total
	Fuerte	Media	Débil	
Alta	0%	0%	0%	0%
Media	0%	0,28%	11,42%	11,69%
Baja	0%	0%	88,31%	88,31%
Total	0%	0,28%	99,72%	100%

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos extraídos de TripAdvisor (2016).

## 8.2. Análisis por ciudades

Analizamos en esta sección la movilidad de los hoteles de la muestra distinguiendo por la ciudad en la que están ubicados. La Tabla 6 recoge los porcentajes de hoteles para cada segmento de los tres índices.

**Tabla 6. Distribución de los índices por ciudades (%).**

	Barcelona	Madrid	Sevilla	Valencia	Zaragoza
IT					
Fuerte	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Media	0,0%	0,0%	1,0%	0,0%	2,1%
Débil	100,0%	100,0%	99,0%	100,0%	97,9%
IV					
Alta	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Media	8,5%	14,0%	13,5%	3,6%	23,4%
Baja	91,5%	86,0%	86,5%	96,4%	76,6%
IM					
Alta	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Media	2,6%	3,6%	3,8%	0,0%	8,5%
Baja	97,4%	96,4%	96,2%	100,0%	91,5%

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos extraídos de TripAdvisor (2016).



Respecto al índice de tendencia (IT), se aprecia un comportamiento similar en todas las ciudades con unos niveles de tendencia débil superiores al 97% en todos los casos, llegando al 100% en tres de las cinco ciudades.

En cuanto al índice de volatilidad (IV), aunque no se encuentran casos de volatilidad alta en ninguna ciudad, al menos sí se aprecia un número considerable de hoteles con volatilidad media. No obstante, sigue siendo mayoritario el porcentaje de hoteles con volatilidad baja, con valores superiores al 86% en todas las ciudades con la excepción de Zaragoza (76,6%).

La distribución del índice de movilidad (IM) también se encuentra muy sesgada hacia los valores bajos, con cifras superiores al 91% en todas las ciudades para este nivel de movilidad, destacando especialmente Valencia donde el 100% de los hoteles muestran movilidad baja.

Por último, también se aprecia cierta correlación entre el tamaño de la ciudad y la movilidad del ranking. La ciudad más pequeña (Zaragoza) es la que presenta más movilidad (menor porcentaje de hoteles con movilidad Baja/Débil en los tres índices). Y la ciudad más grande en número de hoteles, Barcelona, es la que presenta una movilidad menor (porcentajes de movilidad Baja/Débil más altos).

En la tabla 7 presentamos los valores medios de las distribuciones de los índices de movilidad por ciudades.

**Tabla 7. Índices de movilidad (medias) por ciudades.**

Índice	Barcelona	Madrid	Sevilla	Valencia	Zaragoza
IV	0,1363	0,171	0,1769	0,1419	0,1973
IT	0,0241	0,024	0,0363	0,0262	0,0543
IM	0,0802	0,0975	0,1066	0,084	0,1258

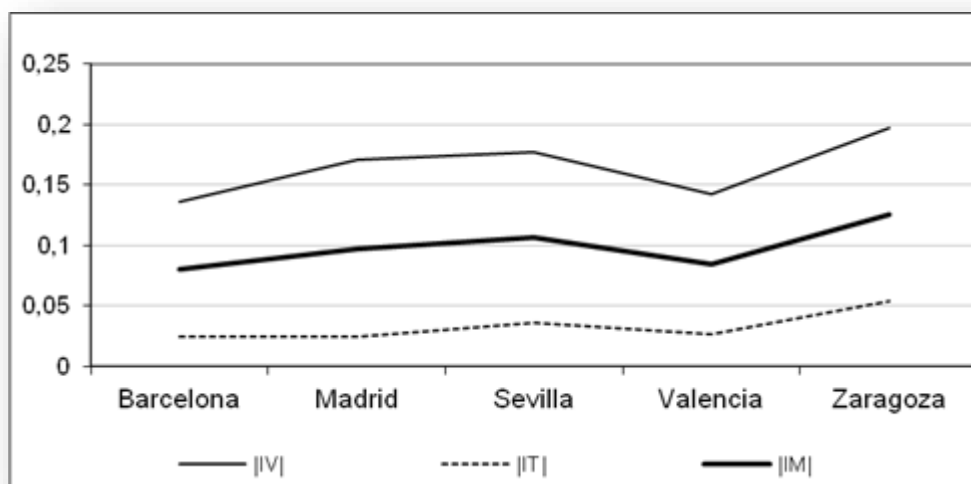
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos extraídos de TripAdvisor (2016).

Los datos de la tabla 7 nos muestran unos valores muy bajos en todas las ciudades. No obstante, se podría apreciar en primer lugar que el índice de volatilidad presenta unas cifras superiores en todas las ciudades al índice de tendencia. Esto nos indicaría que hay cierto nivel de movilidad en términos de volatilidad, es decir, hay movimientos entre deciles pero no suponen una variación significativa en el ranking a medio plazo (índice de tendencia). Los hoteles estarían alternando subidas y bajadas sin efecto final en la clasificación.

Además, como se aprecia en el gráfico 3, que recoge los valores de los tres índices para las cinco ciudades, hay cierta relación entre el tamaño de la ciudad (medido por el número de hoteles) y la movilidad.

Se observa que, con la excepción de Valencia, hay cierta tendencia a aumentar el valor de los índices a medida que disminuye el tamaño de la ciudad. En cualquier caso, todos los índices nos señalan un grado de movilidad muy bajo en todas las ciudades.

**Gráfico 3. Índices por ciudades.**



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos extraídos de TripAdvisor (2016).

Para confirmar si las ciudades se comportan de un modo similar se ha realizado el análisis de la varianza, tomando como factor la ciudad, cuyos resultados se presentan en la tabla 8, donde se aprecian diferencias significativas entre las ciudades.

**Tabla 8. Análisis de la varianza por ciudades.**

Índices	Suma de cuadrados	GL	F	Pr(>F)
IV	0,2939	4	3,4281	0,008677 **
IT	0,0480	4	4,2009	0,002276 **
IM	0,1236	4	3,7683	0,00483 **

\*\*Significativo al 1%

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos extraídos de TripAdvisor (2016).

Adicionalmente, también se ha realizado el test no paramétrico de Kruskal-Wallis, para reforzar las conclusiones acerca de las diferencias por ciudades. Las medianas por ciudad y los resultados de este test, para cada índice aparecen en la tabla 9.

**Tabla 9. Medianas y test de Kruskal-Wallis por ciudades.**

Índices	Medianas					Test de Kruskal-Wallis		
	Barcelona	Madrid	Sevilla	Valencia	Zaragoza	$\chi^2$	g.l.	p-valor
IV	0,1388	0,1388	0,1388	0,1388	0,1388	15,1605	4	0,00438**
IT	0	0	0	0	0	11,123	4	0,02522*
IM	0,0694	0,0694	0,0694	0,0694	0,125	14,5893	4	0,005633*

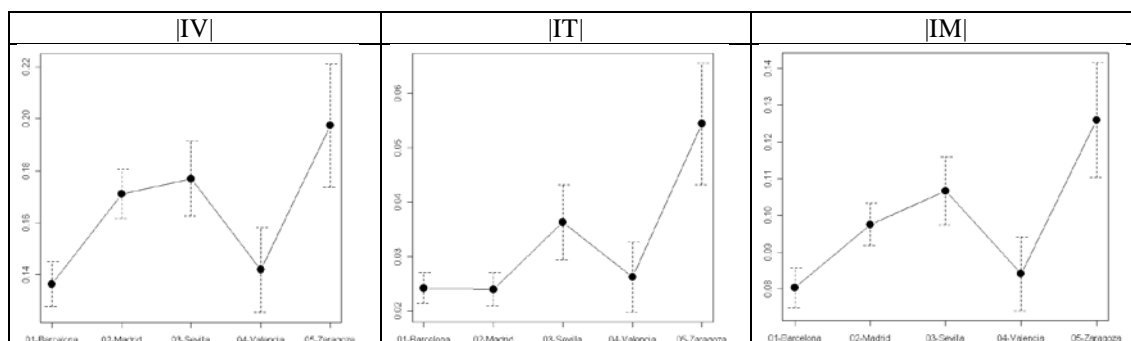
\* Significativo al 5%, \*\*Significativo al 1%

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos extraídos de TripAdvisor (2016).

Los resultados son significativos y confirmamos que existen diferencias en la movilidad de los rankings entre las distintas ciudades.

Como se aprecia nuevamente en los gráficos de medias (gráfico 4), hay cierta relación entre el tamaño de la ciudad y la movilidad del ranking. Más evidentes para los índices IV y IM (donde Valencia rompe una clara línea ascendente).

**Gráfico 4. Índices (en valor absoluto). Gráfico de medias por ciudades.**



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos extraídos de TripAdvisor (2016).

## 9. Conclusiones.

Aunque la influencia que los rankings de hoteles ejercen en el cliente a la hora de tomar la decisión de donde alojarse es ampliamente reconocida tanto en el ámbito empresarial como académico, (Ghose et al., 2012; Callarisa-Fiol et al., 2012), pocos han sido los que han estudiado lo que hemos llamado la movilidad de los rankings, esto es, cómo varían las posiciones en la clasificación de los distintos establecimientos a lo largo del tiempo.

De hecho, en las últimas revisiones bibliográficas (Chen & Law, 2016; Kwok et al., 2017; Sotiriadis, 2017) no se menciona ningún trabajo que se haya ocupado de analizar la evolución de estos rankings.

Dada la revolución que han supuesto para el sector turístico compañías como TripAdvisor o Booking (Xiang & Gretzel, 2010; Ong, 2012), y sin poner en ningún momento en duda la honestidad y rigor de quienes diseñan y gestionan estos rankings, resulta sorprendente que hasta el momento no exista ningún tipo de supervisión o control por parte de instituciones públicas o privadas sobre los mismos, que auditen y verifiquen su correcto funcionamiento.

Nuestro trabajo ha querido aportar luz sobre unos rankings que en estos momentos ejercen una influencia excesiva sobre el sector (Mateos, Martín, & Martín-Velicia, 2014), y adolecen de falta de transparencia en su funcionamiento (Mellinas et al., 2015).

En este sentido, como señalan Scott y Orlikowski (2012), TripAdvisor está configurado de tal manera que produce una forma de transparencia para los comentarios de los turistas mientras que oscurece el mecanismo que ordena esos comentarios.

Así, por una parte, estas plataformas son consideradas transparentes al poner a disposición del usuario final una inabarcable cantidad de información en distintos formatos (puntuaciones, comentarios, fotografías), con valoraciones tanto positivas como negativas aportadas por otros usuarios que resultan de gran utilidad a la hora de seleccionar un establecimiento.

Pero al mismo tiempo que se pone a disposición del usuario toda esta información, se están ocultando los mecanismos utilizados para ordenar esos rankings. Más allá de unas leves nociones sobre el funcionamiento del algoritmo encargado de la configuración del ranking (TripAdvisor, 2016), no podemos conocer con claridad cómo se establece la valoración final del hotel y, por tanto, su posición en la clasificación.

El gran valor de TripAdvisor como creador de rankings no está en su algoritmo, sino en su capacidad de atraer a cientos de miles de usuarios de todo el mundo para que compartan sus opiniones, valoraciones y experiencias. Por eso entendemos que esta opacidad no está en ningún caso justificada, dando argumentos a quienes sospechan de comportamientos poco éticos en la elaboración de estos rankings.

En cuanto a las aportaciones teóricas de este trabajo, consideramos que un aspecto esencial de un ranking es su grado de movilidad, ya que mediante el estudio de esta variable podemos detectar posibles anomalías en su funcionamiento. Por ello hemos querido contribuir a la creación de un marco conceptual que permita desarrollar una línea de investigación apenas explorada en turismo hasta la fecha, centrada en el estudio de la movilidad en los rankings de hoteles más influyentes: TripAdvisor y Booking. Para ello se han definido los principales conceptos en los que se basa este nuevo campo de estudio.

Al mismo tiempo, presentamos una herramienta para medir la movilidad de los hoteles analizando las trayectorias individuales de los distintos establecimientos. Así, se ha formulado un índice de movilidad como combinación de otros dos índices (tendencia y volatilidad).

Respecto a las contribuciones prácticas, se han aplicado los tres índices anteriores a una muestra de hoteles formada por 727 establecimientos situados en las cinco primeras ciudades de España por número de habitantes (Madrid, Barcelona, Valencia, Sevilla y Zaragoza).

Los resultados indican unos niveles de movilidad mínimos. Así, a nivel global, el 96,7% de los hoteles presentan un índice de movilidad bajo o nulo. Y por ciudades, todas sin excepción muestran niveles de movilidad muy bajos (siempre inferiores a 0,13 para un índice que toma valores entre 0 y 1), si bien los test estadísticos nos indican que hay diferencias significativas entre las distintas capitales.

En este sentido se aprecia cierta relación entre el nivel de movilidad y el tamaño de la ciudad (en número de hoteles). Así, Barcelona, la ciudad con una mayor planta hotelera (más de 500 hoteles en TripAdvisor) es la que presenta un índice de movilidad más bajo ( $IM = 0,0802$ ) mientras que la más pequeña, Zaragoza (con 80 hoteles en TripAdvisor), es la que presenta mayores índices de movilidad ( $IM = 0,1258$ ).

Las implicaciones de los resultados obtenidos afectan a los distintos agentes de la industria hotelera (principalmente empresarios, inversores y profesionales del sector). Así, los establecimientos situados en la zona alta de estos rankings tienen una elevada probabilidad de seguir en esa privilegiada zona durante mucho tiempo, dada su escasa movilidad. Dos ejemplos nos ilustran claramente esta realidad: los hoteles que eran número 1 del ranking TripAdvisor en Madrid (Hotel Orfila) y Valencia (Caro Hotel) en junio de 2015, seguían en esa misma posición en febrero de 2018, en ciudades con más de 400 hoteles la primera y 100 la segunda.

Del mismo modo, los hoteles situados en la zona media y baja permanecerán con una alta probabilidad en esas mismas zonas a medio plazo. Ante esta situación, puede resultar contraproducente fijar objetivos, establecer incentivos y medidas del desempeño basadas en una más que improbable mejora en la clasificación.

Los inversores, deberían negociar los precios de compraventa de los establecimientos hoteleros teniendo en cuenta no solo la posición que ocupan en el ranking en un momento dado, sino también el grado de movilidad de estos. En las ciudades analizadas (con rankings sólidos) habría que aplicar una prima sobre el precio inicial cuando el hotel esté situado en una zona de privilegio, pues muy probablemente seguirá ahí en los próximos años. Por el contrario, si el hotel ocupa una posición en la zona media o baja, se debería aplicar un descuento al precio de compra pues también seguirá (con una alta probabilidad) en esa misma zona del ranking a medio plazo.

Finalmente, entre las limitaciones de nuestro trabajo debemos reconocer que sería conveniente ampliar la investigación a ciudades de otros países y continentes, pues la muestra utilizada está formada únicamente por ciudades españolas. También sería conveniente aplicar el modelo a rankings desarrollados por otras webs (Booking.com), a ciudades con un estilo diferente de turismo (sol y playa) e incluso a otro tipo de establecimientos (restaurantes).

Para concluir, queremos invitar a investigadores y expertos en turismo y otras disciplinas a colaborar en este nuevo reto para aportar luz sobre unos rankings que han alcanzado hoy día una influencia inimaginable hace tan solo unos años.

## Referencias.

- Ayeh, J. K., Au, N., & Law, R. (2013). "Do we believe in TripAdvisor?" Examining credibility perceptions and online travelers' attitude toward using user-generated content. *Journal of Travel Research*, 52(4), 437-452.
- Biffaro, L. (2015). Unfair Commercial Practices and Online Consumer Reviews: the Italian Tripadvisor Case. *Rivista Italiana di Antitrust/Italian Antitrust Review*, 2(1), 181-185.
- Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 5th Ed. New York: Wiley.
- Budria, S. (2010). Schooling and the distribution of wages in the European private and public sectors. *Applied Economics*, 42(8), 1045-1054.
- Callarisa-Fiol, L.J., Sánchez-García, J., Moliner, M.Á., & Forgas-Coll, S. (2012). La importancia de las comunidades virtuales para el análisis del valor de marca. El caso de Tripadvisor en Hong Kong y París. *Papers de turisme*, 54, 89-115.
- Chen, Y.F., & Law, R. (2016). A Review of Research on Electronic Word-of-Mouth in Hospitality and Tourism Management. *International Journal of Hospitality & Tourism Administration*, 17(4), 347-372.
- Deeg, D.J. (2002). Attrition in longitudinal population studies: Does it affect the generalizability of the findings? *Journal of Clinical Epidemiology*, 55(3), 213-215.
- Durán, P. (2005). Los datos perdidos en estudios de investigación ¿son realmente datos perdidos? *Archivos argentinos de pediatría*, 103(6), 566-568.
- Eco, U. (2011). El vértigo de las listas. *IC Revista Científica de Información y Comunicación*, 8, 15-34.
- Engels, J. M., & Diehr, P. (2003). Imputation of missing longitudinal data: a comparison of methods. *Journal of Clinical Epidemiology*, 56(10), 968-976.
- EC-European Commission (2014). Study on Online Consumer Reviews in the Hotel Sector. Final report. Recuperado de: <http://bookshop.europa.eu/en/study-on-online-consumer-reviews-in-the-hotel-sector-pbND0414464/>
- Filieri, R., Algezai, S., & McLeay, F. (2015). Why do travelers trust TripAdvisor? Antecedents of trust towards consumer-generated media and its influence on recommendation adoption and word of mouth. *Tourism Management*, 51, 174-185.

- Ghose, A., Ipeirotis, P.G., & Li, B. (2012). Designing Ranking Systems for Hotels on Travel Search Engines by Mining User-Generated and Crowdsourced Content. *Marketing Science*, 31(3), 493–520.
- González, S.M., Gidumal, J.B., & López-Valcárcel, B.G. (2010). La participación de los clientes en sitios web de valoración de servicios turísticos. El caso de Tripadvisor. *Revista de Análisis Turístico*, 10, 17-22.
- Hensens, W. (2010). *The reliability of data from guest reviews on Tripadvisor as a contemporary social media platform*. Paper submitted and presented at SAIMS 2010 in Mpekwini Resort.
- Instituto Nacional de Estadística (2015). Cifras oficiales de población de los municipios españoles: Revisión del Padrón Municipal. Madrid: Ministerio de Economía y Empresa. Recuperado de: [https://www.ine.es/dyngs/INEbase/es/categoria.htm?c=Estadistica\\_P&cid=1254734710990](https://www.ine.es/dyngs/INEbase/es/categoria.htm?c=Estadistica_P&cid=1254734710990)
- Jeacle, I., & Carter, C. (2011). In TripAdvisor we trust: Rankings, calculative regimes and abstract systems. *Accounting, Organizations and Society*, 36(4), 293-309.
- Jenkins, S.P., Brandolini, A., Micklewright, J. Nolan, B., & Basso, G. (2012). The Great Recession and its consequences for household incomes in 21 countries. En Jenkins, S.P., Brandolini, A., Micklewright, J., & Nolan, B. (eds.). *The Great Recession and the Distribution of Household Income*. Oxford: Oxford University Press, pp.33-89.
- Jurca, R., Garcin, F., Talwar, A., & Faltings, B. (2010). Reporting incentives and biases in online review forums. *ACM Transactions on the Web*, 4(2), 1-27.
- Kladou, S., & Mavragani, E. (2015). Assessing destination image: An online marketing approach and the case of TripAdvisor. *Journal of Destination Marketing & Management*, 4(3), 187-193.
- Kirchgässner, G., Wolters, J., & Hassler, U. (2013) *Introduction to Modern Time Series Analysis*. Berlin: Springer-Verlag.
- Kwok, L., Xie, K. L., & Richards, T. (2017). Thematic framework of online review research: A systematic analysis of contemporary literature on seven major hospitality and tourism journals. *International Journal of Contemporary Hospitality Management*, 29(1), 307-354.
- Lee, H. A., Law, R., & Murphy, J. (2011). Helpful reviewers in TripAdvisor, an online travel community. *Journal of Travel & Tourism Marketing*, 28(7), 675-688.
- Mateos, J. C., Martín, M.A.R., & Martín-Velicia, F. A. (2014). Disrupción en el uso de la web 2.0 en los hoteles independientes. *Cultura, desarrollo y nuevas tecnologías: VII Jornadas de investigación en turismo*, 169-183.
- Melián, S., Bulchand, J., & González, B. (2010). La participación de los clientes en sitios web de valoración de servicios turístico. El caso de TripAdvisor. *Análisis Turístico*, 10, 17-22.

- Mellinas, J. P., Martínez, S.M., & Bernal, J.J. (2015). Booking.com: The unexpected scoring system. *Tourism Management*, 49, 72-74.
- Miguéns, J., Baggio, R., & Costa, C. (2008). Social media and tourism destinations: TripAdvisor case study. *Advances in Tourism Research*, 26(28), 1-6.
- Milanovic, B. (2015). Global Inequality of Opportunity: How Much of Our Income Is Determined by Where We Live? *The Review of Economics and Statistics*, 97(2), 452-460.
- Mills, T.C. (2011). *The foundations of modern time series analysis*. Basingstoke, U.K.: Palgrave, McMillan.
- Molinillo, S., Ximénez-de-Sandoval, J. L., Fernández-Morales, A., & Coca-Stefaniak, A. (2016). Hotel assessment through social media: the case of TripAdvisor. *Tourism & Management Studies*, 12(1), 15-24.
- O'Connor, P. (2008). User-generated content and travel: A case study on Tripadvisor.com. In: O'Connor P., Höpken W., Gretzel U. (eds), *Information and Communication Technologies in Tourism 2008*. Springer, Vienna.
- O'Connor, P. (2010). Managing a hotel's image on TripAdvisor. *Journal of Hospitality Marketing & Management*, 19(7), 754-772.
- O'Mahony, M.P., & Smyth, B. (2009). *Learning to recommend helpful hotel reviews*. Proceedings of the third ACM conference on Recommender systems - RecSys '09, 305.
- Ong, B. S. (2012). The Perceived Influence of User Reviews in the Hospitality Industry. *Journal of Hospitality Marketing & Management*, 21(5), 463-485.
- Ott, M., Cardie, C., & Hancock, J. (2012). *Estimating the Prevalence of Deception in Online Review Communities*. Proceedings of the 21st international conference on World Wide Web WWW 12, 201-210.
- Río, C., Gradín, C., & Cantó, O. (2011). The Measurement of Gender Wage Discrimination: The Distributional Approach Revisited. *The Journal of Economic Inequality*, 9(1), 57-86.
- Scott, S.V, & Orlikowski, W. J. (2012). Reconfiguring relations of accountability: Materialization of social media in the travel sector. *Accounting, Organizations and Society*, 37(1), 26-40.
- Smyth, P.C.B., Wu, G., & Greene, D. (2010). *Does TripAdvisor makes hotels better?* Derek Greene School of Computer Science & Informatics, University College Dublin Belfield.
- Sotiriadis, M.D. (2017). Sharing tourism experiences in social media: A literature review and a set of suggested business strategies. *International Journal of Contemporary Hospitality Management*, 29(1), 179-225.
- TripAdvisor. (2016). Changes to the Tripadvisor Popularity Ranking Algorithm. Recuperado de: <https://www.tripadvisor.com/TripAdvisorInsights/n2701/changes-tripadvisor-popularity-ranking-algorithm>
- Tuominen, P. (2011). *The influence of TripAdvisor consumer-generated travel reviews on hotel performance*. University of Hertfordshire Business School Working Paper.

- Twisk, J., & De Vente, W. (2002). Attrition in longitudinal studies: how to deal with missing data. *Journal of Clinical Epidemiology*, 55(4), 329-337.
- Vásquez, C. (2011). Complaints online: The case of TripAdvisor. *Journal of Pragmatics*, 43(6), 1707-1717.
- Xiang, Z., & Gretzel, U. (2010). Role of social media in online travel information search. *Tourism Management*, 31(2), 179-188.





## Valoración estadística - financiera para medio plazo del sector bancario en países con economías emergentes. El caso de Colombia

BOADA, ANTONIO JOSÉ

Escuela de Administración

CEIPA Business School. Medellín-Colombia

Correo electrónico: antonio.boada@ceipa.edu.co

MAYORCA, RÓMULO

Departamento de Formación General y Ciencias Básicas

Universidad Simón Bolívar. Camurí Grande. Estado Vargas (Venezuela)

Correo electrónico: rmayorca@usb.ve

### RESUMEN

Con el presente artículo se pretende exponer un proceso para la valoración de acciones de las empresas del sector bancario mediante múltiplos financieros empresariales, sustentado en variadas técnicas estadísticas tales como simulaciones de Montecarlo y modelos bayesianos de valoración continua de los indicadores relativos en el tiempo, con el fin de hacer proyecciones de escenarios lo más acertado posible en el mediano plazo. En cuanto a la metodología, el enfoque de la investigación fue cuantitativo, el tipo de estudio descriptivo-correlacional, y el diseño de la investigación fue no experimental. En virtud de que para llevar a cabo la valoración del desempeño y evolución de los múltiplos financieros en el tiempo, se deben considerar empresas similares, se decidió realizar previamente un análisis de cluster, para verificar posibles agrupaciones entre las entidades bancarias de acuerdo con las variables.

**Palabras clave:** múltiplos financieros, modelo lineal dinámico bayesiano, valoración de acciones, banca comercial, simulaciones.

**Clasificación JEL:** C15; C81; C51.

**MSC2010:** 62H30; 62F15.

# Statistical - financial value for the medium term of the banking sector in countries with emerging economies. The case of Colombia

## ABSTRACT

This article intends to expose a process for the valuation of shares of the companies of the banking sector through business financial multiples, based on various statistical techniques such as Monte Carlo simulations and Bayesian models of continuous valuation of the relative indicators over time, with in order to make scenario projections as successful as possible in the medium term. Regarding the methodology, the research approach was quantitative; the type of descriptive-correlational study, and the research design was non-experimental. Because in order to carry out the assessment of the performance and evolution of the financial multiples over time, similar companies must be considered, it was decided to previously conduct a cluster analysis, to verify possible groupings between the banking entities according to the variables.

**Keywords:** Financial Multiples, Bayesian Dynamic Linear Model, Stock Valuation, Commercial Banking, Simulations.

**JEL classification:** C15; C81; C51.

**MSC2010:** 62H30; 62F15.



## 1. Introducción.

La valoración de una empresa para Fernández (2008) es “un ejercicio de sentido común que requiere unos pocos conocimientos técnicos y mejora con la experiencia” (p. 1). Esto no significa que sea una tarea simple, ya que valorar correctamente a una empresa y al precio de sus acciones en el mercado secundario, es una labor compleja. Por su parte, Boson, Cortijo y Flores (2009) comentan que la valoración de empresas está sujeta a cambios en los supuestos iniciales, según la magnitud de la decisión que se presente en casos como fusiones, venta (total o parcial), alianzas, reingeniería, liquidación o reorganización en momentos de crisis. Con relación a esto último, Londoño, Correa y Lopera (2014) indican que después de la crisis financiera de 2008 salieron a la luz los problemas internos de muchas instituciones financieras, en particular, para la evaluación del riesgo, siendo estos elementos que también influyen en la valoración de las empresas de cualquier sector.

Adicionalmente, Guijaro y Moya (2007) exponen que los modelos econométricos de valoración de empresas son diversos, pero todos han sido creados con la intención de tener una alta capacidad explicativa con el menor número de variables. Para García y García (2006), la evidencia empírica existente respecto a los modelos de valoración multifactoriales no es unánime en muchos ámbitos; sin embargo, es evidente el interés creciente que versa sobre la utilidad y el estudio de los modelos de valoración en los diferentes mercados y para los distintos activos financieros. En este mismo orden y dirección, Berk y De Marzo (2008) plantean que los modelos de valoración determinan las relaciones entre los flujos de efectivo futuros de la empresa, su costo de capital y el valor de sus acciones. Cabe destacar que para la investigación llevada a cabo, el universo objetivo de estudio fue el sector financiero, en particular, la banca comercial.

Al respecto, Ariza (2014) destaca que los bancos son entidades altamente apalancadas, lo que resulta en valoraciones mucho más dependientes de las cambiantes circunstancias económicas, en comparación con otros sectores. Dadas las consideraciones anteriores, aunque se han desarrollado diversos métodos de valoración, para el presente estudio se utilizó la técnica de múltiplos financieros derivados de los estados financieros - contables de las empresas del sector bancario que cotizan en las bolsas de valores. De acuerdo con Parra (2013), este método se fundamenta “en la observación que se hace de una empresa, a través de la aplicación de diversos indicadores, especialmente del mercado de valores de empresas con características similares para obtener un valor asociado a ella” (p. 89). En este mismo orden de ideas, Damodaran (2006), Demirakos, Strong y Walker (2004) señalan que los programas de análisis y los múltiplos de valoración son frecuentemente utilizados para estimar el valor de la empresa y justificar las recomendaciones de inversión.

Mediante la Ley del Precio Único, en un mercado competitivo, si dos o más activos son equivalentes, éstos tenderán a tener el mismo valor de mercado. Sin embargo, la gran pregunta radica en determinar este valor a los precios del mercado. Es por ello, que una de las principales técnicas de valoración corresponde a la de los múltiplos financieros, en donde a pesar de la diferencia entre los valores en libros (principios y métodos contables) y los valores de mercado (métodos financieros), los estados financieros auditados publicados y auditados a menudo ofrecen pistas en referencia a la situación financiera e información sobre su desempeño histórico que pueden ser importantes para el futuro.

Cabe agregar que Damodaran (2006) indica que dentro del mundo de las finanzas no es posible encontrar dos activos que sean iguales completamente. Por esta razón, para llevar a cabo una valoración se requiere utilizar activos similares a aquel cuyo valor se desea tasar, y que se establezca un criterio acerca de cuáles son aquellas diferencias que intervienen en el valor que tienen para los inversionistas. La valoración será adecuada siempre que exista una estabilidad en el desempeño de las operaciones empresariales, sin ningún tipo de anuncio relevante que origine

tensión, reacción y saltos especulativos del mercado secundario, ante noticias de perspectivas futuras.

Hechas las consideraciones anteriores, es conveniente señalar que Land y Lang (2002), Zarowin (1990), Beaver y Morse (1978) indican que hay pruebas de que las diferencias contables son una fuente importante de variación en los múltiplos financieros.

Se debe resaltar que, por medio de la técnica de múltiplos financieros, fue posible ponderar los indicadores de cada empresa del sector bancario con base a corporaciones equivalentes del mismo sector. El procedimiento empleado consistió en simular escenarios que se ajustaran probabilísticamente de acuerdo al comportamiento histórico de los datos, para luego comparar ese resultado con el precio de la acción en el mercado secundario; esto permite establecer un valor que puede ser inhibitorio o propulsor, dependiendo del comportamiento del mercado secundario en referencia al instrumento financiero considerado.

Este procedimiento potencia y complementa el método habitual de los múltiplos financieros con herramientas estadísticas, para la creación de un indicador porcentual el cual es utilizado para estimar el precio de la acción en el mercado secundario.

En este contexto, el objetivo general de este artículo es aplicar un conjunto de técnicas esquemáticamente desarrolladas para valorar el desempeño y evolución de los múltiplos financieros en el tiempo, para las empresas del sector bancario de Colombia.

## 2. Metodología.

El enfoque de la investigación fue cuantitativo, ya que se recolectaron datos para probar hipótesis con base en la medición numérica y el análisis estadístico para establecer patrones de comportamiento. Además, el tipo de estudio fue descriptivo-correlacional, porque lo que se buscó fue hacer una descripción y valoración de las acciones de las empresas del sector bancario con base a valores de empresas con características similares. El diseño fue no experimental ya que no se manipularon deliberadamente las variables.

A pesar de los avances teóricos y computacionales en la estadística bayesiana en las últimas décadas, poca atención se ha prestado a uno de los problemas más comunes en la investigación estadística (Gutiérrez y Zhang, 2009). La estadística bayesiana proporciona un enfoque teórico adecuado para el modelaje de datos, ya que permite manejar los problemas de actualización, de una forma más robusta que la estadística clásica, gracias al basamento axiomático y la flexibilización de cada problema en forma simultánea, permitiendo así desarrollar inferencias lo más coherente posible. En este sentido, para la fundamentación metodológica estadística de este caso, se alineó la técnica de acuerdo con Perichi (2002), West y Harrison (1989), en donde a través del Modelo Lineal Dinámico Bayesiano (MLDB), es posible determinar, a partir de datos históricos, el efecto producido por estas causas que originalmente no son contempladas por la Simulación de los Múltiplos Financieros; esto valorado a nivel de impacto potenciador o inhibitorio del Indicador Relativo Logarítmico Comparativo (IRLC).

En este mismo orden de ideas, el MLDB se aplica sobre un Modelo de Suavización Exponencial del Indicador Relativo Logarítmico Comparativo IRLC [ $\ln(\text{Pr}) / \ln(\text{NVT})$ ], calculado bajo una tasa  $\alpha$ , alineada al Porcentaje de Filtro Bayesiano ( $A_t$ ). La fórmula de Suavización Exponencial aplicado como estimador al Indicador Relativo Comparativo IRLC en tiempo “t” viene dada por la siguiente expresión:

$$\widehat{IRLC}_t = \widehat{IRLC}_{t-1} + [\alpha (IRLC_{t-1} - \widehat{IRLC}_{t-1})] \quad (1)$$

Por medio de este estudio, se procedió a generar una estructura estadística - financiera que permitiera establecer un procedimiento de valoración continua de instrumentos financieros, aplicable en instituciones como el Observatorio Financiero del CEIPA, Business School (Boada, 2016).

El procedimiento propuesto se desarrolla mediante fases, lo cual explica la sinergia realizada entre técnicas tradicionales financieras de valoración, en conjunto con modelos estadísticos y simulaciones probabilísticas que permiten crear estructuras de estimación consistente y valoración de escenarios futuros (Boada & Gallego, 2016).

## **2.1. Desarrollo de las Fases.**

**Primera fase:** se realizó el estudio inicial con la información suministrada por Bloomberg (Estados Financieros Consolidados y Auditados), desde el año 2010 hasta el 2016 de las empresas del sector bancario de Colombia, particularmente con los tres principales bancos del país: Davivienda, Banco de Bogotá y Bancolombia, a través de la información consolidada anualmente para cada organización.

**Segunda fase:** se generó una estructura de ponderación de los múltiplos financieros de cada empresa, fundamentado en los registros de las otras dos empresas competidoras. De esta manera es posible determinar, por ejemplo, el precio de la acción de Bancolombia en función de la relación del múltiplo financiero de Bancolombia y su asociación con los resultados de los competidores de tamaño similar, Davivienda y Banco de Bogotá.

**Tercera fase:** se calculó la proyección de las variables originales para los años futuros (patrimonio, beneficio neto, ingreso, EBITDA, precio de la acción en el mercado secundario, y añadiendo para el sector bancario las variables de EBITDA antes de provisión y pasivos), desde 2017 al 2021, calculando posteriormente los múltiplos financieros según estos resultados proyectados.

**Cuarta fase:** se corrieron cinco mil simulaciones de Montecarlo para cada uno de estos múltiplos financieros mediante la herramienta Risk Simulator, estableciendo un valor tentativo de cierre anual. Estas simulaciones se realizaron mediante distribuciones probabilísticas establecidas para cada variable de entrada, anteriormente descritas.

**Quinta fase:** se calcularon los indicadores relativos de comparación entre el valor teórico de los múltiplos financieros obtenidos a través de la simulación y el precio de la acción en el mercado secundario. De esta manera se estableció una proyección de tendencia mediante un modelo lineal dinámico bayesiano. Así mismo, también se puede valorar porcentualmente la percepción de la acción en el mercado secundario en correspondencia con las simulaciones efectuadas, determinando si el mercado se encuentra sobrevalorando o subvalorando a la empresa en función a la perspectiva matemática.

**Sexta fase:** se establecieron proyecciones para el precio de cada acción de las empresas consideradas del sector bancario colombiano, desde 2017 al 2021, valorados según las proyecciones de las variables de entrada: patrimonio, beneficio neto, ingreso, EBITDA, precio de la acción en el mercado secundario, y añadiendo para el sector bancario las variables de EBITDA antes de provisión y pasivos, simulación del valor teórico del múltiplo financiero mediante Risk Simulator y, finalmente, el indicador relativo de comparación establecido según el Modelo Lineal Dinámico Bayesiano.

Antes de presentar los resultados, es conveniente indicar que el sector bancario colombiano, se encuentra compuesto por seis bancos que cotizan en la Bolsa de Valores de Colombia (BVC): BBVA, AV villas, Occidente y los bancos tradicionales de mayor tamaño, que en conjunto abarcan el 70% del mercado (Davivienda, Banco de Bogotá y Bancolombia).

En virtud de que, para llevar a cabo la valoración del desempeño y evolución de los múltiplos financieros en el tiempo se deben considerar empresas similares, se decidió realizar previamente un análisis de cluster, para verificar posibles agrupaciones entre las entidades bancarias de acuerdo con las variables mencionadas con anterioridad.

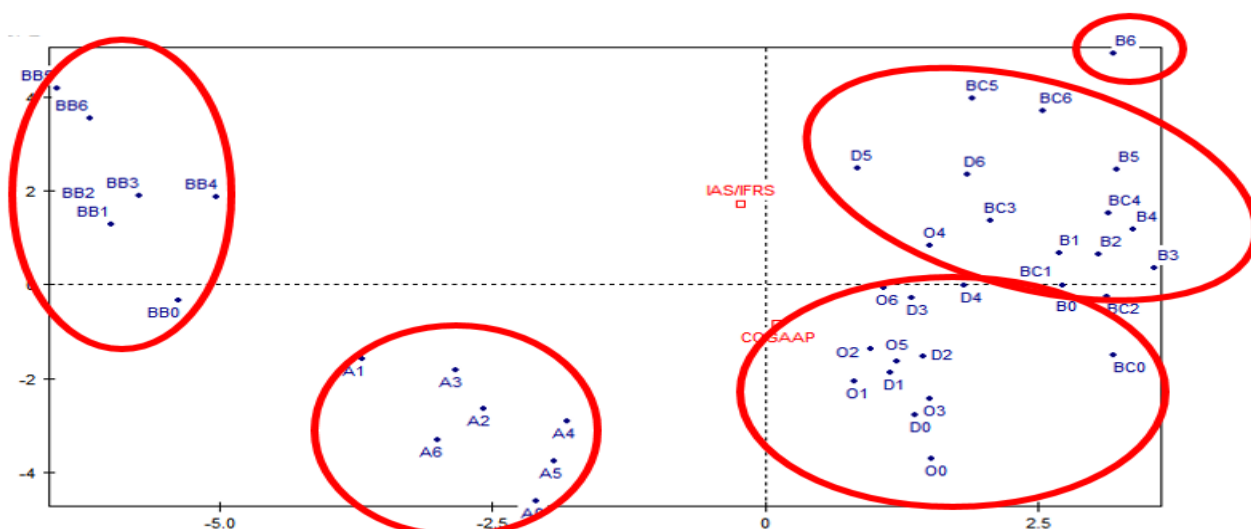
El procedimiento seguido consistió en considerar una primera aproximación mediante un análisis de conglomerados jerárquicos, seleccionando el método de vinculación intergrupos y la distancia euclídea al cuadrado. La primera corrida permitió tener una solución preliminar con la conformación de cinco grupos. Lugo, se calcularon los centros iniciales para poder utilizar el método k-medias y obtener los grupos finales.

Es de resaltar que para la identificación de cada individuo se consideró la siguiente notación: BBVA (BB), AV villas (A), Occidente (O), Davivienda (D), Banco de Bogotá (B) y Bancolombia (BC). Como los datos recolectados fueron los correspondientes del 2010 al 2016, se estipuló que el banco por cada año era un individuo, así, D0 corresponde al banco Davivienda del año 2010, B1 corresponde al banco de Bogotá del año 2011, O6 corresponde al banco Occidente del año 2016 y así sucesivamente.

### 3. Resultados.

Con relación al análisis de cluster, en la figura 1 se presentan la distribución de los individuos y la conformación de los grupos finales.

**Figura 1. Análisis de cluster para el Sector Bancario de Colombia que cotiza en la Bolsa de Valores BVC (Davivienda, Banco de Bogotá, Bancolombia Banco de Occidente, AV villas y BBVA).**



Fuente: Elaboración propia.

En la figura 1 se denota estadísticamente la creación de cinco tipos de cluster o conglomerados, perfectamente establecidos, y que pueden tener un nivel interesante de interpretación y análisis que detallamos:

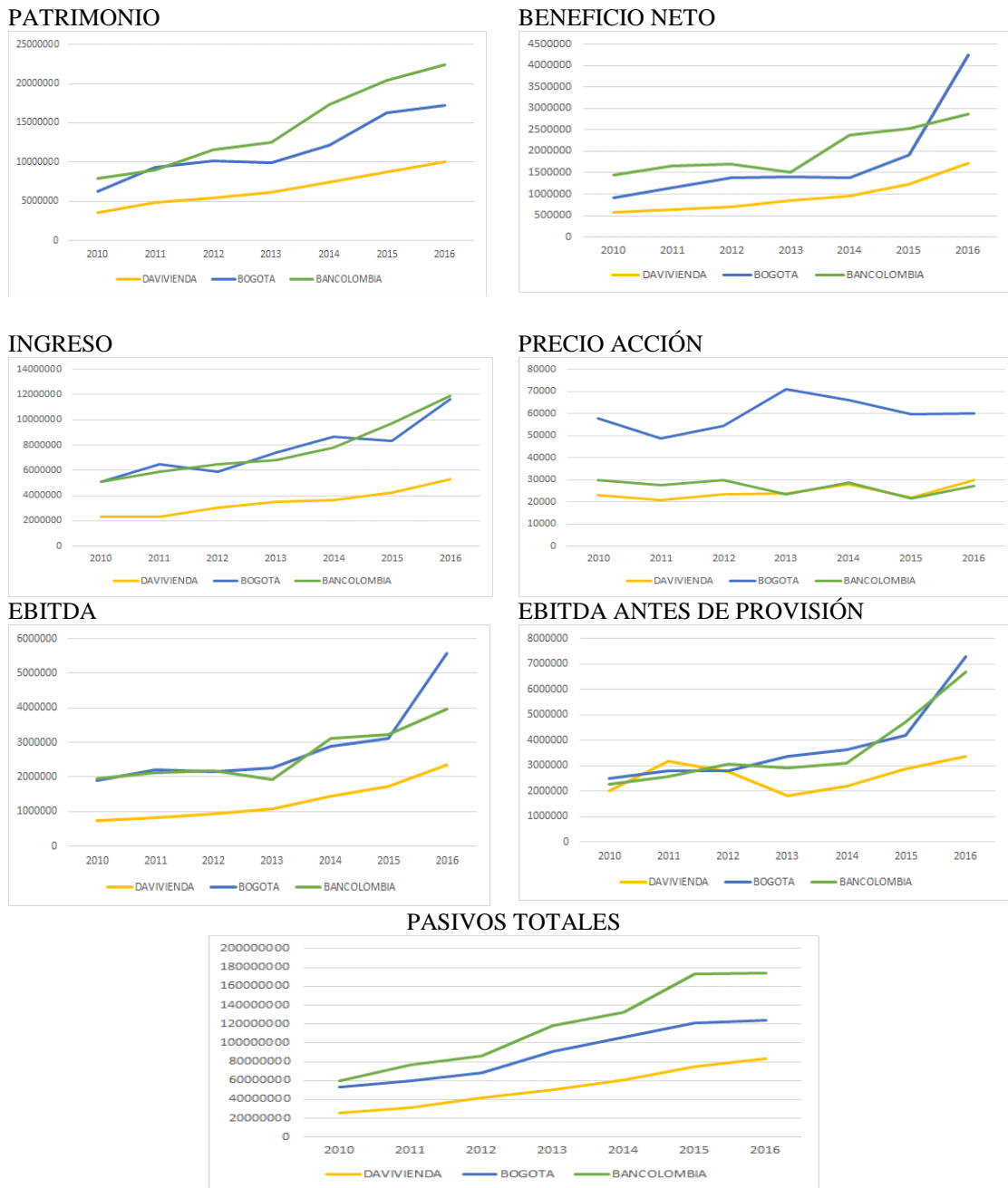
- *Grupo 1.* Agrupa Davivienda en su época joven (2010, 2011, 2012, 2013 y 2014), Bancolombia en 2010 y Banco de Occidente en casi su totalidad (2010, 2011, 2012, 2013, 2015 y 2016). Este grupo refleja lo que se denominó “*Bancos en Período de Crecimiento*”. Para este cluster, Davivienda se consideraba un banco de poca participación de mercado, pero ya para 2015 y 2016 se consolidó como una entidad financiera de importante tamaño y el tercero del sector bancario colombiano. Así mismo,

se observa que Banco de Occidente poco a poco está aumentando sus indicadores, y pronto pasará a consolidarse como el cuarto banco de importancia relevante para el país.

- *Grupo 2.* Corresponde al grupo más grande, agrupa Davivienda en su época actual (2015, y 2016), Banco de Bogotá en casi todos los años (2010, 2011, 2012, 2013, 2014 y 2015), la totalidad de Bancolombia (2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016) y como un caso excepcional, banco de occidente sólo en 2014. Este grupo refleja lo que se denominó como “*Bancos Consolidados en el Mercado*”. Para este conglomerado, se observan los principales bancos del sector en Colombia, así como su estabilidad y solidez en el tiempo. También se valora a Banco de Occidente como el potencial que posee para entrar en este grupo en el mediano plazo.
- *Grupo 3.* Corresponde al grupo más pequeño, agrupa solamente al Banco de Bogotá en el último año 2016. Este grupo, refleja lo que se denominó como “*Súper Bancos*”. Para este conglomerado, se estima que sea la evolución de los bancos, una vez que se incluyan los beneficios obtenidos en las sucursales que posee en el exterior. Ahora con las normas NIFF, Banco de Bogotá puede reflejar en sus estados financieros los beneficios obtenidos por sus sucursales en el exterior (para aquellas entidades que posean dicha inversión). Banco de Bogotá aparenta ser el primer banco de Colombia que llega a este nivel de estructura bancaria.
- *Grupo 4.* Agrupa solamente a la entidad bancaria de AV villas en todos los años (2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015 y 2016). Este grupo, reflejan lo que se denominó como “*Bancos Pequeños*”. Para este conglomerado, se analiza que Av villas representa el banco más pequeño de los seis analizados, así mismo su nivel de Beneficio y EBITDA en función a los ingresos se expone bastante reducido al compararlo con las restantes entidades financieras.
- *Grupo 5.* Finalmente, el quinto grupo expone solamente a la entidad bancaria de BBVA en todos los años (2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015 y 2016). Este grupo refleja lo que se denominó como “*Bancos Pequeños con Alto Endeudamiento*”. Para este conglomerado, se analiza que BBVA representa un banco bajo el mismo nivel de patrimonio que el Banco de Occidente, pero su nivel de endeudamiento (pasivo) se encuentra a un nivel elevado cuando lo comparamos con sus activos totales.

**Primera Fase.** Estudio inicial con la información suministrada por Bloomberg (Estados Financieros Consolidados y Auditados), desde el año 2010 hasta el 2016 de las empresas del sector bancario de Colombia: Davivienda, Banco de Bogotá y Bancolombia. Se procedió a calcular los múltiplos financieros para la información histórica registrada en los años 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015 y 2016, elaborando los gráficos respectivos (figura 2) con la información recabada, se puede observar el comportamiento de cada una de las variables para las tres empresas consideradas del sector bancario colombiano.

**Figura 2. Información de las tres empresas del sector bancario colombiano.**



Fuente: Elaboración propia - Bloomberg.

**Segunda Fase.** Generación de una estructura de ponderación de los múltiplos financieros de cada banco, fundamentado en los registros de los competidores. Estos múltiplos financieros fueron calculados en su forma directa y, posteriormente, también se procedió al cálculo de su forma como múltiplo secundario según el precio de la acción en el mercado secundario. Con el valor expuesto de estos múltiplos financieros para cada banco durante cada año, fue posible calcular la “Valoración Teórica del Banco”, o múltiplo general calculado a partir de los múltiplos financieros de las compañías competidoras del sector (tabla 1).



**Tabla 1. Valores Teóricos según los Múltiplos Financieros (antes de simulaciones de Montecarlo), para los bancos Davivienda, Banco de Bogotá y Bancolombia (calculado con base a sus indicadores financieros comparables).**

EMPRESA	AÑO	Ln (VALOR PROMEDIO TEÓRICO)	VALOR PROMEDIO TEÓRICO según Múltiplos Financieros	Precio Real de la acción para fin de año
Davivienda	2010	10,07588178	23.762,92	22.980,00
Davivienda	2011	10,05033259	23.163,48	20.860,00
Davivienda	2012	10,11236112	24.645,78	23.480,00
Davivienda	2013	10,06168026	23.427,83	23.660,00
Davivienda	2014	10,10420815	24.445,66	28.100,00
Davivienda	2015	9,927980511	20.495,90	21.800,00
Davivienda	2016	10,00874651	22.219,96	30.000,00
Banco de Bogotá	2010	11,30766549	81.443,55	57.639,91
Banco de Bogotá	2011	11,27646627	78.941,80	48.779,89
Banco de Bogotá	2012	11,27905183	79.146,18	54.255,19
Banco de Bogotá	2013	11,22790373	75.199,79	71.178,82
Banco de Bogotá	2014	11,35175766	85.114,92	66.100,00
Banco de Bogotá	2015	11,02083716	61.134,83	59.500,00
Banco de Bogotá	2016	11,52252572	100.964,64	60.200,00
Bancolombia	2010	10,04288186	22.991,54	29.940,00
Bancolombia	2011	9,884482743	19.623,49	27.620,00
Bancolombia	2012	9,990490377	21.817,99	29.820,00
Bancolombia	2013	10,04470998	23.033,61	23.440,00
Bancolombia	2014	10,22186025	27.497,77	28.640,00
Bancolombia	2015	10,03572654	22.827,62	21.600,00
Bancolombia	2016	10,11128657	24.619,31	27.180,00

Fuente: Elaboración propia.

Es importante destacar que esta fase dos genera la estructura fundamental en la que se basará la simulación de Montecarlo, una vez se definan las distribuciones probabilísticas para las variables aleatorias utilizadas: patrimonio, beneficio neto, ingreso, precio de la acción en el mercado secundario, EBITDA, EBITDA antes de provisión y pasivos.

**Tercera Fase.** Proyección de las variables y datos para los años futuros, desde 2017 al 2021, calculando los múltiplos financieros según los resultados proyectados.

Para esta fase, tras el análisis del comportamiento histórico de las variables utilizadas de patrimonio, ingreso, beneficio, precio de la acción, EBITDA, EBITDA antes de provisión y pasivo, se procedió a realizar una proyección de valores futuros, fundamentados en las técnicas de regresión y de Movimiento Browniano Exponencial o Geométrico.

Para esta técnica, la volatilidad dependerá de la fluctuación promedio histórica de los resultados obtenidos en los balances generales analizados previamente. De esta manera, después de aplicar las técnicas de modelo de regresión y pronósticos de procesos estocásticos, las estimaciones de estas variables para los años 2017 a 2021 se presentan en la tabla 2.

**Tabla 2. Predicciones de variables de entrada para los bancos Davivienda, Banco de Bogotá y Bancolombia.**

EMPRESA	Estándar Contable	AÑO	PATRIMONIO TOTAL	BENEFICIO NETO	INGRESO	ACCIONES CIRCULACION	PRECIO ACCION (Pr)	EBITDA	EBITDA ANTES PROVISIÓN	PASIVO TOTAL
DAVIVIENDA	IAS/IFRS	2017	10773988,74	2071840,546	5390504,729	451,6704	31920,65779	2313783,843	3765678,567	92380007,89
DAVIVIENDA	IAS/IFRS	2018	11820195,45	2338335,403	5869637,397	451,6704	33332,8207	2568456,557	4509281,886	102295593,6
DAVIVIENDA	IAS/IFRS	2019	12866402,16	2938840,362	6348770,065	451,6704	35005,42761	2823129,272	5364839,094	112211179,4
DAVIVIENDA	IAS/IFRS	2020	13912608,87	3547059,534	6827902,733	451,6704	36594,84908	3077801,986	6472643,935	122126765,1
DAVIVIENDA	IAS/IFRS	2021	14958815,57	4467348,329	7307035,4	451,6704	38914,25563	3332474,7	7409755,786	132042350,9
Desviación			1654198,049	965529,6909	757575,2659	0	2739,016125	402672,9175	1466353,173	15677917,65
Desv Uniforme			1208055,448	691523,5315	553254,7495	0	2018,877798	294070,7203	1051954,482	11449532,2
Coef Variac			12,86%	31,42%	11,93%	0,00%	7,79%	14,26%	26,64%	13,97%
BOGOTA	IAS/IFRS	2017	18610416,6	3604651,056	11365151,32	331,2	62131,33045	4808968,372	7387539,235	142360095,2
BOGOTA	IAS/IFRS	2018	20361912,82	4498770,352	12299540,63	331,2	65080,00218	5293692,497	8325954,249	155712032,8
BOGOTA	IAS/IFRS	2019	22113409,05	5529958,806	13233929,94	331,2	67967,93463	5778416,622	8930817,931	169063970,3
BOGOTA	IAS/IFRS	2020	23864905,27	6919054,006	14168319,25	331,2	69749,22879	6263140,747	10408878,53	182415907,9
BOGOTA	IAS/IFRS	2021	25616401,5	8143618,12	15102708,56	331,2	73597,46159	6747864,872	11551739,35	195767845,4
Desviación			2769358,692	1824282,65	1477399,222	0	4385,359598	766416,1359	1661347,822	21111266,93
Desv Uniforme			2022453,634	1310286,928	1078939,84	0	3309,986952	559711,2081	1202101,027	15417489,49
Coef Variac			12,52%	31,79%	11,16%	0,00%	6,48%	13,26%	17,82%	12,49%
BANCOLOMBIA	IAS/IFRS	2017	24781406,14	3386626,745	11883239	961,827	28563,38561	3956744,286	7258779,598	199845086,4
BANCOLOMBIA	IAS/IFRS	2018	27359197,68	3818066,4	12937625,39	961,827	29058,39588	4285602,679	8438496,485	220525539,9
BANCOLOMBIA	IAS/IFRS	2019	29936989,21	4024349,941	13992011,79	961,827	30620,07989	4614461,072	9596737,866	241205993,3
BANCOLOMBIA	IAS/IFRS	2020	32514780,75	4655902,815	15046398,18	961,827	31630,67195	4943319,464	11000190,51	261886446,7
BANCOLOMBIA	IAS/IFRS	2021	35092572,29	5290020,265	16100784,57	961,827	33706,73571	5272177,857	13733683,69	282566900,2
Desviación			4075846,293	746352,9985	1667131,268	0	2071,939038	519970,7745	2502789,559	32698667,94
Desv Uniforme			2976577,274	549462,3806	1217500,535	0	1484,757282	379732,9633	1869143,811	23879730,71
Coef Variac			13,61%	17,62%	11,91%	0,00%	6,75%	11,27%	25,01%	13,56%

Fuente: Elaboración propia.

Las proyecciones directas, expresan únicamente una opción basada en probabilidades de acuerdo al comportamiento histórico de los balances generales y estados de ganancias y pérdidas para cada empresa del sector bancario colombiano, auditados y publicados por Bloomberg; no obstante, aún se deben realizar estimaciones del valor teórico del múltiplo financiero en base a simulaciones de distribuciones probabilísticas (4ª fase) y luego estimar y proyectar un indicador relativo de comparación entre este valor teórico y el precio de la acción en el mercado secundario (5ª y 6ª fase).

**Cuarta Fase.** Ejecución de simulaciones para cada uno de los valores teóricos derivados de los múltiplos financieros mediante la herramienta Risk Simulator, estableciendo un valor tentativo de cierre anual.

Para esta fase, se corrieron cinco mil simulaciones de Montecarlo en cada uno de los valores teóricos anuales, derivados de los múltiplos financieros para los tres principales bancos de Colombia (Davivienda, Banco de Bogotá y Bancolombia). Este proceso, se realizó definiendo distribuciones probabilísticas y parámetros para cada una de las siete variables a simular (patrimonio, beneficio neto, ingreso, precio de la acción en el mercado secundario, EBITDA, EBITDA antes de provisión y pasivo), ejecutando finalmente la simulación mediante la herramienta Risk Simulator, obteniendo así un valor tentativo de cierre anual.

De esta manera, tras establecer los modelos de regresión para el patrimonio, ingresos, EBITDA y pasivos, así como también los procesos estocásticos de caminata aleatoria exponencial para estimar los valores de beneficio, EBITDA antes de provisión y precio de la acción, fue posible construir una tabla con los valores de predicción para el valor teórico del múltiplo financiero de las tres empresas del sector bancario de Colombia en función a dichas variables de interés.

Entre las múltiples distribuciones probabilísticas reflejadas por la aplicación de Risk Simulator, esta investigación se centró en tres distribuciones probabilísticas:

1. *Distribución Probabilística Uniforme:* de acuerdo con Lind (2012) para la distribución uniforme, todos los valores contenidos entre los mínimos y máximos suceden con la misma probabilidad. Esta distribución es utilizada para campos altamente fluctuantes y sin posibilidad

de conocimiento ni estimación previa de su comportamiento o tendencia. Para el presente estudio, se utilizó esta distribución de probabilidad para el beneficio neto y para el precio de cotización por acción, ya que ambas variables en su condición de alto nivel de fluctuación y ausencia de patrones establecidos, pueden generar cualquier tipo de relación en mercados con economías emergentes. Para utilizar esta distribución probabilística, fue necesario establecer los valores de máximos y mínimos, según el comportamiento del resultado de cada banco a nivel histórico o proyectado, y una desviación promedio estable para una distribución uniforme de cada una de las tres empresas en cada una de las dos variables (beneficio y precio de la acción).

La fórmula de cálculo para la desviación típica de la distribución es:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{[Max(x_i) - Min(x_i)]^2}{12}} \quad (2)$$

El valor mínimo y el valor máximo son representados según los valores registrados históricamente y/o proyectados según cada una de las dos variables y cada una de las tres empresas, ampliados según tres veces la desviación estándar previamente calculados (Resultado Empresa  $\pm$  3. Desviación Estándar Empresa), con la finalidad de contemplar el 99,70% de los casos posibles.

2. *Distribución Probabilística Triangular*: es un modelo de distribución de probabilidad continua, que tiene por función de densidad la estructura siguiente:

$$fX(x | a, m, b) = \frac{2}{b-a} * \begin{cases} \frac{x-a}{m-a} & a \leq x \leq m \\ \frac{b-x}{b-m} & m \leq x \leq b \end{cases} \quad (3)$$

Esta distribución presenta tres parámetros y de acuerdo con Herrerías y Herrerías (2009), describe una situación donde se conocen los valores mínimo (a), máximo (b) y el que con mayor probabilidad puede suceder (c); variando la posición más probable con relación a los extremos, la distribución puede ser simétrica o no. Es de uso frecuente en la toma de decisiones empresariales, para modelar procesos estocásticos o de riesgo comercial y fue utilizada en el presente estudio para simular la variable de EBITDA antes de provisión, ya que la estimación realizada por el movimiento browniano exponencial, exponía una estimación con mayor probabilidad que los extremos.

3. *Distribución Probabilística Logarítmica Normal*: también es conocida como ley del efecto proporcional. Su función de densidad viene dada por la siguiente estructura:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{1}{y} \exp\left(-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad y \geq 0 \quad (4)$$

De acuerdo con Sandoval (2005), la distribución lognormal es frecuentemente utilizada para expresar el comportamiento de observaciones con asimetría positiva, por ejemplo, en un análisis financiero, para evaluar una propiedad en bienes raíces o el análisis de precio de acciones y en todos aquellos fenómenos donde los valores observados no pueden caer por debajo de cero. Los precios resultantes muestran esta tendencia porque no pueden caer por debajo del límite menor de cero, pero pueden incrementar su precio indefinidamente. Esta distribución fue utilizada para alimentar las simulaciones del patrimonio, ingreso, EBITDA y pasivo; términos financieros que presentan variabilidad controlada, pero no pueden ser negativos.

### 3.1. Simulador de Montecarlo.

El Montecarlo es un método numérico que permite resolver problemas físicos y matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias. De acuerdo con García (2003) la clave de la

simulación de Montecarlo consiste en crear un modelo matemático del sistema, proceso o actividad que se quiere analizar, identificando aquellas variables cuyo comportamiento aleatorio determina el comportamiento global del sistema. Mediante el simulador de Montecarlo de Risk Simulator, se realizaron cinco mil simulaciones de escenarios, en donde se establecieron criterios probabilísticos de fluctuación para cada variable original. De esta manera, se identificó la probabilidad que separa el valor teórico proporcionado por los múltiplos financieros y el valor real obtenido por el mercado secundario de la Bolsa de Valores. En la tabla 3 se presentan los resultados de los valores teóricos obtenidos.

**Tabla 3. Valor Teórico de la empresa obtenido por Múltiplos Financieros. A nivel directo (sin simulación) y con simulación de Montecarlo, para los bancos Davivienda, Banco de Bogotá y Bancolombia.**

<b>EMPRESA</b>	<b>AÑO</b>	<b>VALOR TEÓRICO según múltiplos financieros con información histórica</b>	<b>NUEVO VALOR TEÓRICO (NTV), según múltiplos financieros y simulación de Montecarlo (con información histórica)</b>	<b>Precio real (Pr) de la acción en el mercado secundario de la bolsa de valores</b>
Davivienda	2010	23762,92	30.263,57	22980,00
Davivienda	2011	23163,48	28.257,10	20860,00
Davivienda	2012	24645,78	29.522,26	23480,00
Davivienda	2013	23427,83	25.044,26	23660,00
Davivienda	2014	24445,66	27.135,55	28100,00
Davivienda	2015	20495,90	21.899,08	21800,00
Davivienda	2016	22219,96	22.227,82	30000,00
Banco de Bogotá	2010	81443,55	110.227,31	57639,91
Banco de Bogotá	2011	78941,80	101.316,04	48779,89
Banco de Bogotá	2012	79146,18	102.129,82	54255,19
Banco de Bogotá	2013	75199,79	95.798,28	71178,82
Banco de Bogotá	2014	85114,92	108.934,28	66100,00
Banco de Bogotá	2015	61134,83	79.268,81	59500,00
Banco de Bogotá	2016	100964,64	114.530,91	60200,00
Bancolombia	2010	22991,54	29.827,92	29940,00
Bancolombia	2011	19623,49	24.413,71	27620,00
Bancolombia	2012	21817,99	27.883,77	29820,00
Bancolombia	2013	23033,61	33.560,33	23440,00
Bancolombia	2014	27497,77	38.800,95	28640,00
Bancolombia	2015	22827,62	30.742,46	21600,00
Bancolombia	2016	24619,31	34.348,03	27180,00

Fuente: Elaboración propia.

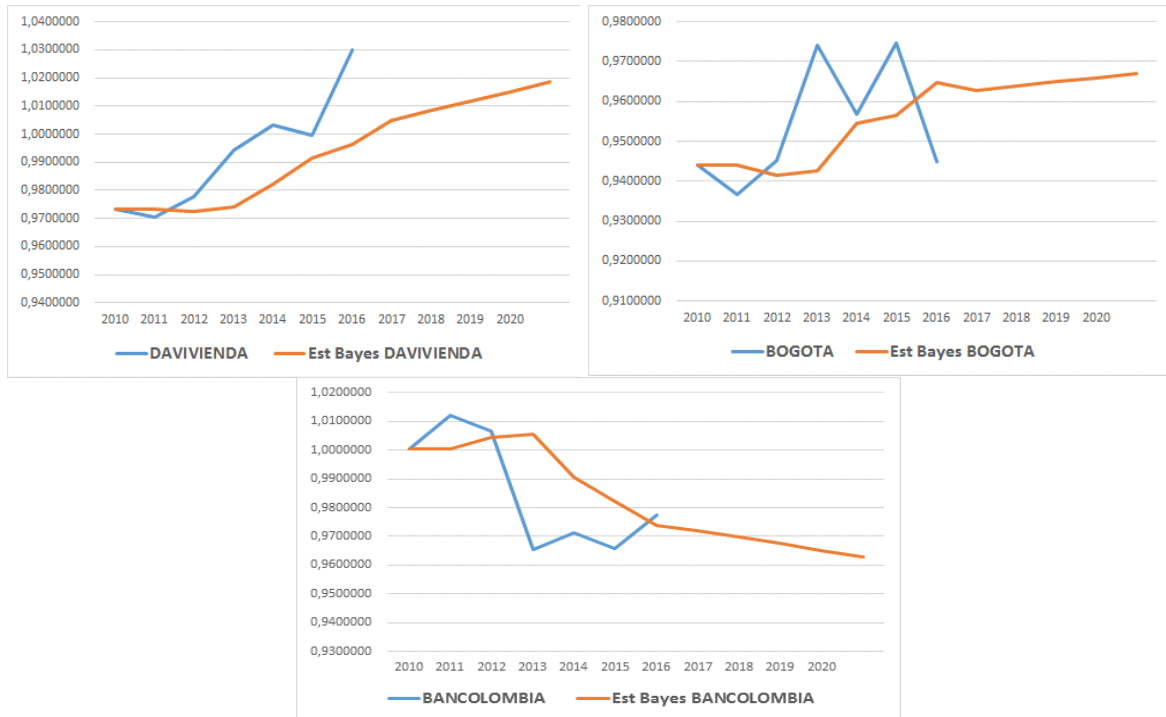
El valor teórico obtenido para cada empresa según los múltiplos comparables, expone el Valor Teórico de cada banco en comparación con las otras dos empresas comparables.

**Quinta Fase.** Cálculo de los indicadores relativos de comparación entre el Nuevo Valor Teórico de los múltiplos financieros obtenidos a través de la simulación y el Precio de la Acción (Pr) en el mercado secundario. De esta forma, se establece una proyección de tendencia mediante un modelo lineal dinámico bayesiano.

Una vez que se obtienen el nuevo valor teórico de una empresa con base a los múltiplos financieros de sus empresas competidoras en el mismo sector (bancario de Colombia), se procede

a establecer un indicador relativo comparativo con el precio de la acción en el mercado secundario. Por esta vía, es posible valorar el comportamiento de este indicador, generando un Modelo Lineal Dinámico Bayesiano, que permita estimar el valor de este indicador de ajuste comparativo en el tiempo para cada una de las empresas del sector bancario colombiano. Los resultados se visualizan en la figura 3.

**Figura 3. Indicador Relativo Logarítmico Comparativo IRLC [ $\ln(\text{Pr}) / \ln(\text{NVT})$ ] para los bancos Davivienda, Banco de Bogotá y Bancolombia.**



Fuente: Elaboración propia.

**Sexta Fase.** Proyecciones para el precio de cada acción de las empresas del sector bancario colombiano en el mercado secundario, desde 2017 al 2021, valorados según las proyecciones de las variables de entrada: beneficio, patrimonio, ingresos, precio de la acción, EBITDA, EBITDA antes de provisión y pasivo; simulación del valor teórico del múltiplo financiero mediante Risk Simulator (Nuevo Valor Teórico NVT) y, finalmente, el Indicador Relativo Logarítmico de Comparación IRLC establecido según el modelo lineal dinámico bayesiano.

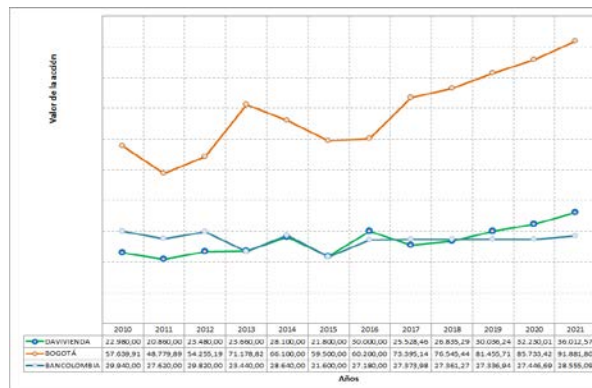
Por limitaciones en la consolidación de Bloomberg, la información trabajada fue de periodicidad anual, desde el año 2010 en adelante. En este sentido, para este artículo se procedió a correr simulaciones, fundamentada en la información obtenida 2010 - 2016. Los resultados se presentan en la tabla 4.

**Tabla 4. Precio Projectado de la Acción, para las empresas del sector bancario de Colombia (Davivienda, Banco de Bogotá y Bancolombia).**

EMPRESA	AÑO	NUEVO VALOR TEÓRICO (NVT) según Múltiplos Financieros y Simulación de Montecarlo (CON INFORMACIÓN PROYECTADA)	Indicador Relativo Logarítmico Comparativo IRLC [ln(Pr) / ln(NVT)]	Modelo Lineal Dinámico Bayesiano para Proyectar el IRLC	PRECIO DE LA ACCIÓN PROYECTADO
DAVIENDA	2010		0,973315715	0,973315715	-
DAVIENDA	2011		0,970386544	0,973315715	-
DAVIENDA	2012		0,977752069	0,972287416	-
DAVIENDA	2013		0,994386195	0,974234035	-
DAVIENDA	2014		1,003421121	0,982105066	-
DAVIENDA	2015		0,999546262	0,991325959	-
DAVIENDA	2016		1,029958004	0,996269187	-
DAVIENDA	2017	24.277,37		1,004976491	25.528,46
DAVIENDA	2018	24.666,47		1,008332979	26.835,29
DAVIENDA	2019	26.662,14		1,01169266	30.036,24
DAVIENDA	2020	27.631,18		1,015054046	32.230,01
DAVIENDA	2021	29.789,16		1,018416341	36.012,57
BOGOTA	2010		0,944159108	0,944159108	-
BOGOTA	2011		0,936584541	0,944159108	-
BOGOTA	2012		0,945158136	0,941500022	-
BOGOTA	2013		0,974102056	0,942622938	-
BOGOTA	2014		0,956927536	0,954645793	-
BOGOTA	2015		0,974569756	0,956605786	-
BOGOTA	2016		0,944785436	0,964877532	-
BOGOTA	2017	113.210,02		0,96275784	73.395,14
BOGOTA	2018	116.727,80		0,963834876	76.545,44
BOGOTA	2019	122.884,48		0,964912938	81.455,71
BOGOTA	2020	127.886,70		0,965991546	85.733,42
BOGOTA	2021	135.591,23		0,967070445	91.881,80
BANCOLOMBIA	2010		1,000364028	1,000364028	-
BANCOLOMBIA	2011		1,012213862	1,000364028	-
BANCOLOMBIA	2012		1,006558802	1,004523966	-
BANCOLOMBIA	2013		0,965560185	1,005664151	-
BANCOLOMBIA	2014		0,971263048	0,990657983	-
BANCOLOMBIA	2015		0,965843633	0,982006771	-
BANCOLOMBIA	2016		0,977589373	0,973808207	-
BANCOLOMBIA	2017	36.695,15		0,972117914	27.373,98
BANCOLOMBIA	2018	37.601,53		0,969822293	27.361,27
BANCOLOMBIA	2019	38.518,73		0,967524487	27.336,94
BANCOLOMBIA	2020	39.664,03		0,965225516	27.446,69
BANCOLOMBIA	2021	42.387,13		0,962925923	28.555,09

Fuente: Elaboración propia.

**Figura 4. Precio Projectado de la Acción, para las empresas del sector bancario de Colombia (Davivienda, Banco de Bogotá y Bancolombia).**



Fuente: Elaboración propia.

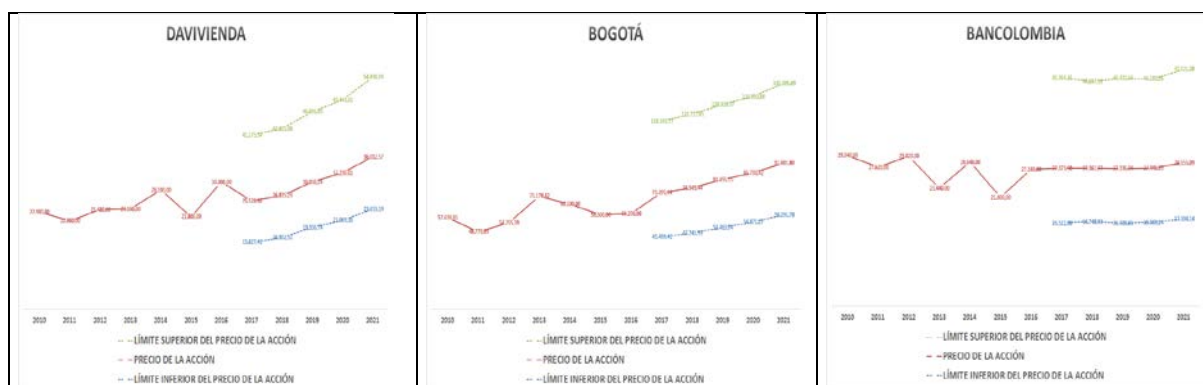
Para el Observatorio Financiero del CEIPA, esta técnica debe complementarse con intervalos de confianza, los cuales pueden ser generados en base a las simulaciones de Montecarlo, el cual representó un comportamiento Normal para el logaritmo natural de los promedios de los múltiplos financieros comparables, pudiendo de esta manera establecer un intervalo de confianza del 95% para el logaritmo natural de las simulaciones realizadas.

$$\text{Precio Acción Proyectado} = [Li, Ls]$$

$$Li = e^{\left\{ \ln(\text{Precio Acción Poryectado}) - Z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma_{\text{Simulaciones IRLC}}}{2} \right\}}$$

$$Ls = e^{\left\{ \ln(\text{Precio Acción Poryectado}) + Z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma_{\text{Simulaciones IRLC}}}{2} \right\}}$$

**Figura 5. Precio Proyectado de la Acción, con intervalos de confianza para las empresas del sector bancario de Colombia (Davivienda, Banco de Bogotá y Bancolombia).**



Fuente: Elaboración propia.

Dichas estimaciones exponen solamente una perspectiva estadística - financiera del precio de la acción a mediano plazo; sin embargo, estos resultados deben ser analizados por expertos cualitativos en el sector Marco-económico y bancario de Colombia. Para el Observatorio Financiero del CEIPA, es fundamental lograr una sinergia entre la valoración numérica y las perspectivas cualitativas de los expertos del entorno en el medio plazo (dentro de los intervalos de confianza anteriormente establecidos).

#### 4. Conclusiones.

El análisis de cluster de los seis bancos que cotizan en la Bolsa de Valores de Colombia BVC, expone una forma interesante de análisis y segmentación fundamentado en los múltiplos financieros para mercados con economías emergentes, en donde las agrupaciones nos reflejan la evolución y crecimiento de las instituciones financieras en el tiempo, evidenciando claramente su desarrollo y potencialidades futuras, que sin duda repercutirán en el precio de la acción en el mediano plazo.

A través de este artículo, se focalizaron esfuerzos para lograr estimar el precio de la acción para tres “principales” empresas del sector bancario colombiano (Davivienda, Banco de Bogotá y Bancolombia) en el medio plazo (cinco años en el futuro), mediante la técnica de múltiplos financieros comparables, simuladas a través de distribuciones probabilísticas, con el uso de la aplicación Risk Simulator y proyectadas con el uso de un Modelo lineal dinámico Bayesiano.

Analizando estadísticamente información financiera extraída de los estados financieros auditados y publicados por Bloomberg para las empresas del sector bancario de Colombia (Davivienda, Banco de Bogotá y Bancolombia), enfocado en variables puntuales como el patrimonio, beneficio neto, ingreso, número de acciones, precio de la acción en el mercado secundario de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC), EBITDA, EBITDA antes de provisión y pasivo, fue posible establecer una estructura de valoración mediante los múltiplos financieros derivados.

Con este Valor Teórico, según múltiplos financieros, se procedió a realizar un análisis de sensibilidad y generar un Nuevo Valor Teórico (NVT), originado con la simulación de Montecarlo del logaritmo natural a través del Risk Simulator, y mediante la distribuciones probabilísticas de Log Normal para patrimonio, ingresos, EBITDA y pasivo (como comportamiento del retorno de una inversión según el interés compuesto para el ámbito financiero), la distribución uniforme para el beneficio y el precio de la acción de las empresas (a fin de contemplar los máximos niveles de variabilidad, sin ningún tipo de estimación ni patrón predeterminado), y distribución triangular para el EBITDA antes de provisión (distribución para ambientes de incertidumbre con escenarios optimista, pesimista y más probable) (Herrerías, Callejón y Herrerías, 2014) todos comparables en el mercado secundario de la Bolsa de Valores de Colombia.

Una vez establecido el Nuevo Valor Teórico, se determinó el proceso de predicción futura de la información para las variables iniciales de los estados financieros, fundamentándose en la información originalmente extraída de Bloomberg, determinando los Modelos Estadísticos de Regresión Lineal para predecir la tendencia de las variables de patrimonio, ingreso, EBITDA y pasivo; mientras que para el valor del beneficio, el precio de la acción y el EBITDA antes de provisión, como se poseen altos niveles de variabilidad y amplia fluctuación, se utilizaron los procesos estocásticos exponenciales (caminata aleatoria). Una vez realizado este aspecto, se realizaron cinco mil simulaciones de Montecarlo, bajo las distribuciones probabilísticas asociadas a los términos financieros anteriormente descritos, y valorando como variable de salida el logaritmo natural de los promedios de los múltiplos financieros descritos.

Con esta información, fue posible predecir el comportamiento del Nuevo Valor Teórico tanto a nivel histórico como futuro, generando un múltiplo comparativo con el Precio Real (Pr) de la acción en el mercado secundario de la BVC, creando el Indicador Relativo Logarítmico Comparativo (IRLC). Luego, este indicador, calculado para cada empresa, fue modelado mediante un Modelo Lineal Dinámico Bayesiano, generando un comportamiento de ajuste automático en el tiempo, que permitirá ajustar los valores futuros del NVT para predecir el valor de la acción en el tiempo, así como también un intervalo de confianza de 95% que dependería de la variabilidad registrada en las simulaciones de Montecarlo.

Este artículo expone al lector, una opción de valoración para el precio de la acción de una entidad financiera en el mercado secundario de una economía emergente, aspecto que es posible mediante el uso de múltiplos financieros, tanto de la empresa para analizar como de las empresas comparables que siempre serán, como se sabe, competidoras en el mismo mercado. Bajo este escenario, si bien es cierto que los múltiplos financieros utilizados se fundamentaron en patrimonio, beneficio, ingreso, acciones en circulación, precio de la acción en el mercado secundario, EBITDA, EBITDA antes de provisión y pasivo, los resultados desde el año 2010 hasta el año 2016, comprobaron que también es necesario tomar en consideración el comportamiento de todas las variables mediante un análisis de cluster o conglomerados, y que si bien es cierto, el sector bancario de Colombia puede dividirse en “Bancos Grandes” (como Davivienda, Banco de Bogotá y Bancolombia), y “Bancos Pequeños” (como Banco de Occidente, AV villas y BBVA), es posible siempre unificar y comparar estadísticamente escenarios similares de comportamiento mediante agrupaciones de cluster.

Para muchos financieros, la cantidad de supuestos puede ser amplia. Lo interesante de este artículo radica en que cada fase ha sido realizada y estructurada con base a la información histórica de los estados financieros y balances generales de las empresas del sector bancario de Colombia, extraído directamente desde Bloomberg, sin descuidar los análisis fundamentales en función a los pasivos; todo ello, con la finalidad de documentar un procedimiento de predicción que pueda ser extensible a otros sectores, siempre y cuando puedan ser financieramente comparables mediante múltiplos y técnicas estadísticas y de simulación novedosas.



Finalmente, podemos concluir que no es posible desligar la valoración numérica de las perspectivas cualitativas de los expertos del entorno en el mediano plazo. Es por ello, que este artículo científico sólo refleja una parte de la valoración, aspecto que posteriormente es complementado por el Observatorio Financiero del CEIPA, para brindar estimaciones más en consonancia y precisas con la realidad del entorno macroeconómico colombiano y en especial del sector bancario.

## Referencias

- Ariza, J. (2014). *Valoración de bancos, un análisis crítico*. Universidad Pontificia Comillas. Recuperado de: <https://repositorio.comillas.edu/jspui/bitstream/11531/237/1/TFG000311.pdf>
- Beaver, W., & Morse, D. (1978). What determines price-earnings ratios? *Financial Analysts Journal*, 34(4), 65-76.
- Berk, J., & De Marzo, P. (2008). *Finanzas Corporativas*. México. Pearson Educación.
- Boada, A. (2016). La importancia de los Supuestos y sus limitaciones en los Métodos de Valoración Empresarial: Flujos de Caja Descontado vs Múltiplos Financieros Comparables. *Memorias del II Congreso Arbitrado Internacional de Finanzas. Bucaramanga*. Colombia.
- Boada, A., & Gallego, N. (2016). Uso del Risk Simulator® como herramienta para valoración de múltiplos comparables. Caso empresas sector eléctrico Colombia. En *Memorias del VI Congreso Arbitrado Internacional Investigación Financiera FIMEF*. México.
- Boson, E., Cortijo, V., & Flores, F. (2009). *Análisis de Estados Financieros. Fundamentos Teóricos y Casos Prácticos*. España. Pearson Educación.
- Damodaran, A. (2006). *Damodaran on Valuation: security analysis for investmen and corporate finance*. Hoboken, NJ: Wiley.
- Demirakos, E., Strong, N., & Walker, M. (2004). What valuation models do analysts use? *Accounting Horizons*, 18(4), 221-240.
- Fernández, P. (2008). *Métodos de valoración de empresas*. IESE Business School Universidad de Navarra. Recuperado de: [http://www.aempresarial.com/asesor/adjuntos/metodos\\_de\\_valorizacion\\_de\\_empresas.pdf](http://www.aempresarial.com/asesor/adjuntos/metodos_de_valorizacion_de_empresas.pdf)
- García, O. (2003). *Valoración de Empresas, Gerencia del Valor y EVA*. Editorial: Cali-Prensa Moderna.
- García, Y., & García, J. (2006) Revisión bibliográfica de la evidencia empírica de los modelos multifactoriales de valoración de activos financieros, *Cuadernos de Economía*, XXV(44), 197-224.
- Guijaro, F., & Moya, I. (2007). Valoración de empresas cotizadas en bolsa: una revisión metodológica de los modelos factoriales. *Decisiones Financieras Empresariales*. pp. 148-161 Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2486222.pdf>.

- Gutiérrez, H., & Zhang, H. (2009). Análisis bayesiano para la diferencia de dos proporciones usando R. *Revista de métodos cuantitativos para la economía y la empresa*, 8, 50-70.
- Herrerías, J., Callejón, J., & Herrerías, R. (2014). Comparación de la distribución triangular, con una distribución tipo I de Pearson, como modelos para los problemas en ambiente de riesgo e incertidumbre. *XXII Jornadas ASEPUMA – X Encuentro Internacional. Anales de ASEPUMA n° 22*, 1301\_1-1301\_14.
- Herrerías, R., & Herrerías, J. (2009). El modelo probabilístico rectangular-triangular. Aplicación a la tasación de fincas rústicas. *XVII Jornadas ASEPUMA - V Encuentro Internacional. Anales de ASEPUMA n° 19*, 0801\_1-0801\_18.
- Land, J., & M. Lang. (2002). Empirical evidence on the evolution of international earnings. *The Accounting Review*, 77(Supplement), 115-133.
- Lind, D. (2012). *Estadística aplicada a los negocios y la economía*. México: McGraw Hill.
- Londoño, C.A., Correa, J. C., & Lopera, M. (2014). Estimación bayesiana del valor en riesgo: una aplicación para el mercado de valores colombiano. *Cuadernos de Economía*, 33(63), 635-678.
- Parra, A. (2013). Valoración de empresas: Métodos de valoración. *Contexto*, 2, 87-100.
- Pericchi, L. (2002). *Análisis de Decisión, Inferencia y Predicción Estadística Bayesiana*. Universidad Simón Bolívar. Edición corregida.
- Sandoval, J. (2005). *Distribución Lognormal*. Recuperado de: [https://archive.geogebra.org/en/.../ejemplo\\_de\\_la\\_distribucion\\_log\\_normal.html](https://archive.geogebra.org/en/.../ejemplo_de_la_distribucion_log_normal.html)
- West, M., & Harrison, J. (1989). *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*. Springer - Verlag.
- Zarowin, P. (1990). What determines price-earnings ratios: Revisited. *Journal of Accounting, Auditing and Finance*, 5(3), 439-457.



## Empleando modelos jerárquicos para encontrar el mejor modelo para pronosticar los galones de gasolina corriente demandados en Bogotá (Colombia)

ALONSO CIFUENTES, JULIO CÉSAR

Universidad Icesi, Cali (Colombia)

Correo electrónico: jcalonso@icesi.edu

DÍAZ, JAVIER GUSTAVO

Universidad Icesi, Cali (Colombia)

Correo electrónico: jgdiaz@icesi.edu

ESTRADA, DANIELA

Universidad Icesi (Cali) y Alianza Coba (Bogotá), Colombia.

Correo electrónico: destrada@icesi.edu

FIGUEROA, CÉSAR ALFONSO

Oficina de Inteligencia Tributaria, Bogotá (Colombia)

Correo electrónico: cfigueroa@shd.gov.co

TAMURA, GABRIEL

Universidad Icesi, Cali (Colombia)

Correo electrónico: gtamura@icesi.edu

### RESUMEN

El documento tiene como objetivo encontrar el mejor modelo jerárquico que permita proyectar la demanda total de gasolina corriente y por tanto el recaudo por sobretasa a la gasolina en Bogotá, Colombia, impuesto importante para el financiamiento de la malla vial y sistemas de transporte masivos. Para lograr este objetivo, se emplean datos de los galones reportados por los 6 mayoristas de gasolina corriente de la ciudad bajo dos aproximaciones univariadas (ARIMA y el método de suavizamiento exponencial (ETS por sus siglas en inglés)), cinco métodos y diferentes algoritmos de minimización. Se encuentra que la mejor combinación de estos parámetros para pronosticar los galones de gasolina corriente demandados es el modelo ETS bajo un pronóstico univariado simple.

**Palabras clave:** Colombia, gasolina, modelos jerárquicos, series de tiempo, pronósticos.

**Clasificación JEL:** C22; C53; H2.

**MSC2010:** 62P20; 00A99.

# Use of hierarchical models to find the best model to forecast the gallons of regular gasoline demanded in Bogotá (Colombia)

## ABSTRACT

The objective of this analysis is to find the best hierarchical model to forecast the total demand for regular gasoline in Bogotá, Colombia and, therefore, the collection of gasoline surcharges, which is an important tax used to finance road networks and massive transportation systems. We used data reported by 6 wholesalers of regular gasoline in the city, and used two univariate approaches (ARIMA and exponential smoothing (ETS)), five methods and different minimization algorithms to forecast gallons of regular gasoline. Results show that the best combination of these parameters is an ETS model under a simple univariate forecast.

**Keywords:** Colombia, gasoline, hierarchical models, time series, forecasts.

**JEL classification:** C22; C53; H2.

**MSC2010:** 62P20; 00A99.



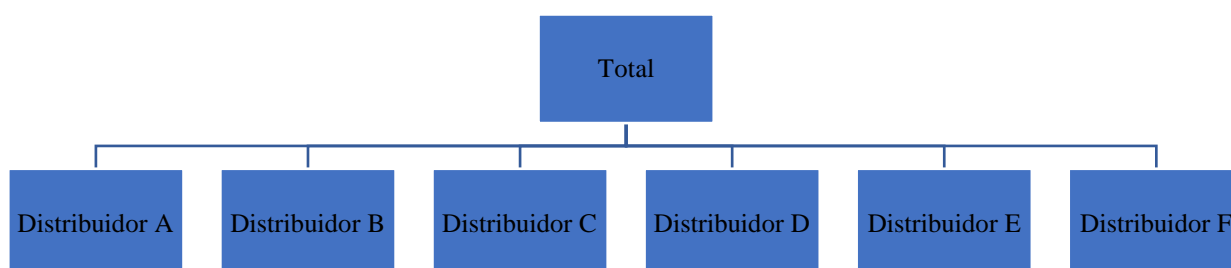
## 1. Introducción.

Construir un pronóstico es un ejercicio relativamente común en los negocios y en el sector público. En el sector público, la construcción de un buen pronóstico permite una mejor planificación de los recursos y una programación financiera eficiente. En Colombia, uno de los tres principales tributos que financian a las municipalidades es la sobretasa a la gasolina. Por ejemplo, se estima que la sobretasa a la gasolina tiene una participación entre el 8% y el 12% dentro de los ingresos tributarios de los municipios (Yepes, Martínez, & Aguilar, 2014). Los ingresos provenientes de este impuesto son utilizados para financiar proyectos estratégicos en mantenimiento y construcción de infraestructura vial y la financiación de proyectos de transporte masivo.

Este tributo tiene como base de liquidación el producto entre el volumen de gasolina vendido en una municipalidad (medido en galones) y un precio de referencia establecido por el Gobierno Nacional por medio de una resolución. La tasa de este impuesto está establecida por una Ley de carácter nacional que no permite a las municipalidades modificarla. De esta manera, para proyectar los ingresos por sobretasa a la gasolina en una municipalidad en Colombia, se requiere únicamente proyectar el volumen de gasolina que será vendido.

Por otro lado, unas de las peculiaridades de este tributo en el caso colombiano, es que desde la Ley 488 de 1998 (24 de diciembre) se estableció que los responsables de la recaudación son los distribuidores mayoristas (antes eran los minoristas). Esta definición del responsable de la recaudación implica que la fiscalización del tributo se hace relativamente fácil. Por ejemplo, en la ciudad de Bogotá, se contaba en enero de 2017 con seis grandes mayoristas de gasolina corriente y cinco de gasolina extra; estos responsables representaban más del 90% de la recaudación. Así, el volumen total de galones de gasolina corriente o extra corresponde a la suma de los galones distribuidos por cada mayorista. Siguiendo a Hyndman, Ahmed, Athanasopoulos y Shang (2011) esta estructura corresponde a una estructura jerárquica simple como la que se representa en la Figura 1.

**Figura 1. Estructura Jerárquica de la demanda de gasolina.**



Fuente: Elaboración propia.

Este documento tiene como objetivo explotar la naturaleza jerárquica de la demanda total de gasolina en la ciudad de Bogotá para encontrar el mejor modelo jerárquico que permita proyectar la demanda total de gasolina corriente expresada en galones y, por tanto, la recaudación por sobretasa a la gasolina.

Hasta donde llega el conocimiento de los autores no existe ningún trabajo publicado previamente que intente caracterizar estadísticamente o generar pronósticos de la demanda de galones de gasolina para Bogotá o nivel nacional. Solo se encuentran dos trabajos, Alonso y Solano (2006) y Alonso, Solano y Duque (2007), que modelan el comportamiento de la recaudación total del impuesto de la sobretasa a la gasolina a partir de proyecciones de las ventas en galones de gasolina corriente y extra para la ciudad de Cali. Estos autores no presentan un

análisis desagregado a nivel de distribuidor. A nivel internacional tampoco se encuentran referencias de un ejercicio similar al propuesto aquí para la demanda de gasolina.

Este documento está compuesto por cinco secciones adicionales. La siguiente sección discute diferentes opciones para encontrar el mejor modelo para pronosticar la demanda total de gasolina corriente teniendo en cuenta la estructura jerárquica. La tercera sección describe los datos empleados y nuestra aproximación. La cuarta sección muestra los resultados. El documento concluye con unos comentarios finales.

## 2. Pronósticos de modelos jerárquicos.

Siguiendo a Hyndman, Ahmed, Athanasopoulos y Shang (2011), la naturaleza jerárquica de los datos se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{A,t} \\ y_{B,t} \\ y_{C,t} \\ y_{D,t} \\ y_{E,t} \\ y_{F,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{A,t} \\ y_{B,t} \\ y_{C,t} \\ y_{D,t} \\ y_{E,t} \\ y_{F,t} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

donde  $y_t$  representa la serie total en el periodo  $t$  y  $y_{i,t}$  representa el número de galones que vende el distribuidor  $i$  en el periodo  $t$ , con  $i \in \{A, B, C, D, E, F\}$ . Si se define el vector  $\mathbf{y}_{k,t}$  como todas las observaciones del nivel inferior del diagrama 1 en el periodo  $t$ , (1) puede expresarse como:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{S}\mathbf{y}_{k,t} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{S}$  representa la matriz de suma dada por:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En nuestro caso estamos interesados en generar pronósticos  $h$  pasos adelante (*h-step-ahead*) del Total (primer elemento de  $\mathbf{y}_t$ ) dado que ya hemos observado  $T$  periodos de la serie ( $\hat{y}_{T+h|T}$ ).

$\hat{y}_{T+h|T}$  puede ser calculado de diferentes maneras. Por ejemplo, se puede pronosticar directamente por medio de un modelo univariado para el nivel total. Esta opción se denominará pronóstico inicial. Otra opción es emplear métodos univariados para la base (*bottom* en inglés) y combinarlos para obtener la parte de arriba (*Top* en inglés). A esta aproximación se le denomina Bottom to Top (BTT). Es decir,

$$\tilde{y}_{T+h|T} = \mathbf{S}\hat{y}_{k,T+h|T} \quad (2)$$

Una ventaja de esta aproximación es que se emplea toda la información de la base. Pero esto tiene un costo: tener que proyectar series desagregadas que pueden ser más volátiles (ver Alonso y Rivera (2017) para una mayor discusión).

Otra aproximación es la propuesta por Hyndman et al. (2011) denominada combinación óptima de pronósticos (*Optimal forecast combination* en inglés, de aquí en adelante OFC). Esta aproximación implica combinar los pronósticos para las series individuales de la base y no sumarlos. La intuición detrás de esto radica en que al generarse de manera individual cada uno de los pronósticos de la base, no necesariamente estos sumarán de manera consistente el pronóstico de arriba. Así, combinarlos podría generar una mejor aproximación que sumarlos.

Hyndman et al. (2011) proponen entonces emplear una aproximación análoga a la regresión múltiple. Es decir,

$$\hat{\mathbf{y}}_{T+h|T} = \mathbf{S}\boldsymbol{\beta}_{K,T+h|T} + \boldsymbol{\varepsilon}_{K,T+h|T}, \quad (3)$$

donde  $\boldsymbol{\beta}_{K,T+h|T}$  corresponde al vector desconocido de medias para los valores pronosticados de la base también denominados los pesos y  $\boldsymbol{\varepsilon}_{K,T+h|T}$  es un vector con vector de medias cero y matriz de varianzas y covarianzas  $\boldsymbol{\Sigma}_{K,T+h|T}$ . En otras palabras,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{K,T+h|T}$  es el error de la regresión.

Hyndman et al. (2011) muestran que el mejor estimador lineal insesgado para  $\boldsymbol{\beta}_{K,T+h|T}$ , si  $\boldsymbol{\Sigma}_{K,T+h|T}$  es esférico, es

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{K,T+h|T} = (\mathbf{S}^T\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}^T\hat{\mathbf{y}}_{T+h|T}. \quad (4)$$

Es decir, el estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS por su sigla en inglés). Por lo tanto, el pronóstico OFC empleando OLS (OFC-OLS) para el nivel total corresponderá a:

$$\hat{\mathbf{y}}_{T+h|T}^{OLS} = \mathbf{S}(\mathbf{S}^T\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}^T\hat{\mathbf{y}}_{T+h|T}. \quad (4)$$

Hyndman, Lee y Wang (2016) sugieren una aproximación diferente para calcular  $\boldsymbol{\beta}_{K,T+h|T}$  que reconozca la posibilidad de que  $\boldsymbol{\Sigma}_{K,T+h|T}$  no sea esférica y pueda presentar algún tipo de heteroscedasticidad. Los autores sugieren emplear mínimos cuadrados ponderados (WLS por su sigla en inglés) donde los pesos están dados por las varianzas estimadas de cada elemento de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{K,T+h|T}$ . Es decir, el pronóstico OFC empleando WLS (OFC-WLS) estaría dado por

$$\hat{\mathbf{y}}_{T+h|T}^{WLS} = \mathbf{S}(\mathbf{S}^T\boldsymbol{\Lambda}_{T+h|T}\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}^T\boldsymbol{\Lambda}_{T+h|T}\hat{\mathbf{y}}_{T+h|T}, \quad (5)$$

donde  $\boldsymbol{\Lambda}_{T+h|T}$  es una matriz diagonal cuyos elementos corresponden a la inversa de cada una de las varianzas estimadas del respectivo término de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{K,T+h|T}$ .

Por otro lado, Wickramasuriya, Athanasopoulos y Hyndman (2015) sugieren emplear un estimador de mínimos cuadrados generalizados (GLS por su sigla en inglés) para  $\boldsymbol{\beta}_{K,T+h|T}$ . Para simplificar el problema sugieren emplear una reconciliación empleando la traza mínima (MinT) para calcular la inversa generalizada de  $\boldsymbol{\Sigma}_{K,T+h|T}$ . Es decir, el pronóstico OFC empleando GLS por medio del método MinT (OFC-MinT) estaría dado por

$$\hat{\mathbf{y}}_{T+h|T}^{MinT} = \mathbf{S}(\mathbf{S}^T\boldsymbol{\Sigma}_{K,T+h|T}^G\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}^T\boldsymbol{\Sigma}_{K,T+h|T}^G\hat{\mathbf{y}}_{T+h|T}, \quad (6)$$

donde  $\boldsymbol{\Sigma}_{K,T+h|T}^G$  es la inversa generalizada de  $\boldsymbol{\Sigma}_{K,T+h|T}$  calculada empleando la aproximación MinT.

Así tendremos seis opciones de pronóstico para el total ( $y_t$  que corresponde al primer elemento de  $\mathbf{y}_t$ ):

- i) el pronóstico univariado del Total (pronóstico inicial  $-\hat{y}_{T+h|T}$ ),
- ii) el de abajo hacia arriba (BTT) que corresponde a la suma simple de los pronósticos individuales de cada una de las series de la base (primer elemento de  $\tilde{y}_{T+h|T}$ ),
- iii) la combinación óptima de los pronósticos empleando OLS (OFC-OLS) individuales de cada una de las series de la base (primer elemento de  $\hat{y}_{T+h|T}^{OLS}$ ),
- iv) la combinación óptima de los pronósticos empleando WLS (OFC-WLS) individuales de cada una de las series de la base (primer elemento de  $\hat{y}_{T+h|T}^{WLS}$ ),
- v) la combinación óptima de los pronósticos empleando MinT (OFC-MinT) individuales de cada una de las series de la base (primer elemento de  $\hat{y}_{T+h|T}^{MinT}$ ). Para el método OFC-MinT se emplearán dos métodos para calcular la matriz de varianzas y covarianzas de  $\epsilon_{K,T+h|T}$ : una es la matriz de varianzas y covarianzas muestral (OFC-MinT-sam) y
- vi) otra es emplear un estimador de reducción hacia la diagonal (en inglés *shrinkage estimator with shrinkage towards the diagonal*) (OFC-MinT-shr).

### 3. Caso de estudio.

Para realizar nuestro ejercicio se cuenta con una base de datos que contiene los galones vendidos mensualmente por los seis distribuidores de gasolina corriente de la ciudad de Bogotá. Por razones de confidencialidad, no es posible mostrar gráficas o estadísticas de las series de los distribuidores de manera individual. La base de datos contiene datos desde enero de 2006 hasta febrero de 2017. La información es provista por la Oficina de Inteligencia Tributaria de la Secretaría Distrital de Hacienda de Bogotá. Se emplea una muestra desde enero de 2006 hasta febrero de 2016 para la estimación de los modelos y se guardará la muestra de marzo de 2016 a febrero de 2017 para evaluar el desempeño de los pronósticos.

Nuestro ejercicio implica los siguientes pasos:

1. Emplear la muestra enero-2006 a enero-2016 para estimar modelos univariados para la serie total ( $y_t$ ) y las series de la base ( $y_{i,t}$  con  $i \in \{A, B, C, D, E, F\}$ ).
2. Realizar un pronóstico para el siguiente mes del total ( $y_{T+1}$ ) empleando el pronóstico univariado (pronóstico inicial), un pronóstico BTT, uno OFC-OLS, uno OFC-WLS y uno OFC-MinT.
3. Agregar un dato más a la muestra.
4. Repetir 2 a 3 hasta agotar la muestra.

El ejercicio de pronósticos univariados para cada serie se repite empleando modelos autoregresivos integrados de media móvil (ARIMA por su sigla en inglés) y modelos de suavización exponencial (ETS por su sigla en inglés).

Por otro lado, para los casos de los OFC se requiere un proceso de minimización. Para encontrar numéricamente el mínimo se adoptan los siguientes algoritmos: Descomposición LU (del término en inglés Lower-Upper), el método de gradiente conjugado (CG por su sigla en inglés) y la descomposición de Cholesky (CHOL). Es decir, tendremos las siguientes opciones: OFC-OLS-LU, OFC-OLS-CG, OFC-OLS-CHOL, OFC-WLS-LU, OFC-WLS-CG, OFC-WLS-CHOL, OFC-MinT-sam-LU, OFC-MinT-sam-CG, OFC-MinT-sam-CHOL, OFC-MinT-shr-LU, OFC-MinT-shr-OLS y OFC-MinT-shr-CHOL.

Finalmente, para cada una de las posibles combinaciones de aproximaciones univariadas (ARIMA y ETS), métodos (pronóstico inicial, BTT, OFC-OLS, OFC-WLS, OFC-MinT-sam y OFC-MinT-shr) y los respectivos algoritmos de minimización, se tendrán 12 pronósticos para el siguiente mes (para el periodo marzo de 2016 a febrero de 2017) que son comparados con los valores realmente observados.



Para la comparación de los pronósticos emplearemos las métricas tradicionales que se muestran en la Tabla 1.

**Tabla 1. Métricas para evaluar la bondad de ajuste de las aproximaciones.**

Métrica	Fórmula
Mean absolute error (MAE)	$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T  Y_t - \hat{Y}_t $
Mean absolute percent error (MAPE)	$\left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left  \frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t} \right  \right) * 100\%$
Root mean square error (RMSE)	$\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (Y_t - \hat{Y}_t)^2}$
Mean percentage error (MPE)	$\left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t} \right) * 100\%$

Fuente: Elaboración propia.

#### 4. Resultados.

En la Tabla 2 y en la Tabla 3 se presentan los resultados de cada una de las métricas para las dos aproximaciones univariadas consideradas.

**Tabla 2. Resultados de las métricas tradicionales para aproximación univariada ARIMA.**

Método	RMSE	MAE	MPE	MAPE
Inicial	1045641.000	761697.400	0.066	2.924
BTT	1014550.700	805987.900	1.361	3.047
OFC-WLS-LU	972639.800	724529.000	0.677	2.765
OFC-OLS-LU	1002539.900	779520.300	1.197	2.960
OFC-MinT-shr-lu	918829.100	682283.900	-0.142	2.620
OFC-MinT-sam-lu	897899.600	708053.700	-0.381	2.716
OFC-WLS-CG	972639.800	724529.000	0.677	2.765
OFC-OLS-CG	1002539.900	779520.300	1.197	2.960
OFC-MinT-shr-CG	918829.100	682283.900	-0.142	2.620
OFC-MinT-sam-CG	897899.600	708053.700	-0.381	2.716
OFC-WLS-CHOL	972639.800	724529.000	0.677	2.765
OFC-OLS-CHOL	1002539.900	779520.300	1.197	2.960
OFC-MinT-shr-CHOL	918829.100	682283.900	-0.142	2.620
OFC-MinT-sam-CHOL	897899.600	708053.700	-0.381	2.716

Fuente: Elaboración propia.

Bajo la aproximación univariada ARIMA se obtiene que los métodos OFC-MinT-sam-LU, OFC-MinT-sam-CG, y OFC-MinT-sam-CHOL son los mejores si se emplean los criterios RMSE, MAE o MAPE. En cambio, si se utiliza el criterio MPE el mejor método es el inicial, es decir, pronosticar la gasolina corriente total empleando un modelo ARIMA.

Bajo la aproximación univariada ETS se obtiene que el mejor método es el inicial si se emplean los criterios RMSE, MAE o MAPE. Por el contrario, si se utiliza el criterio MPE hay dos métodos que deberían utilizarse: OFC-MinT-shr-LU y OFC-MinT-shr-CHOL.

Por último, si se comparan las dos aproximaciones (ARIMA y ETS) se obtiene que el mejor método bajo la métrica RMSE, MAE y MAPE es el método inicial aplicado a un modelo univariado ETS. Mientras que por la métrica MPE también el modelo a escoger sería el ETS, pero empleando el método OFC-MinT-shr-LU o OFC-MinT-shr-CHOL.

**Tabla 3. Resultados de las métricas tradicionales para aproximación univariada ETS.**

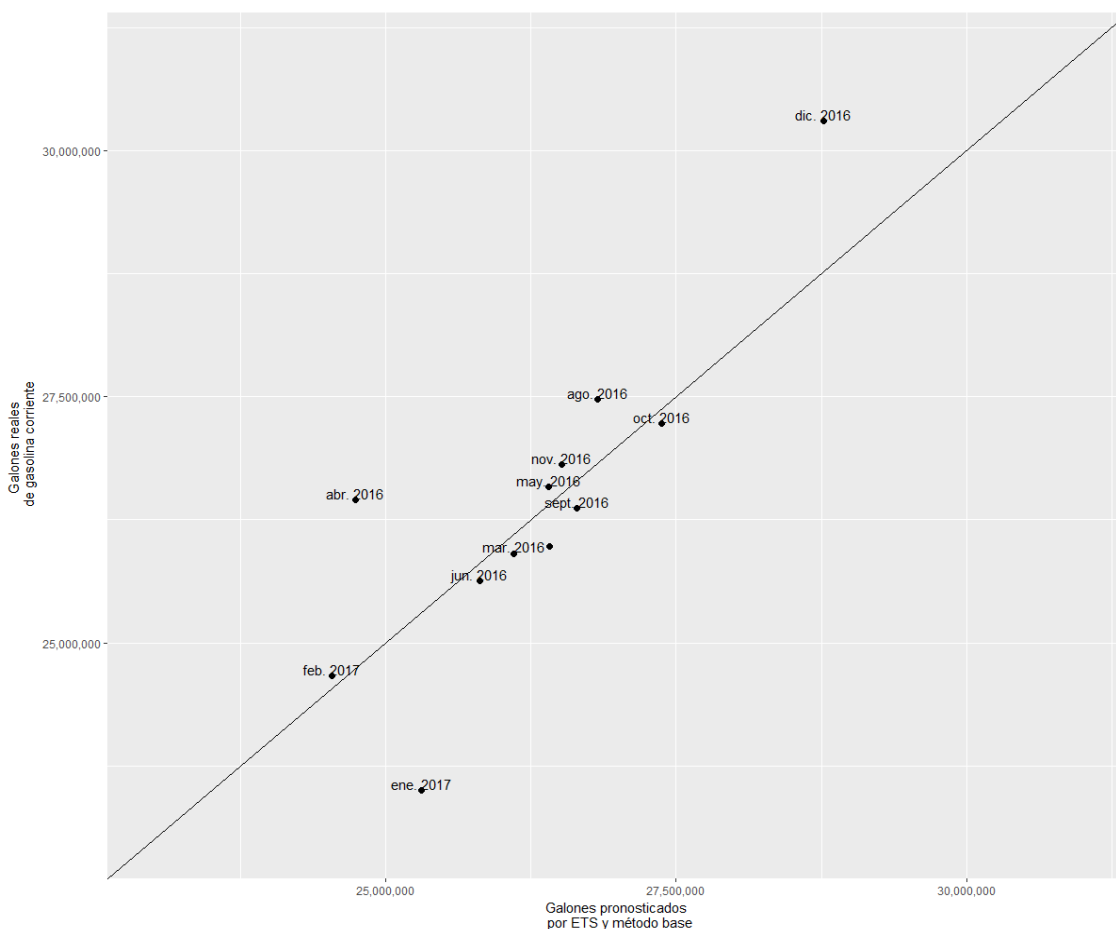
<b>Método</b>	<b>RMSE</b>	<b>MAE</b>	<b>MPE</b>	<b>MAPE</b>
Inicial	829110.300	591241.600	0.189	2.250
BTT	885758.100	626596.300	0.325	2.377
OFC-WLS-LU	860611.100	605753.500	0.117	2.312
OFC-OLS-LU	882139.900	623542.400	0.273	2.377
OFC-MinT-shr-LU	851038.800	601176.100	0.021	2.297
OFC-MinT-sam-LU	864678.400	605858.000	0.114	2.311
OFC-WLS-CG	860611.100	605753.500	0.117	2.312
OFC-OLS-CG	882139.900	623542.400	0.273	2.377
OFC-MinT-sam-CG	864678.400	605858.000	0.114	2.311
OFC-WLS-CHOL	860611.100	605753.500	0.117	2.312
OFC-OLS-CHOL	882139.900	623542.400	0.273	2.377
OFC-MinT-shr-CHOL	851038.800	601176.100	0.021	2.297
OFC-MinT-sam-CHOL	864678.400	605858.000	0.114	2.311

Nota: No se presentan los resultados del método OFC-MinT-shr-CG porque no converge.

Fuente: Elaboración propia.

En síntesis, si se desea pronosticar la demanda total de gasolina corriente (galones) y, por tanto, la recaudación por sobretasa a la gasolina, el mejor modelo a utilizar sería el ETS bajo el método inicial. En la Figura 2 se puede observar el pronóstico bajo este modelo y método versus el valor real de galones demandados durante el periodo marzo 2016 a febrero de 2017.

**Figura 2. Valor pronosticado vs valor real de galones de gasolina corriente empleando el mejor modelo y método.**



Fuente: Elaboración propia.

## 5. Comentarios finales.

Los resultados obtenidos implican que, entre los métodos comparados y de acuerdo a los criterios elegidos, la mejor forma de pronosticar la demanda total de galones en Bogotá corresponde a pronosticar la serie total por medio de un modelo ETS. En este caso el modelo y la aproximación más sencilla brinda un mejor ajuste a los datos. Es decir, no se gana poder en la predicción de explotar la naturaleza jerárquica de los datos, resultado que a priori no es evidente.

Por otro lado, independientemente de los resultados, es importante reconocer la gran importancia para las municipalidades de contar con pronósticos de sus ingresos tributarios que le dan sentido a este tipo de ejercicios. En especial en el caso colombiano, pronosticar el número de galones de gasolina es sumamente importante porque es un insumo para saber cuánto se va a recaudar por el impuesto de sobretasa a la gasolina. Lo anterior porque este impuesto es el cuarto más importante en los ingresos tributarios de los entes territoriales y es el que les permite financiar la construcción de obras de infraestructura relacionadas con los sistemas de transporte masivo y cubrir el mantenimiento, reparación y ampliación de la malla vial. Luego, mejores pronósticos permiten planear y estructurar presupuestos de las vigencias futuras con un menor margen de error, además de que puede ser una herramienta poderosa para identificar posibles responsables que son inexactos potenciales, es decir, que no están pagando el valor del impuesto correspondiente al valor esperado de galones demandados.

Respecto al primer beneficio que tiene haber encontrado el mejor modelo de acuerdo con los criterios utilizados, se puede utilizar para saber si el municipio o distrito va a tener suficientes recursos o a qué plazo los puede tener para financiar las obras de infraestructura viales o de transporte masivo. Lo anterior se aplica en Colombia en la construcción de las obras de infraestructura y sistemas de transporte masivo, ya que se ha establecido un esquema de cofinanciación entre la Nación y los entes territoriales que consiste en que el 70% de la financiación está a cargo de la nación y el resto a cargo del ente territorial donde se va a ejecutar la obra.

Por ejemplo, en el caso específico de Bogotá, la Administración Distrital se ha comprometido a utilizar el respectivo porcentaje del recaudo de la sobretasa para cubrir la construcción de la primera línea del metro de Bogotá (PLMB). En este sentido, el 30% de la aportación del Distrito a la PLMB, que podría alcanzar los \$4.14 billones de pesos, será cubierto con: cerca de un 19% proveniente del cupo de endeudamiento, el 64% que corresponde al valor presente neto desde el año 2018 y hasta por 20 años del 50% de la recaudación de la sobretasa a la gasolina motor que por ley se puede destinar a los sistemas de transporte masivo y un 17% del pago de dividendos y otras fuentes.

Luego, dados los compromisos que ha adquirido la Administración Distrital para cumplir con su responsabilidad en la financiación de dicha obra, es vital el permanentemente monitoreo de la recaudación de la sobretasa a la gasolina motor real respecto a lo esperado y la identificación de responsables que estén evadiendo el pago parcial del impuesto (es decir, potenciales inexactos) puesto que eso significa un detrimento patrimonial que puede afectar el cumplimiento de las responsabilidades adquiridas por la Administración y por ende de la ejecución de la obra.

Por último, el siguiente paso se enfocará en aplicar la misma metodología a gasolina extra y encontrar el modelo más adecuado para pronosticar la demanda de este tipo de combustible. Asimismo, este estudio se ampliará para incluir el cálculo de los intervalos de pronóstico, los cuales son igual de importantes que los pronósticos puntuales tanto para la gasolina corriente como para la gasolina extra, y poder, por ejemplo, generar rangos de mínimo y máximo ingreso potencial. Asimismo, se puede estudiar cómo reacciona la demanda de gasolina (corriente o extra) ante cambios en la tasa de crecimiento del PIB, introducción de carros eléctricos e híbridos al país, cambios en el precio del gas vehicular, entre otros, y por ende se puede analizar cómo dichos cambios podrían afectar la recaudación esperada para financiar el proyecto PLMB.

## **Agradecimientos**

Esta investigación fue realizada por el Centro de Excelencia y Apropiación en Big Data y Data Analytics (CAOBA), con el apoyo del Ministerio de Tecnologías de la Información y Telecomunicaciones de la República de Colombia (MinTIC) a través del Departamento Administrativo Colombiano de Ciencia, Tecnología e Innovación (COLCIENCIAS) dentro del contrato N°. FP44842-anex46-2015. Queremos hacer un reconocimiento especial a todos los miembros de la oficina de telecomunicaciones del Departamento Nacional de Planeación (DNP) y al equipo CAOBA-Icesi, tanto profesores como estudiantes.

## Referencias

- Alonso, J.C., & Rivera, A.F. (2017). Pronosticando la inflación mensual en Colombia un paso hacia delante: una aproximación «de abajo hacia arriba». *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 23, 98-118. Recuperado de: <https://www.upo.es/revistas/index.php/RevMetCuant/article/view/2688>
- Alonso, J.C. & Solano, J.A. (2006). Sistema de transporte masivo en la ciudad de Cali: ¿Podrá el municipio financiar el proyecto? *Estudios Gerenciales*, 22(98), 111-129.
- Alonso, J.C., Solano, J.A., & Duque, X. (2007). El futuro de la sobretasa a la gasolina y la financiación del Sistema Integrado de Transporte Masivo. *Boletín Polis: Observatorio de Políticas Públicas*, 2(2), 9-12.
- Hyndman, R.J., Lee, A.J., & Wang, E. (2016). Fast computation of reconciled forecasts for hierarchical and grouped time series. *Computational Statistics and Data Analysis*, 97, 16-32. <http://doi.org/10.1016/j.csda.2015.11.007>
- Hyndman, R. J., Ahmed, R.A., Athanasopoulos, G., & Shang, H.L. (2011). Optimal combination forecasts for hierarchical time series. *Computational Statistics & Data Analysis*, 55(9), 2579-2589. <http://doi.org/10.1016/j.csda.2011.03.006>
- Wickramasuriya, S.L., Athanasopoulos, G., & Hyndman, R.J. (2015). *Forecasting hierarchical and grouped time series through trace minimization* (Nº. 15). Recuperado de: <https://business.monash.edu/econometrics-and-business-statistics/research/publications/ebs/wp15-15.pdf>
- Yepes, T., Martínez, S., & Aguilar, J. (2014). *Financiación de la infraestructura en los municipios del sistema de ciudades de Colombia*. Documento para la Misión de Ciudades. Bogotá: Fedesarrollo. Recuperado de: <https://repository.fedesarrollo.org.co/handle/11445/1117>



## Tratamiento ordinal de las escalas cualitativas utilizadas por el Centro de Investigaciones Sociológicas

GONZÁLEZ DEL POZO, RAQUEL

Departamento de Economía Aplicada

Universidad de Valladolid

Correo electrónico: [raquel.gonzalez.pozo@uva.es](mailto:raquel.gonzalez.pozo@uva.es)

GARCÍA LAPRESTA, JOSÉ LUIS

Departamento de Economía Aplicada

Universidad de Valladolid

Correo electrónico: [lapresta@eco.uva.es](mailto:lapresta@eco.uva.es)

### RESUMEN

Las escalas cualitativas formadas por términos lingüísticos son utilizadas por diversas disciplinas para determinar preferencias y diversos aspectos de la vida de los individuos. Aunque es habitual asignar números a las categorías de respuesta de estas escalas, no es adecuado utilizar codificaciones numéricas cuando los individuos perciben proximidades psicológicas distintas entre las categorías consecutivas de la escala, es decir, cuando las escalas cualitativas no son uniformes.

En este trabajo se propone un procedimiento ordinal para jerarquizar un conjunto de alternativas a partir de las valoraciones mostradas por un grupo de individuos mediante una escala cualitativa no necesariamente uniforme. Dicho procedimiento está basado en las proximidades ordinales entre las categorías de respuesta de las escalas. El procedimiento propuesto se ilustra con un ejemplo tomado del Barómetro del Centro de Investigaciones Sociológicas (CIS) de mayo de 2011.

**Palabras clave:** encuestas, cuestionarios, escalas cualitativas, imprecisión, CIS.

**Clasificación JEL:** C20; C83.

**MSC2010:** 62C12; 62C86.

# Ordinal treatment of qualitative scales used by the Center for Sociological Research

## ABSTRACT

Qualitative scales formed by linguistic terms are used by different disciplines to determine preferences and different aspects of individuals' lives. Although it is usual to assign numbers to the response categories of scales, it is not suitable when individuals perceive different proximities between the consecutive categories of the scale, that is, when scales are not uniform.

In this paper, an ordinal procedure is proposed to order a set of alternatives from the assessments given by a group of individuals through a qualitative scale not necessarily uniform. This procedure is based on ordinal proximities between the response categories of scales. The proposed procedure is illustrated with an example taken from the Barometer of the Center for Sociological Research of May 2011.

**Keywords:** surveys, questionnaires, qualitative scales, imprecision, CIS.

**JEL classification:** C20; C83.

**MSC2010:** 62C12; 62C86



## 1. Introducción.

El creciente interés por conocer y evaluar las preferencias, opiniones y necesidades de la población hace que disciplinas como Sociología, Economía, Psicología, Marketing o Medicina elaboren rankings o listas que tienen por objeto la jerarquización de un conjunto de alternativas (hoteles, países, instituciones de educación superior, etc.).

Diversos autores (Beyth-Marom, 1982; Zimmer, 1983; Teigen & Wibecke, 1999; Durán, Ocaña, Cañadas & Pérez, 2000, entre otros) han señalado que los seres humanos se sienten más cómodos utilizando palabras en lugar de valores numéricos para manifestar sus opiniones y valoraciones, ya que las respuestas verbales suponen un menor tiempo de procesamiento y evaluación de las mismas, permitiéndoles, además, expresarse de una forma sencilla ante situaciones de vaguedad e imprecisión.

Debido a esta preferencia de los individuos por las palabras, es frecuente que los cuestionarios y encuestas incorporen escalas cualitativas para conocer opiniones, percepciones o juicios subjetivos de los encuestados. Es el caso, por ejemplo, de la Encuesta de Condiciones de Vida (ECV) o *European Union Statistics on Income and Living Conditions (EU-SILC* en terminología europea), que utiliza la siguiente escala cualitativa {"Una carga pesada", "Una carga razonable", "Ninguna carga"} para preguntar a los hogares objeto de estudio qué tipo de carga les suponen los gastos o desembolsos relacionados con compras a plazo o devolución de préstamos. Esta misma encuesta también emplea una escala cualitativa de seis categorías de respuesta para preguntar a los hogares cómo llegan a fin de mes: {"Con mucha dificultad", "Con dificultad", "Con cierta dificultad", "Con cierta facilidad", "Con facilidad", "Con mucha facilidad"}.

Por otra parte, el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias, conocido internacionalmente como *The Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)*, evalúa a través de varios cuestionarios dirigidos a alumnos, familias, profesorado y centros escolares el rendimiento en ambas competencias de los alumnos de cuarto curso de Educación Primaria y segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria. Para esta evaluación el *TIMSS* incorpora en sus cuestionarios diversas escalas cualitativas. Así, en el cuestionario dirigido a los centros para valorar diversos problemas escolares como el absentismo, el vandalismo o las peleas escolares, se utiliza la escala {"Problema severo", "Problema moderado", "Problema menor", "No es un problema"}.

Asimismo, el Centro de Investigaciones Sociológicas (CIS) también introduce en sus cuestionarios escalas cualitativas cuyas respuestas oscilan entre tres y cinco categorías. Ejemplo de ello es la escala cualitativa de cuatro términos {"Nada", "Poco", "Bastante", "Mucho"}, usada frecuentemente por el CIS en sus Barómetros para conocer las opiniones y valoraciones de los encuestados sobre diversos temas sociales, políticos y culturales.

En los cuestionarios también es frecuente encontrar escalas tipo Likert (Likert, 1932) para conocer el grado de acuerdo o desacuerdo de los encuestados ante determinadas cuestiones, así como para recoger información acerca de sus actitudes y preferencias. Los encuestados realizan sus valoraciones a través de una escala cualitativa ordenada cuyas categorías de respuesta varían normalmente entre tres y siete términos, si bien algunos autores sugieren que el número óptimo de categorías a introducir en las escalas Likert debe estar comprendido entre cuatro y siete (Lozano, García-Cueto & Muñiz, 2008; Nadler, Weston & Voyles, 2015).

Habitualmente este tipo de escalas son simétricas, es decir, tienen el mismo número de categorías favorables y desfavorables, separadas por una categoría de respuesta central. La introducción de esta categoría intermedia es objeto de controversia en la elaboración de cuestionarios, al considerar que recoge gran parte de las respuestas de los encuestados que no quieren manifestar sus opiniones de forma explícita (Díaz de Rada, 2015; Nadler, Weston &



Voyles, 2015) y puede llegar a provocar la aparición de un sesgo de tendencia central, si la mayoría de las respuestas de los encuestados se concentran en ella (Mangione, 1995; Matas, 2018, entre otros).

Por regla general es frecuente asignar valores numéricos (normalmente equidistantes) a las categorías de respuesta de las escalas cualitativas. Sin embargo, evidencias empíricas han demostrado que, en ocasiones, pueden apreciarse proximidades psicológicas distintas entre las categorías de respuesta de las escalas (Kennedy, Riquier & Sharp, 1996), es decir, las escalas cualitativas pueden percibirse como no uniformes. Así pues, la escala cualitativa del CIS mencionada anteriormente podrá ser considerada no uniforme si los encuestados perciben que la categoría “Bastante” está más próxima a “Mucho” que a “Poco”, o si la categoría “Poco” está más próxima a “Nada” que a “Bastante”.

Al diseñar encuestas es importante considerar la no uniformidad de las escalas cualitativas para evitar errores de medida y de no respuesta parcial y/o total durante el proceso de recogida de datos (Díaz de Rada, 2004). De igual forma, conviene destacar la importancia que juega el contexto en el que se aplica la escala cualitativa a la hora de determinar las proximidades psicológicas entre los términos de la misma, ya que éste puede influir significativamente en la forma que tienen los encuestados de concebir dichas proximidades.

Cuando las escalas cualitativas son consideradas como no uniformes, la codificación numérica de las categorías de respuesta puede no reflejar adecuadamente las diferencias que aprecian los encuestados entre cada una de ellas (Silva, 1997; Fleiss, Levin & Paik, 2003). Asimismo, estas codificaciones pueden dificultar la representatividad e interpretación de los resultados obtenidos (Stevens, 1951; Pardo, 2002), ya que estos pueden variar en función de la codificación utilizada (Roberts, 1979; Merbitz, Morris & Grip, 1989; Franceschini, Galetto & Varetto, 2004, entre otros).

La asignación de números a las categorías de respuesta no es el único aspecto a considerar en el contexto de las escalas cualitativas no uniformes, siendo también importante cómo se trata y presenta la información procedente de dichas escalas.

Diversos organismos nacionales e internacionales suelen publicar los resultados de sus investigaciones agrupándolos en determinadas categorías de respuesta (por ejemplo “Mucho” y “Bastante” o “Very good” y “Somewhat good”). La agrupación de varias categorías de respuesta puede encontrarse en los anuarios publicados por el CIS, y en algunos informes del Centre d'Estudis d'Opinió (CEO) de Cataluña, del Centro de Análisis y Documentación Política y Electoral de Andalucía (CADPEA), de la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT) y del Pew Research Center de Estados Unidos, entre otros. No obstante, esta práctica no está considerando la no uniformidad de las escalas cualitativas y además supone una pérdida importante de la información cualitativa de las mismas.

Así, por ejemplo, cuando el CIS agrupa en sus anuarios las categorías “Bastante” y “Mucho” y descarta las respuestas de las categorías “Nada” y “Poco” está asignando de forma implícita un mismo valor numérico a las categorías de respuesta agrupadas y una puntuación nula a las categorías omitidas. Por ejemplo, en cada alternativa a evaluar se estarían asignando 0 puntos a cada respuesta “Nada” o “Poco” y 1 punto a cada respuesta “Bastante” o “Mucho”.

Para ilustrar este problema consideraremos, a modo de ejemplo, dos alternativas A y B, que han sido valoradas utilizando la escala cualitativa del CIS. En la Tabla 1 se muestran las valoraciones recibidas, expresadas en porcentajes.

**Tabla 1. Porcentajes de respuestas de las alternativas A y B.**

	Mucho	Bastante	Poco	Nada
Alternativa A	0	97	0	3
Alternativa B	96	0	4	0

Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con la práctica de agrupación de varias categorías de respuesta, A vence a B, pues A ha obtenido un total de 97% de las respuestas “Mucho” y “Bastante”, mientras que B solo ha obtenido un 96%. Sin embargo, una mínima compensación otorgaría ventaja a B sobre A, ya que la alternativa A no ha conseguido ninguna respuesta en la categoría “Mucho”, mientras que la alternativa B ha conseguido un 96%. Además, las respuestas obtenidas por la alternativa A en las categorías inferiores de la escala son todas “Nada”, mientras que las de la alternativa B son mejores, al conseguir un 4% de respuestas en la categoría “Poco”.

Para evitar resultados como los del ejemplo anterior, consecuencia del tratamiento inapropiado de la información procedente de escalas cualitativas, en este trabajo se plantea jerarquizar un conjunto de alternativas valoradas cualitativamente a través del procedimiento puramente ordinal propuesto recientemente por García-Lapresta y Pérez-Román (2018). Este procedimiento puede aplicarse en el contexto de las escalas cualitativas no uniformes, ya que se basa en cómo aprecian los individuos las proximidades entre las categorías de respuesta de las escalas cualitativas, sin necesidad de asignar valores numéricos u otros objetos matemáticos a los términos lingüísticos de las mismas.

El objetivo del presente trabajo es analizar críticamente la metodología de agrupación de varias categorías de respuesta que realiza el CIS (así como otros organismos) y considerar como método alternativo el procedimiento ordinal mencionado. Para ello, hemos realizado un análisis comparativo de los órdenes (rankings) resultantes de aplicar el procedimiento ordinal antes mencionado y la práctica de agrupación de varias categorías de respuesta.

El trabajo se encuentra organizado como sigue: en primer lugar, se introducen brevemente el concepto de medida de proximidad ordinal y el procedimiento ordinal (García-Lapresta y Pérez-Román, 2018). En segundo lugar, se aplica el procedimiento ordinal para jerarquizar un conjunto de alternativas procedentes del Barómetro del CIS. Los resultados obtenidos se comparan con los obtenidos mediante la práctica de agrupación de varias categorías de respuesta. Finalmente, el trabajo termina con algunas consideraciones y conclusiones sobre el uso de escalas cualitativas.

## **2. Metodología.**

Con objeto de considerar toda la información que nos proporcionan las escalas cualitativas y evitar el uso de codificaciones numéricas arbitrarias que no reflejen adecuadamente las proximidades entre las categorías de respuesta de las escalas, en este trabajo proponemos la aplicación del procedimiento ordinal introducido por García-Lapresta y Pérez-Román (2018). Dicho procedimiento está basado en la noción de medida de proximidad ordinal.

### **Concepto de medida de proximidad ordinal**

El concepto de medida de proximidad ordinal introducido por García-Lapresta y Pérez-Román (2015) recoge la información sobre cómo aprecian los individuos las proximidades entre las categorías de respuesta de una escala cualitativa, cuestión de máxima relevancia cuando las escalas cualitativas son consideradas como no uniformes.

Para poder definir una medida de proximidad ordinal es necesario partir de una escala cualitativa ordenada  $\mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_g\}$ , donde  $l_1 < \dots < l_g$  y  $g \geq 3$ . Sirva como ejemplo la escala que aparece en la Tabla 2, utilizada en la ECV.

**Tabla 2. Categorías de respuesta de la escala utilizada por la ECV.**

$l_3$	Ninguna carga
$l_2$	Una carga razonable
$l_1$	Una carga pesada

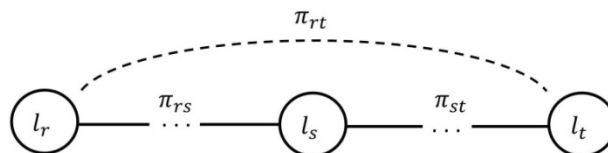
Fuente: Cuestionario de hogar. Pregunta 20. ECV 2016.

Asimismo, para generar una medida de proximidad ordinal es necesario un *conjunto ordenado de grados de proximidad*  $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_h\}$ , donde  $\delta_1 > \dots > \delta_h$  ( $\delta_1$  es la máxima proximidad y  $\delta_h$  la mínima, ocupando el resto de grados posiciones intermedias, ordenadas de mayor a menor proximidad). Es importante destacar que los elementos de  $\Delta$  no son números, sino grados de proximidad, es decir, aportan información relativa sobre cuán próximas están unas categorías de otras, pero no representan números ni distancias entre las categorías de respuesta de las escalas cualitativas.

Una *medida de proximidad ordinal* sobre  $\mathcal{L}$  con valores en  $\Delta$  asigna a cada par de términos de la escala  $l_r$  y  $l_s$  un grado de proximidad  $\pi_{rs}$  en  $\Delta$ , de forma que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Todos los grados de proximidad de  $\Delta$  son utilizados al menos una vez. Es decir, para cualquier grado de proximidad  $\delta_k$ , existen al menos dos términos de la escala,  $l_r$  y  $l_s$ , tales que  $\pi_{rs} = \delta_k$ .
2. El grado de proximidad entre dos términos de la escala,  $l_r$  y  $l_s$ , no depende del orden en el que se comparen, es decir,  $\pi_{rs} = \pi_{sr}$ .
3. La máxima proximidad entre términos de la escala,  $\delta_1$ , solo se alcanza cuando se compara un término consigo mismo. Es decir,  $\pi_{rs} = \delta_1$  si y solo si  $r = s$ .
4. Si  $r < s < t$ , entonces  $l_r$  está más cerca de  $l_s$  que de  $l_t$ , y  $l_s$  está más cerca de  $l_t$  que  $l_r$  de  $l_t$ , es decir  $\pi_{rs} > \pi_{rt}$  y  $\pi_{st} > \pi_{rt}$  (véase la Figura 1).

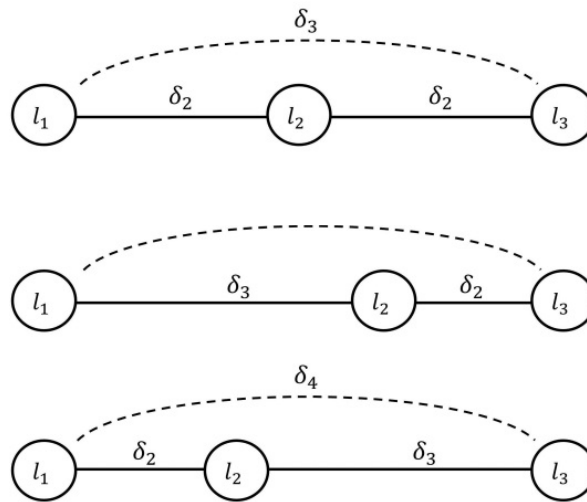
**Figura 1. Condición 4.**



Fuente: Elaboración propia.

A modo de ejemplo, se ilustran gráficamente en la Figura 2 las tres medidas de proximidad ordinal que pueden generarse en escalas cualitativas formadas por tres categorías de respuesta.

**Figura 2. Medidas de proximidad ordinal para escalas cualitativas ordenadas formadas por tres categorías de respuesta.**



Fuente: Elaboración propia.

### Procedimiento ordinal

Se considerará un conjunto de individuos  $A = \{1, \dots, m\}$ , con  $m \geq 2$ , que evalúan un conjunto de alternativas  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , con  $n \geq 2$  a través de una escala cualitativa  $\mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_g\}$ , donde  $l_1 < \dots < l_g$  y  $g \geq 3$ .

Las valoraciones dadas por los individuos a cada una de las alternativas son recogidas en una matriz de términos lingüísticos

$$\begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_i^1 & \dots & v_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^a & \dots & v_i^a & \dots & v_n^a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^m & \dots & v_i^m & \dots & v_n^m \end{pmatrix},$$

donde  $v_i^a \in \mathcal{L}$  es la valoración cualitativa dada por el individuo  $a \in A$  a la alternativa  $x_i \in X$ .

Para la aplicación del procedimiento ordinal deben seguirse los siguientes pasos:

1. Establecer una medida de proximidad ordinal adecuada.

Para fijar una medida de proximidad ordinal sobre una escala cualitativa debe conocerse cómo aprecian los individuos las proximidades entre los términos de la escala. Es importante comunicar siempre a los individuos el contexto de la pregunta en la que se está utilizando la escala cualitativa (político, económico, sanitario, etc.), ya que el contexto social e incluso la formulación de las preguntas juegan un papel fundamental a la hora de determinar estas proximidades. Por ejemplo, la percepción entre "Nada" y "Poco" puede variar dependiendo de si se pregunta con qué frecuencia se realizan visitas culturales o con qué frecuencia se consumen sustancias estupefacientes.

Una vez indicado el contexto, la medida de proximidad ordinal puede venir determinada por un experto en el ámbito o disciplina en la que se utilice la escala cualitativa objeto de estudio,

o bien fijarse agregando las opiniones de varios individuos sobre las proximidades entre los términos de la escala cualitativa (García-Lapresta, González del Pozo & Pérez-Román, 2018).

2. Para cada alternativa  $x_i \in X$  se calculan los grados de proximidad entre las valoraciones cualitativas dadas por los individuos y la máxima valoración posible de la escala,  $l_g$ :

$$\pi(v_i^1, l_g), \dots, \pi(v_i^m, l_g) \in \Delta.$$

3. Ordenar para cada alternativa  $x_i \in X$  los grados de proximidad de forma decreciente (de mayor a menor proximidad) y seleccionar para cada alternativa su par de medianas,  $M_i$ .

Los grados de proximidad obtenidos en el paso anterior pueden sintetizarse a través de una medida de tendencia central. Puesto que los grados de proximidad no son números y, por tanto, no es posible realizar con ellos operaciones algebraicas, quedan excluidas como medidas de tendencia central las medias (aritmética, geométrica, armónica, ponderadas, etc.). Dada la naturaleza cualitativa de los grados de proximidad, se considerarán como medidas de tendencia central las medianas.

El sistema de votación *Majority Judgment* (Balinski & Laraki, 2011) utiliza la mediana como elemento representativo de las valoraciones de los individuos. En este sistema los individuos valoran un conjunto de alternativas a través de una escala cualitativa ordenada. A continuación, se ordenan las valoraciones y se selecciona de cada alternativa la valoración cualitativa que ocupa la posición mediana (mediana baja en el caso de que el número de valoraciones sea par). No obstante, tomar únicamente el valor de la mediana baja supone una pérdida importante de información. Para evitar este problema, el procedimiento aplicado en este trabajo utiliza dos medianas. Así,

- Cuando el número de grados de proximidad es par, se consideran las dos medianas,  $M_i = (\delta_r, \delta_s)$ , con  $r, s \in \{1, \dots, h\}$  tales que  $r \leq s$ .

Por ejemplo, a  $(\delta_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$  le correspondería  $(\delta_1, \delta_2)$ .

- Cuando el número de grados de proximidad es impar, se duplica la mediana. Por tanto,  $M_i = (\delta_r, \delta_r)$ , para algún  $r \in \{1, \dots, h\}$ .

Por ejemplo, a  $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$  le correspondería  $(\delta_2, \delta_2)$ .

Por consiguiente,  $M_i \in \Delta_2$ , donde  $\Delta_2$  es el *conjunto de medianas factibles*:

$$\Delta_2 = \{(\delta_r, \delta_s) \in \Delta^2 \mid r \leq s\}.$$

Es importante destacar que el procedimiento ordinal aplicado en este trabajo recoge la no uniformidad de las escalas cualitativas a través de los grados de proximidad, aspecto no considerado en el sistema de votación *Majority Judgment*.

4. Establecer un orden lineal apropiado sobre  $\Delta_2$  para ordenar los pares de medianas de los grados de proximidad.

En este trabajo hemos considerado el orden lineal introducido por García-Lapresta y Pérez-Román (2018):

$$(\delta_r, \delta_s) \succcurlyeq_2 (\delta_t, \delta_u) \Leftrightarrow \begin{cases} r + s < t + u \\ 0 \\ r + s = t + u \text{ y } s - r \leq u - t \end{cases}$$

para cualesquiera  $(\delta_r, \delta_s), (\delta_t, \delta_u) \in \Delta_2$ .

Este orden lineal está basado en la aversión a la incertidumbre de los individuos (Epstein, 1999). No obstante, éste no es el único orden lineal posible, pudiendo establecerse distintas formas de ordenar los pares de medianas si se estima oportuno.

5. Ordenar las alternativas teniendo en cuenta el orden débil sobre  $X$  definido como  $x_i \succcurlyeq x_j \Leftrightarrow M_i \succcurlyeq_2 M_j$ .

A veces es posible que algunas de las alternativas tengan el mismo par de medianas de grados de proximidad y estén, por tanto, empatadas. En estos casos puede aplicarse un procedimiento secuencial de desempate basado en Balinski y Laraki (2007), que consiste en eliminar el par de medianas de las alternativas que se encuentran en la situación de empate, calcular de nuevo el par de medianas entre los grados de proximidad restantes y volver a ordenar las alternativas según el orden establecido en el paso 4. Este procedimiento de desempate se repetiría hasta romper todos los empates y ordenar todas las alternativas.

En el Anexo se incluye un ejemplo que ilustra el procedimiento explicado en esta sección.

### 3. Aplicación del procedimiento ordinal a las escalas cualitativas utilizadas en los barómetros del CIS.

El CIS utiliza frecuentemente en sus cuestionarios la escala cualitativa que aparece en la Tabla 3 para determinar, entre otras cosas, los temas de mayor interés para los españoles, medir el grado de influencia de las nuevas tecnologías en la vida cotidiana o conocer el grado de confianza que inspira a los españoles determinados colectivos o instituciones.

Con objeto de ilustrar el procedimiento ordinal de la sección 2 y comparar sus resultados con los obtenidos mediante el método de agrupación de varias categorías de respuesta, en esta sección jerarquizaremos un conjunto de alternativas valoradas cualitativamente.

Para poder apreciar mejor los cambios que se producen al ordenar las diferentes alternativas a través de los dos métodos mencionados, hemos seleccionado una pregunta compuesta por un conjunto amplio de ítems. En concreto hemos utilizado datos procedentes de la pregunta 20 del Barómetro del CIS de mayo de 2011 (estudio 2.888), en la que se pide a los encuestados que manifiesten, a través de la escala cualitativa de la Tabla 3, hasta qué punto confiarían en la ayuda que les puedan proporcionar las nueve alternativas contenidas en la Tabla 4 ante una situación de catástrofe o desastre.

**Tabla 3. Categorías de respuesta de la escala utilizada por el CIS.**

$l_4$	Mucho
$l_3$	Bastante
$l_2$	Poco
$l_1$	Nada

Fuente: Barómetros del CIS.

Aunque inicialmente el número de encuestados en el Barómetro de mayo de 2011 ascendía a 2.482 (1.218 hombres y 1.264 mujeres), en el presente trabajo la muestra utilizada se ha reducido a 2.219 individuos al eliminar las categorías de respuesta “No sabe” y “No contesta”. Los porcentajes de respuesta de los 1.114 hombres y las 1.105 mujeres que componen la muestra utilizada aparecen recogidos en la Tabla 5.

**Tabla 4. Alternativas a valorar en la pregunta 20.**

---

La Guardia Civil  
 Las ONGs  
 Los bomberos  
 Protección Civil  
 La policía  
 El ejército  
 Sus familiares  
 Sus vecinos  
 Sus amigos

---

Fuente: Barómetro de mayo de 2011. Estudio CIS 2.888.

**Tabla 5. Porcentaje de respuestas a la pregunta 20 del Barómetro del CIS de mayo de 2011.**

	<b>Respuesta a la pregunta 20 (hombres y mujeres)</b>				
	Mucho	Bastante	Poco	Nada	(N)
La Guardia Civil	32,04	49,89	15,01	3,06	2.219
Las ONGs	22,89	51,33	20,32	5,45	2.219
Los bomberos	48,85	46,24	4,15	0,77	2.219
Protección Civil	38,04	51,69	8,88	1,40	2.219
La policía	30,51	51,64	15,86	1,98	2.219
El ejército	38,35	49,12	10,86	1,67	2.219
Sus familiares	55,39	39,75	4,28	0,59	2.219
Sus vecinos	29,43	49,98	17,62	2,97	2.219
Sus amigos	40,78	50,25	8,11	0,86	2.219
	<b>Respuesta a la pregunta 20 (hombres)</b>				
	Mucho	Bastante	Poco	Nada	(N)
La Guardia Civil	33,21	47,58	15,35	3,86	1.114
Las ONGs	21,45	48,38	23,16	7,00	1.114
Los bomberos	49,91	44,97	4,31	0,81	1.114
Protección Civil	37,70	50,81	9,78	1,71	1.114
La policía	30,43	50,18	17,15	2,24	1.114
El ejército	39,23	47,40	11,40	1,97	1.114
Sus familiares	55,66	39,14	4,76	0,45	1.114
Sus vecinos	29,53	48,29	19,03	3,14	1.114
Sus amigos	41,38	49,46	8,35	0,81	1.114

<b>Respuesta a la pregunta 20 (mujeres)</b>					
	Mucho	Bastante	Poco	Nada	(N)
La Guardia Civil	30,86	52,22	14,66	2,26	1.105
Las ONGs	24,34	54,30	17,47	3,89	1.105
Los bomberos	47,78	47,51	3,98	0,72	1.105
Protección Civil	38,37	52,58	7,96	1,09	1.105
La policía	30,59	53,12	14,57	1,72	1.105
El ejército	37,47	50,86	10,32	1,36	1.105
Sus familiares	55,11	40,36	3,80	0,72	1.105
Sus vecinos	29,32	51,67	16,20	2,81	1.105
Sus amigos	40,18	51,04	7,87	0,90	1.105

Fuente: Elaboración propia a partir del estudio CIS 2.888.

Como ya se mencionó en la sección 2, para poder aplicar el procedimiento ordinal es necesario establecer una medida de proximidad ordinal adecuada. Para ello, se realizó una encuesta dirigida a un grupo de 20 estudiantes de cuarto curso del grado en Economía de la Universidad de Valladolid. En dicha encuesta se les preguntó a los estudiantes cómo apreciaban las proximidades entre los términos “Nada”, “Poco”, “Bastante” y “Mucho” en relación a la pregunta utilizada por el CIS en su Barómetro de mayo de 2011. Para evitar inconsistencias a la hora de determinar las correspondientes medidas de proximidad ordinal, la encuesta se diseñó siguiendo el algoritmo introducido por (García-Lapresta, González del Pozo & Pérez-Román, 2018). Dicho algoritmo comienza comparando las proximidades  $\pi_{12}$  y  $\pi_{23}$ , que en el caso de la escala considerada consiste en preguntar sobre las proximidades entre el término “Poco” y los términos “Nada” y “Bastante”. Según cómo sea la respuesta recibida (“Poco” está más cerca de “Nada” que de “Bastante”, “Poco” está más cerca de “Bastante” que de “Nada”, o las proximidades entre “Poco” y “Nada” y “Poco” y “Bastante” son equivalentes), el algoritmo mencionado genera una segunda pregunta, y así sucesivamente hasta obtener la medida de proximidad ordinal que refleje fielmente las percepciones de los encuestados sobre la escala.

De los resultados de la encuesta surgieron cinco medidas de proximidad distintas, es decir, cinco formas distintas de concebir las proximidades entre los términos de la escala cualitativa. Es importante destacar que un 94,10% de los estudiantes percibió la escala del CIS como no uniforme. La representación gráfica de las medidas de proximidad ordinal obtenidas y los porcentajes de encuestados que percibieron dichas medidas están recogidos en la Tabla 6.

Una vez que obtenidas las medidas de proximidad ordinal de los estudiantes, es necesario determinar una que represente de la mejor forma posible las opiniones de los individuos sobre las proximidades entre las categorías de respuesta de la escala. La elección del procedimiento de agregación de esta información es algo crucial, ya que pueden llegar a obtenerse resultados distintos e incluso inconsistencias, dependiendo del procedimiento de agregación utilizado.

Con objeto de establecer una medida de proximidad ordinal apropiada y evitar los problemas e inconsistencias considerados por la teoría de agregación de juicios (*Judgment Aggregation*) (véase, por ejemplo, Grossi & Pigozzi, 2014), se ha utilizado un procedimiento basado en métricas ponderadas. Este procedimiento considera que la medida de proximidad ordinal que mejor representa las opiniones de los encuestados es aquella que minimice la suma de distancias (o la suma de los cuadrados de las distancias) entre ella y las medidas de proximidad ordinal de los individuos (García-Lapresta, González del Pozo & Pérez-Román, 2018).



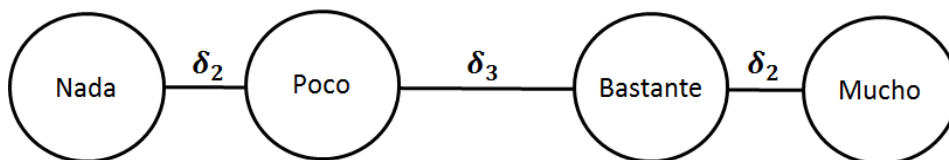
**Tabla 6. Resultados de la encuesta.**

Representación gráfica de las medidas de proximidad ordinal	%
	5,90
	5,90
	52,90
	17,60
	17,60

Fuente: Elaboración propia a partir de las respuestas de la encuesta realizada.  $N = 20$ .

Tras la aplicación de este procedimiento se obtiene la medida de proximidad ordinal representada en la Figura 3, donde puede apreciarse que existe la misma proximidad entre las categorías de respuesta “Nada” - “Poco” y entre “Bastante” - “Mucho” ( $\delta_2$ ), que es mayor que la proximidad existente entre “Poco” - “Bastante” ( $\delta_3$ ).

**Figura 3. Medida de proximidad ordinal considerada para la aplicación del procedimiento ordinal.**



Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, los resultados obtenidos después de ordenar las nueve alternativas mediante la agrupación de las categorías de respuesta “Mucho” y “Bastante” y la aplicación del procedimiento ordinal de la sección 2 se muestran en la Tabla 7. Los diferentes órdenes obtenidos se presentan desagregados por sexo, tal y como suele realizar el CIS en sus anuarios cuando publica los resultados de sus diversos estudios.

**Tabla 7. Órdenes obtenidos tras la agrupación de “Mucho” y “Bastante” y la aplicación del procedimiento ordinal.**

<b>Agrupación de “Mucho” y “Bastante”</b>		
<b>Total</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>
1 Sus familiares	1 Los bomberos	1 Sus familiares
2 Los bomberos	2 Sus familiares	2 Los bomberos
3 Sus amigos	3 Sus amigos	3 Sus amigos
4 Protección Civil	4 Protección Civil	4 Protección Civil
5 El ejército	5 El ejército	5 El ejército
6 La policía	6 La Guardia Civil	6 La policía
7 La Guardia Civil	7 La policía	7 La Guardia Civil
8 Sus vecinos	8 Sus vecinos	8 Sus vecinos
9 Las ONGs	9 Las ONGs	9 Las ONGs
<b>Procedimiento ordinal</b>		
<b>Total</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>
1 Sus familiares	1 Sus familiares	1 Sus familiares
2 Los bomberos	2 Los bomberos	2 Los bomberos
3 Sus amigos	3 Sus amigos	3 Sus amigos
4 El ejército	4 El ejército	4 Protección Civil
5 Protección Civil	5 Protección Civil	5 El ejército
6 La Guardia Civil	6 La Guardia Civil	6 La Guardia Civil
7 La policía	7 La policía	7 La policía
8 Sus vecinos	8 Sus vecinos	8 Sus vecinos
9 Las ONGs	9 Las ONGs	9 Las ONGs

Fuente: Elaboración propia.

Observando los resultados de la Tabla 7, en primer lugar cabe señalar que no existen diferencias en las posiciones ocupadas por las alternativas vecinos y ONGs, que ocupan en todos los órdenes de la tabla la séptima y octava posición, respectivamente. En cambio, sí que existen diferencias en la forma de ordenar el resto de alternativas.

Si se considera la población general, sin hacer distinciones de género, las diferencias entre los órdenes obtenidos mediante la agrupación de las categorías y la aplicación del procedimiento ordinal se encuentran en las alternativas Protección Civil, ejército, Policía y Guardia Civil.

Protección Civil y el ejército, que ocupan la cuarta y la quinta posición en el orden resultante de la agrupación de “Mucho” y “Bastante”, invierten sus posiciones en el caso del orden obtenido tras aplicar el procedimiento ordinal, sucediendo lo mismo en el caso de la Policía y la Guardia Civil.

En cuanto a los hombres, existen diferencias significativas en las primeras posiciones de los órdenes. Los bomberos y los familiares ocupan la primera y la segunda posición, respectivamente, en el orden obtenido tras la agrupación de las categorías. Sin embargo, si se

considera el procedimiento ordinal, los familiares se sitúan en la primera posición seguidos por la alternativa bomberos. Las alternativas Protección Civil y el ejército también sufren modificaciones, invirtiéndose las posiciones que ocupan en los órdenes resultantes.

En el caso de las mujeres, las diferencias entre los dos órdenes son poco relevantes, alterándose únicamente las posiciones de las alternativas Policía y Guardia Civil.

#### **4. Conclusiones.**

El uso de escalas cualitativas formadas por términos lingüísticos permite a los seres humanos expresar sus valoraciones y juicios subjetivos de una forma sencilla ante situaciones de vaguedad e imprecisión. Desde un punto de vista práctico es muy frecuente que las escalas cualitativas se representen a través de valores numéricos exactos, debido a las facilidades que proporciona la Estadística a la hora de manejar datos numéricos.

No obstante, este enfoque cuantitativo de las escalas cualitativas desvirtúa la propia naturaleza de las mismas, ya que contradice algunos principios de la Teoría de la Medición (Stevens, 1951; Roberts, 1979), llegando incluso a generar problemas de interpretación de los resultados procedentes de las escalas cualitativas no uniformes.

Por otra parte, la práctica utilizada por diversos organismos consistente en analizar y presentar los resultados de sus investigaciones mediante la agrupación de varias categorías tampoco está considerando la no uniformidad de las escalas cualitativas, suponiendo además una pérdida importante de información cualitativa al descartar parte de las categorías de respuesta de las escalas.

En este trabajo se ha realizado un análisis de la metodología de agrupación de varias categorías de respuesta que utilizada el CIS, considerando como método alternativo a dicha práctica el procedimiento ordinal introducido por García-Lapresta y Pérez-Román (2018).

Para la aplicación del procedimiento ordinal fue necesario establecer una medida de proximidad ordinal. Con el objeto de establecer dicha medida y conocer cómo aprecian los individuos las proximidades entre los términos de la escala {"Nada", "Poco", "Bastante", "Mucho"}, se realizó una encuesta a un grupo de estudiantes. Los datos de la misma evidenciaron la no uniformidad de la escala, ya que un 94,10% de los estudiantes percibió la escala del CIS como no uniforme.

Por otra parte, respecto a las modificaciones y extensiones futuras de este procedimiento, puede señalarse la propuesta introducida recientemente por García-Lapresta y González del Pozo (2019) en contextos de duda. Dicho procedimiento es una extensión del procedimiento ordinal que puede aplicarse en escenarios en los que existen múltiples criterios y a los individuos se les permite seleccionar dos términos consecutivos de la escala.

#### **Agradecimientos**

Los autores agradecen a los evaluadores anónimos sus comentarios y sugerencias que nos han permitido mejorar el trabajo, así como al Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO) y al Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) (referencia ECO2016-77900-P) por la financiación recibida.

## Referencias

- Balinski, M., & Laraki, R. (2007). A theory of measuring, electing and ranking. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 104, 8720-8725.
- Balinski, M., & Laraki, R. (2011). *Majority Judgment: Measuring Ranking and Electing*. Massachusetts: MIT Press.
- Beyth-Marom, R. (1982). How probable is probable? A numerical taxonomy translation of verbal probability expressions. *Journal of Forecasting*, 1, 257-269.
- Díaz de Rada, V. (2004). Problemas de representatividad en las encuestas que utilizan muestreos probabilísticos. *Papers*, 74, 45-66.
- Díaz de Rada, V. (2015). Calidad de los datos de preguntas de batería en encuestas presenciales: una comparación de un estudio con cuestionario en papel y en formato electrónico. *Revista Española de Investigaciones Sociológicas*, 152, 167-177.
- Durán, A., Ocaña, A.C., Cañadas, I., & Pérez, F.J. (2000). Construcción de cuestionarios para encuestas: el problema de la familiaridad de las opciones de respuesta. *Metodología de Encuestas*, 2(1), 27-60.
- Epstein, L.G. (1999). A definition of uncertainty aversion. *The Review of Economic Studies*, 66(3), 579-608.
- Fleiss, J.L., Levin, B., & Paik, M.C. (2003). *Statistical Methods for Rates and Proportions*. New Jersey: Wiley and Sons.
- Franceschini, F., Galetto, M., & Varetto, M. (2004). Qualitative ordinal scales: the concept of ordinal range. *Quality Engineering*, 16, 515-524.
- García-Lapresta, J.L., & González del Pozo, R. (2019). An ordinal multi-criteria decision-making procedure under imprecise linguistic assessments. *European Journal of Operational Research*, 279, 159-167.
- García-Lapresta, J.L., González del Pozo, R., & Pérez-Román, D. (2018). Metrizable ordinal proximity measures and their aggregation. *Information Sciences*, 448-449, 149-163.
- García-Lapresta, J.L., & Pérez-Román, D. (2015). Ordinal proximity measures in the context of unbalanced qualitative scales and some applications to consensus and clustering. *Applied Soft Computing*, 35, 864-872.
- García-Lapresta, J.L., & Pérez-Román, D. (2018). Aggregating opinions in non-uniform ordered qualitative scales. *Applied Soft Computing*, 67, 652-657.
- Grossi, D., & Pigozzi, G. (2014). *Judgment Aggregation: A Primer*. Synthesis Lectures on Artificial Intelligence and Machine Learning. Morgan and Claypool.
- Kennedy, R., Riquier, C., & Sharp, B. (1996). Practical applications of correspondence analysis to categorical data in market research. *Journal of Targeting, Measurement and Analysis for Marketing*, 5(1), 56-70.

- Likert, R. (1932). A technique for the measurement of attitudes. *Archives of Psychology*, 22(140), 1-55.
- Lozano, L.M., García-Cueto, E., & Muñiz, J. (2008). Effect of the number of response categories on the reliability and validity of rating scales. *Methodology*, 4, 73-79.
- Mangione, T.W. (1995). *Mail Surveys: Improving the Quality. Applied Social Research Methods*. Thousand Oaks: Sage Publications.
- Matas, A. (2018). Diseño del formato de escalas tipo Likert: un estado de la cuestión. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 20(1), 38-47.
- Merbitz, C., Morris, J., & Grip, J.C. (1989). Ordinal scales and foundations of misinference. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*, 70, 308-312.
- Nadler, J., Weston, R., & Voyles, E. (2015). Stuck in the middle: the use and interpretation of mid-points in items on questionnaires. *The Journal of General Psychology*, 142(2), 71-89.
- Pardo, A. (2002). *Análisis de Datos Categóricos*. Madrid: UNED.
- Roberts, F.S. (1979). *Measurement Theory*. New York: Cambridge University Press.
- Silva, L.C. (1997). *Cultura Estadística e Investigación Científica en el Campo de la Salud: una Mirada Crítica*. Madrid: Ediciones Díaz de Santos.
- Stevens, S.S. 1951. *Mathematics, Measurement and Psychophysics*. Oxford, England: Wiley.
- Teigen, K.H., & Wibecke, B. (1999). The directionality of verbal probability expressions: effects on decisions, predictions, and probabilistic reasoning. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 80(2), 155-190.
- Zimmer, A.C. (1983). Verbal vs. numerical processing by subjective probabilities. En: Scholz, R.W. (ed.). *Decision Making under Uncertainty*, pp. 159-182. North Holland, Amsterdam.

**ANEXO. Ejemplo de aplicación del procedimiento ordinal.**

1. Recoger las valoraciones cualitativas  $v_i^a$  dadas por cinco individuos  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  sobre cada una de las alternativas  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ . En este ejemplo se ha utilizado la escala cualitativa ordenada  $\mathcal{L} = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ , donde  $l_1 < l_2 < l_3 < l_4$ .

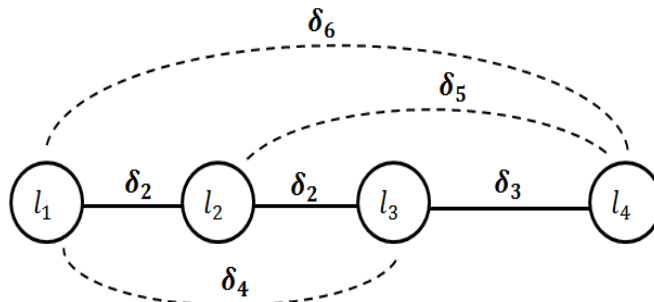
**Tabla 8. Valoraciones cualitativas dadas por cinco individuos a las alternativas  $x_1, x_2$  y  $x_3$ .**

$x_1$	$x_2$	$x_3$
$l_3$	$l_2$	$l_1$
$l_1$	$l_3$	$l_2$
$l_3$	$l_4$	$l_2$
$l_4$	$l_3$	$l_3$
$l_3$	$l_4$	$l_4$

Fuente: Elaboración propia.

2. Establecer sobre la escala cualitativa una medida de proximidad ordinal adecuada  $\pi: \mathcal{L}^2 \rightarrow \Delta$ . En este ejemplo hemos considerado la medida de proximidad ordinal representada en la Figura 4.

**Figura 4. Medida de proximidad ordinal usada en el ejemplo.**



Fuente: Elaboración propia.

3. Para cada alternativa  $x_i \in X$  se calculan los grados de proximidad entre las valoraciones cualitativas dadas por los individuos y la máxima valoración posible de la escala,  $l_4$ .

**Tabla 9. Grados de proximidad obtenidos tras comparar cada una de las valoraciones cualitativas con la máxima valoración de la escala.**

$x_1$	$x_2$	$x_3$
$\delta_3$	$\delta_5$	$\delta_6$
$\delta_6$	$\delta_3$	$\delta_5$
$\delta_3$	$\delta_1$	$\delta_5$
$\delta_1$	$\delta_3$	$\delta_3$
$\delta_3$	$\delta_1$	$\delta_1$

Fuente: Elaboración propia.

4. Ordenar para cada alternativa  $x_i \in X$  los grados de proximidad de forma decreciente (de mayor a menor proximidad) y seleccionar para cada alternativa su par de medianas,  $M_i \in \Delta_2$ , donde  $\Delta_2$  es el conjunto de medianas factibles:

$$\Delta_2 = \{(\delta_r, \delta_s) \in \Delta^2 \mid r \leq s\}.$$

**Tabla 10. Medianas de los grados de proximidad.**

$x_1$	$x_2$	$x_3$
$\delta_1$	$\delta_1$	$\delta_1$
$\delta_3$	$\delta_1$	$\delta_3$
$\delta_3$	$\delta_3$	$\delta_5$
$\delta_3$	$\delta_3$	$\delta_5$
$\delta_6$	$\delta_5$	$\delta_6$

Fuente: Elaboración propia.

Como en este caso, el número de grados de proximidad es impar, se duplica la mediana. Por tanto,  $M_1 = M_2 = (\delta_3, \delta_3)$  y  $M_3 = (\delta_5, \delta_5)$ .

5. Establecer un orden lineal apropiado sobre  $\Delta_2$  para ordenar los pares de medianas de los grados de proximidad.
6. Los pares de medianas se ordenan siguiendo el orden lineal introducido por García-Lapresta y Pérez-Román (2018):

$$(\delta_r, \delta_s) \succcurlyeq_2 (\delta_t, \delta_u) \Leftrightarrow \begin{cases} r + s < t + u \\ 0 \\ r + s = t + u \text{ y } s - r \leq u - t \end{cases}$$

$$(\delta_2, \delta_2) \succcurlyeq_2 (\delta_1, \delta_3) \succcurlyeq_2 (\delta_2, \delta_3) \succcurlyeq_2 (\delta_1, \delta_4) \succcurlyeq_2 (\delta_3, \delta_3) \succcurlyeq_2 (\delta_2, \delta_4) \succcurlyeq_2 \dots$$

7. Ordenar las alternativas teniendo en cuenta el orden débil sobre  $X$  definido como  $x_i \succcurlyeq x_j \Leftrightarrow M_i \succcurlyeq_2 M_j$ , y aplicar el procedimiento de desempate si fuera necesario.

Teniendo en cuenta el orden establecido en el paso 6,  $M_1 = M_2 \succcurlyeq_2 M_3$ ;  $x_1 \succ x_3$  y  $x_2 \succ x_3$ .

Puesto que las alternativas  $x_1$  y  $x_3$  tienen la misma mediana, se aplica el procedimiento de desempate. Para ello se eliminan las medianas de las alternativas  $x_1$  y  $x_3$  y se vuelven a calcular sus medianas entre los grados de proximidad restantes.

**Tabla 11. Procedimiento de desempate.**

$x_1$	$x_2$	$x_1$	$x_2$
$\delta_1$	$\delta_1$	$\delta_1$	$\delta_1$
$\delta_3$	$\delta_1$	$\delta_3$	$\delta_1$
<del><math>\delta_3</math></del>	<del><math>\delta_3</math></del>	$\delta_3$	$\delta_3$
$\delta_3$	$\delta_3$	$\delta_6$	$\delta_5$
$\delta_6$	$\delta_5$		

Fuente: Elaboración propia.

$$M_1^{(1)} = (\delta_3, \delta_3) \text{ y } M_2^{(1)} = (\delta_1, \delta_3)$$

Teniendo en cuenta el orden introducido en el paso 6,  $M_2^{(1)} \succcurlyeq_2 M_1^{(1)}$  y, por tanto,  $x_2 \succ x_1$ .

Finalmente, y tras la aplicación del proceso de desempate, se obtiene el siguiente resultado:  $x_2 \succ x_1 \succ x_3$ .





## Progresos educativos intergeneracionales: un análisis para Colombia

MORA RODRÍGUEZ, JHON JAMES  
Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas  
Universidad Icesi (Colombia)  
Correo electrónico: [jjmora@icesi.edu.co](mailto:jjmora@icesi.edu.co)

GONZÁLEZ TERÁN, ÁNGELA MARÍA  
Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas  
Universidad Icesi (Colombia)  
Correo electrónico: [amgonzalez@icesi.edu.co](mailto:amgonzalez@icesi.edu.co)

### RESUMEN

Este artículo analiza como las condiciones del entorno socioeconómico inciden sobre la movilidad en los niveles de educación secundaria, media y superior. Nuestro análisis se enfoca en la influencia del nivel educativo de los padres con el fin de evaluar la movilidad intergeneracional en educación. A partir de la estimación de un modelo logit de decisión secuencial dinámico nuestros resultados muestran que las condiciones del hogar inciden sobre el progreso en el sistema educativo ya que padres con niveles de educación superior son un fuerte apalancamiento para impulsar a sus hijos a través del sistema hasta la educación superior, siendo más fuerte esta influencia cuando se trata de la educación de la madre.

**Palabras clave:** movilidad educativa, modelos de elección discreta, progreso escolar.

**Clasificación JEL:** I24; I25; C21; C52; C55.

**MSC2010:** 91G70; 97B20; 62P20.

# Intergenerational educational progress: an analysis for Colombia

## ABSTRACT

This article discusses how the conditions of the socioeconomic environment affect mobility at the secondary, middle and upper levels of education. Our analysis focuses on the influence of parents' educational level to evaluate intergenerational mobility in education. Using a logit model of dynamic sequential decision our results show that the conditions of the home affect the progress in the education system since parents with higher education levels are a strong leverage to boost their children through the system even higher education, this influence being stronger when it comes to the mother education level.

**Keywords:** intergenerational mobility, discrete decision models, school progress.

**JEL classification:** I24; I25; C21; C52; C55.

**MSC2010:** 91G70; 97B20; 62P20.



## **1. Introducción.**

Colombia se enfrenta a dos retos cruciales en la educación: cerrar las brechas en términos de participación y mejorar la calidad de la educación (OCDE, 2016). Las desigualdades en educación tienen su origen incluso desde la temprana edad ya que muchos niños desfavorecidos nunca van a la escuela o no empiezan a tiempo o asisten a instituciones de menor calidad. Las diferencias en niveles de estudios alcanzados son abismales: la expectativa de vida escolar de los estudiantes con las peores condiciones de pobreza es de solo seis años, mientras que la expectativa de vida escolar es de 12 años para los más ricos y, solo el 9% en condiciones de pobreza se matricula en educación superior, en comparación con el 53% de los pertenecientes a las familias más acaudaladas.

Colombia es un país diverso y multiétnico, geográfica y territorialmente complejo. Estas características hacen particularmente exigente el camino del país hacia la equidad (PND, 2015). En general, aunque las condiciones de desigualdad del país han mejorado en los últimos años, la posición relativa que ocupa frente a otros países en vía de desarrollo del mismo continente continúa siendo muy baja. Situaciones como las grandes brechas regionales, la diferencia climática de cada una de las regiones, diferencias entre géneros y etnias, la distribución de las tierras y la distribución de los ingresos son algunos de los factores que contribuyen al incremento en la desigualdad.

La desigualdad afecta en gran medida el acceso a las oportunidades de los individuos en diversas áreas y una de ellas es la educación básica obligatoria que, incluso en algunos casos, no es ni siquiera una opción. Por lo tanto, como establece Becker (1964) ante las condiciones de desigualdad de un país que afecten especialmente al acceso a la educación se requerirá de una fuerte política de intervención estatal, para suplir las barreras que enfrenta la población más vulnerable.

La relevancia de analizar la movilidad intergeneracional en educación se hace más fuerte cuando el país presenta fallas en los mercados financiero y laboral, ya que se acentúan las desigualdades de ingresos entre los individuos frente a las posibilidades de acceso a la educación (Mediavilla & Calero, 2010; Chau, 2012). En este sentido, este artículo busca analizar las condiciones dentro del entorno familiar del estudiante que afectan positiva y negativamente su progreso a través de los diferentes niveles educativos. El análisis aquí realizado parte de analizar cómo influye la educación de los padres sobre cada una de las decisiones de avanzar o no al siguiente nivel escolar, modelando la decisión de forma secuencial, observando diferencias a lo largo del tiempo a través de la incorporación de las cohortes.

El artículo se encuentra dividido en siete secciones, incluida la introducción. En la segunda sección se presenta una revisión de la literatura sobre movilidad educativa. En la tercera sección, se realiza un breve análisis del sistema educativo colombiano. En la cuarta sección se describe la metodología de un modelo econométrico logit secuencial. En la quinta sección, se presenta la base de datos y se muestran los resultados de una matriz de transición educativa no condicionada. En la sexta sección, aparecen los principales resultados y en la séptima sección se encuentran las conclusiones.

## **2. La educación y la movilidad intergeneracional.**

Los estudios sobre el efecto de la educación sobre la movilidad intergeneracional analizan, en términos generales, cómo la educación de los padres incide sobre las elecciones de los hijos. Es así como uno de los primeros estudios sobre movilidad intergeneracional en educación fue el artículo de Lillard y Willis (1994), quienes exploran la relación entre la educación de padres e hijos, con datos longitudinales para Malasia. Los autores encuentran que las decisiones de

educación de los padres sobre los hijos siguen siendo fuertes y que es mayor el efecto de la madre que el efecto del padre.

Cameron y Heckman (2001) estiman un modelo dinámico de asistencia escolar para investigar las causas de las disparidades étnico-raciales, observando el progreso para los últimos tres a cuatro años de colegio hasta la entrada a la universidad para afrodescendientes, hispanos y blancos. Los autores encuentran que la trayectoria de los padres y el ambiente familiar determinan las diferencias étnicas y raciales en el progreso escolar en lugar de las restricciones de crédito. Iannelli y Paterson (2007) miden las diferencias entre cohortes del efecto de la educación de la generación anterior sobre la movilidad entre estatus socioeconómicos. El estudio lo realizan para Escocia con datos de 2001 y sus resultados muestran que los hogares de clase media transmiten ventajas a sus hijos mientras que los hogares de clase baja perpetúan las desventajas y que la movilidad se ve fuertemente condicionada por la educación de los padres.

Ben-Halima, Chusseau, y Hellier (2014) analizan el impacto de la educación de los padres y el ingreso de estos sobre la asistencia escolar de sus niños y su desempeño en el examen de estado. Usan datos de la encuesta de formación de la calificación profesional para seis olas tomadas para intervalos de seis años desde 1964 hasta 2003 y encuentran que a mayor nivel de educación de los padres mayor es el desempeño en la prueba de estado, mientras que menores niveles de educación reducen la probabilidad de obtener mejores puntuaciones.

Kwenda, Ntuli, y Gwatidzo (2015) analizan las sendas de transmisión intergeneracional en educación entre los afrodescendientes de Sudáfrica. Con datos de cohortes de nacimiento desde 1954 hasta 1993, encuentran una disminución en la transmisión intergeneracional de educación para las últimas cuatro décadas. De igual forma encuentran, que los hijos de las familias más pobres presentan una relación más fuerte con el nivel educativo de sus padres.

Huebener (2015) analiza cómo afecta la aversión al riesgo de los padres en la transmisión intergeneracional de ingresos y educación. Utilizando datos de panel de la encuesta socio económica alemana de padres e hijos desde 1984 a 2012. Y encuentra que hijos con padres que tienen una mayor aversión al riesgo tienen menor movilidad intergeneracional tanto en educación como en ingresos.

Qin, Wang, y Zhuang (2016) estiman el impacto de la transmisión intergeneracional de capital humano en la movilidad de ingresos en China. Usando datos desde 1989 hasta 2009 encuentran que el capital humano se transmite de forma directa (genéticamente) e indirecta (a través del ambiente familiar y los ingresos invertidos en capital humano).

Finalmente, Heckman y Raut (2016), analizan la decisión de inversión en las opciones de preescolar de padres altruistas. Los autores concluyen que la inversión en preescolar tiene efectos significativos sobre las habilidades cognitivas del joven y que están asociadas a los ingresos futuros y los resultados escolares.

Para el caso colombiano, Baltazar, Astudillo, y Malaver (2003) analizan la relación entre la baja escolaridad y los hogares con menores recursos para la ciudad de Bogotá. Sus resultados muestran que la movilidad es ascendente para los deciles de ingresos más altos y descendentes para los más bajos.

Cartagena (2005) analiza la movilidad educativa entre generaciones desde 1915 hasta 2003, creando un índice de movilidad ascendente y construyendo una serie de rentabilidad de la educación. Sus resultados muestran un aumento de la educación entre generaciones y señalan una disminución en el ritmo de crecimiento de la movilidad intergeneracional para los últimos treinta años.

Viáfara, Estacio, y González (2010) analizan la movilidad educativa intergeneracional para las clases medias afrodescendientes en las ciudades de Bogotá, Cali y el agregado de las trece áreas metropolitanas y encuentran que este grupo enfrenta una mayor inmovilidad que las clases medias no afrodescendientes, siendo el efecto mayor en la ciudad de Bogotá.

Bonilla (2010) analiza la movilidad intergeneracional en educación desde una perspectiva regional, con el fin de analizar en cuales ciudades y regiones la educación de los individuos depende menos de la de sus padres. Sus resultados muestran que existen diferencias en los niveles de movilidad entre las zonas centrales y la periferia, siendo baja para los segundos y alta en los primeros.

Viáfara y López (2011) analizan los factores que influyen en la baja movilidad educativa de los afrodescendientes. Ellos encuentran que la baja movilidad no solo se debe a la condición de pobreza del hogar ni a la menor educación de sus padres, sino también a la presencia de desventajas acumulativas derivadas de la discriminación por raza y sexo. A través de un modelo logístico ordenado comprueban su hipótesis para datos de la encuesta CIDSE-IRD (1998) para la ciudad de Cali.

Morales (2012) analiza las diferencias por género en la movilidad intergeneracional educativa a través de las cohortes de nacimiento para el área metropolitana de Cali. Utilizando la Encuesta de Calidad de Vida de 2003 y modelos de decisión discreta encuentra que la movilidad educativa aumenta para las mujeres y disminuye en los hombres.

González, Mora, y Albert (2013) analizan la demanda de educación universitaria en Colombia con datos de las encuestas de hogares del DANE encontrando que el género, el nivel educativo de los padres, la situación laboral de éstos, la composición familiar y el ingreso son determinantes en la decisión de estudiar más. González, Mora y Cuadros (2014) analizan el efecto de las características familiares sobre el acceso a la educación postobligatoria en Colombia. Utilizando un modelo probit ordenado generalizado con los datos de la GEIH para el periodo 2008 a 2012, encuentran que las características como la educación de los padres y su situación laboral tienen una fuerte relación con la demanda de educación no obligatoria, existiendo diferencias entre géneros y niveles de ingresos.

Por su parte, Moyano y Galvis (2014) identifican los determinantes de la brecha educativa para los adolescentes en Colombia. Los autores consideran que los adolescentes provenientes de hogares con padres más educados y con mayores ingresos per cápita son los que presentan las menores brechas educativas.

Galvis y Roca (2014) analizan la movilidad social en Colombia a nivel regional. Para hacerlo calculan la movilidad promedio entre padres e hijos. Sus conclusiones dejan ver que existe una significativa transmisión del logro educativo entre generaciones.

Finalmente, Ayala (2015) analiza si los hogares que solo cuentan con madres cabeza de familia se enfrentan a mayores restricciones con respecto a los hogares con padres, en la transmisión intergeneracional de educación e ingresos. Con los datos de la Encuesta Nacional de Calidad de Vida (ENCV) estiman un modelo logit ordenado para los niveles educativos de los hijos y encuentran que se requiere que al menos uno de los padres haya alcanzado altos niveles educativos para que los hijos alcancen estudios universitarios.

### **3. La educación en Colombia.**

La educación en Colombia se encuentra dividida entre obligatoria y no obligatoria. Por mandato constitucional la educación es obligatoria solo entre los cinco y quince años, que equivalen a noveno grado. La educación media (10-13) y la educación superior (técnica, tecnológica y universitaria) no son obligatorias y, por lo tanto, son decisiones propias del individuo y su familia.

Y, es esta clase de separación entre niveles obligatorios y post obligatorios lo que refuerza la correlación que existe entre las características familiares y el acceso a la educación (González, Mora, & Cuadros, 2014).

La OCDE (2016) muestra que Colombia presenta bajas tasas de asistencia escolar. Esto es debido en parte a una deficiente transición entre niveles, altas tasas de deserción escolar y un número significativo de niños que no ingresan al sistema educativo. Y, aunque la tasa de deserción desde preescolar hasta la educación secundaria se ha reducido a más de la mitad entre 2002 y 2013 en Colombia, las tasas de cobertura bruta han aumentado. La proporción de niños en edad de cursar primaria que no están estudiando ha aumentado del 4% en 2000 al 9% en 2010 (OCDE, 2016). Aproximadamente uno de cada cinco estudiantes en Colombia no continúa estudiando después de la primaria. La proporción de jóvenes en edad de cursar educación básica secundaria que no están estudiando ha disminuido del 15% en 2005 al 9% en 2013.

La financiación de la educación colombiana es altamente centralizada. La mayor parte de los recursos para la educación desde transición hasta el último año de educación media son transferidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) a los departamentos, los municipios y las escuelas y colegios por medio del sistema general de participaciones (SGP). Entre los años 2002 y 2013, la cuota de los gastos totales en educación del SGP se redujo notablemente, pasando del 80% al 60%, y la proporción de gastos directos por parte del gobierno nacional pasó a ser casi el doble, del 9% al 17%. Asimismo, los gastos de las entidades territoriales certificados (ETC) provenientes de sus propios recursos aumentaron. Sin embargo, representaron solamente el 13% de los gastos totales en el año 2013. Si bien la relación entre gastos totales (públicos y privados) por estudiantes de educación básica primaria y secundaria y el PIB (20% y 21%, respectivamente) es cercana al promedio de los países de la OCDE (23% y 26%, respectivamente), en términos absolutos, los gastos por estudiante son muy bajos, de manera que los recursos privados desempeñan un papel más importante que en la mayor parte de los países miembros de la OCDE (OCDE, 2016).

Por su parte, la educación básica secundaria sigue siendo el eslabón más débil del sistema educativo colombiano, con una tasa de deserción anual del 4.5%, superior a la de la educación primaria (3.2 %) y educación media (3.1%) (UNICEF, 2016). Solo el 30% de los jóvenes hace la transición de la escuela o colegio a la educación superior y de estos, muchos desertarán antes de terminar. Las tasas de deserción anual en educación superior varían entre el 10.4% en las universidades y el 22.2% en las instituciones técnicas y tecnológicas (PND, 2015). Las constantes tasas de deserción y la débil transición indican que Colombia tiene uno de los porcentajes más altos de jóvenes entre los 15 y los 19 años de edad que no están estudiando: un 36% en total (OCDE, 2016). Además, el 19% de los jóvenes entre los 15 y 19 años ni estudia, ni trabaja, ni recibe educación, doblando la proporción promedio de los países de la OCDE (Mora, Caicedo y González, 2017). Muchos obstáculos limitan el acceso de los jóvenes a la educación, entre otros, la falta de oportunidades educativas, la pobreza, la presión por empezar a trabajar, el conflicto y la violencia (OCDE, 2016).

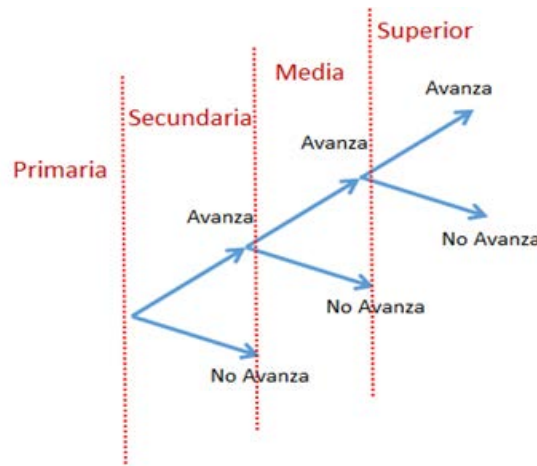
El análisis del sistema educativo colombiano muestra que la intervención estatal aún no es lo suficientemente fuerte para solventar las fallas del mercado, permitiendo el crecimiento de las brechas en educación. Por tal motivo, se hace imperante verificar cuáles son los factores que más repercusiones tienen en el avance dentro del sistema escolar. Esto con el fin de reajustar el portafolio de inversiones en política pública en educación hacia aquellos aspectos cuya intervención genere el mayor impacto sobre el progreso escolar. El presente documento está orientado bajo esta idea, explora la movilidad intergeneracional en educación en Colombia buscando los factores que determinan las decisiones de continuar a un nivel mayor de educación.

#### 4. Metodología.

Con el fin de analizar el progreso de los jóvenes a lo largo de los niveles educativos proponemos un modelo de decisión secuencial, donde la posibilidad de avanzar al periodo siguiente, en un nivel educativo, dependerá de la decisión en el periodo anterior. Esto nos permitirá, periodo a periodo, analizar el efecto de los padres en las decisiones educativas de sus hijos.

La Figura 1 presenta la elección de educación utilizando el árbol de las decisiones secuenciales para analizar el progreso escolar en Colombia. Esta figura muestra cómo el proceso de elección escolar es secuencial, a diferencia de González, Mora y Cuadros (2014) quienes consideran que la elección de demanda puede ser analizada a través de un probit ordenado.

**Figura 1. Árbol de las decisiones secuenciales de progreso escolar en Colombia.**



Fuente: Elaboración propia.

En particular, supondremos que el individuo que se encuentra en el sistema escolar, que existen  $N$  individuos y que  $Y_i$  es la variable de decisión con  $S$  posibles opciones ordenadas  $\{s = 1, \dots, J\}$ . A continuación, sea  $s$  el grado de estudio,  $D_s = 1$  si una persona completa el grado  $s$  y  $D_s = 0$  en caso contrario. El nivel de estudio alcanzado en  $s$  es determinado por el individuo en el grado anterior  $s - 1$ . Siendo  $X_s = x_s$  los regresores que determinan la probabilidad de avanzar del grado  $s - 1$  al grado  $s$ , dada por

$$\Pr(D_s = 1 | X_s = x_s, D_{s-1} = 1) = P_{s-1,s}(x_s) \quad (1)$$

El evento  $D_{s-1} = 0$  implica que un individuo abandona el sistema educativo en el grado  $s - 1$ , lo que significa que se excluyen los resultados de los eventos sucesivos  $D_s = 1$  cuando  $D_{s-1} = 0$ . Siguiendo a Cameron y Heckman (1998) estas probabilidades modelan el proceso de transición escolar, que se convierte en un proceso markoviano completamente especificado cuando se asume una condición inicial  $D_1$ , mediante el uso de una probabilidad logística se plantea que la posibilidad de trascender de un nivel educativo al siguiente es:

$$P_{s-1,s} x'_s = \frac{\exp(x'_s \beta_s)}{1 + \exp(x'_s \beta_s)} \quad (2)$$

De tal forma que para cada nivel educativo ( $S_{i(t)}$ ) la probabilidad de un individuo  $i$  de continuar al siguiente nivel está dada por:

$$S_{i(t)} = 1[x'_{i(t)} \beta_{i(t)} + \epsilon_{i(t)} > 0 | S_{i(t-1)} > 0] \quad (3)$$

Donde  $\epsilon_{i(t)}$  se distribuye valor extremo tipo I y  $x_{i(t)}$  es el vector de las características del individuo, las características del hogar y las características de los padres.

## 5. Datos analizados.

Para el análisis de cómo influye el contexto familiar en el progreso escolar se usaron datos de la Gran Encuesta Integrada de Hogares (GEIH) del Departamento Administrativo Nacional de Estadísticas (DANE). Se tomaron ocho años de encuestas desde 2008 hasta 2016.

El uso de este gran número de encuestas de corte transversal se fundamenta en la oportunidad que brinda para la creación de 8 cohortes de nacimiento que permiten observar el avance dinámico entre niveles de educación para los individuos de la cohorte.

La tabla 1 muestra los datos después de unir todas las etapas de la GEIH. En términos generales la proporción de hombres y mujeres es similar. La edad promedio es de 25 años, el 43% de los individuos tiene internet, pero solo el 36% de estos posee computador. El 16% de los individuos tuene un carro mientras que el 8% vive en la zona rural. El ingreso promedio del hogar es \$908.909 pesos colombianos (USD 300.5). El numero promedio de personas por hogar es de 5.

**Tabla 1. Estadísticas descriptivas de las variables independientes del modelo secuencial.**

Variable	Obs.	Media	Desv. Est.	Mínimo	Máximo
Sexo	116558	0.51	0.50	0	1
Edad	116558	25.17	10.20	11	80
Internet	116508	0.43	0.50	0	1
Computador	116508	0.36	0.48	0	1
Carro	116508	0.16	0.36	0	1
Rural	116558	0.08	0.28	0	1
Ingresos hogar (log)	106413	13.72	0.96	8.23	19.93
Personas por hogar	116558	5.02	2.10	2	25
Nivel educativo (padre)	71344	3.06	1.50	1	7
Nivel educativo (madre)	110600	2.99	1.42	1	7
Departamentos	116558	37.54	23.23	5	76
Cohortes	107639	6.35	1.88	1	8

Fuente: Elaboración propia a partir de GEIH-DANE.

Los datos se analizan a partir de seis niveles educativos: ninguno, preescolar, primaria, secundaria, media y superior (Tabla 2). En la tabla 2 se observa cómo, a partir de la cohorte de los individuos nacidos entre 1972 y 1976, aumenta el porcentaje que completa la educación superior siendo este porcentaje superior al 20%. A partir de la cohorte de individuos nacidos en 1977 las proporciones de individuos que terminaron el bachillerato y completaron la educación superior eran mayoría frente a los individuos que solo alcanzaban primaria y secundaria. Por ejemplo, para los individuos nacidos entre 1982 y 1986 el 34% terminaron la educación media y el 47% se graduaron de educación superior. Solo el 18% de ellos se quedaron en los niveles inferiores de educación (primaria y secundaria)



**Tabla 2. Porcentaje de individuos en cada nivel educativo por rangos de año de nacimientos (cohortes).**

Años de Nacimiento	Ninguno	Primaria (1-5)	Secundaria (6-9)	Media (10-13)	Superior	Total
1917-1946	20.2	56.4	11.2	6.2	5.9	100.0
1947-1951	12.5	50.0	14.1	11.5	11.9	100.0
1952-1956	8.1	44.6	17.6	15.3	14.4	100.0
1957-1961	7.1	39.8	19.2	19.7	14.2	100.0
1962-1966	5.5	36.3	21.5	23.9	12.8	100.0
1967-1971	4.0	34.8	20.6	25.7	14.9	100.0
1972-1976	3.6	27.1	16.0	27.8	25.5	100.0
1977-1981	1.4	12.0	11.5	32.6	42.6	100.0
1982-1986	1.1	8.2	9.8	34.2	46.7	100.0
1987-1991	0-6	7.3	12.8	37.7	41.6	100.0
1992-1996	0.9	9.6	23.5	34.3	31.7	100.0
Total	4.8	26.3	16.3	26.4	26.2	100.0

Fuente: Elaboración propia a partir de GEIH-DANE.

A continuación, se procedió a analizar la transición entre los niveles educativos de los individuos entre las generaciones. Para esto se calculó la proporción de individuos que cambiaron o permanecieron en cada uno de los niveles educativos, de una generación a otra, es decir, de padres a hijos y de hijos a nietos, tomando todos los individuos observados con las encuestas de 2008 a 2016. La tabla 2 muestra el resultado de estas transiciones.

**Tabla 3. Matrices de transición no condicionada (periodos 2008-2016).**

	Nivel Educativo	Ninguno	Primaria (1-5)	Secundaria (6-9)	Media (10-13)	Superior
Padre/Hijo	Ninguno	7.2	31.13	21.91	28.64	11.13
	Primaria (1-5)	1.12	14.33	18.94	39.1	26.51
	Secundaria (6-9)	0.33	3.61	14.42	39.5	42.13
	Media (10-13)	0.09	1.61	6.95	33.94	57.41
	Superior	0	0.44	2.62	15.15	81.79
	Total	1.17	9.83	14.22	34.44	40.33
Hijo/Nieto	Ninguno	2.22	42.22	31.11	22.22	2.22
	Primaria (1-5)	0.91	16.97	22.73	40	19.39
	Secundaria (6-9)	0.36	5.07	18.12	38.41	38.04
	Media (10-13)	0.85	3.39	10.17	44.63	40.96
	Superior	0	1.64	6.15	20.49	71.72
	Total	0.64	8.41	15.21	36.51	39.23

Fuente: Elaboración propia a partir de GEIH-DANE.

En la tabla 3 se puede observar que cuando el padre no tiene ningún nivel educativo la educación del hijo estará concentrada en los niveles de primaria, secundaria y media, con mayor probabilidad en primaria (31.13%) y media (28.6%). Cuando el padre alcanza al menos la primaria, aumenta forma significativa la probabilidad de que el hijo alcance la educación media (39%). No obstante, si el padre tiene educación superior la probabilidad de que el hijo supere la educación media y termine la educación superior es bastante alta (82%).

Este comportamiento es consistente tanto en las relaciones de padre a hijo como de hijo a nieto, siendo más marcadas en la relación de hijo a nieto para los niveles más bajos de educación del padre y más fuerte el apalancamiento cuando el padre tiene educación superior, si se trata de la relación de padre a hijo. Como conclusión previa de estos cálculos se puede esperar que si los padres tienen bajos niveles educativos esto reduce la probabilidad de que sus hijos alcancen un nivel de educación superior.

## 6. Resultados del modelo.

Para la estimación del modelo dinámico de decisión secuencial se utilizó como variable dependiente el grado de movilidad intergeneracional en educación, que corresponde al nivel educativo del padre y al nivel educativo de la madre. Como variables de control se utilizaron el sexo, la edad, el departamento y la cohorte de nacimiento del estudiante. También se controló por características del hogar, como el número de personas que lo componen y si se trata de un hogar rural. Igualmente, se incorporó la tenencia de ciertos bienes como el coche (vehículo propio), el ordenador y el acceso a internet, las condiciones de estudio y transporte escolar y el ingreso percibido por el hogar. Los resultados del modelo se pueden observar en la tabla 4.

**Tabla 4. Efectos marginales del modelo secuencial para los periodos de 2008 al 2016.**

	Secundaria	Media	Superior
Hombre	-0.0487*** (0.00205)	-0.0697*** (0.00305)	-0.101*** (0.00442)
Edad	0.000130 (0.000375)	0.0444*** (0.000598)	0.0192*** (0.000846)
Internet	0.0137*** (0.00259)	0.0322*** (0.00346)	0.0629*** (0.00555)
Computador	0.0495*** (0.00260)	0.0805*** (0.00383)	0.129*** (0.00584)
Carro	0.0289*** (0.00365)	0.0173*** (0.00432)	0.0713*** (0.00620)
Rural	-0.0759*** (0.00355)	-0.0224*** (0.00614)	-0.100*** (0.0105)
Ingresos Hogar (log)	0.0207*** (0.00124)	0.0194*** (0.00209)	0.0500*** (0.00300)
Personas por hogar	-0.00827*** (0.000457)	-0.0193*** (0.000897)	-0.0374*** 0.00133
Primaria (Padre)	0.0380*** (0.00378)	0.0659*** (0.00821)	0.0528*** (0.0124)
Secundaria (Padre)	0.0671*** (0.00461)	0.0875*** (0.00880)	0.0907*** (0.0133)
Media (Padre)	0.0729*** (0.00513)	0.106*** (0.00886)	0.127*** (0.0135)
Técnico/Tecnológico (Padre)	0.0852*** (0.00933)	0.117*** (0.0109)	0.180*** (0.0166)

---

Universitario (Padre)	0.0844*** (0.00892)	0.0898*** (0.0103)	0.181*** (0.0158)
Posgrado (Padre)	0.0717*** (0.0202)	0.0936*** (0.0130)	0.178*** (0.0207)
Primaria (Madre)	0.0534*** (0.00445)	0.0692*** (0.00912)	0.0747*** (0.0137)
Secundaria (Madre)	0.0930*** (0.00510)	0.0974*** (0.00958)	0.135*** (0.0144)
Media (Madre)	0.112*** (0.00520)	0.136*** (0.00965)	0.177*** (0.0147)
Técnico/Tecnológico (Madre)	0.111*** (0.00777)	0.130*** (0.0111)	0.212*** (0.0173)
Universitario (Madre)	0.122*** (0.00770)	0.102*** (0.0113)	0.224*** (0.0175)
Posgrado (Madre)	0.133*** (0.00987)	0.116*** (0.0142)	0.225*** (0.0229)
Atlántico	0.0270*** (0.00616)	0.0502*** (0.00882)	-0.0191 (0.0124)
Bolívar	0.0257*** (0.00656)	0.0455*** (0.00924)	0.0798*** (0.0133)
Boyacá	0.0145* (0.00696)	0.0577*** (0.00984)	0.0933*** (0.0140)
Caldas	-0.0108 (0.00729)	0.0155 (0.0101)	-0.0338* (0.0132)
Caquetá	-0.0244*** (0.00739)	0.00529 (0.0107)	0.0229 (0.0166)
Cauca	0.00855 (0.00653)	0.0386*** (0.00969)	0.105*** (0.0135)
Cesar	0.0166* (0.00665)	0.0532*** (0.00925)	0.0659*** (0.0139)
Córdoba	0.0233*** (0.00626)	0.0604*** (0.00929)	-0.0121 (0.0136)
Cundinamarca	0.0174* (0.00688)	0.0246** (0.00883)	0.0455*** (0.0122)
Chocó	0.0214** (0.00726)	0.0456*** (0.0109)	0.0660*** (0.0178)
Huila	-0.0140* (0.00704)	0.00184 (0.0100)	0.0405** (0.0139)
La Guajira	0.00744 (0.00684)	0.0390*** (0.00942)	0.0839*** (0.0143)

---

Magdalena	0.0214** (0.00731)	0.0452*** (0.00971)	-0.0545*** (0.0139)
Meta	0.0101 (0.00746)	0.0120 (0.0103)	-0.125*** (0.0143)
Nariño	-0.0119 (0.00627)	0.0360*** (0.00964)	0.0140 (0.0132)
Norte de Santander	-0.0342*** (0.00692)	0.0267** (0.0100)	0.0241 (0.0143)
Quindío	0.00730 (0.00713)	0.00738 (0.0102)	-0.0136 (0.0143)
Risaralda	-0.0170* (0.00842)	-0.0132 (0.0108)	-0.0774*** (0.0147)
Santander	-0.0141 (0.00720)	0.0225* (0.00986)	-0.00128 (0.0133)
Sucre	0.0225*** (0.00582)	0.0455*** (0.00893)	0.0742*** (0.0132)
Tolima	0.00653 (0.00725)	0.0348*** (0.0101)	0.0111 (0.0139)
Valle del Cauca	0.0125 (0.00697)	-0.00449 (0.00981)	-0.117*** (0.0129)
1961-1965	0.0937*** (0.0201)	0.0265*** (0.00251)	0.0854*** (0.0205)
1966-1970	0.0879*** (0.0203)	0.0818*** (0.00414)	0.136*** (0.0185)
1971-1975	0.131*** (0.0228)	0.191*** (0.00664)	0.229*** (0.0177)
1976-1980	0.155*** (0.0252)	0.410*** (0.00868)	0.332*** (0.0172)
1981-1985	0.179*** (0.0270)	0.630*** (0.00644)	0.424*** (0.0180)
1986-1990	0.194*** (0.0285)	0.814*** (0.00330)	0.487*** (0.0197)
1991-1995	0.197*** (0.0296)	0.759*** (0.00243)	0.426*** (0.0217)
<b>Observaciones</b>	<b>55,521</b>	<b>50,922</b>	<b>38,457</b>

Errores estándar entre paréntesis. \* p < 0.05, \*\* p < 0.01, \*\*\* p < 0.001

Fuente: Elaboración propia a partir de la GEIH (2008-2016).

La tabla 4 muestra que las variables son estadísticamente significativas en el caso de las variables de edad, ingresos, educación de los padres y cohortes. Algunas variables regionales correspondientes a departamentos no fueron estadísticamente significativas.

Los resultados de la estimación muestran que los hombres tienen menor probabilidad de pasar de un nivel educativo al otro y que estas probabilidades se van reduciendo en los niveles de educación superior. De esta forma, ser hombre disminuye la probabilidad de pasar a secundaria en 5 puntos porcentuales frente a la probabilidad de hacerlo que tuviera si fuese mujer. La probabilidad de superar la educación media se reduce aún más (en 7 puntos) pero el mayor efecto por género se presenta cuando se analiza la probabilidad de alcanzar la educación superior ya que ésta se reduce en 10 puntos porcentuales cuando el estudiante es hombre, esto es, más del doble que lo que se reduce la de alcanzar secundaria.

La edad del estudiante tiene un efecto positivo para el progreso escolar, disminuyendo la magnitud de su impacto para el último nivel educativo. Con cada año adicional el estudiante incrementa su probabilidad de superar el nivel educativo en 4 puntos porcentuales para educación media y en 2 puntos para educación superior. Esto puede implicar que las edades demasiado bajas podrían afectar el progreso escolar.

Las condiciones del hogar afectan de forma significativa el progreso escolar ya que poseer un ordenador, internet o coche incrementa la probabilidad de alcanzar un nivel educativo superior como es el universitario. Es así como la existencia de internet en el hogar tiene como efecto el cambio de 1 punto porcentual en primaria a 6 puntos porcentuales sobre la probabilidad de alcanzar un nivel de educación superior. El efecto de poseer un ordenador es más fuerte todavía, pasando de menos de 5 a 12 puntos porcentuales en la transición a secundaria hasta la transición por la educación superior. De lo anterior, se puede deducir que la tecnología hoy en día se ha convertido en un factor relevante para el estudio de los jóvenes, en especial la capacidad de acceder a un ordenador con internet. Por otro lado, el poseer transporte propio como coche también afecta positivamente el progreso del estudiante, teniendo su mayor efecto en el paso de la educación superior.

La ubicación geográfica del hogar es importante ya que si se trata de un hogar rural la probabilidad de pasar al siguiente nivel educativo se reduce en todos los casos. Sin embargo, su efecto es mayor para el salto entre primaria y secundaria (7 puntos porcentuales) y cuando se decide alcanzar el nivel de educación superior (10 puntos), mientras que el efecto que tiene sobre la probabilidad de pasar a educación media es tan solo de 2 puntos porcentuales, frente a la situación en la que el hogar es urbano.

Los ingresos del hogar muestran que a mayor ingreso mayor es el nivel de educación, de esta forma un incremento de un 1% en los ingresos del hogar incrementa la probabilidad de llegar a la educación universitaria en 5 puntos porcentuales. Para la educación secundaria y media el cambio en la probabilidad de avanzar es de alrededor de 2 puntos porcentuales.

Un factor que genera efectos negativos sobre la probabilidad de pasar al siguiente nivel educativo es el número de personas que se encuentran en el hogar, dado que su efecto es mayor a medida que el estudiante avanza en su educación. Una persona adicional en el hogar disminuye la probabilidad de avanzar a la educación secundaria en 0.9 puntos porcentuales, a la educación media en 2 puntos porcentuales y en 4 puntos la de avanzar a educación superior.

Las características de los padres siguen siendo influyentes en las decisiones de progreso escolar. Por parte del padre se puede apreciar que el nivel educativo del mismo es significativo para el avance en todos los niveles de educación de su hijo. Es decir que, según sea el nivel educativo del padre, se afecta la decisión de progreso escolar del hijo. Esto sucede también para el caso de la madre, en el que todos los niveles de educación son significativos e incluso tienen mayor efecto que el del padre, en especial para la cola superior. De esta forma, cuando el padre ha alcanzado solamente la primaria la probabilidad de que el hijo alcance secundaria se incrementa en 4 puntos porcentuales con respecto a la situación en la que el padre no tiene ningún nivel educativo. Pero el incremento en esta probabilidad disminuye para la transición a educación media y superior siendo sólo de 7 y 5 puntos porcentuales respectivamente. El efecto de la

educación de la madre es el doble para el paso a la educación secundaria y similar al del padre con educación primaria para los otros dos niveles. De igual forma, se puede observar que si el padre posee educación secundaria la probabilidad del hijo de alcanzar secundaria se incrementa en 7 puntos porcentuales con respecto a un padre sin educación y en 9 puntos porcentuales cuando se trata de la probabilidad de alcanzar la educación media y superior. En el caso del efecto de la educación de la madre, ésta tiene un impacto mayor que la del padre para cada transición, siendo siempre una y media veces más grandes que el del padre con el mismo nivel educativo: secundaria. Cuando el padre ha alcanzado la educación media, esto es, que ha completado toda la educación preuniversitaria (educación obligatoria), la probabilidad de que sus hijos alcancen al menos su mismo nivel se incrementa en 10 puntos porcentuales con respecto a la probabilidad que tendrían los hijos de un padre no educado. La madre con educación media, por su parte, tiene un mayor impacto que el padre con el mismo nivel de educación ya que el efecto crece con cada nivel educativo, pasando de 11 hasta 18 puntos porcentuales adicionales. Cuando ambos padres tienen educación superior, las probabilidades de que sus hijos alcancen niveles educativos altos son mayores: la probabilidad que los hijos de individuos con educación superior pasen a secundaria es de 8 puntos porcentuales, que alcancen media es de 9 y que logren niveles como los de sus padres de educación superior es de 18, siempre con respecto a los hijos de los padres menos educados.

Geográficamente, existen diferencias en torno a alcanzar un determinado nivel de educación con respecto al departamento base. En Bolívar, Boyacá, Cauca, Cesar, Cundinamarca, Choco, Huila, La Guajira y Sucre la probabilidad de alcanzar educación universitaria es mayor que la probabilidad de alcanzar educación primaria y secundaria. En departamentos como Caldas, Meta y Valle del Cauca la probabilidad de llegar al nivel de educación universitario es inferior con respecto al departamento base.

Finalmente, la incorporación de cohortes muestra que existen diferencias para cada una de las cohortes de nacimiento. Las cohortes de antes de los 70's tenían menores probabilidades de llegar a tener educación secundaria que las cohortes después de los años 70's. Para las cohortes más jóvenes el incremento en la educación media de alrededor de 20 puntos porcentuales por cohorte. El mayor salto se observa entre la cohorte de 1971-1975 a la cohorte de 1976-1980 donde la probabilidad de superar la educación media es más del doble entre éstas.

## **7. Conclusiones.**

La movilidad intergeneracional en la educación ha sido considerada como uno de los principales mecanismos de transmisión de desigualdad en una sociedad. En países en vía de desarrollo como Colombia, las condiciones institucionales, culturales y del entorno socioeconómico de un joven aún tienen demasiada influencia sobre su progreso escolar, en especial en los niveles de educación no obligatoria. Es así como, este artículo analiza el peso de estas características del entorno familiar en las decisiones de progreso escolar de los estudiantes, concentrándose en la influencia de la educación de sus padres sobre sus hijos. De esta forma, los resultados aquí encontrados muestran que en efecto existen variables que tienen un gran impacto en el avance de los jóvenes a lo largo de los niveles educativos del sistema escolar colombiano.

Las condiciones del hogar afectan en mayor medida la probabilidad de alcanzar la educación superior. Esto quiere decir que la carencia de alguna de estas características hace más probable que el estudiante no avance más allá de educación media. El análisis por cohortes permite observar que con el tiempo las probabilidades de avanzar entre los niveles educativos se han ido incrementando, teniendo un fuerte cambio a partir de los años 70's.

El nivel educativo alcanzado por los padres es importante a la hora de establecer la posibilidad de sus hijos de progresar en el sistema educativo. Padres que al menos hayan terminado la educación preuniversitaria tienen hijos con buenas probabilidades de alcanzar su mismo nivel educativo y de avanzar a la educación superior. No obstante, tener padres con

educación superior es determinante para el estudiante, ya que aumenta la probabilidad de que se alcanzará la educación superior.

A pesar de los esfuerzos del gobierno por impulsar la educación en las zonas rurales, los resultados confirman que siguen presentándose diferencias con respecto a aquellos estudiantes que viven en zonas urbanas por factores potencialmente institucionales y culturales que permean las decisiones familiares de educación. Es menos probable que los estudiantes en las zonas rurales alcancen la educación secundaria, aunque una vez superado este nivel sus condiciones no tienen tanta influencia en su decisión de seguir a la educación media pero sí la tienen en la decisión de alcanzar la educación superior.

Es claro que el progreso en el sistema educativo es un proceso que aún depende mucho de las características de los padres, en particular de su nivel de estudios. Es por ello que políticas de mejoramiento y expansión de la oferta educativa y subsidios a las familias de escasos recursos, aumenta la probabilidad de alcanzar niveles de educación superior. Por lo tanto, la inversión en educación de los jóvenes de hoy es una forma de apalancar el progreso educativo de sus hijos y de los hijos de sus hijos.

Finalmente, aunque es claro que se hace necesario un impulso al género masculino en el avance dentro del sistema educativo (debido a que presenta menores probabilidades de lograrlo que el género femenino), también es claro que apoyar a las mujeres en su educación es una política mucho más efectiva para impulsar a los hijos de esta generación en el mejoramiento del nivel educativo. Políticas públicas que fomenten la educación superior en cualquiera de sus formas (técnico, tecnológico y universitario) son fuertes mecanismos para garantizar mayores niveles de educación en la población colombiana de hoy y de mañana.

## Referencias

- Ayala, C. (2015). *Movilidad educativa intergeneracional en mujeres cabeza de familia para las áreas metropolitanas de Barranquilla, Bogotá, Cali y Medellín* (Tesis Doctoral, Universidad del Valle). Descargado de <http://hdl.handle.net/10893/7936>
- Baltazar, E.N., Astudillo, S.G., & Malaver, C. A. (2003). Movilidad social y transmisión de la pobreza en Bogotá. *Economía y Desarrollo*, 2(2), 119-156.
- Becker, G.S. (1964). *Human capital. A theoretical and empirical analysis, with special reference to education* (Vol 4) (No. 3 Pt. 2). National Bureau of Economic Research.
- Ben-Halima, B., Chusseau, N., & Hellier, J. (2014). Skill premia and intergenerational education mobility: The French case. *Economics of Education Review*, 39, 50-64.
- Bonilla, L. (2010). Movilidad intergeneracional en educación en las ciudades y regiones de Colombia. *Revista de Economía del Rosario*, 13(2), 191-233.
- Cameron, S., & Heckman, J. (1998). Life Cycle Schooling and Dynamic Selection Bias: Models and Evidence for Five Cohorts of American Males. *Journal of Political Economy*, 106(2), 262-333.
- Cameron, S. V., & Heckman, J. J. (2001). The Dynamics of Educational Attainment for Black, Hispanic, and White Males. *Journal of Political Economy*, 109(3), 455-499.
- Cartagena, K. (2005). Movilidad intergeneracional en Colombia. *Revista ESPE*, 1(51), 208-261.

- Chau, T.W. (2012). Intergenerational income mobility revisited. Estimation with an income dynamic model with heterogeneous age profile. *Economics Letters*, 117(3), 770-773.
- Galvis, L., & Roca, A.M. (2014). Aspectos regionales de la movilidad social y la igualdad de oportunidades en Colombia. *Documentos de trabajo sobre Economía Regional*, 55. Descargado de <http://www.banrep.gov.co/publicaciones/pub{ }ec{ }reg4.htm>.
- González, C.G., Mora, J.J., y Albert, C. (2013). Determinantes de la demanda de educación universitaria en Colombia. *Revista de Economía Institucional*, 15, 169-194.
- González, C.G., Mora, J.J., & Cuadros, A.F. (2014). Oportunidades educativas y características familiares en Colombia: un análisis por cohortes. *Revista de Economía del Rosario*, 17(1), 157-187.
- Heckman, J. J., & Raut, L. K. (2016). Intergenerational Long Term Effects of Preschool Structural Estimates from a Discrete Dynamic Programming Model. *NBER Working Paper*, 191(19077), 164-175.
- Huebener, M. (2015). The role of paternal risk attitudes in long-run education outcomes and intergenerational mobility. *Economics of Education Review*, 47, 64-79.
- Iannelli, C., & Paterson, L. (2007). Education and social mobility in Scotland. *Research in Social Stratification and Mobility*, 25(3), 219-232.
- Kwenda, P., Ntuli, M., & Gwatidzo, T. (2015). Temporal developments in intergenerational transmission of education: Case for black South Africans. *Research in Social Stratification and Mobility*, 42, 96-113.
- Lillard, L.A., & Willis, R.J. (1994). Intergenerational Educational Mobility: Effects of Family and State in Malaysia. *The Journal of Human Resources*, 29(4), 1126-1166.
- Mediavilla, M., & Calero, J. (2010). Education Mobility in Latin America. A Study of Six Countries. *Revista Española de Educación Comparada (REEC)*, 16, 287-303.
- Mora, J.J, Caicedo, C., & González, C.G. (2017). La Duración del Desempleo de los Jóvenes y los “ninis” en Cali”. *Revista de Economía Institucional*, 19(37), 167-184.
- Morales, A. (2012). *Movilidad educativa intergeneracional por género en el Área Metropolitana de Cali ¿existen diferencias por cohortes?* (Tesis de grado). Universidad del Valle. Descargado de <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3708/4/CB-0460622.pdf>
- Moyano, M., & Galvis, L. (2014). ¿Oportunidades para el futuro?: la movilidad social de los adolescentes en Colombia. *Documentos de trabajo sobre economía regional y urbana*, 11. Banco de la República-Economía Regional.
- OCDE, Organización para la Cooperación del Desarrollo Económico (2016). *La educación en Colombia*. París: Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, Ed.
- PND, Plan Nacional de Desarrollo. (2015). *Plan Nacional de Desarrollo, Todos Por un Nuevo País 2014-2018*, 53(9).



- Qin, X., Wang, T., & Zhuang, C.C. (2016). Intergenerational transfer of human capital and its impact on income mobility: Evidence from China. *China Economic Review*, 38, 306-321.
- UNICEF, Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia. (2016). *Una oportunidad para cada niño*. Nueva York: División de Comunicaciones de UNICEF.
- Viáfara, C., Estacio, A., & González, L. (2010). Condición étnico-racial, género y movilidad social en Bogotá, Cali y el agregado de las trece áreas metropolitanas en Colombia: un análisis descriptivo y econométrico. *Revista Sociedad y Economía*, 18, 113-136.
- Viáfara C., & López, A. (2011). Efectos de la raza y el sexo en el logro educativo y estatus ocupacional en el primer empleo en la ciudad de Cali Colombia. *Revista Sociedad y Economía*, 11, 66-95.



# Elección del consumidor y efectos de red locales en el mercado de telecomunicaciones móviles de Colombia

CORREA, ALEXANDER

Doctorado en Modelado en Política y Gestión Pública

Universidad Jorge Tadeo Lozano

Correo electrónico: alexander.correa@utadeo.edu.co

## RESUMEN

El objetivo de este artículo es analizar el grado de los efectos de red en el mercado móvil de telecomunicaciones en Colombia, e identificar otros determinantes de la elección del consumidor basándose en una encuesta de usos y hábitos realizada por el Centro Nacional de Consultoría para la Comisión de Regulación de Comunicaciones en el año 2016. A partir de esa encuesta se realizó este estudio que muestra que no existen diferencias regionales en la adopción de operadores en Colombia, y que el atractivo de los diferentes operadores depende del tamaño total del operador al cual se quiera suscribir el usuario. Este hallazgo significa que el mercado relevante se debe definir a nivel nacional y que las estrategias de precios de los operadores deben ser de carácter nacional y no regional. También se encuentra que en la elección de operador son determinantes claves el sexo de las personas, la edad, el estrato, el gasto mensual en servicios móviles, el tipo de plan y el número de llamadas que se realizan. Por último, los usuarios prefieren al operador que les brinde la mayor experiencia por lo cual es un determinante clave a trabajar por parte de los operadores de servicios móviles en Colombia.

**Palabras clave:** telecomunicaciones móviles, efectos de red, análisis de elección discreta, elección de los consumidores.

**Clasificación JEL:** L96; C25; L40; B41.

**MSC2010:** 62P20; 91B82.

# Consumer choice and local network effects in the Colombian mobile telecommunications market

## ABSTRACT

The objective of this article is to analyze the degree of network effects in the mobile telecommunications market in Colombia, and identify other determinants of consumer choice based on a survey of uses and habits carried out by the National Consulting Center for the Commission of Regulation of Communications in 2016. Based on this survey, this study was conducted which shows that there are no regional differences in the adoption of operators in Colombia, and that the attractiveness of the different operators depends on the total size of the operator to which the user wishes to subscribe. This finding means that consumers are not likely to be affected by other people's choices within their local area but rather by the overall size of the network. The relevant market must be defined at the national level and the pricing strategies of the operators must be national and not regional. It is also found that in the choice of operator key factors are gender, the age, the stratum, the monthly expenditure on mobile services, the type of plan and the number of calls made. Finally, users prefer the operator that offers them the greatest experience, which is why it is a key determinant to work for operators of mobile services in Colombia.

**Keywords:** mobile telecommunications, network effects, discrete choice analysis, consumer choice

**JEL classification:** L96; C25; L40; B41.

**MSC2010:** 62P20; 91B82.



## 1. Introducción.

Los mercados de telecomunicaciones exhiben fuertes externalidades de red, haciendo que las demandas de los consumidores individuales sean interdependientes (Rohlfis, 1974). Aunque los efectos de red pueden promover la adopción de servicios de telecomunicaciones, estos también generan preocupaciones competitivas. En mercados con demandas interdependientes, se espera que los consumidores elijan el operador de mayor tamaño con el fin de beneficiarse de las externalidades de red, de manera tal que el mercado puede inclinarse hacia una firma (Katz & Shapiro, 1985, 1994). Sin compatibilidad de red, la tecnología superior de un nuevo entrante puede no ser suficiente para competir con la empresa de mayor participación de mercado ya que los costos de cambio pueden atrapar a los consumidores incluso si la empresa de mayor participación de mercado tiene una tecnología o servicio inferiores (Katz & Shapiro, 1986; Arthur, 1989; Gandal, 2002). Para prevenir la monopolización del mercado, se requiere que los operadores de telecomunicaciones se interconecten el uno con el otro (Armstrong, 1998).

Ya que los operadores móviles de telecomunicaciones se tienen que interconectar entre sí, un suscriptor de cualquier operador puede llamar a los suscriptores de cualquier otro operador. Sin embargo, ya que las llamadas al interior del operador (las conocidas llamadas on-net) son por lo general cobradas a un precio menor que las llamadas por fuera del operador (conocidas como llamadas off-net), existe menos que compatibilidad total en un sentido económico, aunque los operadores son técnicamente compatibles. Así, la diferenciación entre llamadas on-net y off-net induce lo que se conoce como los efectos de red mediados por la tarifa (Laffont, Rey & Tirole, 1998; Hoerning, 2007; Haucap & Heimeshoff, 2011). La magnitud del diferencial on-net / off-net, por lo tanto, determina el grado de (in-)compatibilidad económica y, consecuentemente, también el grado de sustituibilidad y competencia entre operadores.

No obstante, aunque sin las externalidades de red mediadas por la tarifa el tamaño de un operador puede afectar a los consumidores, ya que el tamaño del operador puede servir como una señal de cualidad (Kim & Kwon, 2003) cuando los consumidores no pueden distinguir las características de calidad de los competidores. Junto con los efectos de tamaño, se espera que los consumidores tomen en consideración otros factores tales como el costo, cobertura, y calidad del servicio al cliente, el rango de servicios (e.g. SMS, correo de voz, y otros servicios de valor agregado). Entre otros, la cobertura de los operadores móviles puede ser visto como una parte más sustancial de la provisión del servicio, ya que las llamadas pueden ser terminadas si el área es cubierta por un operador. Valletti (1999) argumenta que no solo el tamaño del operador, sino también su cobertura puede ser vista como un indicador de calidad para servicios móviles cuando los consumidores son lo suficientemente móviles. Sin embargo, los operadores serán considerados homogéneos en términos de cobertura si la mayor parte de los consumidores están localizados en un área estrecha que está cubierta por todos los operadores competidores, de manera tal que la competencia en precios es importante. De manera general, la competencia a través de tarifas diferenciadas típicamente caracteriza el comportamiento de las firmas en entornos competitivos. También debe ser señalado que el grado de competencia en precios también se ve afectado por la magnitud de costos de cambio eventuales (Klemperer, 1987; Suleymanova & Wey, 2011).

Externalidades por el lado de la demanda en industrias con efectos de red pueden dar surgimiento a ventajas importantes para las empresas de mayor participación de mercado que cuentan con una base amplia de clientes. Tal como lo muestran los modelos teóricos de efectos de red, mercados con efectos de red pueden fácilmente inclinarse de manera tal que una firma con una participación de mercado relativamente alta captura todos los consumidores haciendo que los competidores tengan que salir del mercado. Existen ejemplos como Virgin Mobile en Perú o del operador Uff en Colombia que salieron del mercado, en parte debido al agresiva estrategia comercial de las empresas de mayor participación de mercado.

En este contexto, los objetivos de este artículo son: (a) analizar el grado de los efectos de red en el mercado móvil en Colombia y (b) identificar otros determinantes de la elección por parte de los consumidores de operador de servicios móviles, basándonos en una encuesta realizada por el regulador de comunicaciones colombiano a nivel nacional en 2016.

Este artículo proporciona un análisis empírico de los principales determinantes de la elección del consumidor en el mercado de telecomunicaciones móvil colombiano. El papel que la cobertura, los precios y las características del consumidor desempeñan para la elección individual de operador móvil son analizados junto con los efectos de red a nivel regional y nacional. Para este propósito, la siguiente sección ofrece una revisión de estudios empíricos que se enfocan en efectos de red en mercados de telecomunicaciones móviles. La sección 3 brevemente resume el desarrollo del mercado de telecomunicaciones móvil en Colombia. La metodología empírica es descrita en la sección 4. La descripción de la información estadística es provista en la sección 5. La sección 6 reporta los resultados empíricos y la sección 7 presenta las principales conclusiones.

## **2. Revisión de la literatura.**

El término efectos de red generalmente se refiere a situaciones donde la valoración de un bien por parte de los consumidores depende del número de usuarios de ese bien (Farrel & Klemperer, 2007). Las disposiciones a pagar individuales podrían ser dependientes del tamaño de la red ya sea de forma directa o indirecta. Los efectos de red indirectos se presentan por lo general en bienes de comunicación o servicios de información donde un número de nodos de red físicos (suscriptores) influye en la utilidad de un usuario dado (Economides, 1996). Los efectos de red indirectos se presentan en el caso de bienes con estructura hardware/software, donde los usuarios del hardware pueden verse influenciados por las economías de escala del lado de la oferta en los componentes del software (Katz & Shapiro, 1985). La disposición a pagar de un usuario por tal bien aumenta con la creciente disponibilidad y variedad de elementos de software complementarios. Por esta razón, los efectos de red indirectos son usualmente mediados por el mercado<sup>1</sup>.

En años recientes, se ha generado una atención creciente a los llamados efectos locales de red. Éste es otro tipo de externalidad de red directa que permite la posibilidad que los beneficios de red obtenidos por miembros particulares podrían no ser homogéneos a lo largo de todos los miembros de la red (Maicas & Sese, 2011). De hecho, externalidades localizadas son típicas en telecomunicaciones o redes sociales donde el principal lugar de efectos de red está usualmente restringido a un grupo relativamente pequeño de gente con la cual el suscriptor tiene los lazos sociales más cercanos, tales como familia y amigos. Varios estudios han mostrado que en mercados de telecomunicaciones el tamaño absoluto de la red será obviamente una medida inapropiada de los beneficios de la red (Corocher & Zirulia, 2009; Czajkowski & Sobolewski, 2011; Karacuka, Catik & Haucap, 2013). Los efectos de red alteran de manera fundamental el modo en que los mercados operan, potencialmente llevando a muchos resultados no esperados que tienen implicaciones importantes desde el punto de vista gerencial y del derecho de la competencia. Por ejemplo, industrias con efectos de red por lo general exhiben exceso de inercia antes de que se consiga una masa crítica de adoptantes, y después exceso de dinámica, posiblemente llevando a un equilibrio de mercado del tipo el ganador se lleva todo. Una extensiva revisión de la teoría de efectos de red puede ser vista en Farrell y Klemperer (2007).

---

<sup>1</sup> Cuanto más grande sea la red de un hardware en particular (por ejemplo, teléfonos inteligentes con un sistema operativo particular), más complementos de software nuevo (aplicaciones compatibles con este sistema operativo) serán producidos, lo que lleva a mejores condiciones de intercambio y una variedad creciente de producto.

La literatura sobre efectos de red en telecomunicaciones es bastante extensa. La misma adopta varias aproximaciones de modelación y diferentes medidas de efectos de red. Varios estudios, tales como Birke y Swann (2006) y Kim y Kwon (2003), utilizan modelos de elección discreta en elecciones actuales de suscripción para estudiar el papel de los efectos de red en el comportamiento del consumidor. Kim y Kwon (2003) encontraron una relación positiva entre la probabilidad de elección del operador móvil y el número acumulado de sus suscriptores. Aunque positivo, el impacto de efectos de red sobre las elecciones actuales de suscriptores coreanos resultó ser moderado en su estudio, comparado a precio y efectos de marca. Birke y Swann (2006) examinan los efectos de red tanto a nivel agregado como individual y encontraron evidencia de que el tamaño agregado de la red y las decisiones hechas por los miembros del hogar influyen en la elección individual de operador móvil; sin embargo, la influencia de pares es más fuerte. El análisis de la demanda para llamadas on-net y off-net sugiere que una alta participación de llamadas on-net será mantenida incluso si el operador deja de ofrecer descuentos para estas llamadas. Esta sugerencia está en vía opuesta con la literatura teórica, que define efectos de red directos en telecomunicaciones como externalidades inducidas por la discriminación de precios basada en la terminación de llamadas (Laffont, Rey & Tirole, 1998). En otras palabras, se asume que los efectos de red son puramente pecuniarios y desaparecen si operadores interconectados, técnicamente compatibles, dejan de discriminar precios.

Birke y Swann (2006) argumentan que los suscriptores pueden hacer una cantidad desproporcionadamente alta de llamadas on-net simplemente porque ellos coordinaron su elección de operador en el pasado. Sin embargo, su punto es válido únicamente si romper con la coordinación no rentable es costosa, como sucede frecuentemente en telecomunicaciones debido a costos de cambio significativos. Este ejemplo ilustra que modelos que ignoran los costos de cambio o los efectos de red estarán incorrectamente especificados.

Otros estudios utilizan el modelamiento de la difusión. De manera notable, Liikanen, Stoneman y Toivanen (2004) encontraron efectos de red positivos medidos a través de suscripciones acumuladas entre generaciones de teléfonos móviles análogos y digitales, al igual que con telefonía móvil 2G. Fu (2004) modela el flujo de suscriptores nuevos en el mercado móvil coreano como una función del nivel agregado de adopción y los precios usando información de datos panel al nivel del operador. Este autor encuentra que en la presencia de descuentos on-net y desbalances en el tamaño de la red, los operadores más grandes adquieren una participación de mercado más alta. Este efecto es sintomático de fuertes efectos de red y lleva a la marginalización de los operadores más pequeños.

Doganoglu y Grzybowski (2007) utilizan información al nivel del operador para Alemania y modelan la demanda para nuevas suscripciones con los precios y el tamaño de la base instalada de suscriptores. Ellos obtienen una elasticidad positiva de la demanda con respecto al tamaño de la base instalada, lo cual confirma fuertes efectos de red (marginales). Adicionalmente, Grajek (2010) usa información al nivel de operador para Polonia, para modelar curvas de difusión como una función de los precios y la base instalada de suscriptores. Este autor estima efectos de red propios y cruzados y muestra que, a pesar de interconexión técnica total, la compatibilidad económica entre diferentes operadores es muy baja. Este resultado indica que los suscriptores de un operador dado valoran las interacciones con suscriptores de otros operadores considerablemente menos que con las interacciones del operador propio. Grajek argumenta que efectos de red fuertes están presentes al nivel de operador y sustancialmente reducen la elasticidad de la demanda.

Varios estudios abordan el tema de efectos locales en telecomunicaciones. Un estudio por parte de Corrocher y Zirulia (2009) aplica un análisis de componentes principales para identificar los principales patrones de adopción de operadores móviles en una muestra de suscriptores

italianos. El estudio identifica tres clústeres de demanda de usuarios orientados hacia planes de tarifas, equipos móviles y distribución de redes sociales. Los clústeres de redes sociales están compuestos por consumidores para quienes la familia y los amigos que se suscriben al mismo operador es el criterio de elección más importante. Los autores investigan los factores que caracterizan a los miembros de este clúster y encuentran que los suscriptores orientados por la red social tienen perfiles de uso intensivo y seleccionan de manera cuidadosa los operadores para minimizar su gasto en servicios móviles.

Maicas, Polo and Sese (2009) aplican el marco de utilidad aleatoria para modelar las elecciones de suscripción de una muestra de suscriptores italianos con un enfoque particular en costos de cambio y efectos de red. Ellos encuentran que los efectos de red locales (medidos por el porcentaje de participación de familia y amigos en la misma red) son el principal determinante de elección. La valoración de los efectos de red aumenta con la intensidad de uso, similar a Corrocher y Zirulia (2009), y se reduce con la longitud de la relación y el número de productos comprados al operador. Los costos de cambio son interpretados como una desutilidad asociada con cambiar el operador actual y medidos por variables dicótomas específicas al operador indicando el comportamiento de cambio. Maicas et al. (2009) encuentran que los costos de cambio difieren considerablemente a lo largo de operadores y que el comportamiento de cambio es explicado por el tipo de contrato y características de la relación con el operador. Consumidores pospago que compran más productos tienden a cambiarse de manera más frecuente porque ellos tienen mayores incentivos a optimizar sus facturas. En el modelo de Maicas et al. (2009), el coeficiente para el precio de los planes móviles (aproximado a través del ARPU) es pequeño e insignificante, lo que es un resultado inesperado y señala algunas de las deficiencias con los datos o con la medida de estos.

Sobolewski y Czajkowski (2012) aplican un experimento de elección discreta para modelar la elección de operador entre suscriptores polacos con un énfasis particular en efectos de red locales. Ellos clasifican las interacciones del suscriptor en tres subconjuntos y encuentran que los efectos de red son fuertes para miembros de la familia que para otro tipo de conexiones menos fuertes (amigos). Interacciones on-net no tan frecuentes o incidentales no generan ninguna externalidad positiva. Considerable heterogeneidad de las preferencias fue capturada por medio de parámetros aleatorios logit y explicada por las características del consumidor. Por ejemplo, la sensibilidad de los efectos de red es determinada por la participación actual de familia y amigos en la misma red y la sensibilidad de precios es determinada por el ingreso del suscriptor.

Karacuka et al. (2013) investigaron los efectos locales en Turquía. Ellos aplican un marco de logit multinomial de elecciones actuales reportadas por una gran muestra de suscriptores turcos. Ni las participaciones de mercado a nivel nacional ni las tarifas explican las elecciones actuales de los suscriptores. Las participaciones de mercado regional fueron los únicos determinantes significativos de elección entre los factores específicos al operador. Esta interesante medida tiende a soportar la idea de la existencia de efectos de red locales si ellos coinciden con interacciones frecuentes cara a cara con gente en proximidad geográfica.

Aunque todos estos estudios han mostrado resultados importantes con respecto a la toma de decisiones individuales y los efectos de las redes sociales, estos análisis han estado restringidos a interacciones dentro de familias y amigos. Los análisis presentados en este artículo se enfocarán en efectos de red locales o regionales, tomando como referencia que la participación de mercado de los operadores cambia a lo largo de regiones. Por lo tanto, el nivel de efectos de red analizados a continuación está en un nivel intermedio entre efectos de red globales y efectos de red muy locales como los de familia y amigos. Antes de presentar este análisis, sin embargo, es útil introducir algunos aspectos claves del mercado de telecomunicaciones móvil de Colombia.

### **3. Mercado de telecomunicaciones móvil en Colombia.**

#### **3.1. Estructura nacional del mercado.**

Las telecomunicaciones en Colombia fueron monopolio del Estado hasta comienzos de los años noventa, cuando se implementaron las primeras redes de telefonía celular y el Gobierno dio licencias para que empresas privadas prestadoras de este servicio empezaran a operar en el país. Con la pérdida de exclusividad del Estado en las telecomunicaciones también surgieron empresas prestadoras de telefonía nacional de larga distancia como ETB y EPM. El servicio estuvo inicialmente dividido en tres zonas de cobertura: oriente, occidente y costa caribe. Al finalizar la década de los noventa y principios del siglo XXI se realizaron varias adquisiciones y fusiones en el sector, y a finales de la década pasada sólo quedaron dos compañías prestadoras del servicio de telefonía móvil: Comcel y BellSouth, actualmente conocidas como Claro y Movistar. En 2003 surge Colombia Móvil, un consorcio entre ETB y EPM, que salió al mercado bajo la marca OLA convirtiéndose inicialmente en una gran competencia para las empresas ya consolidadas debido a que los precios ofrecidos eran significativamente más bajos que los de la competencia directa; sin embargo, este gran éxito inicial se convirtió en un problema posterior, ya que la nueva empresa no contaba con la infraestructura adecuada para soportar la gran cantidad de usuarios que logró durante su penetración en el mercado.

En los años que siguieron al 2003, continuaron las movidas empresariales en el sector. En 2004 BellSouth decide salir de sus operaciones en Latinoamérica siendo adquirida por la empresa española Telefónica, que opera en la región bajo la marca Movistar. En 2006, tras algunos problemas, Colombia Móvil ve la necesidad de un nuevo socio estratégico y vende a la empresa Millicom, más del 50% de las acciones de la compañía, reemplazando la marca OLA por TIGO. Ese mismo año también entra a participar en el mercado la empresa UNE, que es fundada por el Grupo EPM buscando tener una empresa dedicada exclusivamente a las telecomunicaciones. Además del papel desempeñado por las empresas en el desarrollo de la telefonía móvil, el avance tecnológico también ha sido un factor determinante para que surjan nuevos actores en este mercado. Es así como en el año 2008 se otorgaron las licencias a Comcel, Tigo y Movistar para operar bajo la red 3G, que para el momento marcaba un gran avance en términos de velocidad y servicios de datos complementando la oferta de servicios móviles. Posteriormente en el 2010 se dan dos sucesos importantes: por un lado, entran a la competencia operadores móviles virtuales como UFF que utilizaría la red de TIGO; por otro lado, UNE gana la concesión de la licencia para ofrecer servicios de 4G, que es significativamente más rápido que la red 3G, sin embargo, es hasta el año 2012 cuando UNE ya habiendo adecuado su infraestructura empieza a hacer uso de esa licencia. Por otra parte, en los últimos años se ha visto una tendencia creciente por parte de los operadores en unificar la oferta de servicios de telefonía móvil con los servicios de telefonía fija e internet, lo que es conocido como servicios cuatro-play que incluye telefonía local, televisión, internet de banda ancha y telefonía móvil.

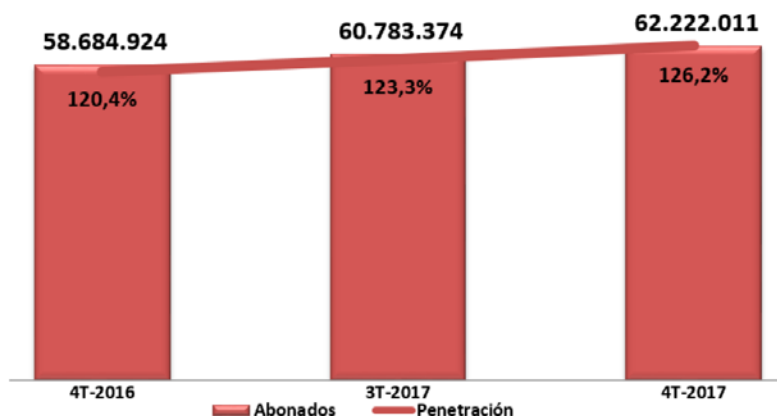
Para finales de 2017 Colombia contaba con cuatro operadores de red (es decir, con infraestructura propia) y cuatro operadores móviles virtuales. Los cuatro operadores de red son Claro, Movistar, Tigo y Avantel. Al término del cuarto trimestre de 2017, el número de abonados del servicio de telefonía móvil en Colombia alcanzó un total de 62 millones y un índice de penetración del 126%, presentando un aumento de 6 puntos porcentuales con relación al índice del mismo trimestre del año 2016, el cual se ubicó en 120% (Gráfico 1).

En los últimos años se ha incrementado el interés de varias empresas por participar en este sector y se ha visto el aumento de operadores móviles virtuales, tales como Virgin Mobile, ETB y Almacenes Éxito que, sin embargo, no han logrado cambiar la estructura del sector ya que como se ve en el Gráfico 2, Claro, Movistar y TIGO poseen más del 90% del mercado, dejando para los



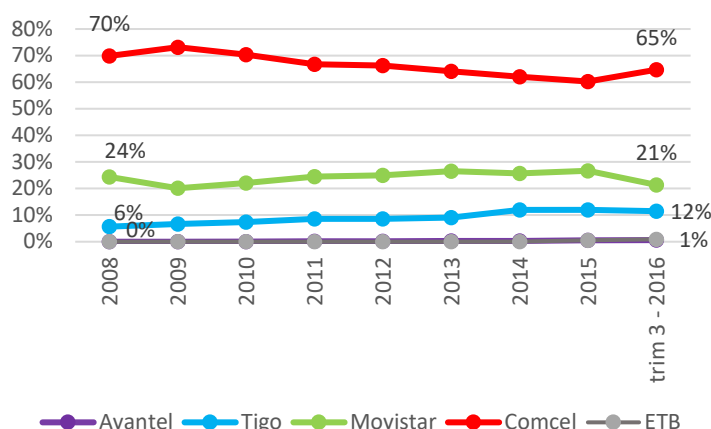
demás proveedores muy poca participación. Adicionalmente es evidente la concentración del mercado en manos del operador Claro con una cuota de más del 65%.

**Gráfico 1. Abonados al servicio de telefonía móvil IV trimestre de 2017.**



Fuente: Ministerio de las Tecnologías y la Información (MINTIC)

**Gráfico 2. Número de suscriptores por operador móvil al III trimestre de 2016.**



Fuente: Comisión Regulación Comunicaciones (CRC).

### 3.2. Diferencias regionales.

Aunque Claro es dominante a nivel nacional, se observan diferencias importantes a nivel regional cuando las participaciones de mercado regionales son consideradas (Tabla 1). Estas participaciones son obtenidas de la encuesta realizada por el Centro Nacional de Consultoría (2016).

La participación de mercado regional muestra que la dominancia de Claro es más fuerte en la región andina en el segmento de prepago, que también es el área con más densidad poblacional de Colombia. Aunque la participación de mercado de Claro es mayor que la de sus competidores en todas las regiones del país, se puede observar que el operador Tigo tiene una participación alta de 4,28% en la región Caribe en el segmento prepago. En tanto que en la región pacífica se encuentra una presencia relativamente más fuerte del operador Movistar, tanto en los segmentos prepago como pospago. Las diferencias en participaciones de mercado son relativamente

pequeñas como para pensar que puede haber diferentes operadores dominantes en cada región. Por lo tanto, se quiere verificar empíricamente la hipótesis de que existen efectos de red a nivel regional que harían que la competencia se defina a nivel local y que, por lo tanto, como implicación de política pública los mercados relevantes se tuvieran que definir regionalmente al igual que las posiciones de dominio. De igual manera, efectos de red regionales pueden llevar a los operadores a perseguir estrategias de mercado a nivel regional, tales como precios definidos al mercado regional en cuestión.

**Tabla 1. Participaciones regionales de los operadores móviles.**

	Claro		Movistar		Tigo		Avantel		Total	Total	Total	Total	Total
	Prepago	Postpago	Prepago	Postpago	Prepago	Postpago	Prepago	Postpago	Claro	Movistar	Tigo	Avantel	Total
Región Andina	27,60%	16,90%	3,12%	5,79%	5,59%	2,84%	0,35%	1,29%	44,57%	8,91%	8,43%	1,64%	63,55%
Región Caribe	7,60%	2,42%	0,70%	1,24%	4,28%	1,31%	0,02%	0,04%	10,02%	1,94%	5,59%	0,07%	17,62%
Región Pacífica	7,56%	3,41%	2,49%	2,84%	0,79%	0,55%	0,07%	0,17%	10,96%	5,33%	1,33%	0,24%	17,86%
Región Amazonía	0,33%	0,39%	0,02%	0,22%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	72,00%	0,24%	0,00%	0,00%	0,96%
<b>Total</b>	<b>43,15%</b>	<b>23,13%</b>	<b>6,33%</b>	<b>10,09%</b>	<b>10,66%</b>	<b>4,70%</b>	<b>0,44%</b>	<b>1,51%</b>	<b>66,28%</b>	<b>16,42%</b>	<b>15,35%</b>	<b>19,40%</b>	<b>100,00%</b>

Fuente: Centro Nacional de Consultoría y Comisión de Regulación de Comunicaciones (2016).

#### 4. Metodología.

La metodología empleada en este artículo está basada en el análisis de elección discreta, que ha sido liderada por McFadden (1974) y que ha sido ampliamente utilizada para modelar decisiones individuales. En esta sección, por lo tanto, se describirán diferentes modelos de respuesta multinomial, que es particularmente apropiada en modelos de comportamiento de elección donde las variables explicativas pueden incluir atributos de la elección de las alternativas (por ejemplo, costo), al igual que características de los individuos tomando las elecciones (tales como ingreso). En primer lugar, se explica el modelo multinomial logit en términos de las variables latentes fundamentales.

##### 4.1. Un modelo general de elección.

Suponiendo que  $Y_i$  representa una elección discreta entre  $J$  alternativas y  $U_{ij}$  representa el valor o utilidad de la  $j$  – esima elección del  $i$  – esimo individuo,  $U_{ij}$  será tratada como una variable aleatoria independiente con un componente sistemático  $\eta_{ij}$  y un componente aleatorio  $\epsilon_{ij}$  tal que:

$$U_{ij} = \eta_{ij} + \epsilon_{ij} \quad (1)$$

Se asume que los individuos actúan de modo racional, maximizando su utilidad. De esta forma, el sujeto  $i$  elegirá la alternativa  $j$  si  $U_{ij}$  es el mayor de  $U_{i1}, \dots, U_{ij}$ . Hay que señalar que la elección tiene un componente aleatorio, ya que ésta depende de utilidades aleatorias. La probabilidad de que el sujeto  $i$  elegirá la alternativa  $j$  es:

$$\pi_{ij} = Pr\{Y_i = j\} = Pr\{\max(U_{i1}, \dots, U_{ij}) = U_{ij}\} \quad (2)$$

se puede demostrar que si los términos de error  $\epsilon_{ij}$  tienen distribución de valor extremo tipo I con densidad:

$$f(\epsilon) = \exp\{-\epsilon - \exp\{-\epsilon\}\} \quad (3)$$

entonces (ver por ejemplo Maddala, 1983)

$$\pi_{ij} = \frac{\exp\{\eta_{ij}\}}{\sum \exp\{\eta_{ik}\}} \quad (4)$$

que es la ecuación básica definiendo el modelo logit multinomial.

En el caso especial donde  $J = 2$ , el individuo  $i$  elegirá la primera alternativa si  $U_{i1} - U_{i2} > 0$ . Si las utilidades aleatorias  $U_{ij}$  tienen distribuciones independientes de valor extremo, se puede demostrar que su diferencia sigue una distribución logística y se obtiene el modelo de regresión logístico.

Luce (1959) derivó la ecuación (4) empezando de un simple requerimiento que las probabilidades de elegir la alternativa  $j$  sobre la alternativa  $k$  deberían ser independientes del conjunto de elección para todas las parejas  $j, k$ . De manera general, esta propiedad se conoce como el axioma de independencia de alternativas irrelevantes. Si este supuesto es razonable (y las otras alternativas son en realidad irrelevantes) depende mucho de la naturaleza de las elecciones<sup>2</sup>.

#### 4.2. Logit multinomial.

En el modelo usual multinomial logit, las utilidades esperadas  $\eta_{ij}$  son modeladas en términos de las características de los individuos de manera tal que:

$$\eta_{ij} = x_i' \beta_j \quad (5)$$

Aquí los coeficientes de regresión  $\beta_j$  pueden ser interpretados como reflejando los efectos de las covariables sobre las probabilidades de tomar una alternativa dada (como se mostró en la sección anterior) o sobre las utilidades fundamentales de las diferentes alternativas.

Una característica de algún modo restrictiva del modelo es que los mismos atributos  $x_i$  son usados para modelar las utilidades de todos los  $J$ .

#### 4.3. Logit condicional.

McFadden (1973) propone modelar las utilidades esperadas  $\eta_{ij}$  en términos de las características de las alternativas en vez de los atributos de los individuos. Si  $z_j$  representa un vector de características de la  $j$  -ésima alternativa, entonces postula el modelo:

$$\eta_{ij} = z_j' \gamma \quad (6)$$

---

<sup>2</sup> Un ejemplo clásico donde el modelo multinomial no trabaja bien es el conocido problema del bus "rojo/azul". Suponiendo que se tiene una elección de transporte entre un tren, un bus rojo y un bus azul. Suponiendo que la mitad de la gente toma el tren y la mitad toma el bus. Suponiendo adicionalmente que la gente que toma el bus es indiferente al color, de manera tal que ellos se distribuyen de manera equitativa entre los buses rojo y azul. Las probabilidades de elección  $\pi = (0.50, 0.25, 0.25)$  serán consistentes con las utilidades esperadas  $\eta = (\log 2, 0, 0)$ .

Suponiendo ahora que el bus azul es discontinuado, se puede esperar que toda la gente que usaba el bus azul ahora tomará el bus rojo, llevando a una división 1:1 entre tren y bus. Sobre la base de las utilidades esperadas de  $\log 2$  y 0, sin embargo, el modelo logit predecirá una división 2:1.

Este modelo se conoce como el modelo logit condicional y resulta ser el equivalente al modelo log-lineal donde el principal efecto de la respuesta está representado en términos de las covariables  $z_j$ .

Hay que señalar que con  $J$  categorías de respuesta, el margen de respuesta puede ser reproducido exactamente usando cualquier  $J - 1$  atributos linealmente independientes de las alternativas. Generalmente se podría querer que la dimensionalidad de  $z_j$  sea sustancialmente menor que  $J$ . Consecuentemente, los modelos logit condicional son de manera frecuente usados cuando el número de posibles alternativas es alto.

#### 4.4. Logit condicional/Multinomial.

Un modelo más general puede ser obtenido mediante la combinación de las formulaciones logit multinomial y logit condicional, de manera tal que las utilidades fundamentales  $\eta_{ij}$  dependan de las características de los individuos al igual que de las características de las elecciones, o incluso variables definidas para combinaciones de individuos y elecciones (tales como la percepción de un individuo del valor de una elección). El modelo general usado es usualmente escrito como:

$$\eta_{ij} = x_i' \beta_j + z_{ij}' \gamma \quad (7)$$

donde  $x_i$  representa características de los individuos que son constantes a lo largo de las alternativas, y  $z_{ij}$  representa características que varían a lo largo de las elecciones (ya sea que ellas varían por individuo o no).

Algunos paquetes estadísticos, tales como Stata, tienen procedimientos para ajustar modelos logit condicionales a bases de datos donde cada combinación del individuo y elección posible es tratada como una observación separada.

### 5. Datos y definición de variables.

Los datos para el análisis empírico fueron obtenidos de una encuesta realizada en 2016 por la Comisión de Regulación de Comunicaciones (CRC) con el apoyo del Centro Nacional de Consultoría (CNC). La encuesta se realizó a 5.099 individuos mayores de 18 años en las ciudades de Bogotá, Medellín, Bucaramanga, Cartagena, Cúcuta, Ibagué, Pereira, Pasto, Manizales, Villavicencio, Montería, Quibdó, Leticia y San Andrés y sus áreas metropolitanas. El muestreo fue probabilístico estratificado con un error muestral de 1,4% con un nivel de confianza del 95%<sup>3</sup>.

Los datos de investigación solo incluyen información para los cuatro operadores de red ya que entre los cuatro suman una participación de mercado superior al 95% y también porque durante 2018 se presentó la salida del mercado de algunos operadores móviles virtuales. Con esto presente, la información de este estudio cubre 4.579 individuos. En esta encuesta, se le preguntó a los individuos que establecieran su elección actual de operador móvil: 61,95% de los individuos nombraron Claro, 15,35% Movistar, 14,35% Tigo y 8,34% el resto de los operadores.

La encuesta contiene información sobre variables demográficas y socioeconómicas de los respondientes tales como ocupación, sexo, edad, estrato y también patrones de uso de telecomunicaciones, tales como el gasto mensual en telefonía móvil y promedio de llamadas

---

<sup>3</sup>

[https://www.crc.com.gov.co/recursos\\_user/2016/Actividades\\_regulatorias/merc\\_moviles/regulatoria/CRC-Habitos%20Usuarios.pdf](https://www.crc.com.gov.co/recursos_user/2016/Actividades_regulatorias/merc_moviles/regulatoria/CRC-Habitos%20Usuarios.pdf)

telefónicas realizadas. En términos de género se tiene que el 49,27% de los encuestados son mujeres, en tanto que el 50,73% son hombres. Con respecto al estrato (que es una proxy que mide el ingreso del hogar) se tiene que el 56,68% de la muestra pertenece a los estratos más bajos (1 y 2) en tanto que el 38,98% pertenece a los estratos medios (3 y 4) y tan solo el 4,35% del total de los encuestados pertenecen a los estratos altos (5 y 6). Con respecto a las regiones, se encuentra que el 63,55% de los encuestados residen en la zona andina (que abarca las principales ciudades del centro oriente como Bogotá, Medellín, Bucaramanga), el 17,62% se ubican en la zona caribe (norte del país), el 17,86% se localizan en la zona pacífica (oriente del país) y tan solo el 0,96% de los encuestados están localizados en el sur del país (región Amazonía). En términos de planes, el 60,58% de los usuarios están suscritos a un plan prepago mientras que el 39,42% lo hacen a un plan pospago. En lo que se refiere al gasto mensual en servicios móviles el 80% de los encuestados afirman gastar no más de 60.000 pesos colombianos al mes en este servicio. El 36,69% de los encuestados realizan entre 1 y 5 llamadas al mes y el 27,69% afirman realizar más de 20 llamadas al mes. Todas las variables son explícitamente definidas en la Tabla 2.

Las preguntas de la encuesta también incluyen las inclinaciones del consumidor y actitudes con respecto a diferentes características de servicios móviles tales como calidad, experiencia con el operador, servicio al cliente, precios y promociones. La Tabla 3 presenta los niveles de importancia asignados por los consumidores a factores relacionados con el servicio. Por ejemplo, el 90,8% de los usuarios de Claro afirman que la cobertura es un factor importante en su elección de operador; en tanto que este porcentaje es de 94,01% y 94,02% para Movistar y Tigo, respectivamente. Adicionalmente las participaciones de mercado a nivel nacional y regional (denominadas variables específicas al operador) son usadas como determinantes de la elección de operador.

**Tabla 2. Definición de variables.**

<b>Variable</b>	<b>Definición</b>
Elección de operador	Variable dependiente del modelo. Hay ocho alternativas para los consumidores: Claro, Movistar, Tigo, Virgin, Uff, Avantel, Éxito, ETB
<b>1 Variables específicas al operador</b>	
Participación nacional	Participación de mercado del operador elegido a nivel nacional
Participación regional	Participación de mercado del operador elegido a nivel regional
<b>2 Variables de efectos regionales</b>	Variables dummy para las regiones
<b>3 Variables demográficas</b>	
Edad	Edad del respondiente
Sexo	Género del respondiente: 1 para hombre
Estado civil	Estado marital del respondiente: 1 para casado, 0 para lo demás
Ocupación	1 si el respondiente está empleado u ocupado en algún oficio
<b>4 Variables económicas</b>	
Estrato	Proxy del ingreso de los respondientes, una variable clasificada que va de 1 (ingreso bajo) a 6 (ingreso alto)
Gasto	Gasto por mes en el operador elegido, una variable clasificada que va de 1 (COP 15000) a 7 (más de COP 90000)
<b>5 Uso</b>	
Llamadas de uso	Promedio diario de llamadas, una variable clasificada que va de 1 (entre 1 y 5 llamadas) a 5 (más de 20 llamadas)
Tipo de plan	Tipo de plan del respondiente: 1 para prepago
<b>6 Preferencias del consumidor</b>	
Cobertura	1 si las propiedades de cobertura del operador son importantes o muy importantes para el respondiente, 0 de otro modo
Calidad del servicio	1 si la calidad del servicio es importante o muy importante para el respondiente, 0 de otro modo
Precio	1 si los precios del operador son importantes o muy importantes para el respondiente, 0 de otro modo
Servicio al cliente	1 si la atención al cliente del operador es importante o muy importante para el respondiente, 0 de otro modo
Amigos/familia	1 si estar en el mismo operador que los amigos/familia es importante o muy importante para el respondiente, 0 de otro modo
Promociones	1 si las promociones del operador son importantes o muy importantes para el respondiente, 0 de otro modo
Experiencia con el operador	1 si la imagen del operador es importante o muy importante para el respondiente, 0 de otro modo

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 3. Importancia de factores específicos al operador para los consumidores (como porcentaje de los consumidores).**

	Claro	Movistar	Tigo	Virgin Mobile	Uff Móvil	Avantel	Éxito Móvil	ETB
Cobertura	90,84%	94,02%	94,03%	93,14%	92,21%	94,38%	92,98%	94,05%
Calidad del servicio	91,73%	94,28%	94,03%	94,12%	93,51%	97,75%	91,23%	95,24%
Precio	76,71%	79,52%	80,65%	86,27%	80,52%	82,02%	85,96%	89,29%
Servicio al cliente	87,45%	88,56%	90,90%	85,29%	93,51%	86,52%	94,74%	85,71%
Amigos/familia	74,27%	67,02%	68,71%	56,86%	44,16%	51,69%	52,63%	34,52%
Promociones	63,79%	65,56%	71,41%	65,69%	68,83%	68,54%	70,18%	67,86%
Experiencia con el operador	82,37%	84,71%	85,21%	72,55%	85,71%	73,03%	85,96%	77,38%

Fuente: Elaboración propia con datos de Encuesta Hábitos CRC y CNC.

## 6. Resultados empíricos.

La ecuación (7) es estimada usando el procedimiento logit condicional<sup>4</sup> en Stata (comando `asclogit`) con diferentes combinaciones de variables específicas al operador, aplicando el test de Hausman para verificar el supuesto de IIA en los términos de error. Para poder probar cómo el tamaño de los efectos de red regionales afecta la elección del consumidor, se emplean variables regionales dicótomas y participaciones de mercado a nivel regional. Consistente con estudios anteriores, las participaciones de mercado nacionales son usadas para medir los efectos de red a nivel país.

Los resultados de estimación se presentan en las tablas estimación I y estimación II (Anexo). Los resultados de la estimación I reportan los parámetros estimados cuando se incluyen todos los factores específicos al operador. Por facilidad de interpretación se presentan los `oddsratio` de la estimación. En la estimación se encuentran que los efectos de red son nacionales (el coeficiente de participación nacional es significativo al 3,6%), pero las participaciones regionales no son significativas. Esto es bastante intuitivo ya que como se observó en la descripción cualitativa de las participaciones regionales, el operador Claro tiene una clara dominancia tanto a nivel nacional como a nivel regional. Esto hace que una definición de mercados nacional tenga más sentido.

En cuanto a las variables específicas al operador se encuentra que cuanto mayor sea la edad del usuario, tiene una mayor probabilidad de elegir el operador Claro que el operador Avantel, pero si el usuario es hombre ( $X=1$ ) tiene menos probabilidad de elegir Claro que Avantel. De igual manera, los usuarios de estrato bajo prefieren el operador Claro que el operador Avantel (recordar que componen la mayoría de la muestra), lo que también se ve representado en el hecho de que los usuarios de plan prepago tienen mayor probabilidad de elegir Claro sobre Avantel, al igual que los que realizan menos llamadas. Para el usuario de Claro estar ubicado en una región específica no es un determinante para la elección de este operador, lo que es consistente con el hecho de que no existan efectos de red regionales.

<sup>4</sup> Con Stata se puede ajustar el modelo logit condicional de McFadden discutido anteriormente, un modelo de utilidad aleatoria donde la utilidad esperada de una elección depende de las características de las alternativas, características de las personas haciendo las elecciones y variables que son específicas a una combinación de persona y alternativa, por ejemplo, distancia a un cine. Stata utiliza el comando `asclogit`, que es una abreviación de `alternative specific conditional logit`, que de manera significativamente simplifica correr el modelo.

Con respecto al operador Movistar, las mismas variables que determinan la elección del operador Claro sobre el operador Avantel, son las que determinan la elección de Movistar sobre el operador Avantel. A excepción del estrato que no es significativa en la elección de este operador. De igual forma, la ubicación regional no tiene impacto sobre la elección del operador.

En lo que se refiere al operador Tigo, se puede observar que un usuario ubicado en la región andina o en la región pacífica tiene mayor probabilidad de elegir Avantel que elegir Tigo, lo cual es consistente ya que Tigo tiene mayor presencia en la región Atlántica. En términos de variables específicas al operador, la edad, el gasto mensual, ser usuario prepago, hacen que haya una mayor probabilidad de elegir el operador Tigo que el operador Avantel. Por el contrario, ser hombre y realizar un mayor número de llamadas disminuyen la probabilidad de que se elija Tigo sobre Avantel. La estimación II muestra los resultados de regresión cuando se incluyen las preferencias establecidas por los consumidores con respecto a diferentes características del operador. Aunque esas variables no capturan los efectos directos que ciertas características tienen sobre la elección del operador es de notar, sin embargo, que en esta estimación los efectos de red regionales no son significativos y al igual que la estimación anterior los efectos de red nacionales son los que importan en la elección que el consumidor hace del operador. Esto implica que el consumidor elige su operador basado en el número de total de usuarios que tenga el operador independientemente de donde estos estén localizados y que el consumidor entiende el mercado móvil como un mercado de carácter nacional.

Con respecto a las preferencias del consumidor se encuentra que únicamente la experiencia que el usuario tiene con el operador es la única variable que aumenta la probabilidad de que se elija cualquiera de los tres operadores por encima de Avantel<sup>5</sup>. Con respecto a la variable experiencia con el operador se mide la antigüedad y/o costumbre de estar con un operador determinado. Por lo tanto, se puede estar presentando un fenómeno de inercia donde una vez un usuario está con un operador por cierto tiempo determinado sea muy difícil que lo cambie, a pesar de que otras variables como calidad, cobertura de otros operadores tengan mejores indicadores.

## **7. Conclusiones e implicaciones de política pública.**

La literatura teórica sobre mercados con efectos de red ha mostrado que las externalidades por el lado de la demanda pueden inducir a que el mercado se incline a favor de la firma más grande. Estudios empíricos a nivel macro que analizan efectos de red comúnmente usan el supuesto que el tamaño total de la red es importante para muchos consumidores o, porque las redes están interconectadas, el número de consumidores a lo largo de todas las redes (efectos de red globales). En contraste, estudios más al nivel micro han sugerido que familia y amigos y demás redes sociales son más importantes para la elección del consumidor que el tamaño total de la red.

Este estudio sugiere que, basándose en datos a nivel micro para Colombia, los efectos de red a nivel nacional son importantes en determinar la elección de operador por parte del consumidor, una vez la heterogeneidad individual y regional es tomada en consideración. Esto implica que es el tamaño total del operador en términos de número de usuarios el que determina la elección por parte del consumidor. Adicionalmente características tales como la experiencia con el operador también afectan la elección de operador móvil. De igual forma, se encuentra que el sexo, el estrato, el tipo de plan y el número de llamadas realizadas son determinantes en la elección de operador por parte de los consumidores de servicios móviles en Colombia.

---

<sup>5</sup> Al realizar el likelihood ratio test excluyendo todas las variables de preferencia del consumidor a excepción de experiencia del consumidor se rechaza la hipótesis nula y, por lo tanto, se puede concluir que la única variable de preferencia del consumidor sensible de incluir en el modelo es la experiencia del consumidor.

Los análisis también sugieren que los efectos regionales de red no son significativos para la elección del consumidor. Esto significa que muy probablemente los consumidores no se ven afectados por las elecciones de otros consumidores dentro de su área regional. Esto se puede explicar en parte por el hecho de que en Colombia no existe discriminación regional de precios<sup>6</sup>. En otras palabras, la discriminación de precios ocurre cuando a consumidores en diferentes mercados se les cobra diferentes precios por el mismo bien o servicio, por razones no relacionadas con el costo. La discriminación de precios es efectiva solo si los consumidores no pueden de manera rentable revender los bienes o servicios a otros consumidores. La discriminación de precios puede tomar muchas formas, incluyendo la fijación de precios para diferentes grupos de edad, diferentes ubicaciones geográficas, y diferentes tipos de usuarios (tales como residenciales vs empresariales).

En el caso de discriminación geográfica de precios, la existencia de diferencias en precio entre diferentes mercados geográficos sugeriría que las condiciones de competencia en diferentes áreas del país no son homogéneas y que, por lo tanto, existen diferentes mercados relevantes geográficos. En este caso, este argumento no tiene sentido porque como bien lo definió la misma Comisión de Regulación de Comunicaciones (CRC) el mercado geográfico del mercado de servicios móviles en Colombia es de carácter nacional y, por lo tanto, la discriminación geográfica es eliminada por el mismo mercado en el sentido que la potencial reventa de servicios o productos en regiones de bajo precio haría que se igualen los precios con regiones donde los precios por los mismos servicios o productos sea alta promoviendo de esta manera la integración del mercado.

No obstante, el regulador podría tener la postura de que sí el mismo mercado no evitará la discriminación geográfica de precios, el operador dominante podría reaccionar a diferencias regionales en la demanda y en la intensidad de la competencia y podría, por lo tanto, explotar su poder de mercado a nivel regional (local). No obstante, no existen incentivos económicos para que un operador implemente estrategias de fijación de precios geográfica, ya que esto tiene la desventaja para los operadores en el sentido que el desarrollo de la oferta de planes tarifarios es bastante costoso, especialmente porque se tendría que adquirir información sobre las diferencias regionales en elasticidades de precios para los diferentes servicios móviles. De igual forma, diferencias en los planes tarifarios podría aumentar los costos en el mercadeo y publicidad de los planes.

Es importante recordar que la discriminación geográfica de precios solo puede existir si los consumidores difieren en sus demandas por un dado bien o servicio y la firma puede prevenir o limitar el arbitraje. Si los consumidores tienen demandas idénticas por un bien o servicio, entonces todos los consumidores demandarán la misma cantidad del bien o servicio para cada precio, y el precio y la cantidad del bien dependerán solo del número de consumidores en el mercado y la habilidad de las firmas para ofrecer el bien (la curva de oferta). De igual forma, si los consumidores pueden arbitrar diferencias en precios, cualquier intento de cobrar precios altos a algún grupo será eliminado a través de la reventa. En ese orden de ideas, los estudios desarrollados que soportaron la decisión de la CRC, en particular el estudio de hábitos desarrollado por el Centro Nacional de Consultoría encontró que las preferencias de los consumidores por servicios móviles son homogéneas a nivel nacional, es decir, que no existían diferentes curvas de demanda para diferentes consumidores dependiendo de la ubicación de éstos. En ese mismo sentido, el alcance nacional del mercado por definición elimina la posibilidad de arbitraje, ya que tiene que primar la ley de precio único para todo el territorio nacional.

Por último, los hallazgos de este estudio contrastan con los de Karacuka et al. (2013) quienes encontraron que para el mercado de Turquía existen disparidades regionales en la

---

<sup>6</sup> En términos generales, se puede decir que existe discriminación de precios cuando dos productos “similares” que se producen al mismo costo marginal son vendidos por una firma a precios diferentes.



adopción de servicios móviles y que existen efectos de red regionales que son significativos para la elección del consumidor y que los consumidores eligen su operador móvil basados en las elecciones de otros usuarios ubicados en su área regional y no tanto por el tamaño total de la red. Por otro lado, próximos estudios pueden analizar los determinantes del poder de mercado del operador Claro.

## Referencias

- Armstrong, M. (1998). Network interconnection. *Economic Journal*, 108, 545-564.
- Arthur, W.B. (1989). Competing technologies, increasing returns, and lock-in by historical events. *Economic Journal*, 99, 116-131.
- Birke, D., & Swann, G. P. (2006). Network effects and the choice of mobile phone operator. *Journal of Evolutionary Economics*, 16(1-2), 65-84.
- Centro Nacional de Consultoría y Comisión de Regulación de Comunicaciones (2016). *Hábitos y Usos de Servicios Móviles*. Recuperado de: [https://www.crcm.gov.co/recursos\\_user/2016/Actividades\\_regulatorias/merc\\_moviles/regulatoria/CRC-Habitos\\_Usuarios.pdf](https://www.crcm.gov.co/recursos_user/2016/Actividades_regulatorias/merc_moviles/regulatoria/CRC-Habitos_Usuarios.pdf).
- Comisión de Regulación de Comunicaciones (2017). *Reporte de Industria Sector TIC*. Recuperado de: [https://www.crcm.gov.co/recursos\\_user/reporteindustria2017.pdf](https://www.crcm.gov.co/recursos_user/reporteindustria2017.pdf).
- Corrocher, N., & Zirulia, L. (2009). Me and you and everyone we know: an empirical analysis of local network effects in mobile communications. *Telecommunications Policy*, 33(1), 68-79.
- Czajkowski, M., & Sobolewski, M. (2011). Measuring network effects in mobile telecommunications markets with stated-preference valuation methods. *International Journal of Management and Network Effects*, 2(2), 197-215.
- Doganoglu, T., & Grzybowski, L. (2007). Estimating network effects in mobile telephony in Germany. *Information Economics and Policy*, 19(1), 65-79.
- Economides, N. (1996). The economics of networks. *International Journal of Industrial Organization*, 14(6), 673-699.
- Farrell, J., & Klemperer, P. (2007). Coordination and lock-in: competition with switching costs and network effects. In: Armstrong, M. & Porter, R. (Eds.), *Handbook of industrial organisation* (pp. 1967-2072). Elsevier.
- Fu, W.W. (2004). Termination-discriminatory pricing, subscriber bandwagons, and network traffic patterns: the Taiwanese mobile phone market. *Telecommunications Policy*, 28(1), 5-22.
- Gandal, N. (2002). Compatibility, standardization, and network effects: Some policy implications. *Oxford Review of Economic Policy*, 18, 80-91.
- Grajek, M. (2010). Estimating network effects and compatibility: evidence from the Polish mobile market. *Information Economics and Policy*, 22(2), 130-143.

- Haucap, J. & Heimeshoff, U. (2011). Consumer behavior towards on-net/off-net price differentiation. *Telecommunications Policy*, 35, 325-332.
- Hoernig, S. (2007). On-net and off-net pricing on asymmetric telecommunications networks. *Information Economics and Policy*, 19, 171-188.
- Karaçuka, M., Çatık, A.N., & Haucap, J. (2013). Consumer choice and local network effects in mobile telecommunications in Turkey. *Telecommunications Policy*, 37(4), 334-344.
- Katz, M.L. & Shapiro, C. (1985). Network externalities, competition, and compatibility. *American Economic Review*, 75, 424-440.
- Katz, M.L. & Shapiro, C. (1986). Technology adoption in the presence of network externalities. *Journal of Political Economy*, 94, 822-841.
- Katz, M.L. & Shapiro, C. (1994). Systems competition and network effects. *Journal of Economic Perspectives*, 8, 93-115.
- Kim, H.S. & Kwon, N. (2003). The advantage of network size in acquiring new subscribers: A conditional logit analysis of the Korean mobile telephony market. *Information Economics and Policy*, 15, 17-33.
- Klemperer, P. (1987). The competitiveness of markets with switching costs. *RAND Journal of Economics*, 18, 138-150.
- Laffont, J.J., Rey, P. & Tirole, J. (1998). Network competition: II. Price discrimination. *RAND Journal of Economics*, 29, 38-56.
- Liikanen, J., Stoneman, P., & Toivanen, O. (2004). Intergenerational effects in the diffusion of new technology: the case of mobile phones. *International Journal of Industrial Organization*, 22(8), 1137-1154.
- Luce, R.D. (1959). *Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis*. New York: Wiley.
- Maddala, G.S. (1983). *Limited-Dependent and Qualitative Variables in Economics*. New York: Cambridge University Press, pp. 257-91.
- Maicas, J. P., Polo, Y., & Sese, F.J. (2009). Reducing the level of switching costs in mobile communications: the case of mobile number portability. *Telecommunications Policy*, 33(9), 544-554.
- Maicas, J. P., & Sese, F. J. (2011). Network effects in the mobile communications industry: an overview. In: Maicas, J.P. (Ed.), *Recent Developments in the Mobile Communications Industry: A Multidisciplinary Approach* (pp. 131-140). Croatia: InTech.
- McFadden, D. (1973). Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Be. In: Zarembka, P. (Ed.), *Frontiers in Econometrics*. New York: Academic Press.
- McFadden, D. (1974). The measurement of urban travel demand. *Journal of Public Economics*, 3(4), 303-328.

- Rohlfs, J. (1974). A theory of interdependent demand for a communications service. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 5, 16-37.
- Sobolewski, M., & Czajkowski, M. (2012). Network effects and preference heterogeneity in the case of mobile telecommunications markets. *Telecommunications Policy*, 36(3), 197-211.
- Suleymanova, I. & Wey, C. (2011). Bertrand competition in markets with network effects and switching costs. *B.E. Journal of Economic Analysis & Policy*, 11(1), Article 56 (Contributions).
- Valletti, T.M. (1999). A model of competition in mobile communications. *Information Economics and Policy*, 11, 61-72.

**ANEXO**

**Tabla 4. Estimación I.**

<b>Variab</b>	<b>OddsRatio</b>	<b>P&gt;z</b>
<b>Variab</b>		
Participación regional	6,92700900	19,5%
Participación nacional	11,74565000	3,6%
<b>Avantel</b>	(alternativa base)	
<b>Claro</b>		
Región Andina	0,7370723	40,3%
Región Pacífica	1,1073590	81,8%
Región Amazonía	780814	99,1%
<u>Edad</u>	<u>1,0496900</u>	<u>0,0%</u>
<u>Sexo</u>	<u>0,5704535</u>	<u>1,5%</u>
Ocupación	0,9422330	82,6%
Estado Civil	0,9650933	87,6%
<u>Estrato</u>	<u>0,6527217</u>	<u>0,0%</u>
<u>Gasto Mensual</u>	<u>1,1750750</u>	<u>3,3%</u>
<u>Tipo de Plan</u>	<u>6,0953450</u>	<u>0,0%</u>
<u>Número de Llamadas</u>	<u>0,8367975</u>	<u>1,5%</u>
<b>Movistar</b>		
Región Andina	0,6765968	2,5%
Región Pacífica	1,8976030	20,8%
Región Amazonía	1097523	99,1%
<u>Edad</u>	<u>1,0577880</u>	<u>0,0%</u>
<u>Sexo</u>	<u>0,5186035</u>	<u>0,6%</u>
Ocupación	1,1475890	62,2%
Estado Civil	9,9796684	93,1%
Estrato	0,8721396	18,2%
<u>Gasto Mensual</u>	<u>1,1382300</u>	<u>9,6%</u>
<u>Tipo de Plan</u>	<u>2,2797300</u>	<u>0,4%</u>
<u>Número de Llamadas</u>	<u>0,8384347</u>	<u>2,0%</u>
<b>Tigo</b>		
<u>Región Andina</u>	<u>0,3472779</u>	<u>1,2%</u>
<u>Región Pacífica</u>	<u>0,3417285</u>	<u>5,0%</u>
Región Amazonía	0,2088512	99,9%
<u>Edad</u>	<u>1,0331340</u>	<u>1,0%</u>
<u>Sexo</u>	<u>0,5142716</u>	<u>0,6%</u>
Ocupación	1,1217710	68,5%
Estado Civil	0,8951088	64,2%
Estrato	0,9872830	90,2%
<u>Gasto Mensual</u>	<u>1,3855330</u>	<u>0,0%</u>
<u>Tipo de Plan</u>	<u>12,4556000</u>	<u>0,0%</u>
<u>Número de Llamadas</u>	<u>0,7830105</u>	<u>0,2%</u>

Fuente: Elaboración propia con datos de Stata 15.

**Tabla 5. Estimación 2.**

---

1	
<b>Variab</b>	

Participación nacional	-6,6964***
Participación local	15,7752***
<b>Dummy regionales Claro</b>	
Región andina	-4,1712***
Región atlantica	-2,1358**
Región Amazonía	8,9949
<b>Dummy regionales Movistar</b>	
Región andina	-1,8581**
Región atlantica	-0,5703
Región Amazonía	11,5683
<b>Dummy regionales Tigo</b>	
Región andina	-3,5412***
Región atlantica	-4,5334***
Región Amazonía	-3,0993
<b>Dummy regionales Virgin Mobile</b>	
Región andina	-3,0991***
Región atlantica	-3,8448***
Región Amazonía	-3,2967
<b>Dummy regionales Uff Móvil</b>	
Región andina	-3,6769***
Región atlantica	-3,1652***
Región Amazonía	-3.2008
<b>Dummy regionales Avantel</b>	
Región andina	-3,1977***
Región atlantica	-3,4096***
Región Amazonía	-3,2346
<b>Dummy regionales Éxito</b>	
Región andina	-3,6481***
Región atlantica	-3,2058***
Región Amazonía	-3,2832
<b>Variables demográficas Claro</b>	
Edad	0,02212**
Sexo	-0,5019**
Ocupación	0,1517
Estado Marital	-0,0182
<b>Variables demográficas Movistar</b>	
Edad	0,0311***
Sexo	-0,5991**
Ocupación	0,3284
Estado Marital	-0,006
<b>Variables demográficas Tigo</b>	
Edad	0,0114
Sexo	-0,5939**
Ocupación	0,3589
Estado Marital	-0,0735
<b>Variables demográficas Virgin Mobile</b>	
Edad	-0,014
Sexo	-0,2698
Ocupación	0,7463**
Estado Marital	-0,0129
<b>Variables demográficas Uff Movil</b>	
Edad	0,0244**

Sexo	-0,342
Ocupación	0,0679
Estado Marital	-0,3429
<b>VARIABLES DEMOGRÁFICAS AVANTEL</b>	
Edad	-0,0076
Sexo	0,1745
Ocupación	0,4696
Estado Marital	0,0568
<b>VARIABLES DEMOGRÁFICAS ÉXITO</b>	
Edad	0,0095
Sexo	-0,7123*
Ocupación	0,3039
Estado Marital	0,289
<b>VARIABLES ECONÓMICAS CLARO</b>	
Estrato	-0,1447
Gasto mensual servicios móviles	0,1261
<b>VARIABLES ECONÓMICAS MOVISTAR</b>	
Estrato	0,129
Gasto mensual servicios móviles	0,0926
<b>VARIABLES ECONÓMICAS TIGO</b>	
Estrato	0,2831**
Gasto mensual servicios móviles	0,3170***
<b>VARIABLES ECONÓMICAS VIRGIN MOBILE</b>	
Estrato	0,201
Gasto mensual servicios móviles	-0,0815
<b>VARIABLES ECONÓMICAS UFF MOVIL</b>	
Estrato	0,3136*
Gasto mensual servicios móviles	0,1286
<b>VARIABLES ECONÓMICAS AVANTEL</b>	
Estrato	0,3452**
Gasto mensual servicios móviles	0,0348
<b>VARIABLES ECONÓMICAS ÉXITO</b>	
Estrato	0,1946
Gasto mensual servicios móviles	-0,0574
<b>USO CLARO</b>	
Tipo de plan	2,4762***
Numero llamadas a la semana	0,1464**
<b>USO MOVISTAR</b>	
Tipo de plan	1,5024***
Numero llamadas a la semana	0,1468*
<b>USO TIGO</b>	
Tipo de plan	3,3777***
Numero llamadas a la semana	0,07264
<b>USO VIRGIN MOBILE</b>	
Tipo de plan	5,0692***
Numero llamadas a la semana	0,3744***
<b>USO UFF MÓVIL</b>	
Tipo de plan	4,2222***
Numero llamadas a la semana	0,139
<b>USO AVANTEL</b>	
Tipo de plan	1,1563**
Numero llamadas a la semana	0,3734***

<b>Uso Éxito</b>	
Tipo de plan	4,6550***
Numero llamadas a la semana	0,2251*
<b>Preferencias del Consumidor Claro</b>	
Cobertura	-0,1328
Calidad	-0,4958
Precio	-1,1317***
Atención cliente	0,4461
Amigos en el mismo operador	1,4072***
Ofertas	-0,3329
Experiencia con el operador	0,3961
<b>Preferencias del Consumidor Movistar</b>	
Cobertura	0,1892
Calidad	-0,3209
Precio	-1,0559***
Atención cliente	0,4434
Amigos en el mismo operador	1,1480***
Ofertas	-0,2506
Experiencia con el operador	0,4937
<b>Preferencias del Consumidor Tigo</b>	
Cobertura	0,2895
Calidad	-0,2855
Precio	-1,0285**
Atención cliente	0,7227*
Amigos en el mismo operador	1,0913***
Ofertas	-0,023
Experiencia con el operador	0,4848
<b>Preferencias del Consumidor Virgin Mobile</b>	
Cobertura	-0,4286
Calidad	-0,5045
Precio	-0,588
Atención cliente	0,1699
Amigos en el mismo operador	0,6270**
Ofertas	-0,1178
Experiencia con el operador	-0,1269
<b>Preferencias del Consumidor Uff Móvil</b>	
Cobertura	-0,565
Calidad	-0,7429
Precio	-1,0758**
Atención cliente	0,7146
Amigos en el mismo operador	-0,1044
Ofertas	0,1579
Experiencia con el operador	0,5739
<b>Preferencias del Consumidor Avantel</b>	
Cobertura	-0,4228
Calidad	0,8383
Precio	-0,8054
Atención cliente	0,3162
Amigos en el mismo operador	0,8366**
Ofertas	0,081
Experiencia con el operador	-0,179
<b>Preferencias del Consumidor Éxito</b>	

Cobertura	-0,4077
Calidad	-1,0816
Precio	-0,7679
Atención cliente	0,7646
Amigos en el mismo operador	0,1397
Ofertas	0,0087
Experiencia con el operador	0,5594
<b>Pseudo R2</b>	0,1602
<b>Loglikelihood</b>	-5199,6246

Fuente: Elaboración propia con datos de Stata 15.





## Modelos de Riesgo de Crédito: Aplicación Práctica a un Modelo de Refinanciación de Hipotecas

CARO BARRERA, JOSÉ RAFAEL

Departamento de Estadística, Econometría, Investigación Operativa,  
Organización de Empresas y Economía Aplicada  
Universidad de Córdoba  
Correo electrónico: [z52cabaj@uco.es](mailto:z52cabaj@uco.es)

### RESUMEN

Ante un hipotético, pero cada vez más real, caso de riesgo de impago de una hipoteca o ante una caída en los tipos de interés, un asunto importante que se plantea el prestatario es el de la posibilidad de minimizar ese riesgo mediante la selección de la mejor opción de refinanciación. En el presente trabajo se presenta un modelo de refinanciación de hipotecas desarrollando un método de programación puramente cuantitativa, con una simulación basada en un algoritmo creado especialmente para este caso y que puede ser útil para deudores hipotecarios. Así, se comienza explicando la base teórica sobre la que se asienta la investigación, para pasar a desarrollar el problema, continuando con su implantación. Finalmente, se analizan los resultados y se comentan las conclusiones más relevantes.

**Palabras clave:** riesgo de crédito, optimización, programación dinámica, tipo de interés, refinanciación hipotecaria, valores respaldados por hipotecas, Basilea III.

**Clasificación JEL:** C02; C61; C63.

**MSC2010:** 49L20; 49N20; 60J25; 91G40.

# Credit Risk Models: Practical Application to a Mortgage Refinancing Model

## ABSTRACT

Facing an hypothetical, but increasingly, case of default risk on a mortgage or a fall in interest rates, an important issue raised by the borrower is the possibility of minimizing that risk by selecting the best refinancing option. In this paper, a mortgage refinancing model is presented, developing a purely quantitative programming method with a simulation based on an algorithm created especially for this case and that can be useful for mortgage debtors. Thus, we begin by explaining the theoretical basis on which the research is based, to proceed to develop the problem, continuing with its implementation. Finally, the results are analyzed and the most relevant conclusions are commented.

**Keywords:** credit risk, dynamic optimization, dynamic programming, interest rate, mortgage refinancing, mortgaged backed securities, Basel III.

**JEL classification:** C02; C61; C63.

**MSC2010:** 49L20; 49N20; 60J25; 91G40.



## 1. Introducción.

Una hipoteca es un préstamo garantizado por bienes raíces. El total del préstamo, llamado principal, se paga a lo largo de un horizonte temporal mediante cuotas. Estos pagos son, por lo general, calculados prorata temporis, lo que significa que cada flujo de caja se divide en dos componentes: un primer componente representa una parte del saldo pendiente, un segundo componente es el interés devengado desde el último pago. Este esquema garantiza que el préstamo es totalmente pagado al final del contrato. En la mayoría de las hipotecas residenciales, los préstamos ofrecidos a los inversores particulares son amortizados a través del esquema “francés” de amortización, que consiste en cuotas constantes, por lo general pagaderas mensualmente.

Mención especial merece el caso del mercado estadounidense, donde la amplia mayoría de las hipotecas son recogidas en grupos de préstamos gestionados por agencias patrocinadas por el gobierno. Estas instituciones emiten pagarés de titulización respaldados por los flujos de efectivo generados por un grupo específico de las hipotecas y venden este tipo de activos, conocidos como valores respaldados por hipotecas (Mortgage Backed Securities, MBS en sus siglas en inglés), a inversores privados, generalmente grandes fondos de inversión, tanto directamente como a través de distribuidores. Es importante destacar que gran parte de la crisis que afectó a los EEUU en 2008 fue provocada por culpa de este producto financiero.

La intención de este trabajo es encontrar una política de refinanciación óptima visto desde la óptica del deudor hipotecario, cuestión que autores como Pliska (2006) aborda trabajando con el comportamiento del deudor hipotecario en tiempo discreto y describiendo este comportamiento como un proceso de intensidad adecuada con tasas de hipoteca exógenas, así, el valor del contrato se deduce en una forma explícita y que se interpreta como el principal más el valor de un cierto swap. Longstaff (2005) en cambio tiene como objetivo minimizar los costes de la hipoteca con una estrategia de refinanciación óptima recursiva y examinando las implicaciones de esta estrategia en la evaluación de los MBS.

En el caso que se ha desarrollado, hemos seguido las bases teóricas introducidas por Roncoroni y Moro (2006), donde se considera el problema de la refinanciación de la hipoteca, tratando de mostrar la forma de determinar el estado óptimo de prepago minimizando el valor de la posición de la hipoteca y eligiendo el tiempo de la misma para ser financiada. Así, los autores anteriormente mencionados, agregan una restricción en el número de refinanciaciones.

Esta función contempla la posibilidad de que el banco (prestamista) le da al prestatario la opción de refinanciar la hipoteca internamente a menor costo adicional que el que se presenta al pagar el principal y entrar en una nueva hipoteca con otro prestamista (por ejemplo, los costes de transacción y las variaciones diferenciales de crédito).

De este modo, se asume que la refinanciación está sujeta a pequeñas comisiones y costes de transacción y se centran en que las condiciones de refinanciación son en las mejores condiciones de mercado para el prestatario. La inclusión de elementos exógenos que conducen la política de refinanciación no plantea ningún problema particular en la propuesta establecida. Es suficiente para permitir que el horizonte de tiempo dependerá de la ocurrencia de eventos aleatorios que desencadenen la expiración del contrato. El número  $N$  de oportunidades de refinanciación en el horizonte temporal está fijado desde el principio. En cada momento, el deudor hipotecario establece la tasa de la deuda tanto a la tasa actual como a la tasa de interés variable nuevamente disponible. Sobre la vida del contrato, esta opción puede ser ejercida  $N$  veces como máximo.

Desde un punto de vista financiero, el problema de decisión del deudor hipotecario toma la forma de una opción múltiple compuesta americana. Esto permite el uso de métodos de programación dinámica estocástica para hacer frente a la determinación de la política de prepago óptima definida como la que minimiza el valor del contrato.

El trabajo que presentamos está organizado como sigue. En el punto 2 se plantea el problema y se describe la función del contrato de hipoteca de tipo fijo y tipo variable bajo opciones de refinanciación limitadas, basado en Roncoroni y Fusai (2008). La sección 3 detalla la metodología de la solución propuesta, el algoritmo creado y su implantación y extiende el análisis del caso incluyendo costes de transacción. El apartado 4 ilustra los resultados empíricos obtenidos mediante la realización de experimentos en escenarios alternativos. Finalmente, el último punto, presenta las principales conclusiones, comentarios y últimos avances y aportaciones en este campo.

## 2. Planteamiento del problema y solución.

### 2.1. Hipoteca con tipo fijo.

Se considera un horizonte temporal finito  $T_{0,T} := (0, 1, \dots, T)$ . En el momento 0, un individuo toma prestado  $1 \text{ €}$  Esto genera un saldo a pagar  $B(0) = 1$ . El prestatario está obligado a pagar esta cantidad junto con los intereses más allá del horizonte de acuerdo a un esquema de entrega constante. Para cada período  $[t - 1, t]$  se calcula un interés  $I(t - 1)$ , sobre el saldo pendiente  $B(t - 1)$  a una tasa igual a  $r(t - 1)$ . El riesgo vivo  $B'(t - 1)$  del deudor en el período  $[t - 1, t]$ , se define por el interés  $I(t - 1)$  más el equilibrio de pie  $B(t - 1)$ . Al final del período, es decir, el tiempo  $t$ , el prestatario paga una fracción  $f(t)$ , la cual está escrita en función de la exposición  $B'(t - 1)$ .

Este número se calcula como un porcentaje del tiempo de vida residual del contrato, es decir,  $f(t) = 1/T - (t - 1)$ . Se denota este pago por  $P(t - 1)$ . La dependencia explícita en el día de comienzo  $t - 1$  del período, subraya que este importe se fija en este momento, aunque saldado al final del mismo. Después de realizar este pago, el nuevo saldo en circulación para el deudor se convierte en  $B(t) = B'(t - 1) - P(t - 1)$ .

La tabla 1 resume los pasos a seguir en este plan de pago. Está claro que el nuevo saldo depende del saldo inicial y del proceso de la deuda a una tasa  $r = (r(t), t = 0, \dots, T - 1)$ . Puesto que por hipótesis la posición inicial de la deuda es  $B(0) = 1$ , la única variable exógena es la tasa  $r$ .

**Tabla 1. Esquema de plan de pago.**

Cantidad	Notación	Fórmula
Deuda pendiente en $t - 1$	$B(t - 1)$	Dada por inducción
Tasa de deuda para el período $[t - 1, t]$	$r(t - 1)$	Aleatoria
Intereses acumulados en $[t - 1, t]$	$I(t - 1)$	$r(t - 1) \cdot B(t - 1)$
Exposición pendiente en $[t - 1, t]$	$B'(t - 1)$	$I(t - 1) + B(t - 1)$
Coefficiente de entrega constante	$f(t)$	$1/(T - (t - 1))$
Pago al prestamista en $t$	$P(t - 1)$	$f(t) \cdot B'(t - 1)$
Deuda pendiente en $t$	$B(t)$	$B'(t - 1) - P(t - 1)$

Fuente: Elaboración propia.

Hay que tener en cuenta que el capital prestado es totalmente pagado al final del horizonte temporal, es decir,  $B(T) = 0$ . Esto se demuestra mostrando que el último pago  $P(T - 1)$  coincide con el equilibrio permanente en  $T - 1$ :

$$P(T - 1) = B'(T - 1)/(T - (T - 1)) \quad (1)$$

$$= B'(T - 1) \quad (2)$$

El *coste de ir* asociado un proceso de endeudamiento a una tasa  $r$  dada se define como la suma de todos los flujos de efectivo derivados del régimen de pago en el esquema descrito anteriormente, es decir,  $\sum_{t=0}^{T-1} P(t)$ . A continuación se describe el proceso de la tasa  $r$ .

## 2.2. Hipoteca con tipo variable.

Se asume que el mercado da una tasa o tipo de interés  $R$  y se supone que este número sigue un proceso de Markov temporal homogéneo  $R = (R(t), t = 0, \dots, T)$  con espacios de estado finitos  $\mathcal{S} = \{s_{min} + k\Delta s, k = 0, 1, \dots, K\}$ . Aquí, la tasa mínima  $s_{min}$ , el intervalo del interés  $\Delta s$  y la cardinalidad  $K+1$  son todos fijos. Por otro lado, se establece que  $\mathcal{S}' = \{s_{min} + k\Delta s, k = 0, 1, \dots, K - 1\}$ . Las probabilidades de transición del proceso  $R$  son asignadas como sigue:

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } (x, y) \in \mathcal{S}' \times \{x, x \pm \Delta x\}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x, y) \in \{s_{min}\} \times \{s_{min}, s_{min} + \Delta s\} \cup \{s_{max}\} \times \{s_{max}, s_{max} - \Delta s\}, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Esta función, junto con una tasa inicial de mercado  $R(0)$ , induce a una medida de probabilidad  $\mathbf{P}_{R(0)}$  en el espacio  $\mathcal{S}^{T+1}$ .

Volviendo al proceso de la tasa de deuda  $r$ , se asume que su valor inicial  $r(0)$  coincide con la tasa de mercado  $R(0)$  al mismo tiempo. En cualquier instante  $t$ , el deudor se enfrenta a la elección de continuar con la hipoteca de la deuda en pie, a tasa  $r(t - I)$  o repagar la totalidad del capital debido, usando los beneficios de entrar en nueva hipoteca en las condiciones disponibles actuales expresadas por la tasa vigente del mercado  $R(t)$ . En este caso, decimos que la hipoteca se ha refinanciado.

Se estudia el caso donde se pueda ejercer esta posibilidad un número máximo de  $N$  veces sobre un horizonte temporal  $(0, \dots, T - I)$ . Si  $N$  es igual al número de ajuste de veces  $T - I$ , la estrategia óptima para el prestatario es trivial: ejercer la opción cada vez que la tasa de mercado  $R$  baje. Por lo tanto, hay que suponer que el número  $N$  de oportunidades de refinanciación es estrictamente menor que el número de fechas. La tabla 2 indica los parámetros de entrada y los procesos dinámicos que definen las disposiciones del contrato.

**Tabla 2. Parámetros de entrada y procesos dinámicos.**

Cantidad	Notación	Fórmula
Deuda pendiente en $T_{0,T}$	$B(t - I)$	$\{0, 1, \dots, T\}$
Rango de tasa de mercado	$\mathcal{S}$	$s_{min} + k\Delta s, k = 0, 1, \dots, K$
Tasa de mercado inicial	$R(0)$	<i>Dada</i>
Dinámica de la tasa de mercado	$R$	$(R(t), t = 0, \dots, T)$
Número de opciones	$n(0)$	$N < T$
Tasa inicial de deuda	$r(0)$	$R(0)$
Saldo deudor	$B(0)$	$I$

Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a la decisión de refinanciación de la hipoteca, ésta puede ser descrita por un proceso  $\alpha$ , especificando en cada momento  $t = 0, \dots, T - I$  si el deudor hipotecario continúa con su posición en las condiciones normales  $\alpha = 0$  o, si es posible, refinanciar su deuda  $\alpha = 1$ . El proceso de control es descrito en la tabla 3.

**Tabla 3. Proceso de control.**

Cantidad	Notación	Fórmula
Proceso de política de control	$n^\alpha$	$(\alpha(t), t = 0, \dots, T - 1)$
Dominio de la política de control	$\mathcal{D}(\alpha(t))$	$\{1\}$ si $\sum_{i=1}^t \alpha(i) < n(0)$ $\{0\}$ en cualquier otro caso
Política de control en $t$	$\alpha(t)$	0 continuación 1 refinanciación

Fuente: Elaboración propia.

Por supuesto, la política de control elegida afecta a la dinámica de las variables de estado que caracterizan la posición del prestatario en el tiempo. Estas variables son: (1) el número  $n^\alpha(t)$  de oportunidades de refinanciación disponibles dejadas para ejercitar en el futuro; (2) el tipo de interés corriente  $r^\alpha(t)$ ; (3) el flujo de efectivo a plazos  $P^\alpha(t)$  para el periodo corriente; (4) el resultado del saldo pendiente  $B^\alpha(t)$ . La tabla 4 proporciona todos los procesos sujetos a control. Está claro que la decisión de refinanciar o no en un momento dado  $t$  tiene efectos sobre  $n^\alpha(t)$  y  $r^\alpha(t)$ . El vínculo con las otras dos cantidades se aclara en la tabla 5.

**Tabla 4. Sistema controlado.**

Cantidad	Notación	Fórmula
Proceso de opciones de refinanciación	$n^\alpha$	$(n^\alpha(t), t = 0, \dots, T - 1)$
Oportunidades de refinanciación en $t$	$n^\alpha(t)$	
Proceso de la tasa de deuda controlada	$r^\alpha$	$(r^\alpha, t = 0, \dots, T - 1)$
Tasa de deuda en $t$	$r^\alpha(t)$	$R(t)$ si $\alpha(t) = 1$ $(r^{\alpha(t-1)}(t-1))$ si $\alpha(t) = 0$
Proceso de pago prorrateado	$P^\alpha$	$(P^\alpha(t), t = 0, \dots, T - 1)$
Proceso de deuda pendiente	$B^\alpha$	$(B^\alpha(t), t = 0, \dots, T - 1)$

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 5. Proceso de la deuda.**

$B^\alpha(t)$	Saldo de la deuda pendiente en $t$
$B'(t) := B^\alpha(t)(1 + r^\alpha(t)/52)$	Capital más intereses sobre $[t, t+1]$
$P^\alpha(t) := B'(t)/(T - t)$	Pro-rata del pago para $[t, t+1]$
$B^\alpha(t + 1) := B'(t) - P^\alpha(t)$	Saldo de la deuda pendiente en $t+1$

Fuente: Elaboración propia.

El prestamista desea seleccionar una política de control que minimice el coste asociado con el sistema de amortización  $(P^\alpha(t), t = 0, \dots, T - 1)$ . Con el propósito de ilustrar esta cuestión, consideramos la suma de todos estos pagos como una medida de este coste. Hay que tener en cuenta que no se considera el descuento para fines de evaluación, ni el coste de cambio de una hipoteca por otra, aunque más adelante (concretamente en el punto 3.3), se incluyen en el modelo los costes de transacción. El problema es, pues, calificado como sigue:

$$\min_{\alpha \in \mathcal{A}} E \left( \sum_{j=0}^{T-1} P^\alpha(j) \right), \quad (3)$$

donde  $\mathcal{A}$  denota la clase de políticas de control admisibles  $\alpha = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{T-1}\}$  determinando el proceso de pago controlado ( $P^\alpha(t), 0 \leq t < T$ ). Específicamente, el proceso de repago ( $P^\alpha(t), 0 \leq t < T$ ) es definido sobre el espacio probabilístico  $(\mathcal{S}^T, \mathcal{B}(\mathcal{S}^T), P_{R(0)})$  y la expectativa se realiza bajo la probabilidad de medida  $P_{R(0)}$  inducida en el espacio de las rutas por las probabilidades de transición  $XX$  y la condición inicial  $R(0)$ .

Hay que tener en cuenta que cualquier política de control define una regla de parada multivariada  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $n \leq N$ , que se define recursivamente por:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf\{t \geq 0: \alpha(t) = 1\}. \\ \tau_{k+1} &= \inf\{t > \tau_k: \alpha(t) = 1\}. \end{aligned}$$

La tarea es construir un modelo para describir la estructura financiera mostrada arriba, a continuación, desarrollar un algoritmo obteniendo el valor mínimo en (3) y finalmente determinar la correspondiente política de control óptima:

$$\alpha^* = (\alpha^*(0), \dots, \alpha^*(T-1)).$$

Este último es equivalente a la regla óptima de parada multivariada  $(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ . Terminamos esta sección derivando una expresión para el saldo pendiente en  $t+1$  en términos de la política de control adoptadas y el nivel de endeudamiento registrado un intervalo de tiempo antes:

$$B(t+1) = B'(t) - P(t) = B'(t) - \frac{B'(t)}{T-t} = c(r^{\alpha(t)}(t)) B(t) \mathcal{J}(t),$$

Donde  $c(x) = 1 + x/52$  denota el coeficiente de acumulación que corresponde a la tasa  $x$  y  $\mathcal{J}(t)$  es el coeficiente de prorrateo definido por  $1 - 1/(T-t)$ .

### 3. Implantación y algoritmo.

#### 3.1. Políticas de control de Markov.

Cabe recordar que la variable de estado de un problema de control de Markov se define como la información en la que la política de control se elige en cualquier momento. Con más precisión, éste es el conjunto de variables observables sobre la cual  $\alpha(t)$  pueden ser determinada en un momento dado en el tiempo.

Se observa que el tiempo  $t$  de equilibrio,  $B(t)$ , y la tasa de deuda,  $r(t)$ , determinan por completo tanto la actualización del capital más interés  $B'(t)$  y el esquema de pago en cuotas constantes  $P(t)$ , que a su vez entra en el objetivo funcional visto en (3). Puesto que el objetivo se ve afectado tanto por  $B(t)$  y  $r(t)$ , el tiempo  $t$  de control  $\alpha(t)$  debería depender de estas variables. La dependencia sobre  $B(t)$  es sencilla. Si cualquier oportunidad de refinanciación es aún posible, por ejemplo,  $0 < n(t) \leq N$  entonces la tasa de la deuda es fijada a la mejor entre su valor previo  $r(t-1)$  y la tasa corriente de mercado  $R(t)$  observada al mismo tiempo en dicho mercado. Si, en el caso contrario, todas las oportunidades de refinanciación se han agotado, por ejemplo,  $n(t) = 0$ , entonces, la nueva tasa de deuda corriente  $r(t)$  debe concordar con su valor previo  $r(t-1)$ . En general,  $r(t)$  y por lo tanto, la política de control de Markov  $\alpha(t)$ , depende de  $(R(t), r(t-1), n(t))$ .

Estas premisas nos llevan a considerar políticas de control cuyo valor de tiempo  $t$  depende del saldo pendiente  $B(t)$ , la tasa de mercado  $R(t)$ , la tasa de la deuda a un periodo vista  $r(t-1)$  y el número  $n(t)$  de opciones disponibles de refinanciación:

$$\alpha(t) = F\left(t, (B(t), R(t), r(t-1), n(t))\right). \quad (4)$$

Si  $B$ ,  $R$ ,  $r^-$ ,  $n$ , representan posibles valores tomados por  $B(t)$ ,  $R(t)$ ,  $r(t)$  y  $n(t)$ , respectivamente, el cuarteto  $(B, R, r^-, n)$  es una variable estado candidata.

Se adopta el principio de programación dinámica para los fines del cómputo de la función valor y la política de ejercicio óptimo durante la vida del contrato. Desde que la variable estado  $B(t)$  es continua, se evita una aplicación directa de este principio. Sin embargo, la función valor es homogénea de grado uno en esta variable y la función valor se puede escribir como:

$$V(t, (y, x, r, n)) := y \times V^*(t, (x, r, n)). \quad (5)$$

Es decir, se refiere a  $V^*$  como la “Función Valor Unitaria” porque representa la función valor por unidad de saldo. Puesto que  $y$  es no-negativa, la política óptima para  $V$  coincide con la política óptima para  $V^*$ . Como consecuencia de ello, las reglas de parada admisibles son independientes de  $y$ . Por lo tanto, se consideran las variables de control de la forma:

$$\alpha(t) = F\left(t, (R(t), r(t-1), n(t))\right). \quad (6)$$

La variable de control así definida es  $\mathcal{F}_t$ -medible, implicando que la política de control (6) es admisible. La variable estado de nuestro problema es  $(R, r^-, n)$ , definida en un sub-conjunto de  $\mathcal{H} = \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \{0, \dots, N\}$ . Por ejemplo, si  $t = I$ ,  $r \in \{r_0, r_0 + \Delta s, r_0 - \Delta s\} \subset \mathcal{S}$ . Resulta que la pérdida en términos de complejidad de cálculo para restringir los cálculos numéricos para el dominio exacto de la variable estado superan la ganancia resultante de la reducción del número de cálculos. En consecuencia, se decide saltar, considerando las limitaciones del dominio, mientras se realiza la optimización del algoritmo y se calcula la función valor en todo el dominio  $\mathcal{H}$ .

### 3.2. Algoritmo de programación dinámica.

Habiendo identificado la variable estado, el siguiente paso es el cálculo recursivo de la función valor  $V^*$  y la determinación de la estrategia de refinanciación óptima consistente en el  $N$ -ésimo tiempo de parada estrictamente creciente de  $\mathcal{T}$ -valorada.

#### • Función Valor en $T$ :

En el momento  $T$ , el deudor paga el capital vivo  $T-1$  más los intereses devengados entre  $T-1$  y  $T$ . Entonces el contrato se extingue y se vuelve

$$V(T, (x, y, r, n)) = 0,$$

para todo  $y, x, r, n$  admisibles.

#### • Función Valor en $T-1$ :

Si ninguna opción de refinanciación está, ya, disponible, *p.ej.*:  $n = 0$ , el deudor incurre en un pago igual a  $T-1$ , una deuda pendiente,  $y$ , más los intereses devengados entre  $T-1$  y  $T$  de acuerdo a la tasa  $r$ , que es

$$CNR^0(T-1, y, x, r) = y \times c(r) \times \mathcal{T}^*(T-1),$$



Donde  $c(r) := (1 + r/52)$ ,  $J^*(t) := 1/(T - t)$  es el complemento al coeficiente  $J(t)$  a la unidad. Si alguna opción de refinanciación sigue estando disponible, es decir  $n > 0$ , se compara con el coste  $CR$  resultante de la refinanciación, es decir,  $\alpha = 1$  con el  $CNR$ , coste resultante de continuar en las condiciones establecidas, es decir  $\alpha = 0$ . La primera es la suma de los intereses  $CP_{[T-1,T]}(y,x)$  acumulados en la deuda pendiente y sobre el periodo entre  $T - 1$  y  $T$  de acuerdo a la nueva tasa de mercado  $x$  y a la nueva función de descuento de valor esperado  $DEC(T, y, x, r, n - 1)$  calculada un periodo en el tiempo adelante, es decir, en  $(T - 1) + 1 = T$ , correspondiente a una oportunidad menos de refinanciación, que es:

$$\begin{aligned} CNR(T - 1, y, x, r) &= CP_{[T-1,T]}(y, x) + DEC(T, y, x, r, n - 1) \\ &= y \times c(r) \times J^*(T - 1) + 0 \end{aligned}$$

Este último es definido de manera similar, excepto por la nueva tasa de deuda que ahora es igual a la tasa de la deuda actual  $r$ :

$$\begin{aligned} CNR(T - 1, y, x, r) &= CP_{[T-1,T]}(y, x) + DEC(T, y, x, r, n) \\ &= y \times c(r) \times J^*(T - 1) + 0 \end{aligned}$$

El valor de la función  $T - 1$  es pues:

$$\begin{aligned} V(T - 1, (y, x, r, n)) & \tag{7} \\ &= \begin{cases} \min\{CR(T - 1, y, x, r, n), CNR(T - 1, y, x, r, n)\}, & n \geq 1 \\ CNR^0(T - 1, y, x, r), & n = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \min\{y \times c(x)J^*(T - 1), y \times c(r)J^*(T - 1)\}, & n \geq 1 \\ yc(r)J^*(T - 1), & n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Desde que  $c(\cdot)$  es una función creciente y ambos  $y$  y  $J^*(T - 1)$  son positivos, si  $n > 0$ , la decisión óptima es refinanciar la hipoteca, siempre que la nueva tasa de mercado  $x$  sea inferior a la tasa de deuda pendiente  $r$ . La política de control óptima en  $T - 1$  es:

$$\begin{aligned} \alpha(T - 1, (y, x, r, n)) &= \alpha(T - 1)(x, r, n) \tag{8} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \text{ y } x < r, \\ 0 & \text{si } n = 0 \text{ y } r \leq x \end{cases} \end{aligned}$$

#### • Función Valor en $t$

El valor de la función en  $t$  es calculado como en la fórmula 7 pero reemplazando  $T - 1$  por  $t$ :

$$\begin{aligned} V(t, (y, x, r, n)) & \tag{9} \\ &= \begin{cases} \min\{CR(t, y, x, r, n), CNR(t, y, x, r, n)\}, & n \geq 1 \\ CNR^0(t, y, x, r), & n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La diferencia principal aquí es que se necesitan cálculos más intensivos:

$$\begin{aligned} CNR(t, y, x, r) &= CP_{[t,t+1]}(y, x) + DEC(t + 1, y, x, r, n - 1) \tag{10} \\ &= yc(x) \times J^*(t) + E^{P_x} \left( V(t, (B(t + 1), x, n - 1)) \right), \end{aligned}$$

Donde  $\mathcal{J}^* := 1/(T - t)$  es el complemento a uno de los coeficientes  $\mathcal{J}(t)$  y el símbolo “.” indica el argumento con respecto a qué expectativa va a ser calculada. Se ha de tener en cuenta que (a), el equilibrio en  $t+1$  es igual a  $B(t+1) = c(r(t)B(t) \mathcal{J}(t))$ , (b), el valor esperado es calculado sobre los posibles valores tomados por la tasa de mercado  $R(t+1)$  y (c), los factores  $V$  en el producto  $y \times V^*$ , coste de refinanciación, se vuelven:

$$\begin{aligned} CR &= yc(x)\mathcal{J}^*(t) + E^{P_x}(V(t+1, (c(x) y \mathcal{J}(t), R(t+1), (\cdot), x, n-1))) \\ &= yc(x)\mathcal{J}^*(t) + c(x)\mathcal{J}(t)yE^{P_x}(V^*(t+1), (R(t+1)(\cdot), x, n-1))) \end{aligned}$$

Cálculos análogos para el coste de continuación llevan a:

$$\begin{aligned} CNR &= CP_{[t,t+1]}(y, r) + DEC(t+1, y, x, r, n-1) \\ &= yc(r)\mathcal{J}^*(t) + E^{P_x}(V(t+1, (B(t+1), \cdot, r, n))) \\ &= yc(r)\mathcal{J}^*(t) + c(r)\mathcal{J}(t)yE^{P_x}(V^*(t+1), (R(t+1)(\cdot), r, n))). \end{aligned}$$

El mismo coste de continuación cuando todas las opciones han sido ejercidas, es decir,  $n = 0$ , es

$$CNR^0(t, y, x, r) = CNR(t, y, x, r, 0).$$

Mediante la recopilación de todas estas expresiones y dividiendo por el saldo pendiente  $y$ , se da la aproximación a una fórmula para el tiempo  $t$  de la función de valor unitaria:

$$V^* = \begin{cases} \min(c(x)\mathcal{J}^*(t) + \\ \quad + c(x)\mathcal{J}(t)E^{P_x}(V^*(t+1), (R(t+1)(\cdot), x, n-1))), & \text{si } n \geq 1, \\ c(r)\mathcal{J}^*(t) + c(r)\mathcal{J}(t)E^{P_x}(V^*(t+1), (R(t+1)(\cdot), r, 0))), & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

La regla de parada óptima en  $t$  no es tan simple como en la fórmula (8) ya que se necesita minimización explícita para decidir si financiar de nuevo o no. Un último comentario es que la probabilidad bajo la cual se toman las expectativas está determinada por la fórmula del punto 2.2 (hipoteca con tipo flexible), a través de la regla  $P_x(\{y\}) := P(x, y)$  en todos los casos.

### • Función Valor en 0

En  $t = 1$ , la función de valor unitario  $V^*$  se convierte en independiente de las variables  $r$  y  $n$ . De hecho, ésta es la primera vez en la que al deudor se le permite refinanciar y todas las opciones  $N$  están disponibles. Hay que tener en cuenta que la tasa de la deuda en  $[0, 1]$  es  $r_0$  y  $R(1) \in \{r_0, r_0 + \Delta s, r_0 - \Delta s\}$ . La función valor es dada por  $V = V^*(0, (r_0, r_0, N)) = c(r_0)\mathcal{J}^*(0) + c(r_0)\mathcal{J}^*(0) \times E^{P_{r_0}}(V^*(1, (\cdot, r_0, N)))$ . Este es el precio justo del contrato de hipoteca en el momento 0.

### 3.3. Costes de transacción.

Para proporcionar un incentivo eficaz, muchas hipotecas prescriben una cuota para solicitar un pago por anticipado: el deudor hipotecado que desea extinguir el contrato está obligado a pagar un coste adicional que generalmente oscila entre 0.5 y 2 puntos porcentuales sobre el capital pendiente. Para incluir esta función en el modelo, es necesaria una pequeña modificación. Una vez más, la función valor se factoriza como:

$$V(t, (y, x, r, n)) := y \cdot V^*(t, (x, r, n)). \quad (11)$$

Desde que los costes de transacción son proporcionales a los saldos pendientes pueden ser incluidos en la función valor como una constante añadiéndose a la función  $CR$ . Sea  $\varphi$  una representación de la cuota del saldo pendiente que se destaca como una tarifa pre-pago. En general, la función valor en  $t$   $V^* = V^*(t, (x, r, n))$  por unidad de equilibrio se calcula como:

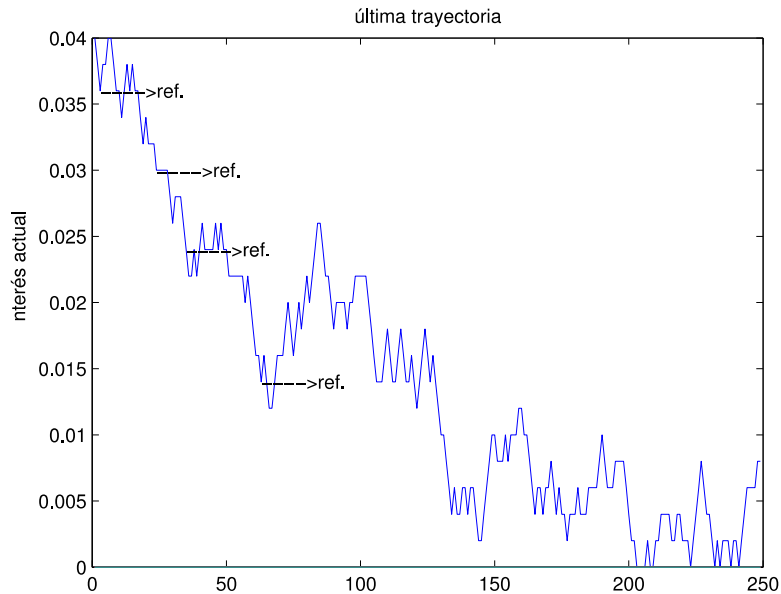
$$V^* = \begin{cases} \min(c(x)\mathcal{J}^*(t) + \\ + c(x)\mathcal{J}(t) E^{P_x}(V^*(t+1), (R(t+1)(\cdot), x, n-1))) + \varphi, & \text{si } n \geq 1, \\ c(r)\mathcal{J}^*(t) + c(r)\mathcal{J}(t) E^{P_x}(V^*(t+1), (R(t+1)(\cdot), x, n-1))), & \\ c(r)\mathcal{J}^*(t) + c(r)\mathcal{J}(t) E^{P_x}(V^*(t+1), (R(t+1)(\cdot), r, 0))), & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

#### 4. Resultados.

La implantación y simulación del modelo expuesto anteriormente se ha hecho usando Matlab©. Para ello se ha calculado el valor justo del contrato de hipoteca  $V(0, (I, r_0, N))$  correspondiente a una tasa  $r_0 = 3.5\%$  con un número de oportunidades de refinanciación  $N = 4$ . Éste es el coste mínimo para el deudor hipotecario, es decir, la resultante de la política de control óptimo, obteniendo un coste óptimo igual a  $1.4404$ .

La política de refinanciación óptima está expresada como una regla de transformación de cualquier posible configuración de la variable de estado en una acción que consiste en continuar o refinanciar la hipoteca. Para tener una idea concreta acerca de la política óptima, se traza una muestra del proceso de la tasa de mercado e indicamos los cuatro tiempos óptimos de refinanciación (figura 1).

**Figura 1. Ejemplo de trayectoria de la tasa de interés de mercado.**



La expresión “-> ref” indica los 4 tiempos óptimos de refinanciación.

Fuente: Elaboración propia.

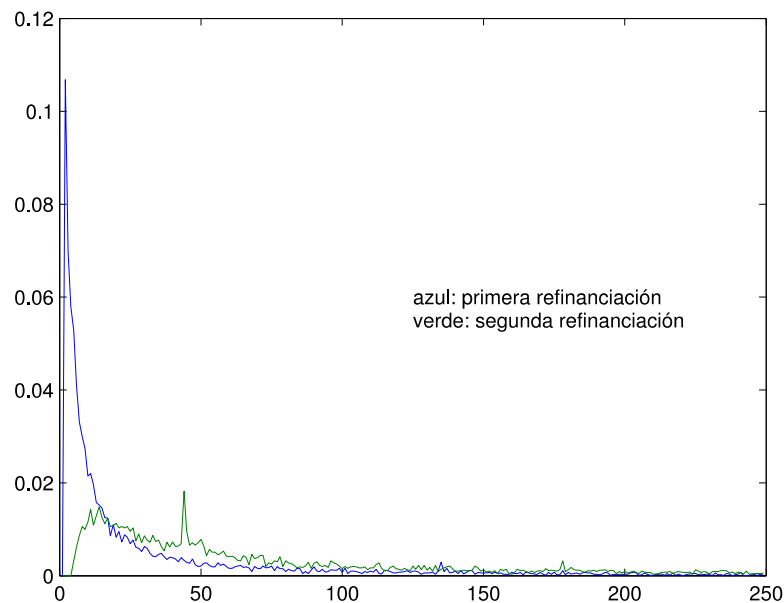
Se puede observar que, para los parámetros simulados, todas las opciones de refinanciación son ejercidas en las primeras 50 semanas, muy poco tiempo en comparación con el horizonte de amortización. Mientras que el tipo de interés de mercado incrementa, ninguna refinanciación tiene

lugar. En las semanas posteriores a la última refinanciación, alrededor de la semana 60, las tasas de mercado crecen para luego, volver a decrecer alcanzando en alguna ocasión el 0.

Una imagen más clara de la política de control óptimo se obtiene mediante el cálculo de las distribuciones de los cuatro tiempos óptimos de refinanciación. Las expresiones analíticas para estas distribuciones no están disponibles. Sin embargo, se puede calcular una estimación de la muestra de su forma mediante la simulación de un gran número de trayectorias, a continuación, guardar los correspondientes tiempos óptimos de parada y, finalmente, calcular el histograma de frecuencias relativas de los cuatro tiempos de refinanciación. La figura 2 muestra una distribución de probabilidad de la muestra para las dos primeras veces de refinanciación óptimas, obtenida a través de 10000 muestras del proceso de la tasa de mercado. Esta distribución se ajusta a una de tipo gamma, aunque depende, en este caso, del proceso de simulación seguido.

La primera opción tiende a ser ejercida dentro de las dos primeras semanas, mientras que la segunda parada parece abarcar un periodo de tiempo más amplio. Es interesante notar que una refinanciación de la opción no se ejerce durante el primer periodo. La primera refinanciación muestra una distribución de punta, con un máximo alcanzado en  $t = 2$ . Parece que, si la tasa de mercado disminuye durante el primer periodo, la alta proximidad al periodo inicial tiende a compensar la ventaja derivada de la refinanciación. Por el contrario, si la tasa de mercado decrece en el segundo periodo, este efecto se invierte y la hipoteca se refinancia.

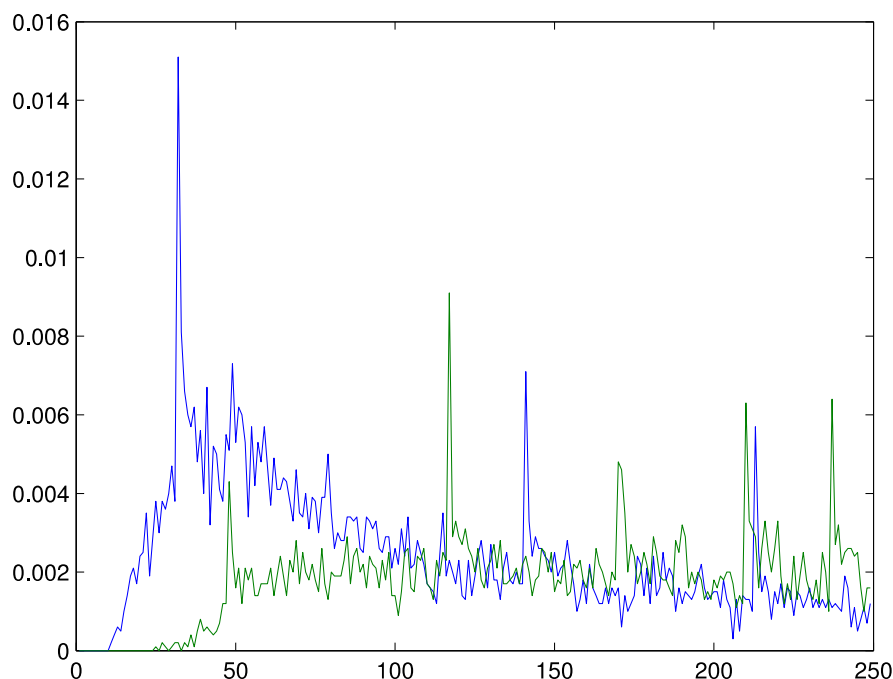
**Figura 2. Muestra de la distribución de probabilidad de las dos primeras refinanciaciones sobre  $n = 10000$  muestras.**



Fuente: Elaboración propia.

La figura 3 muestra las dos últimas refinanciaciones, donde se observa que estos tiempos de refinanciación se agrupan en el extremo más alejado del horizonte temporal; sin embargo, también muestran un comportamiento con picos muy marcados.

**Figura 3. Muestra de la distribución de probabilidad de las dos últimas refinanciaciones sobre n = 10000 muestras.**



Fuente: Elaboración propia.

## 5. Conclusiones.

El desarrollo de un modelo de refinanciación de una hipoteca de este tipo puede ser interesante porque es un caso bastante común hoy día el que un prestatario quiera refinanciar su hipoteca dadas las condiciones actuales. Además, se trata de una simulación que al estar basada únicamente en conceptos matemáticos y posterior desarrollo con el software pertinente no hemos tenido que recurrir a ninguna base de datos, hecho que, por otro lado, planteó una dificultad elevada el conseguir datos reales del mercado.

El objetivo de dicha simulación era obtener la política de refinanciación óptima dadas unas condiciones de partida, dicha política, como se ha dejado claro anteriormente estaba representada como una regla de transformación de la variable de estado en una acción que consiste en continuar con la hipoteca actual o refinanciarla, estando fijadas las oportunidades de refinanciación en 4. Como resultado, para esas 4 oportunidades de refinanciación, se ejercen todas las opciones de refinanciación en las primeras 50 semanas y queda claro que tanto elevadas tasas de entrada como altas tarifas tienen un efecto negativo en el mínimo coste sostenible por el hipotecado. Es importante mencionar aquí que el modelo representa una opción de refinanciación simple, sin tener en cuenta otros elementos relevantes a la hora de considerar una refinanciación, como hacen Tai y Przasnyski (2000), donde incluyen factores como la reducción en las cuotas, el periodo de espera para el nuevo préstamo (que suele haber unos días hasta que se concede donde se generarían ciertos intereses), el coste de oportunidad de la refinanciación o el tipo de interés marginal del deudor.

La cuestión ahora es si las proposiciones de *Basilea III* influirán de forma significativa en el sentido de ayudar a que las probabilidades de otra crisis como la del 2008, sean ampliamente

reducidas (Walter, 2010; Hannoun, 2010). A priori, dicho acuerdo contiene reformas bastante útiles: apoyo a un ratio de apalancamiento, un regulador de capital y la propuesta de tratar con la pro-ciclicidad a través de provisiones dinámicas basadas en las pérdidas esperadas. Sin embargo, también se demanda más implicación de los agentes sociales, de los gobiernos de cada país con un sistema financiero estable en el sentido de que ayuden a los más inestables, que aporten sus conocimientos para asegurar la solidez financiera de un sistema bastante mermado en calidad y credibilidad actualmente, que se persiga cualquier conducta sombría de omisión u ocultación de información y se penalice, regulándose más aún, cualquier actividad financiera y acentuando los sistemas de planificación, control y supervisión en todos los países, sobre todo aquellos más expuestos a cualquier tipo de riesgo.

Investigaciones de autores como Kalotay, Yang y Fabozzi (2008), proponen aplicar herramientas de valoración de bonos para la gestión del riesgo del hogar. Otros como Sy (2008) desarrollan una corriente basada en los modelos causales para evitar los defectos de los actuales modelos de crédito. Y más recientemente, Rasmussen, Madsen y Poulsen (2014) plantean un modelo basado en programación estocástica para la elección de hipotecas y aplicándolo al mercado hipotecario danés, comparan el rendimiento con un punto de referencia, que no es otro que la simple “regla de oro”, basada en la práctica por la que se rigen los bancos daneses a la hora de aconsejar a los hipotecados. Es por ello que solo con el entendimiento de la causalidad del proceso de impago del crédito podremos construir modelos deductivos según señalan Capuano, (2008) y Campbell (2012), o las recientes innovaciones en este campo como son los modelos de correlaciones de impago usando modelos cópula que sean capaces de hacer predicciones en un entorno y una estructura de mercado cambiantes en un contexto donde se demanda un sistema financiero de vivienda eficiente y estable.

## Referencias

- Campbell, J.Y. (2012). *Mortgage Market Design*, NBER Working Paper, nº w1939.
- Capuano, C. (2008). *Recent Advances in Credit Risk Modelling*, IMF Working Paper.
- Hannoun, H. (2010). The Basel III Capital Framework: A Decisive Breakthrough. *BoJ-BIS high Level Seminar on "Financial Regulatory Reform: Implications for Asia and the Pacific"*, Hong Kong SAR, 22 November 2010.
- Kalotay, A.J., Yang, D., & Fabozzi, F.J. (2008). Optimal Mortgage Refinancing: Application of Bond Valuation Tools to Household Risk Management. *Applied Financial Econometric Letters*, 4, 141-149.
- Longstaff, F.A. (2005). Optimal Recursive Refinancing and the Valuation of Mortgage-Backed Securities. *Real Estate Economics*, 33(4), 619-661.
- Pliska, S.R. (2006). *Mortgage Valuation and Optimal Refinancing*. Stochastic Finance, Springer.
- Rasmussen, K.M., Madsen, C.A., & Poulsen, R. (2014). Can Home Owners Benefit from Stochastic Programming Models? - A Study of Mortgage Choice in Denmark. *Computational Management Science*, 11(1), 5-23.
- Roncoroni, A., & Moro, A. (2006). Flexible-Rate Mortgages. *International Journal of Business*, 11(2), 143-157.
- Roncoroni, A., & Fusai, G. (2008). *Implementing Models in Quantitative Finance: Methods and*

*Cases*, 2<sup>nd</sup> ed, Springer.

Sy, W. (2008). *Credit Risk Models: Why They Failed in Credit Crisis*. Australian Prudential Regulation Authority (Sydney).

Tai, L.S., & Przasnyski, Z. H. (2000). Evaluating Refinancing Strategies Precisely. *Journal of Financial and Strategic Decisions*, 13(3), 9-21.

Walter, S. (2010). Basel III and Financial Stability. *5th Biennial Conference on Risk Management and Supervision*. Financial Stability Institute, Bank for International Settlements, Basel, 3-4 November 2010.



## Efectos económicos de reformas impositivas alternativas para el combate a la pobreza en México para el año 2012

BELTRÁN JAIMES, LUZ DARY

Departamento de Gestión de la Tecnología e Innovación  
Instituto Politécnico Nacional  
Correo electrónico: lbeltranj@ipn.mx

CARDENETE FLORES, MANUEL ALEJANDRO

Departamento de Economía  
Universidad Loyola  
Correo electrónico: macardenete@uloyola.es

DELGADO LÓPEZ, MARÍA DEL CARMEN

Departamento de Economía  
Universidad Loyola  
Correo electrónico: mcdelgado@uloyola.es

### RESUMEN

Esta investigación analiza el impacto económico de tres reformas impositivas alternativas sobre la economía mexicana y sobre los índices de pobreza y de desigualdad, que reforzarían el programa actual para el combate a la pobreza en el país. Como principal resultado se tiene que para generar un mayor impacto económico y reducir los índices de pobreza en mayor proporción, se deberá incrementar los fondos del programa Oportunidades financiado a través de un aumento del 5% al ISR, para transferirlo a los tres primeros deciles, cuidando su adecuada focalización, aunado a transferencias directas a la salud y educación.

**Palabras clave:** modelo multisectorial, matriz de contabilidad social, pobreza, desigualdad.

**Clasificación JEL:** C67; H53; I32; I38.

**MSC2010:** 00A69; 62P20; 91B66.

Artículo recibido el 21 de junio de 2018 y aceptado el 12 de febrero de 2019

El nombre de los autores aparece en orden alfabético teniendo la misma responsabilidad sobre el artículo



# Economic effects of alternative tax reforms for the fight against poverty in Mexico for 2012

## ABSTRACT

This research analyzes the economic impact of three alternative tax reforms on the Mexican economy, poverty and inequality, to strengthen the current program to fight against poverty in the country. The main result must be to generate greater economic impact and reduce poverty in greater proportion, should increase *Oportunidades* program funds financed through an increase of 5% to ISR and transferred to the first three deciles caring proper targeting, coupled with direct health and education transfers.

**Keywords:** multisectoral model; social accounting matrix; poverty; inequality.

**JEL classification:** C67; H53; I32; I38.

**MSC2010:** 00A69; 62P20; 91B66.



## 1. Introducción.

Como producto de la preocupación mundial acerca de la desigualdad y pobreza, han sido propuestos como parte de la política social de los países en vías de desarrollo diferentes programas para su combate. Algunos de ellos son los programas de Transferencias Monetarias Condicionadas (TMC), cuyo objetivo es romper el ciclo intergeneracional de la pobreza por medio de la inversión en capital humano con la que debería ser posible que la siguiente generación salga de la pobreza. Asimismo, estos programas afectan tanto el ingreso como el consumo de las familias, además de los servicios sociales, el nivel educativo y la salud y nutrición de la población receptora de esas transferencias.

Con el fin de mejorar los efectos de dichos programas sobre la población vulnerable, han surgido diferentes enfoques para su diseño y evaluación. Uno de estos es el enfoque de manejo de riesgos, que busca desarrollar capital humano como herramienta para generar capacidades y combatir la pobreza en el largo plazo. De acuerdo a Holzmann y Jorgensen (2000), el enfoque de riesgos sociales se centra en los pobres, ya que son los más vulnerables a los riesgos, pues carecen de instrumentos adecuados con los que podrían superar y eliminar dichos riesgos, impidiéndoles involucrarse en actividades con más riesgo, pero más rentables que les permitan salir de dicha pobreza.

Los programas de TMC buscan generar capital humano, principalmente a través del fomento a la educación, salud y alimentación. Según Skoufias y Parker (2001), este tipo de programas resultan ser una buena vía para el combate a la pobreza, ya que reducen el costo de oportunidad de la escolarización y refuerzan el efecto ingreso de la transferencia, pues tanto el trabajo infantil como la escolaridad son sustitutos. A corto plazo busca reducir la pobreza mediante las transferencias de ingreso. A largo plazo busca fortalecer las capacidades humanas a través del acceso a servicios de salud y educación, o a través del mejoramiento de unos mínimos sociales, por lo que, al momento de evaluarla, se esperan diferentes efectos en estas dimensiones (Cecchini & Martínez, 2011).

Para el caso de México, el programa más importante del gobierno desde hace más de una década ha estado en funcionamiento bajo el nombre de Oportunidades<sup>1</sup> cuyo objetivo es favorecer el desarrollo de las capacidades asociadas a la educación, salud y nutrición de las familias beneficiarias, para contribuir a la ruptura del ciclo intergeneracional de la pobreza.

No obstante, los programas de transferencias condicionadas presentan algunas limitaciones; Britto (2005) menciona que es subjetivo que las transferencias destinadas a la educación se transformen en el largo plazo en mayores ingresos monetarios, ya que depende de otras variables como la oferta educativa, su calidad, el desempleo, los salarios percibidos, etc. Además, estos programas deben incluir medidas para el medio plazo que fomenten la inclusión laboral y la generación autónoma de ingresos de los adultos en edad de trabajar. Así, como considerar la calidad de la salud y educación indicadores finales de capital humano.

De acuerdo con Cecchini y Madariaga (2011), las repercusiones de las transferencias en los indicadores de pobreza a nivel nacional se manifiestan en el índice de brecha de pobreza (FGT ( $\alpha=1$ )) y severidad de la pobreza ( $\alpha=2$ ) ya que las transferencias suelen focalizarse en los más pobres. Sin embargo, no siempre representan un monto elevado, de manera que logran acercarlos

---

<sup>1</sup> Fue creado en 1997 bajo el nombre de Progresá con una cobertura de 300.000 familias y solo operaba en el ámbito rural; a mediados del 2002 este programa cambió de nombre a Oportunidades ampliando su cobertura y expandiendo las becas a educación media superior. En el 2014 este programa cambia nuevamente de nombre a Prospera incluyendo acciones relacionadas con el fomento productivo, generación de ingresos, bienestar económico, inclusión financiera y laboral, educación, alimentación y salud. Para el caso de esta investigación, se analiza bajo el nombre de Oportunidades ya que es la que cuenta con mayor información hasta el momento (Prospera, 2015).

a la línea de la pobreza, pero no necesariamente superarla. Por otro lado, afirman que Oportunidades presenta resultados importantes en cuanto a la distribución del ingreso (una reducción de la desigualdad de alrededor de 2,7 puntos). Asimismo, afirma que busca efectos de largo plazo<sup>2</sup>, y no solo en un momento dado.

Yaschine y Dávila (2008) exponen que, estos programas por sí solos no permiten superar la pobreza. Para el caso de México, más concretamente del programa Oportunidades, pasados tres años del programa, solo el 2% del total de las familias alcanzan los umbrales de egreso del sistema y después de seis años el 20%. De estos, el 42% de los egresados del programa vuelve a vivir en condiciones de pobreza.

Por otro lado, Villatoro (2005) encuentra que los programas de TMC logran, en algunos casos, reducir la brecha de la pobreza, y en otros, mitigar las consecuencias de una crisis económica. Pero, no queda claro su capacidad de lograr que los beneficiarios superen la línea de la pobreza; ésta depende del monto de la transferencia, de la focalización y de la ausencia de contracciones económicas. En el largo plazo, la superación de la pobreza depende de la capacidad de generación de ingreso de los hogares, pero, a su vez depende de la calidad del aprendizaje adquirido en el periodo previo y las tasas de desempleo. Por lo que se debería tener en cuenta el mejoramiento de la educación y los programas de inserción laboral. Sin embargo, Gertler, Martínez y Rubio (2012) encontraron que los hogares beneficiados después de 6 años de permanencia en el programa incrementan su ingreso en un 22%.

No obstante, la focalización es un tema principal en este tipo de programas y Oportunidades no es la excepción. De acuerdo con Escobar-Latopí, González de la Rocha y Cortés (2005), el programa ha presentado problemas de focalización, ya que la mayoría de los hogares que están logrando salir del programa por haber superado la línea de la pobreza, no debieron haber estado beneficiados. Asimismo, Campos-Vazquez, Esquivel y Lustig (2014) concluyen que, en zonas rurales muy marginadas, las familias beneficiarias no tienen oportunidad de dejar de ser beneficiarios (superar el umbral de pobreza) debido a la falta de consideración del contexto o mercado laboral de la zona en las que se encuentra la familia.

Este artículo tiene como objeto buscar alguna otra alternativa redistributiva que complemente el programa Oportunidades a través de diferentes políticas impositivas orientadas a lograr una mejor distribución de la renta, cuyos efectos se vean reflejados en los índices de pobreza y coeficiente de Gini. Aunque, el programa Oportunidades presenta un importante problema de focalización y un *background* de corrupción en este punto, este tema se sale del alcance de la investigación. En consecuencia, la propuesta tiene como objetivo definir alternativas que reemplacen o complementen dicho programa<sup>3</sup> debido a la permanencia de los niveles de pobreza, e identificar el efecto generado entre los agentes económicos y el *output* total de la economía. Finalmente, a partir de estos identificar su impacto en la desigualdad y en los índices de pobreza. Para cada una de ellas, se utiliza un modelo lineal de equilibrio general (MLEG) como metodología de análisis.

Se proponen tres escenarios alternativos para el combate a la pobreza, partiendo de la necesidad de financiarlos a través de reformas impositivas. Estos son: un aumento del Impuesto al valor agregado (IVA) del 2%, un aumento del Impuesto Sobre la Renta (ISR) del 5% y la

---

<sup>2</sup> La visión del programa Oportunidades es erradicar la pobreza para el año 2030, a través de la ruptura del ciclo intergeneracional de pobreza, reflejado en la reducción de las cifras.

<sup>3</sup> La población con un ingreso inferior a la línea de bienestar mínimo en México para el periodo 2008-2012 pasó del 16,7% a 19,4%, siendo esta diferencia estadísticamente significativa, es decir, se incrementó en 3,4 millones de habitantes. De la misma manera, el número de población con un ingreso inferior a la línea de bienestar para el mismo periodo aumentó de 49% a 52% siendo esta diferencia estadísticamente significativa, con un aumento de 4,8 millones de habitantes.

recaudación de los impuestos evadidos por uso de efectivo (IEUE). Con cada uno de ellos se realiza una simulación del impacto de la propuesta en el total de la economía, seguido de un análisis de su impacto en los índices de pobreza y en el coeficiente de Gini. Finalmente se realiza una comparación entre ellos en busca de seleccionar la simulación que arroje mejores resultados.

Cabe resaltar que, aunque el IVA y el ISR son considerados complementarios, ya que el IVA puede actuar como instrumentos de control de los causantes del ISR (Tello & Hernández, 2010), en esta investigación, como ya se señaló, se tomará como medida complementaria del programa Oportunidades, solo una de las dos propuestas: la que arroje mejores resultados en cuanto a la distribución de los ingresos. México por muchos años se ha caracterizado por ser uno de los países a nivel mundial con menor recaudación de impuestos, debido principalmente a la evasión de impuestos y a la informalidad creciente, aunado a una mala administración tributaria. Sin embargo, como menciona Casares et al. (2015), en países con gasto público ineficiente y altos grados de corrupción, es difícil realizar reformas impositivas, por lo que, resulta relevante simular los efectos de la recaudación del IEUE, que acompañe a cualquiera de las dos reformas impositivas propuestas, con el fin de suponer una mejora en la eficiencia recaudatoria.

En cuanto a recaudación de impuestos, México se ha caracterizado por tener uno de los sistemas impositivos con menor carga tributaria de América Latina. De acuerdo con Minzer, Pérez y Solís (2014) en el 2008, México ocupó el último lugar de los países latinoamericanos con unos ingresos tributarios del 8,2% del PIB, siendo el 5,3% del PIB recolectado por imposiciones directas (ISR), el 2,7% del PIB por imposiciones indirectas (IVA) y el 0,2% del PIB por otro tipo de imposiciones. México ha estado estancado prácticamente desde 1970 hasta la fecha. En este periodo, sobresalen la reforma realizada en 1980 con la inclusión del IVA, impuesto que, a la fecha, solo ha sido modificado de acuerdo con las misceláneas fiscales propuestas en cada gobierno. Situación similar con el ISR; entre las modificaciones realizadas destacan la inclusión de las ganancias de capital en la base impositiva del ingreso individual, exceptuando los movimientos en la bolsa de valores. Además, para 2007 las reducciones de las tasas tope del ISR empresarial y personal, alrededor del 28% (Sobarzo, 2007). Finalmente, la reforma del 2014 que contempla un aumento escalonado del ISR para personas físicas donde se acordó una tasa de 30% para los que ganen hasta 500 mil pesos al año, de 500 mil a 750 mil 31%; de 750 mil a un millón 32%; de 1 a 3 millones 34%, y más de 3 millones de pesos pagarán 35%. Sin embargo, estas modificaciones han mostrado tener un alcance bastante limitado que, aunado a la evasión y elusión fiscal, implican importantes pérdidas recaudatorias que impiden una adecuada redistribución del ingreso y, por ende, un menor gasto social.

Diversos estudiosos se han enfocado a investigar cómo incrementar la recaudación de los gobiernos especialmente en aquellos que presentan importantes índices de desigualdad económica, por ejemplo, Minzer, Pérez y Solís (2014) que han concluido que un aumento del ISR al noveno y décimo decil permite obtener un mayor incremento de recursos tributarios, además, que al ser la medida progresiva como lo demuestran en su investigación su efecto recae sólo en los dos deciles de más alto ingreso.

Casares et al. (2015) exponen la necesidad de una reforma tributaria, proporcionando una idea de las tasas de impuestos que implicaría en México un incremento sensible en la recaudación y, a su vez, una mejora en la distribución del ingreso. A través de un modelo de equilibrio general aplicado encontraron que, debido a la concentración del ingreso, las bases tributarias disponibles son demasiado estrechas, lo que implicaría aumentar sustancialmente las tasas efectivas, que podrían resultar poco factibles en el corto y mediano plazo.

De acuerdo con Bird y Zolt (2014) entre mayor sea la carga fiscal de un país, el potencial para incidir en la redistribución del ingreso también será mayor. Bajo esta idea, los autores argumentan que, si el ISR fuese usado para influir en la redistribución del ingreso, los países en desarrollo serían poco equitativos. Además, encontraron que, para la anterior década, el ISR fue del 38,6% de la recaudación total en los países desarrollados, mientras que en los países en

desarrollo fue de 24,3%, de las cuales las dos terceras partes corresponden a las empresas. Ahora bien, como proporción del PIB, el ISR para personas físicas en países desarrollados fue de 7,2% mientras que para países en desarrollo fue de 1,9%.

Goñi, López y Servin (2008) analizaron las estructuras tributarias para Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú para mediados del 2000, encontrando que éstas, junto a las transferencias redujeron el índice de Gini promedio de 0,52 a 0,50, mientras que para 15 economías europeas el índice de Gini promedio se redujo de 0,46 a 0,27.

Finalmente, Aguilar y Lagunas (2016), compararon los resultados en la recaudación del ISR y del IVA en México, antes y después de la reforma fiscal que entró en vigor en 2014, concluyendo que, en relación con el ISR, la reforma fiscal no tuvo un efecto significativo, pero en relación con el IVA la reforma permitió que tanto los estados más grandes como los de menor recaudación elevaran su eficiencia tributaria.

La importancia de este estudio recae en el hecho de que dado el momento del diseño e implementación de cualquier tipo de política social en el que se debe adjudicar un presupuesto, junto con ésta se debe abordar la fuente de financiamiento que mantenga el presupuesto equilibrado y, especialmente, determinar *ex-ante* los posibles efectos económicos y sociales que traerían consigo dicha política. Además, buscar el bienestar social debe ser uno de los principales puntos de las agendas gubernamentales.

Esta investigación se divide en cuatro secciones: en la segunda sección se encuentra definida la metodología aplicada en cada uno de los análisis planteados y la base de datos usada para los diferentes análisis. La tercera sección presenta los resultados de cada uno de los escenarios alternativos propuestos, incluyendo un análisis del impacto del combate a la pobreza sobre la desigualdad y los índices de pobreza, para así compararlos entre sí. Finalmente, la cuarta sección incluye las principales conclusiones.

## **2. Metodología y base de datos.**

La metodología seleccionada para comparar los efectos de cada uno de los escenarios alternativos propuestos hace parte de los llamados MLEG. Estos modelos han demostrado en diferentes investigaciones que son adecuados para analizar diversos tipos de políticas públicas como lo son los programas de TMC para el combate a la pobreza, así como lo ha hecho Sadoulet, Janvry y Davis (2001) quienes estudian el programa PROCAMPO a través de multiplicadores de ingreso, encontrando que estos tienen efectos multiplicadores cuando los receptores ponen a trabajar el dinero que reciben para generar ingresos adicionales. Asimismo, Núñez (2003) analiza transferencias a través de un análisis de sendas; Yúnez y González (2008) estiman a partir de un enfoque multisectorial los efectos en el ingreso de los hogares rurales y en la pobreza rural que podrían traer consigo cambios en sus actividades productivas a través de multiplicadores contables aplicados a una matriz de contabilidad social (MCS) agregada de diez comunidades rurales mexicanas caracterizadas por la pobreza.

Domínguez (2009) aplica un MLEG para analizar los efectos del programa Oportunidades, el programa de Atención al Adulto Mayor (PAAM) y el programa de Apoyo para las Personas con Discapacidad (PAPD) en el Estado de Nuevo León. Aguayo, Chapa y Rangel (2009) analizan el programa Oportunidades para el año 2004. González-Andrade y Fuentes-Flores (2010) analizan con un enfoque multisectorial el impacto multiplicativo en el ingreso y en la disminución de la pobreza de los hogares rurales provocado por un aumento exógeno de 100 pesos per cápita en las actividades productivas rurales. Aunque no analizan directamente un programa social, su simulación es similar a lo que sucedería con una TMC. Rodríguez y Morales (2014) analizan el impacto de las TMC de Oportunidades en Santo Domingo Yanhuitlán, economía rural, evaluando el efecto sobre el combate a la pobreza en el corto y largo plazo, aplicando modelos multisectoriales basados en MCS.

Por lo que, los MLEG muestran el impacto que genera cualquier política económica en la economía, especialmente los efectos directos, indirectos e inducidos en cada uno de los sectores inter-industrial e institucional que la componen.

Cualquier tipo de política económica no solamente afecta al sector al cual ha sido dirigida, sino que desencadena una serie de efectos que repercuten en los diferentes mercados. Por lo tanto, una práctica adecuada del *policymaker* es verificar los efectos que ocasiona tanto en los agentes en los que incide directamente como los efectos producidos en todos los sectores, siendo una metodología adecuada los MLEG.

Estos modelos permiten captar todas las interdependencias entre los sectores inter-industriales e institucionales de una economía; en particular, los efectos producidos en las variables endógenas debido a un cambio en una variable exógena, usando multiplicadores. Esto gracias al modelo Insumo-Producto (MIP) desarrollado por Leontief (1941), con el cual se llevó al campo empírico la teoría desarrollada por Walras. Los MLEG asumen los precios como exógenos y se analiza partiendo de las relaciones contables que se derivan de la MCS similar a la MIP, pero más completa ya que, la MCS tiene en cuenta el flujo circular de la renta, permitiendo captar los efectos desde los sectores productivos hacia los sectores receptores de rentas.

Para plantear estos modelos, siguiendo a Stone (1978) y Pyatt y Round (1979), primero se definen las cuentas que se consideran exógenas. A continuación se define una variación en las cuentas exógenas y se observa qué sucede con el resto de cuentas que constituyen el total de la economía. Las cuentas exógenas son las que se determinan fuera del sistema económico y representan posibles instrumentos de política económica<sup>4</sup>.

Una vez clasificadas las cuentas entre endógenas y exógenas, se procede a construir la matriz de propensiones medias al gasto ( $A_{mm}$ ). Esta resulta de dividir la matriz  $Y_{mm}$  y  $X_{km}$  entre el total de la columna.  $A_{mm}$  recoge los pagos realizados a la cuenta  $i$  por cada unidad de ingreso de  $j$ , de la siguiente manera:

$$a_{ij} = \frac{Y_{ij}}{Y_j}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (1)$$

A continuación, se agrega un vector de componentes exógenos representado por  $X_A$ ,  $X_F$ ,  $X_P$  y  $X_K$ ; un vector que representa el nivel de ingresos de las cuentas endógenas representado por  $Y_A$ ,  $Y_F$ ,  $Y_P$  y  $Y_K$ , y finalmente, un vector de pagos de las cuentas endógenas a las exógenas  $P_A$ ,  $P_F$ ,  $P_P$  y  $P_K$ .

Resultando:

$$Y_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{Y_{ij}}{Y_j} \right) Y_j = \sum_{j=1}^m a_{ij} Y_j + \sum_{j=m+1}^{m+k}; \quad n = m + k \quad (2)$$

Donde,  $m$  y  $k$  son las cuentas endógenas y exógenas respectivamente. La ecuación anterior también se puede expresar como sigue:

---

<sup>4</sup> Como se mencionaba anteriormente, el modelo descrito ha sido ampliamente utilizado en diferentes estudios, y con el objetivo de ampliar la información con respecto a la metodología usada, se recomienda seguir a Lima et al. (2005), Cámara (2008), Campoy-Muñoz, Cardenete y Delgado (2017) y Cardenete y Delgado (2013).

$$\begin{bmatrix} Y_A \\ Y_F \\ Y_P \\ Y_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_I & 0 & C_F & I \\ W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & T & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_A \\ Y_F \\ Y_P \\ Y_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_A \\ X_F \\ X_P \\ X_K \end{bmatrix} \quad (3)$$

Finalmente, la matriz queda dividida en cuatro submatrices  $A_{mm}$ ,  $A_{mk}$ ,  $A_{km}$  y  $A_{kk}$ , quedando de la siguiente manera:

$$Y_m = A_{mm}Y_m + A_{mk}Y_k \quad (4)$$

$Y_m$  y  $Y_k$  representan los ingresos totales tanto de las cuentas endógenas como de las exógenas y  $A_{mm}$  corresponde a las actividades productivas, que son los coeficientes técnicos que se obtienen con la MIP. Ahora, se despeja  $Y_m$  y queda la ecuación matricial así:

$$Y_m = (I - A_{mm})^{-1} \cdot A_{mk} \cdot Y_k \quad (5)$$

$$Y = M \cdot X_m \quad (6)$$

Donde  $(I - A_{mm})^{-1}$  es llamada  $M$  y es la matriz de multiplicadores lineales (ML); esta matriz muestra el impacto que genera un aumento unitario en las cuentas exógenas sobre las rentas de cada una de las cuentas endógenas. En otras palabras, indica las cuentas que generan mayores efectos expansivos en los ingresos de la economía total. Por otro lado, se tiene a  $A_{mk} \cdot Y_k$  como  $X_m$  y representa las inyecciones de ingreso emitidas por las cuentas exógenas y recibidas por las endógenas<sup>5</sup>.

Asimismo, se busca analizar el impacto de las propuestas sobre la desigualdad y la pobreza. Para el primero se utiliza el coeficiente de Gini y, para el segundo, se utiliza el índice Foster, Greer y Thorbecke (FGT) (Foster, Greer & Thorbecke, 1984), para determinar las condiciones de pobreza en las que se encuentra la población en estudio, así como sus carencias en los niveles de consumo individual.

El índice FGT, es un índice de carencias en el consumo privado, que toma como referencia una determinada línea de pobreza individual, como lo es un salario mínimo diario de la población total y de la población económicamente activa. A partir de esta se calcula la proporción de la población en condiciones de pobreza extrema<sup>6</sup>. Valores superiores del índice FGT reflejan un deterioro en el nivel de satisfacción del consumo individual.

Representado por:

$$P_\alpha = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^q \left(\frac{z-x_i}{z}\right)^\alpha; \quad \alpha \geq 0 \quad (7)$$

Donde,  $\alpha$  es un parámetro que especifica la sensibilidad del índice,  $z$  es la línea de pobreza,  $n$  es el número total de hogares,  $x_i$  es el ingreso del hogar  $i$ -ésimo,  $q$  es el número de hogares pobres,  $z-x_i$  es la brecha de pobreza del  $i$ -ésimo hogar y  $(z-x_i)/z$  la estandarización de la brecha de pobreza del  $i$ -ésimo hogar.

<sup>5</sup> Para la modelización fue usado el Software SimSipSam creado para el Banco Mundial por Parra y Wodon (2009). A partir de esta herramienta y la base teórica especificada anteriormente, es posible replicar las simulaciones realizadas en esta investigación.

<sup>6</sup> La pobreza extrema se define como el número de habitantes cuyo ingreso se encuentra por debajo de la línea de pobreza sobre la población total.

$\alpha = 0$  es el porcentaje de personas en pobreza monetaria.  $\alpha = 1$  es la brecha de pobreza, o el porcentaje promedio en el que los pobres deberán aumentar sus ingresos para superar la pobreza.  $\alpha = 2$  constituye la medida más interesante, una medida de la severidad de la pobreza, o la distribución de los gastos per cápita entre los pobres. El índice FGT se expresa como una combinación de una medida de desigualdad, y la razón de la brecha del ingreso en una forma similar a la de Sen (2000). Además, está generalizada a una familia de medidas paramétricas donde el parámetro puede ser interpretado como un indicador de aversión a la pobreza.

Finalmente, como medida de desigualdad de ingresos, se toma el Índice de Gini. Éste varía entre 0 y 1, donde 0 indica perfecta igualdad, es decir, todos los individuos poseen los mismos ingresos. Por el contrario, un valor de 1 hace referencia a perfecta desigualdad, es decir, solo un individuo posee todos los ingresos y los demás no poseen ninguno.

El cálculo del Índice de Gini para esta investigación, se realiza para datos agrupados (Medina, 2001): primero se ordenan los hogares en forma ascendente conforme a su ingreso; posteriormente, se definen intervalos de igual tamaño, que para este caso corresponden a deciles de ingresos, donde cada grupo deberá concentrar el 10% de las observaciones.

Una vez definida esta información, se procede a calcular el Índice de Gini a partir de una de las expresiones que existe para datos agrupados:

$$CG = 1 - \sum_{i=1}^n x_i(Y_i + Y_{i+1}) \quad (8)$$

Donde,  $n$  representa el número de grupos,  $x_i$  es el porcentaje de población en el grupo  $i$  y  $Y_i$  es el ingreso acumulado en el grupo  $i$ .

Como base de datos para los diferentes escenarios alternativos propuestos, se usa una MCS construida para México, llamada MCS-MX08 por Beltrán, Cardenete, Delgado y Núñez (2016).

Para realizar la primera simulación correspondiente al incremento del IVA de 2% para ser destinado al combate a la pobreza, se usa la MCS-MX08, endogeneizando la cuenta de impuestos sobre los bienes y servicios. Por lo tanto, se consideran 36 cuentas endógenas y 6 cuentas exógenas. De acuerdo a Cardenete y Delgado (2011), las cuentas endógenas corresponden a las actividades productivas, remuneraciones a los factores productivos (trabajo y capital), sociedades y los hogares. Las cuentas exógenas corresponden al gobierno, la cuenta de capital y el resto del mundo. Se usa esta endogeneización debido a que es la cuenta a la que se le quiere aplicar el shock.

Para el caso de la segunda y tercera simulación, se usa la MCS-MX08 considerando 35 cuentas endógenas y 6 cuentas exógenas.

### 3. Análisis y resultados.

En este apartado se presentan los efectos económicos del impacto realizado con cada uno de los escenarios alternativos, seguido de sus efectos sobre la desigualdad y el índice de pobreza de acuerdo con FGT (1984). Por último, es presentado un comparativo entre cada uno de los resultados, con el fin de encontrar la combinación con mayor impacto positivo a la economía mexicana.

La primera simulación se basa en la propuesta realizada por el Gobierno Federal sobre un impuesto general a las ventas y servicios del 2% para combatir la pobreza como parte de una iniciativa de la Ley de Ingresos del Presupuesto de Egresos de la Federación para el Ejercicio del



2010. Esta ley tenía como nombre “Ley de la Contribución para el Combate a la Pobreza”<sup>7</sup>. Su objetivo radicaba en la creación de un impuesto al consumo que permitiera una mayor recaudación para inyectar con más fondos a los programas sociales que benefician a los hogares pobres. El planteamiento sugerido para esta investigación retoma las ideas de esta propuesta realizada para el 2010 pero, definido no como un nuevo impuesto sino como un aumento del 2% del IVA pasando este del 16% al 18% manteniendo su estructura inicial, con el fin de que no se graven los alimentos y las medicinas y no afecte el poder de compra y por ende la demanda de bienes y servicios de la población.

La segunda simulación se basó en Fuentes (2012), quien afirma que una forma de evasión es el uso de efectivo, ya que complica la identificación de su origen, debido a su carácter libre y anónimo. Las transacciones realizadas con este medio de pago no son rastreables o fácilmente identificables convirtiéndose en una razón para la evasión de impuestos. Para el 2008, que corresponde al año base de estudio, los IEUE corresponde a 171.948 millones de pesos mexicanos (9.050 millones de dólares americanos), que como proporción del Producto Interno Bruto (PIB) representa el 1,41%. La propuesta de esta investigación busca responder al interrogante ¿qué pasaría si se lograra recaudar dicho monto de la evasión de impuestos debido al uso de efectivo, con el objetivo de ser utilizado para el combate a la pobreza?

Finalmente, la tercera simulación corresponde a la reforma fiscal para el 2014 aprobada el 31 de octubre del 2013 que propone entre otras reformas fiscales, un aumento del ISR para personas físicas que va de un 30% a un 35% escalonado en tres renglones adicionales de la siguiente manera:

A partir de los 750.000,01 pagarán 32%, a partir de 1.000.000,01 pagarán 34% y a partir de los 3.000.000,01 pagarán el 35%. La propuesta radica en que este recaudo del 5% adicional realizado se podrá destinar para el combate a la pobreza<sup>8</sup>.

En general, los procesos de reformas fiscales suelen ser complicados, ya que llevan implícitos costos que restan efectividad (CEEY, 2013). Las propuestas presentadas en esta investigación, en especial la relacionada con la recaudación de lo evadido por manejo de efectivo, implicaría realizar diferentes ajustes por parte del gobierno que supondrían unos costos para la administración tributaria, situación que se sale del alcance de esta investigación.

Si se lograra evitar la evasión de impuestos, simplemente con lo recaudado por IVA e ISR, podría ser posible cubrir el gasto social en México respecto a educación, salud, combate a la pobreza, entre otros, incluyendo un 3% adicional para invertir en infraestructura. Actualmente, con la recaudación posible se cubre solo el 80% del gasto social y no se alcanza a invertir en infraestructura; sin embargo, para lograr una mejor recaudación de impuestos, el gobierno se presenta con una restricción relacionada con la cantidad y calidad de dinero que se necesitaría para recolectar los impuestos y para aplicar la ley tributaria. El tener un sistema tributario complejo eleva los costos de recaudación. Actualmente no hay estimaciones de cuánto se podría gastar, sin embargo, se estima que podría ser de 10 centavos por cada peso recaudado (CEEY, 2012).

La medición de la pobreza a partir de los diferentes escenarios alternativos se efectúa considerando el ingreso recibido. El superávit generado se usa para financiar el combate a la pobreza, ya sea con transferencias directas a los hogares pobres o a través de transferencias a la salud y a la educación, con lo que se resalta la idea de una reforma fiscal progresiva en México.

De acuerdo con Huesca y Araar (2016) una mejora en el sistema fiscal representa una herramienta más eficiente y efectiva para mejorar la distribución de la riqueza, haciendo posible

---

<sup>7</sup> Para más información ver Jiménez (2009).

<sup>8</sup> De acuerdo al informe de la KPMG (2013).

que los impuestos sean más progresivos. Para México la evasión de impuestos se ha convertido en un fenómeno creciente debido a la expansión del sector informal, lo que exhibe la necesidad de una reforma fiscal. Algunos países latinoamericanos como Brasil, Argentina y Uruguay, han mostrado una mayor progresividad de sus sistemas fiscales, lo que ha llevado a un aumento de los efectos redistributivos (Lustig, Pessino & Scott, 2014). Araar (2008) encontró en un estudio para Canadá al analizar el impacto del sistema fiscal sobre el tamaño y el bienestar de las clases socioeconómicas en el periodo 1993-2005, que la progresividad del sistema fiscal permitió una reducción en el número de personas pobres y un aumento de la clase media.

Sin embargo, no siempre la progresividad en el sistema fiscal garantiza una mejor distribución de ingresos. Duncan (2010) encontró que, ante un sistema legal débil y la presencia de un amplio sector informal, la progresividad tributaria puede aumentar la desigualdad.

Por lo que, aunque en esta investigación se proponen algunas reformas fiscales destinadas al combate a la pobreza, es importante señalar que en las condiciones actuales del sistema fiscal mexicano podrían complicar sus resultados. Lustig, Pessino y Scott (2014) encontraron que, para Bolivia, México y Perú, sus sistemas fiscales presentaron los impactos más bajos en la reducción de la pobreza, mientras que Argentina, Uruguay y Brasil presentaron las mayores reducciones de la pobreza, además de tener los sistemas fiscales más progresivos. Asimismo, Scott (2014) encontró para el periodo 2008-2010 que el sistema fiscal mexicano está atrapado en lo que llamó “equilibrio de bajos ingresos y beneficios”, donde los bajos ingresos tributarios no son el resultado de tasas de impuestos excepcionalmente bajas, sino que resultan de bajos niveles de productividad impositiva.

Los niveles de desigualdad y pobreza en México persisten aún con los programas de TMC que ya tienen más de 15 años de ser implementados. La distribución de ingresos en México presenta importantes distorsiones tanto en la manera como se pagan los impuestos como en la forma en que los hogares reciben asistencia social a través del sistema fiscal, sin embargo, es posible mejorar la redistribución de recursos a través de los sistemas fiscales utilizando políticas redistributivas basadas en compensaciones que han funcionado tanto en países desarrollados como en desarrollo (Huesca & Araar, 2016).

Además de esto, el sector informal en México ha ganado mucho terreno; de acuerdo con las últimas estimaciones del INEGI para el 2016, la economía informal presenta una participación en el PIB de 22,6%, donde, casi el 60% de la población ocupada del país tiene trabajo en el sector informal. Ahora bien, Kumler, Verhogen y Frias (2013) y Dougherty y Escobar (2013) mencionan que el subregistro de los salarios de las empresas registradas para evadir impuestos, así como el alto empleo en el sector informal impactan en la eficiencia marginal de los impuestos, reflejándose en niveles bajos de recaudación de impuestos, que a su vez hace que el sistema impositivo, aunque sea progresivo, no incida positivamente en la desigualdad con el tiempo.

La débil estructura fiscal mexicana aunada al bajo crecimiento, han empujado a dirigir la política social hacia los sectores vulnerables de la población a través del gasto público en programas de TMC sin mayor éxito, situación reflejada en sus índices de pobreza y desigualdad. Sin embargo, ante un panorama con un amplio sector informal, una evasión de impuestos corporativos y un alivio inefectivo del impuesto a las sociedades como lo presenta la economía mexicana, se justifica la necesidad de mejorar el diseño de un sistema de beneficios tributarios. Dougherty y Escobar (2013) dan un buen ejemplo al respecto: un aumento en la carga impositiva sobre la producción o el consumo de bienes puede ser relevante para compensar a los contribuyentes, ante una situación dominante del sector informal.

### **3.1 Aumento del 2% del IVA para ser destinado al combate a la pobreza.**

Para la simulación de un shock exógeno, primero se identifica el monto recaudado por concepto del IVA para el año 2012 de 579.987,50 millones de pesos mexicanos (30.526 millones

de dólares americanos), de acuerdo con los ingresos ordinarios del gobierno federal, obtenidos de la cuenta de Hacienda Pública Federal para el año 2012. Seguido, se impacta en un 2% adicional dicho monto, con el objetivo de que éste sea repartido equitativamente entre los tres deciles más pobres de la población, que, por lo general, es la población objetivo de los programas sociales. En el caso del Programa Oportunidades, estos tres deciles focalizan el 65,8% de sus recursos.

De esta manera, si se aumentara en 2% al IVA, para el año 2012 posiblemente se hubiese recolectado 11.599 millones de pesos mexicanos (610 millones de dólares americanos), que son asignados de acuerdo a la regla de reparto construida, basándose en los montos transferidos por el programa Oportunidades y según la prioridad asignada por el mismo, quedando el decil I con el 41,19% de importancia, el decil II con el 33,59% y el decil III con el 25,23%. Con los porcentajes definidos, se realiza la distribución propuesta, según se muestra en la Tabla 1.

**Tabla 1. Asignación monto recaudado con el 2% adicional del IVA en millones de pesos mexicanos.**

<b>Cuentas</b>	<b>Participación %</b>	<b>Monto a transferir</b>
Imp. ByS		11.599,75
I	41,19%	4.777,4
II	33,59%	3.895,96
III	25,23%	2.926,38
<b>Total</b>	100%	11.599,75

Fuente: Elaboración propia con base en la SHCP (2012).

Este monto ingresa en la economía como shock exógeno, distribuido entre los tres primeros deciles. En la Tabla 2 se observan los efectos económicos que tiene dicho shock sobre el desempeño de la economía y sobre la distribución de la renta.

El vector  $Y$  representa el *output* total de la economía antes de aplicar el shock exógeno;  $Y$  *aumento 2% del IVA* representa el *output* total de la economía después de haber impactado tanto la cuenta de Impuesto de Bienes y Servicios como las de los tres primeros deciles y, el vector *% de cambio después del shock*, representa el cambio generado al comparar la economía real con la simulada.

Estos resultados muestran que al aumentar en 2% el IVA y al transferirlo a los tres primeros deciles que corresponden a los hogares más pobres, se produce un impacto total en el *output* de la economía mexicana equivalente a 36.256 millones de pesos mexicanos (1.908 millones de dólares americanos), que representa un incremento de 0,17%. Se observa que el sector más beneficiado corresponde a transportes, correos y almacenamiento (7) con una variación de 0,38%, el sector generación, transmisión y distribución de energía eléctrica (3) con una variación de 0,33%, el sector servicios de alojamiento temporal (17) con una variación de 0,29%, servicios de esparcimiento cultural y deportivo (16) y servicios inmobiliarios (10) con porcentajes de cambio de 0,29% cada uno y otros servicios con un 0,28%. Por obvias razones la cuenta de Impuesto sobre bienes y servicios (24) tiene el mayor impacto con un porcentaje de 2,73% seguida de los tres primeros deciles (27, 28 y 29) con porcentajes de cambio de 2,05%, 1,28% y 0,84% respectivamente, ya que el impacto le favorece directamente debido a la recaudación de impuestos adicional del 2%, posteriormente asignada entre los tres primeros deciles.

Los sectores menos favorecidos con este impacto son el de la construcción (4) con una variación de 0,01%, actividades legislativas (19) con un porcentaje de 0,03%, servicios educativos (14) con un 0,07% y la minería (2), con una variación de 0,08%.

**Tabla 2. Variación del producto total al aumentar el IVA un 2% para combatir la pobreza (millones de pesos mexicanos).**

Cuenta	Y	Y aumento 2% del IVA	% de cambio después del shock
Agricultura, cría y explotación de animales	586.319	587.202	0,14
Minería	1.238.359	1.239.403	0,08
Generación, transmisión y distribución de energía eléctrica	454.744	456.314	0,33
Construcción	1.925.713	1.925.992	0,01
Industrias Manufactureras	6.949.142	6.959.391	0,15
Comercio	2.332.613	2.337.130	0,19
transportes, correos y almacenamiento	1.152.579	1.157.489	0,38
Información en medios masivos	487.363	488.665	0,25
Servicios financieros y de seguros	598.298	599.762	0,24
Servicios inmobiliarios	1.615.425	1.620.117	0,29
Servicios profesionales, científicos y técnicos	402.904	403.703	0,17
Corporativos	84.260	84.438	0,21
Servicios de apoyo a los negocios	475.101	476.028	0,19
Servicios educativos	539.239	539.655	0,07
Servicios de salud y de asistencia social	362.835	363.254	0,09
Servicios de esparcimiento culturales y deportivos	74.044	74.260	0,29
Servicios de alojamiento temporal	399.154	400.322	0,29
Otros servicios	346.327	347.359	0,28
Actividades legislativas	658.148	658.341	0,03
Trabajo	2.805.315	2.809.338	0,14
Contribuciones sociales efectivas a la seguridad social	415.285	415.735	0,11
Otras prestaciones sociales	203.675	203.952	0,14
Capital	7.488.572	7.503.564	0,2
Impuestos Bienes y Servicios	315.664	328.664	2,73
Sociedades	7.488.572	7.503.564	0,2
Consumo Privado	7.030.758	7.052.357	0,31
Hogar en el decil I	251.377	256.540	2,05
Hogar en el decil II	345.116	349.542	1,28
Hogar en el decil III	429.525	433.123	0,84
Hogar en el decil IV	515.125	515.949	0,16
Hogar en el decil V	599.226	600.199	0,16
Hogar en el decil VI	729.984	731.179	0,16
Hogar en el decil VII	836.642	837.999	0,16
Hogar en el decil VIII	1.060.989	1.062.746	0,17
Hogar en el decil IX	1.471.878	1.474.346	0,17
Hogar en el decil X	3.000.835	3.006.052	0,17
Total	55.671.107	55.803.672	0,17

Fuente: Elaboración propia basada en la MIP total doméstica 2008 publicada por el INEGI (2013) siguiendo a Cardenete, Delgado y Fuentes (2013).

### 3.2 Impacto sectorial de un 1,41% del PIB recaudado por la evasión de impuestos en el crecimiento y el precio para el 2008.

La propuesta del caso hipotético radica en que el superávit presentado sea invertido en salud y educación<sup>9</sup>, con el fin de analizar los efectos redistributivos que se generan, en lugar de impactar directamente a los hogares.

Para esto, primero se determina el IEUE para el año 2008, que según Fuentes (2012) es de 171.948 millones de pesos mexicanos (9.050 millones de dólares americanos), suponiendo que este pueda ser recaudado y transferido a los sectores de salud y educación. Según la regla de reparto, se destina el 57,05% para salud y el 42,95% para educación, de acuerdo con los montos que el gobierno destina para cada uno de estos sectores (SHCP, 2008). Seguido, se distribuye el monto evadido como lo muestra la Tabla 3.

**Tabla 3. Asignación monto evadido por manejo de efectivo (millones de pesos mexicanos).**

Cuentas	Participación %	Monto a Transferir
Salud	57,05%	98.096,19
Educación	42,95%	73.851,81
Total	100%	171.948,00

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de la SHCP (2008).

En este caso, la obtención del vector  $X$  que representa las inyecciones totales que las cuentas endógenas reciben de las cuentas exógenas, se realiza mediante la suma de todas las inyecciones de ingresos procedentes de la recaudación de impuestos por evasión por manejo de efectivo, que son transferidos a los sectores salud y educación. Posteriormente se determina el vector  $\Delta Y$  que corresponde al producto total de las cuentas endógenas cuando se le aplica un shock positivo a la economía mexicana.

En la Tabla 4 se observa al vector  $X$  que contiene todas las inyecciones provenientes de la recaudación del IEUE hacia los sectores de salud y de educación, el vector  $X_{transSyE}$  que incluye estas inyecciones, el vector  $Y$  que contiene los productos totales de las cuentas endógenas considerando el monto recaudado, y el vector  $Y_{conTransSyE}$  que contiene los productos totales de las cuentas endógenas cuando son transferidos dichos montos. Por último, el porcentaje de variación desde un escenario con transferencias hacia uno sin transferencias.

Se observa que el *output* total de la economía mexicana tras el impacto propuesto aumenta un 2,27% correspondiente a un valor de 482.014 millones de pesos mexicanos (25.369 millones de dólares americanos), produciendo un impacto del 6,09% en las contribuciones sociales efectivas a la seguridad social y un aumento del 3,63% en el trabajo. Por otro lado, el consumo privado aumenta un 2,76% al igual que los hogares, especialmente los cuatro deciles más altos con porcentajes de cambio que van desde el 2,85% (decil X) al 2,95% (decil IX). Un resultado interesante de esta simulación es que los hogares menos favorecidos o aquellos que se encuentran en los deciles más bajos, efectivamente aumentan su *output* total, pero en menor proporción que los deciles más altos de la economía.

---

<sup>9</sup> Diferentes investigaciones (López-Acevedo y Salinas, 2000; Banco Mundial, 2004; Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo, 2011) han demostrado que las TMC, el gasto en salud y el gasto en educación Primaria y Secundaria reducen la desigualdad en el ingreso, a pesar, de que la educación Superior tiende a ser regresiva.

**Tabla 4. Variación del producto total por transferencias para educación y salud (millones de pesos mexicanos).**

Cuenta	X	XTransfSyE	Y	TTransfSyE	% de cambio después del shock
Agricultura, cría y explotación de animales	184.881	184.881	615.085	622.121	1,14
Minería	618.782	618.782	1.243.710	1.251.860	0,66
Generación, transmisión y distribución de energía eléctrica	28.312	28.312	476.138	488.664	2,63
Construcción	1.792.012	1.792.012	1.934.131	1.935.817	0,09
Industrias Manufactureras	2.701.265	2.701.265	6.956.946	7.050.340	1,34
Comercio	525	525.303	2.337.524	2.379.148	1,78
transportes, correos y almacenamiento	331.072	331.072	1.280.240	1.304.261	1,88
Información en medios masivos	44.815	44.815	521.764	534.689	2,48
Servicios financieros y de seguros	49.095	49.095	621.080	634.498	2,16
Servicios inmobiliarios	55.937	55.937	1.622.241	1.664.674	2,62
Servicios profesionales, científicos y técnicos	83.056	83.056	463.408	474.491	2,39
Corporativos	330.000	330	84.408	86.200	1,9
Servicios de apoyo a los negocios	634.000	634	475.735	486.346	2,23
Servicios educativos	492.833	566.685	621.223	698.631	12,46
Servicios de salud y de asistencia social	319.511	417.607	442.520	544.018	22,94
Servicios de esparcimiento culturales y deportivos	6.075	6.075	74.361	76.227	2,51
Servicios de alojamiento temporal	1.816	1.816	400.969	411.735	2,68
Otros servicios	23.620	23.620	369.947	379.849	2,68
Actividades legislativas	662.835	662.835	665	665.057	0,01
Trabajo	12.979	12.979	2.805.315	2.907.048	3,63
Contribuciones sociales efectivas a la seguridad social	0	0	415.285	440.587	6,09
Otras prestaciones sociales	0	0	203.675	208.180	2,21
Capital	0	0	7.488.572	7.665.007	2,36
Sociedades	0	0	7.488.572	7.665.007	2,36
Consumo Privado	0	0	7.030.758	7.225.148	2,76
Hogar en el decil I	49.678	49.678	251.377	256.552	2,06
Hogar en el decil II	57.736	57.736	345.116	353.005	2,29
Hogar en el decil III	57.411	57.411	429.525	440.095	2,46
Hogar en el decil IV	54.237	54.237	515.125	528.369	2,57
Hogar en el decil V	48.777	48.777	599.226	615.307	2,68
Hogar en el decil VI	48.956	48.956	729.984	750.108	2,76
Hogar en el decil VII	48.983	48.983	836.642	860.525	2,85
Hogar en el decil VIII	44.623	44.623	1.060.989	1.091.634	2,89
Hogar en el decil IX	39.057	39.057	1.471.878	1.515.299	2,95
Hogar en el decil X	59.121	59.121	3.000.835	3.086.401	2,85
Total	8.443.743	8.615.691	55.879.490	57.296.901	2,27

Fuente: Elaboración propia basada en la MIP total doméstica 2008 publicada por el INEGI (2013).

Al mismo tiempo, los sectores productivos con mayor impacto positivo en la redistribución de la renta son salud y educación, con porcentajes de cambio de 22,94% y 12,46% respectivamente, debido a que son los sectores que reciben el impacto exógeno directamente. Asimismo, entre otros sectores favorecidos se tienen a los servicios de alojamiento temporal y otros servicios con porcentajes de cambio de 2,68%, generación, transmisión y distribución de energía eléctrica con un 2,63%, servicios inmobiliarios con una variación de 2,62% y servicios de esparcimiento cultural con un 2,51%.

No obstante, los sectores menos favorecidos son actividades legislativas con una variación de 0,01%, construcción con un 0,09%, minería con 0,66% y agricultura, cría y explotación de animales con un 1,14%.

### 3.3 Aumento del 5% del ISR a personas físicas destinados al combate de la pobreza.

Igualmente, en esta simulación se parte del vector que representa el shock exógeno aplicado a la economía. El monto de impacto equivale a 760.104 millones de pesos mexicanos (40.005 millones de dólares americanos) de acuerdo con la Tabla 1. El superávit presentado con la reforma del 5% aplicando la escala actual de recaudación del ISR, se distribuye a partir del peso asignado por su incidencia en el ingreso bruto por deciles de hogares. En esta distribución se observa que el último decil soporta la mayor carga del ISR. La incidencia del ISR se calcula respecto al ingreso bruto total para cada decil de ingreso, considerando la distribución de todos los perceptores reportados en la Encuesta Nacional de Ingreso y Gasto de los Hogares (ENIGH)<sup>10</sup>.

Esta información muestra que el decil I no aporta al ISR mientras que el decil X es el que mayor aporte ejerce con un 53,5%. Ahora bien, se le aplica al ISR recaudado total un 5% adicional para ser distribuido de acuerdo con la regla de reparto presentada en la Tabla 3. Para crear el vector de shock exógeno, se reparte el 5% adicional al monto recaudado, con un superávit total de 38.005,20 millones de pesos mexicanos (2.000 millones de dólares americanos), como se muestra en la Tabla 5.

**Tabla 5. Vector de shock exógeno (millones de pesos mexicanos).**

Cuentas	Participación %	Monto a Transferir
ISR		38.005,20
I	41,19%	15.652,60
II	33,59%	12.764,66
III	25,23%	9.587,94
Total	100%	38.005,20

Fuente: Elaboración propia con base en la SHCP (2012).

La Tabla 6 incluye al vector  $Y$  que contiene los *outputs* totales de las cuentas endógenas considerando el monto recaudado, y al vector  $Y_{conTransferencia}$  que contiene los *outputs* totales de las cuentas endógenas cuando se ingresan dichos montos. Por último, se incluye el porcentaje de variación desde un escenario con transferencia hacia uno sin transferencia.

Al transferir un 5% adicional a la economía mexicana por el aumento del ISR, el *output* total de la economía aumenta un 0,38% que corresponde a 81.099 millones de pesos mexicanos (4.268 millones de dólares americanos). El sector productivo con mayor impacto corresponde a servicios de esparcimiento cultural con una variación de 0,76%, seguida de servicios de alojamiento temporal y servicios inmobiliarios con un 0,74% cada uno, y otros servicios con un 0,69%. El sector productivo con menor impacto corresponde a construcción y a actividades legislativas que no presentan variación, seguida de servicios educativos y minería con un 0,17% de variación respectivamente.

<sup>10</sup> Para más información revisar SHCP (2012).

**Tabla 6. Variación del producto total al ingresar el monto recaudado por un aumento del 5% del ISR para personas físicas en millones de pesos mexicanos.**

Cuenta	Y	Y con Transferencias	% cambio después del shock
Agricultura, cría y explotación de animales	615.085	617.055	0,32
Minería	1.243.710	1.245.858	0,17
Generación, transmisión y distribución de energía eléctrica	476.138	478.627	0,52
Construcción	1.934.131	1.934.198	0
Industrias Manufactureras	6.956.946	6.981.682	0,36
Comercio	2.337.524	2.348.772	0,48
transportes, correos y almacenamiento	1.280.240	1.287.047	0,53
Información en medios masivos	521.764	525.079	0,64
Servicios financieros y de seguros	621.080	624.888	0,61
Servicios inmobiliarios	1.622.241	1.634.279	0,74
Servicios profesionales, científicos y técnicos	463.408	465.148	0,38
Corporativos	84.590	84.970	0,45
Servicios de apoyo a los negocios	475.735	477.873	0,45
Servicios educativos	621.223	622.285	0,17
Servicios de salud y de asistencia social	442.520	443.548	0,23
Servicios de esparcimiento culturales y deportivos	74.361	74.924	0,76
Servicios de alojamiento temporal	400.969	403.945	0,74
Otros servicios	369.947	372.518	0,69
Actividades legislativas	665.000	665.017	0
Trabajo	2.805.315	2.813.821	0,3
Contribuciones sociales efectivas a la seguridad social	415.285	416.274	0,24
Otras prestaciones sociales	203.675	204.283	0,3
Capital	7.488.572	7.522.995	0,46
ISR	731.163	772.670	5,68
Sociedades	7.488.572	7.522.995	0,46
Consumo Privado	7.030.758	7.089.490	0,84
Hogar en el decil I	251.377	267.910	6,58
Hogar en el decil II	345.116	359.078	4,05
Hogar en el decil III	429.525	440.625	2,58
Hogar en el decil IV	515.125	516.979	0,36
Hogar en el decil V	599.226	601.411	0,36
Hogar en el decil VI	729.984	732.663	0,37
Hogar en el decil VII	836.642	839.673	0,36
Hogar en el decil VIII	1.060.989	1.064.918	0,37
Hogar en el decil IX	1.471.878	1.477.393	0,37
Hogar en el decil X	3.000.835	3.012.556	0,39
Total	55.610.653	56.943.446	0,38

Fuente: Elaboración propia basada en la MIP total doméstica 2008 publicada por el INEGI (2013).

No obstante, las cuentas que mayor cambio presentan son la correspondiente al ISR con una variación de 6,68%, los tres primeros deciles con porcentajes de cambio de 6,58%, 4,05% y 2,58% respectivamente, junto con consumo privado con un 0,84%; esto se debe a que son las cuentas directamente impactadas y, por lo tanto, presentan mayor efecto absorción.



### 3.4 Impacto de los escenarios alternativos sobre la desigualdad y los índices de pobreza.

En esta sección, se analiza el impacto de los diferentes escenarios alternativos propuestos sobre la desigualdad y los índices de pobreza. Cada escenario se analiza desde el punto de vista del coeficiente de Gini y el Índice FGT. Por último, se realiza una comparación entre las diferentes propuestas realizadas en esta investigación y el panorama real, para definir la reforma que mejores resultados arroja y que se recomienda ser tomada en cuenta como una política alternativa para el combate a la pobreza en México.

La Tabla 7 muestra el nivel de desigualdad presentado en los hogares mexicanos si se aplicara cada uno de los escenarios alternativos planteados anteriormente. Se observa que el decil X representa el 41,4% del ingreso total de los hogares en México y el decil I apenas el 1.39% del ingreso, reflejando una elevada concentración de ingresos que es confirmada con el coeficiente de Gini. A pesar de la inyección de recursos adicionales a los tres primeros deciles bajo la propuesta del aumento del IVA, la distribución del ingreso queda prácticamente en el mismo nivel presentado antes del cambio con una reducción mínima de 0,0008.

Por otro lado, al transferir recursos a la salud y la educación, la distribución del ingreso presenta un aumento mínimo de 0,0005. Finalmente, la propuesta del aumento del ISR arroja una disminución del coeficiente de Gini de 0,003, es decir, la economía mexicana bajo la implementación de las propuestas sugeridas y los datos reales observados siguen mostrando los mismos índices de desigualdad reflejando un entorno de inequidad relevante. Sin embargo, se observa que la propuesta que mejores efectos arroja es la relacionada con el ISR, a pesar de que estos sean marginales.

**Tabla 7. Análisis de la distribución del Ingreso para México. Aumento del 2% del IVA para ser transferido a los hogares pobres, 2012.**

Decil	Participación en el ingreso	Ingreso trimestral promedio por habitante (MXN)						
		Sin Transferencias	Con transferencias por el aumento del IVA	% de cambio	Con transferencias a la salud y educación	% de cambio	Con transferencias por el aumento del ISR	% de cambio
I	1,39	1.819,07	1.846,64	1,52	1.859,52	2,22	1.906,77	4,82
II	2,49	3.250,84	3.281,26	0,94	3.228,99	2,4	3.345,41	2,91
III	3,37	4.404,77	4.432,27	0,62	4.515,75	2,52	4.487,78	1,88
IV	4,27	5.566,3	5.592,48	0,47	5.711,24	2,6	5.643,01	1,38
V	5,28	6.885,08	6.910,75	0,37	7.069,16	2,67	6.957,64	1,05
VI	6,55	8.541,4	8.571,42	0,35	8.773,63	2,72	8.625,08	0,98
VII	8,33	10.875,02	10.908,75	0,31	11.175,14	2,76	10.966,97	0,85
VIII	10,93	14.257,21	14.298,82	0,29	14.655,66	2,79	14.369,36	0,79
IX	15,99	20.882,56	20.918,37	0,17	21.474,11	2,83	20.964,64	0,39
X	41,4	53.939,88	54.030,54	0,17	55.485,5	2,87	54.146,88	0,38
Coeficiente de Gini		0.505618	0,504733		0,506183		0,50271	

Fuente: Elaboración propia con datos de la ENIGH (2012).

Diferentes investigaciones han mostrado algunos resultados comparando el índice de Gini en diferentes procesos redistributivos, como Goñi, López y Servin (2008) quienes analizaron las estructuras tributarias para Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú para mediados del 2000, encontrando que éstas junto a las transferencias redujeron el índice de Gini promedio de 0,52 a 0,50, mientras que para 15 economías europeas el índice de Gini promedio se redujo de 0,46 a 0,27.

Campos-Vazquez, Esquivel y Lustig (2014) muestran el comportamiento del índice de Gini para el ingreso monetario disponible per cápita para México. Encuentran que para el periodo

1989-1994, el índice sube y fluctúa. Para el periodo 1998-2010, el índice declina, con un aumento en el año 2008. En este estudio la reducción del índice de Gini se debe principalmente a la disminución de la desigualdad del ingreso laboral hasta el año 2000, cuando las transferencias del gobierno se perciben.

Casares et al. (2015) encuentran que lograr una recaudación adicional significativa y mejorar la desigualdad del ingreso medida a través del índice de Gini, implica aumentos de tasas bases difíciles de lograr en las condiciones actuales. Para esto plantean siete escenarios que consisten en duplicar tasas efectivas de IVA e ISR y hacer transferencias a los deciles I de diferentes maneras, con lo que encuentran que en todos los escenarios se ve mejorado el índice de Gini, especialmente cuando se hacen transferencias al decil I, a excepción del escenario dos donde se cancelan las transferencias.

También Azevedo, Inchaust y Sanfelice (2013) muestran para el periodo 2000-2010, un descenso del índice de Gini para América Latina, donde el factor que más contribuyó a ello fue el fuerte crecimiento de los ingresos laborales en los deciles más pobres.

A continuación, se presentan los resultados del impacto de las reformas sobre los índices de pobreza a través del Índice FGT. Para esto se calcula el índice FGT para  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$  y  $\alpha = 2$  bajo las condiciones presentadas en la economía para el año 2012. La variación de ingreso propuesto, es el resultado arrojado por la modelización anterior, teniendo en cuenta solo el cambio presentado en los hogares. En cuanto a las líneas de pobreza utilizadas, la referente a pobreza moderada es de 5.709,99 pesos mexicanos trimestrales (300 dólares americanos) y la de pobreza extrema es de 2.854,86 pesos mexicanos trimestrales (150 dólares americanos) para el 2012, obtenidos con el promedio de las líneas de pobreza rural y urbana, ya que la MCS construida no hace diferenciación entre estas. En la Tabla 8 se aprecian los resultados arrojados por el análisis, incluyendo todos los escenarios analizados.

**Tabla 8. Comparativo entre los diferentes escenarios hipotéticos para el combate a la pobreza.**

Panorama	Pobreza Moderada			Pobreza Extrema		
	Head Count	P1	P2	Head Count	P1	P2
Situación Real	36,36	13,81	7,22	11,78	3,7	1,71
Sin Programa Oportunidades	37,06	14,48	7,71	12,45	4,09	1,94
Aumento 2% del IVA	36,24	13,63	7,09	11,48	3,58	1,65
Transferencia Salud y Educación	33,03	12,25	6,33	9,12	2,82	1,29
Aumento del 5% al ISR	35,75	13,27	6,81	10,9	3,35	1,52

Fuente: Elaboración propia con base en la ENIGH (2012).

Con el análisis comparativo realizado a través del índice FGT, se observa que los niveles de pobreza disminuyen cuando se inyecta adicionalmente transferencias a la población, de acuerdo con la Tabla 8. Si se retiraran las TMC del programa oportunidades los niveles de pobreza aumentarían, pero si se realizaran inyecciones adicionales los niveles de pobreza disminuirían. Esta disminución varía según cada una de las propuestas. De manera agregada y de acuerdo con el caso hipotético de un aumento del 2% del IVA, al considerar la pobreza moderada, el índice de incidencia presentaría una disminución del 0,12%, el índice de intensidad disminuiría en 0,18% y el índice de severidad disminuiría en 0,13% pasando de 7,22% a 7,09%.

En cuanto a la pobreza extrema, de igual manera disminuirían sus índices, pero en menor medida que la pobreza moderada con excepción del índice de incidencia ya que esta muestra una disminución del 0,30%, presentando una mayor reducción al compararla con la pobreza moderada. El cambio más significativo por importancia es el arrojado por el índice de severidad

de la pobreza con una disminución de 0,06%. Por otro lado, la brecha de la pobreza se reduce en 0,11%.

Ahora bien, el escenario hipotético en el que se transfiere el 1,41% con respecto al PIB recaudado por IEUE para ser transferido a salud y educación, toma en cuenta las condiciones presentadas en la economía para el año 2008, bajo el supuesto de que la economía no varía en un periodo de cinco años. En este caso se utiliza como línea de pobreza extrema el valor de 2.582,12 pesos mexicanos trimestrales (136 dólares americanos) y pobreza moderada el valor de 5.445,12 pesos mexicanos trimestrales (287 dólares americanos) correspondientes para el año 2008 pero a precios del 2012.

Con el análisis comparativo realizado a través del Índice FGT se observa que los niveles de pobreza disminuyen cuando se transfieren recursos hacia la salud y la educación. De manera agregada y considerando la pobreza moderada, el índice de incidencia presenta una disminución del 3,33%, el índice de intensidad disminuye en 1,56% y el índice de la severidad disminuye en 0,89% pasando de 7,22% a 6,33%. En cuanto a la pobreza extrema, de igual manera disminuyen sus índices, pero en menor medida que la pobreza moderada, siendo el más significativo por importancia el índice de severidad de la pobreza con una disminución de 0,43%. En cuanto a la población en pobreza extrema, estos disminuyen en 2,66%.

Estos resultados muestran que aumentar los recursos para salud y educación trae mejores beneficios que si se realizaran transferencias en efectivo a la población en pobreza, a pesar de que, en la simulación anterior, individualmente los últimos deciles se veían más beneficiados que los primeros. Por lo tanto, una política social enfocada en el mejoramiento de la salud y la educación impactaría positivamente sobresaliendo ante las demás propuestas de transferencias en efectivo y contribuyendo con mejores resultados para el combate a la pobreza.

Por último, el escenario alternativo que consiste en el aumento del 5% del ISR, para ser transferido a los tres primeros deciles de los hogares, disminuye los índices de pobreza cuando se transfieren recursos a los tres primeros deciles. De manera agregada y considerando la pobreza moderada, el índice de incidencia presenta una disminución del 0,61%, el índice de intensidad disminuye en 0,54% y el índice de severidad disminuye en 0,41% pasando de 7,22% a 6,81%. La pobreza extrema, de igual manera disminuye sus índices, pero en menor medida que la pobreza moderada a excepción del índice de incidencia de la pobreza, con una disminución de 0,87%. Por otro lado, el índice de severidad de la pobreza que resulta ser el más importante debido a que mide el nivel de desigualdad presentado entre la población pobre, muestra una variación de 0,19%. Por último, el índice de intensidad de la pobreza extrema es de 0,35%.

Al comparar todas las simulaciones, se concluye que el escenario que arroja mejores resultados para el combate a la pobreza resulta del aumento del 1,41% en proporción del PIB a la salud y educación, seguida del aumento del 5% del ISR para ser transferido a los tres primeros deciles de los hogares mexicanos. Este resultado muestra que la reforma al ISR arroja mejores resultados distributivos que la reforma del IVA, ya que los deciles altos son los que presentan mayor carga impositiva que se ve reflejada en un impacto positivo en todos los deciles de hogares, a pesar, de que los de mayor impacto positivo son los deciles más aportadores. Por lo tanto, estas reformas deberían ir acompañadas de una estructura impositiva más progresiva o un mejor mecanismo redistributivo. Sin embargo, transferencias dirigidas hacia la salud y educación equivaldrían a que un buen porcentaje de la población que se encuentra en pobreza tanto moderada como extrema podrían salir de ésta, incluso la brecha de la pobreza podría empezar a disminuir.

#### **4. Conclusiones.**

En esta investigación se realizó un análisis del impacto de diferentes escenarios alternativos sobre las principales variables de la economía, a través de simulaciones, representadas por la MCS, y a partir de sus resultados se analizó el cambio presentado en los índices de pobreza y la desigualdad

a través del índice FGT y el coeficiente de Gini. Para estos análisis, se tomó como base de datos la MCS para México con año base 2008, llamada MCS-MX08, utilizando una metodología de equilibrio general lineal denominada multiplicadores lineales.

La primera parte de la investigación muestra los efectos económicos producto del impacto a la economía bajo los tres escenarios propuestos: i) el aumento del 2% al IVA para ser transferido a los tres primeros deciles, ii) el impacto positivo a los sectores salud y educación en 1,41% con respecto al PIB y, finalmente, iii) el aumento del 5% al ISR igualmente para los tres primeros deciles.

Esta primera simulación ofrece dos resultados implícitos: por un lado, se hace referencia al ingreso a la economía de 11.599 millones de pesos mexicanos (610 millones de dólares americanos), que se traducen en un aumento en el *output* del sector de transportes, correos y almacenamiento y del sector generación, transmisión y distribución de energía eléctrica, es decir, la redistribución de la renta les impacta positivamente, en mayor proporción que a los demás sectores. Por otro lado, un aumento en los ingresos de los hogares más pobres impacta positivamente el *output* de los sectores de servicios de alojamiento temporal, servicio de esparcimiento cultural y deportivo y de servicios inmobiliarios, confirmando que un aumento en los ingresos de los hogares más pobres es destinado a actividades de ocio y recreación, sin mejorar sus áreas prioritarias como lo son la alimentación, la salud y la educación.

El escenario alternativo referente al aumento en un 2% el IVA para transferirlos a los tres primeros deciles no trae grandes beneficios para la economía mexicana, ya que solo genera un aumento del 0,17% del agregado de la economía. Además, es posible que al aumentar el IVA que va dirigido a toda la población sin excluir clases sociales se vea afectada la capacidad de compra de los hogares pobres, causándole efectos negativos de manera individual, debido a las distorsiones presentadas en los precios relativos de los productos.

En el caso de la recaudación del 1,41% en proporción del PIB por IEUE, para ser transferida a la salud y la educación, efectivamente la distribución del superávit de las transferencias a salud y educación beneficia a los hogares, pero en mayor medida la de los últimos deciles que corresponden a los de mayor ingreso. Con esto se demuestra que, aunado a este tipo de reformas, se debe presentar un mejor mecanismo redistributivo, con el fin de que se vean mayormente beneficiados los primeros deciles de la población. Por otro lado, se percibe el aumento de los sectores de servicios de alojamiento temporal, inmobiliarios y esparcimiento cultural al igual que resultados anteriores.

Por último, aumentar un 5% el ISR para personas físicas para transferirlo a los tres primeros deciles refleja que, ante un mayor ingreso de los primeros deciles, la redistribución de la renta favorece las actividades recreativas dejando a un lado sectores prioritarios como la salud, educación y nutrición. A grandes rasgos, el sector terciario se beneficia en mayor proporción junto con los últimos deciles mostrando que los mayores aportadores son los que obtienen mejores beneficios.

Al analizar los diferentes panoramas alternativos desde su incidencia en la pobreza, se llega a que una buena combinación que arrojaría los mejores resultados resulta del aumento del 1,41% con respecto al PIB a la salud y la educación junto con un aumento del 5% del ISR para ser transferido a los tres primeros deciles de hogares mexicanos. La mayoría de los porcentajes de cambio no rebasan el 1%, incidiendo principalmente en la pobreza moderada, y beneficiando a la población que se encuentra en los deciles más bajos.

Además, si se mejoran las condiciones en salud y educación, un porcentaje considerable de la población que se encuentra en pobreza tanto moderada como extrema podrían no padecerlas, y para aquellos que siguieran siendo pobres, lo serían con menor severidad.

A pesar de que la reforma del ISR presenta mejores resultados que la reforma del IVA, ya que esta no introduce distorsiones en los precios relativos, resulta más difícil de implementar, debido a que la mayor carga impositiva la recibirían los deciles de mayor ingreso. Sin embargo, los efectos del impacto muestran que al mismo tiempo los deciles más altos se beneficiarían en mayor proporción que los deciles más bajos, viendo compensado el aumento de sus contribuciones. Por lo tanto, estas reformas deberían ir acompañadas de una estructura impositiva más progresiva o un mejor mecanismo redistributivo.

Si se lograra una mayor focalización de los hogares en condición de pobreza, estos ante un aumento de sus ingresos, empezarían a perder asistencia social, ya que los beneficios otorgados por el gobierno empezarían a disminuir a través de un aumento de los impuestos.

Huesca y Araar (2016) y Scott (2014) encontraron un aumento en el efecto del sistema fiscal de México en la reducción de la desigualdad entre el 2008 y 2010. Estos hallaron una progresividad creciente alimentada por TMC y una baja carga impositiva en los primeros deciles de ingreso. Por lo que el sistema fiscal mexicano se ha visto más progresivo. Sin embargo, la baja capacidad de redistribución a través de los beneficios como se mostró en esta investigación se debe a la escasa cobertura de los programas sociales, debido a la incapacidad del sistema tributario de recolectar impuestos en los deciles más altos de ingreso de los hogares mexicanos.

Como conclusión general, el programa social Oportunidades que continúa siendo una política importante para el gobierno federal, deberá ser combinada con alguna otra propuesta que ayude a lograr mejores resultados. Se recomienda mejorar la metodología de funcionamiento en cuanto a la focalización de los hogares pobres para aumentar el dinero que se les destina, y sobre todo invertir directamente en salud y educación. La implementación de alguna propuesta alternativa deberá ser financiada para mantener un presupuesto equilibrado, siendo alguna de estas las reformas presentadas anteriormente, teniendo en cuenta que cuanto más suba un impuesto más difícil será su implementación, debido a la posible resistencia de los deciles con mayor ingreso al ver aumentado sus pagos.

Por otro lado, se concluye que la financiación del combate a la pobreza a través del IVA refleja menor impacto que al financiarse con el ISR, debido al aumento de la distorsión tanto de precios como de salarios que afectan a la economía. Además, una buena propuesta radica en la inversión en salud y educación ya que potencializaría las capacidades de los individuos.

## Referencias.

- Aguayo, E., Chapa, N., & Rangel, E., (2009). Análisis de la Generación y Distribución del Ingreso en México del Programa Oportunidades a través de un Modelo Lineal del Flujo Circular de la Renta. *La Economía Mexicana en 19 Miradas*, 469-499.
- Aguilar, G. & Lagunas, S. (2016) ¿Resultados positivos con la reforma fiscal de México en 2014? *Punto de Vista*, 7(11), 99-116.
- Araar, A. (2008). Social classes, inequality and redistributive policies in Canada. *CIRPÉE*, working paper N° 0817, Université Laval.
- Azevedo, J., Inchaust, G., & Sanfelice, V. (2013). Decomposing the Recent Inequality Decline in Latin America. *Policy Research Working Paper*, The World Bank, N° 6715.
- Banco Mundial (2004). The Distribution of Benefits from Public Expenditure, Ch. 2, *Mexico Public Expenditure Review*.

- Beltrán, L., Cardenete, M., Delgado, M., & Núñez G. (2016). Análisis estructural de la economía mexicana para el año 2008. *Ensayos Revista de Economía*, 35(1), 1-38.
- Bird, R., & Zolt E. (2014). Redistribution via Taxations: The Limited Role of the Personal Income Tax in Developing Countries. *Annals of Economics and Finance, Society for AEF*, 15(2), 625-683.
- Britto, T. (2005). *Recent Trends in the Development Agenda of Latin America: An Analysis of Conditional Cash Transfers*. Manchester (Reino Unido): Institute for Development Policy and Management (IDPM).
- Cámara, A. (2008). *Estimación de la Matriz de Contabilidad Social de Madrid para el año 2000: Análisis del impacto de los fondos europeos 2000-2006 en la Región aplicando la metodología de Multiplicadores Lineales*. Consejería de Economía y Hacienda, Comunidad de Madrid.
- Campos-Vazquez, R., Esquivel, G., & Lustig, N. (2014). The rise and fall of income inequality in Mexico: 1989-2010". En: *Falling Inequality in Latin America: Policy Changes and Lessons*. Capítulo 7, WIDER Studies in Development Economics, Oxford University Press.
- Campoy-Muñoz, P., Cardenete, M., & Delgado, M. (2017). Assessing the economic impact of a cultural heritage site using social accounting matrices: The case of the Mosque-Cathedral of Cordoba. *Tourism Economics*, 23(4), 874-881.
- Cardenete, M., & Delgado, M. (2011). Análisis de la estructura de la economía georgiana. *Papeles de Europa*, 23, 21-42.
- Cardenete, M., & Delgado, M. (2013). Analisis de la Economia Andaluza con la Matriz de Contabilidad Social de Andalucía del año 2005, *Cuadernos de Ciencias Economicas y Empresariales*, 64, 11-32.
- Cardenete, M., Delgado, M., & Fuentes, P. (2013). Análisis del impacto de los Fondos Europeos en Andalucía: 2000-2006. *Estudios de economía aplicada*, 31(1), 1-26.
- Casares, E., García, M. Ruiz, L., & Sobarzo, H. (2015). "Distribución del Ingreso, Impuestos y Transferencias en México". *El Trimestre Económico*, 82-3(327), 523-558.
- Cecchini, S., & Madariaga, A. (2011). Programas de Transferencias Condicionadas. Balance de la experiencia reciente en América Latina y el Caribe. *Cuadernos de la Cepal*, 95, 1-220.
- Cecchini, S., & Martínez, R. (2011). Protección social inclusiva en América Latina: una mirada integral, un enfoque de derechos. *Libros de la CEPAL*, 111, Santiago de Chile.
- CEEY (2012). *El México del 2012. Reformas a la Hacienda pública y al sistema de protección social*. Centro de Estudios Espinosa Yglesias.
- CEEY (2013). *El México del 2013. Hacia una reforma integral de la Hacienda pública*. Centro de Estudios Espinosa Yglesias.

- Domínguez, M. (2009). Aplicación de un modelo de multiplicadores contables y de análisis estructural a políticas sociales seleccionadas en el Estado de Nuevo León. *Ensayos*, 28(2), 95-137.
- Dougherty, S., & Escobar, O. (2013). The determinants of informality in Mexico's states. *OECD Economics Department*, Working papers N° 1043, OECD Publishing.
- Duncan, R. (2010). *Essays on personal income taxation and income inequality*. Tesis de doctorado. Universidad de Georgia.
- ENIGH (2012). *Encuesta Nacional de Ingreso y Gasto de los Hogares, tradicional, tabulados básicos*. México: INEGI.
- Escobar-Latapí, A., González de la Rocha, M., & Cortés, F. (2005). *Evaluación cualitativa del Esquema Diferenciado de Apoyos 2005*. CIESAS-Colegio de México: Guadalajara, Jalisco, México.
- Foster, J., Greer, J., & Thorbecke, J. (1984). A class of Decomposable Poverty Measures. *Econometrica*, 52 (3), 761-766.
- Fuentes, H. (2012). *Estudio de Evasión Fiscal Mediante el Uso de Efectivo*. Ciudad de México: Centro de Estudios Estratégicos.
- Gertler, P., Martínez, S., & Rubio-Codina, M. (2012). Investing Cash Transfers to Raise Long-Term Living Standards. *American Economic Journal: Applied Economics*, American Economic Association, 4(1), 164-192.
- González-Andrade, S., & Fuentes Flores, N. (2010). Matrices de contabilidad social aplicadas a poblaciones rurales (MCSAP) para analizar el combate a la pobreza. *Ra Ximhai, Revista de Sociedad, Cultura y Desarrollo Sustentable*, 6(2), 259-274.
- Goñi, E., López, J., & Servin, L. (2008). Fiscal Redistribution and Income Inequality in Latin America, *World Bank Policy Research*, Working Papers Series, N° 4487 2, Washington D.C.
- Holzmann, R., & Jorgensen, O. (2000). *Manejo social del riesgo: un nuevo marco conceptual para la protección social y más allá*. documento de trabajo, N° 0006, Washington, D.C., Banco Mundial.
- Huesca, L., & Araar, A. (2016). Comparison of Fiscal System Progressivity Over Time: Theory and Application in Mexico. *Estudios Económicos*, 31(1), 3-45.
- INEGI (2013). *Matriz Insumo-Producto 2008*. México: Sistema de Cuentas Nacionales de México.
- Jiménez, M. (2009). *Iniciativa de Ley de la contribución para el combate a la pobreza, remitida por el ejecutivo federal*. Ciudad de México: Senado de la República.
- KPMG (2013). *Reforma Fiscal 2014*. Ciudad de México.

- Kumler, T., Verhoogen, E., & Frias, J. (2013). Enlisting employees in improving payroll-tax compliance: Evidence from Mexico. *IZA, Discussion papers N° 7591*, Institute for the Study of Labor.
- Leontief, W. (1941). *The Structure of American Economy, 1919-1929: an Empirical Application of Equilibrium Analysis*. Cambridge: Harvard University Press.
- Lima, M., Cardenete, M., Hewings, G., & Vallés, J. (2005). A Structural Analysis of a Regional Economy using a Social Accounting Matrices: 1990-1999. *Investigaciones Regionales*, 5, 113-138.
- López-Acevedo G., & Salinas, A. (2000). The Distribution of Mexico's Public Spending on Education, *World Bank Policy Research, Working Paper No. 2404*.
- Lustig, N., Pessino, C., & Scott, J. (2014). The impact of taxes and social spending on inequality and poverty in Argentina, Bolivia, Brazil, Mexico, Peru, and Uruguay: Introduction to the special issue, *Public Finance Review*, 42(3), 287-303.
- Medina, F. (2001). Consideraciones sobre el índice de Gini para medir la concentración del ingreso. *Estudios Estadísticos y Prospectivos, CEPAL*, 9, 1-43.
- Minzer, R., Pérez, A., & Solís, V. (2014). Análisis de algunas medidas fiscales en México y sus implicaciones bajo un enfoque de equilibrio general computable. *Serie Estudios y Perspectivas, CEPAL*, 152, 1-59.
- Núñez, G. (2003). Un análisis Estructural y de Equilibrio General de la Economía Mexicana. *Tesis de Doctorado*. Universidad Autónoma de Barcelona, España.
- Parra, J., & Wodon, Q. (2009). *SimSIP SAM: A Tool for the Analysis of Input-Output Tables and Social Accounting Matrices*, The World Bank.
- Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (2011). *Informe sobre Desarrollo Humano. México 2011*. México: PNUD.
- Prospera (2015). Reglas de operación 2015. Disponible en: [www.prospera.gob.mx/swb/es/PROSPERA2015/Quees\\_PROSPERA](http://www.prospera.gob.mx/swb/es/PROSPERA2015/Quees_PROSPERA)
- Pyatt, G., & Round, J. (1979). Accounting and Fixed Price Multipliers in a Social Accounting Matrix Framework. *The Economic Journal*, 89(356), 850-873.
- Rodríguez, L., & Morales, J. (2014). Impacto del Programa Oportunidades en una economía rural a partir de modelos multisectoriales. *Realidad, Datos y Espacio. Revista Internacional de Estadística y Geografía*, 5(1), 32-51.
- Sadoulet, E., Janvry, A., & Davis, B. (2001). Cash Transfer Programs with Income Multipliers: Procampo in Mexico. *International Food Policy Research Institute IFPRI*. Discussion paper N° 99.
- Scott, J. (2014). Redistributive impact and efficiency of Mexico's fiscal system, *Public Finance Review*, 42, 368-390.
- Sen, A. (2000). *Desarrollo y libertad*. Madrid: Editorial Planeta.



- SHCP (2008). *Distribución del pago de impuestos y recepción del gasto público por deciles de hogares y personas*. Ciudad de México: SHCP.
- SHCP (2012). *Distribución del pago de impuestos y recepción del gasto público por deciles de hogares y personas. Resultados para el año de 2012*. Ciudad de México: INEGI.
- Skoufias, E., & Parker, S. (2001). Conditional Cash Transfers and Their Impacts on Child Work and Schooling: Evidence from the Progresá Program in Mexico, *International Food Policy Research Institute (IFPRI)*, FCND Discussion Paper, N° 123, Washington, D.C.
- Sobarzo, H. (2007). La reforma fiscal en México. *Comercio Exterior*, 57(10), 832-840.
- Stone, R. (1978). The Disaggregation of the Household Sector in the National Accounts. *World Bank Conference on Social Accounting Methods in Development Planning*. Washington: The World Bank.
- Tello, C., & Hernández, D. (2010). Sobre la reforma tributaria en México. *Economía UNAM*, 7(21), 37-56.
- Villatoro, P. (2005). Programa de transferencias monetarias condicionadas: experiencias en América Latina, *Revista de la Cepal*, 86, 87-101.
- Yaschine, I., & Dávila L. (2008). Why, when and how should beneficiaries leave a CCT programme? En: *Poverty in Focus*, N°. 15, agosto 2008. Brasilia. International Poverty Centre, 8-9.
- Yúnez, A., & González, S. (2008). Efectos multiplicadores de las actividades productivas en el ingreso y pobreza rural en México. *El Trimestre Económico*, 75(2), 349-377.



## Dinámica de inversión y competencia en generación eléctrica en un escenario de liberalización en Perú: la importancia de los contratos de largo plazo

RIVASPLATA R., ARNOLD

Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú)

Correo electrónico: [a.rivasplata.r@gmail.com](mailto:a.rivasplata.r@gmail.com)

GARCÍA C., RAÚL

Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú)

Correo electrónico: [raul.garciac@pucp.pe](mailto:raul.garciac@pucp.pe)

### RESUMEN

En este artículo se analiza el comportamiento de los grupos de generación eléctrica que toman decisiones sobre inversión y producción en un escenario de mercado liberalizado introduciendo contratos de largo plazo, en un contexto donde hay alto nivel de concentración de mercado. Para ello, se emplea un modelo determinístico dinámico de competencia imperfecta (con estrategias open loop) que se resuelve utilizando un sistema de ecuaciones complementarias mediante el software GAMS, a fin de proveer simulaciones que muestren los impactos de las diferentes estructuras de mercado (monopolio, oligopolio con franja competitiva, oligopolio (Cournot) y competencia perfecta) sobre las decisiones de inversión y producción, asumiendo la existencia de dos bloques horarios (base y pico) y considerando la existencia de dos tecnologías a utilizarse para el despacho eléctrico (hidráulica y térmica) con datos del año base 2011 para un horizonte temporal de 10 años. Los resultados muestran que a pesar de que en los diferentes escenarios de análisis puedan existir indicios de poder de mercado, existe un efecto positivo importante sobre la inversión en capacidad, la producción por tecnología, y precios por bloque de horario.

**Palabras clave:** decisiones de inversión, teoría de juegos, equilibrio de Nash, optimización, juegos dinámicos, poder de mercado, oligopolio, mercado eléctrico.

**Clasificación JEL:** C61; C73; L13; L94.

**MSC2010:** 47N10; 65K10; 91A25; 91A50; 91B24; 91B38.

# Investment dynamics and competition in electricity generation under liberalization scenario in Peru: the importance of long-term contracts

## ABSTRACT

We analyze the behavior of electricity generation groups that make investment and production decisions in a liberalized market scenario by introducing long-term contracts, in a context where there is a high level of market concentration. In this way, a dynamic deterministic model of imperfect competition (with open loop strategies) is used, which is solved using a system of complementary equations through GAMS software, in order to provide simulations that show the impacts of the different market structures (monopoly, oligopoly with competitive fringe, oligopoly (Cournot) and perfect competition) on the decisions of investment and production, assuming the existence of two segment loads (base and peak) and considering the existence of two technologies to be used for the electric power dispatch (hydraulic and thermal) with 2011 data for 10-year planning horizon. The results show us that although there may be indications of market power in the different analysis scenarios, there is a significant positive effect on investment in capacity, production by technology, and prices per segment loads.

**Keywords:** investment decisions, game theory, Nash equilibrium, optimization, dynamic games, market power, oligopoly, electricity market.

**JEL classification:** C61; C73; L13; L94.

**MSC2010:** 47N10; 65K10; 91A25; 91A50; 91B24; 91B38.



## 1. Introducción.

La industria eléctrica peruana, a partir de 1992, ha enfrentado un profundo proceso de reforma conducente a privilegiar la competencia y aumentar la eficiencia productiva en el sector en búsqueda de un parque generador óptimo que tenga incidencia sobre las tarifas de los usuarios finales. De esta manera, se dejó sin efecto la integración vertical y se estableció un régimen de libertad de precios para que los suministros puedan realizarse en condiciones de competencia y un sistema de precios regulados para aquellos suministros que por su naturaleza lo requieran (Ley de Concesiones Eléctricas-1992).

Con un mayor desarrollo del sector eléctrico al 2005, se presenció una situación de mejora en provisión de servicio y disminución de la incertidumbre, lo que fomentó una mayor participación del sector privado dado que, a diferencia de las empresas del Estado, no presentaba bajos niveles de productividad y tarifas por debajo de sus costos (Dammert, Gallardo & García, 2005), generando un incremento de la oferta eléctrica con una mayor cobertura y una mejor calidad (servicio ininterrumpido).

Sin embargo, aspectos políticos (incertidumbre) y regulatorios propios del sector eléctrico, limitaron la entrada e inversión eficaz de empresas que podrían haber fomentado un entorno competitivo con efectos sobre el nivel tarifario. Es así que el mercado eléctrico no ha dejado de estar muy concentrado, con indicios de un ejercicio de poder de mercado<sup>1</sup> que se genera, por ejemplo, con postergación de decisiones de inversión, desincentivo de conversión de centrales, indisponibilidad de centrales, retiros de capacidad, entre otros<sup>2</sup>. Producto de ello, del 2002 al 2011, el mercado eléctrico solo pasó de ser altamente concentrado a moderadamente concentrado; es decir, el índice de concentración Herfindal-Hirschman tuvo una reducción de 3001 a 2072. Para eso, se contaron con grupos económicos que participan simultáneamente en diversas tecnologías (hidráulicas y térmicas), entre las cuales se encuentran el Estado, Endesa, Duke Energy, SN Power, Suez, Globoleq, Otros, de los cuales los dos primeros son dominantes en función a su participación, y también comparado con los que recién entran a operar que cuentan con una baja capacidad de generación.

El problema identificado es que la concentración del mercado no ha generado una presión para fomentar una eficiencia productiva y una adecuación más eficiente del parque generador, a través de las decisiones de inversión. Esto se basa en la estrecha relación entre la concentración de mercado con el ejercicio de poder de mercado, que ha limitado los incentivos de inversión en capacidad en tecnologías más eficientes, de tal manera que se tenga un parque generador que no está bien diversificado en tecnologías más económicas que pueden proveer igual o mejor a las ya presentes, y que a su vez exista un efecto positivo sobre las tarifas.

Sobre las decisiones de inversión y sus extensiones existe una amplia literatura, desde el enfoque estático hasta el dinámico, enfatizando para el sector eléctrico los estudios que exploran la estructura de mercado. Un primer análisis estático es desarrollado por Arellano y Serra (2005) que demostraron como el ejercicio de poder de mercado distorsiona las decisiones de inversión. Un análisis dinámico para analizar las estrategias de inversión de los competidores o generadores se muestra en Pineau y Murto (2003), Genc et al. (2007), Burger y Ferstl (2008), Genc y Thille (2011), Zoettl (2008). Para el sector eléctrico peruano, De la Cruz y García (2002) analizaron las conductas estratégicas de las generadoras asumiendo una declaración de costos para el despacho; Dammert et al. (2005) analizaron la inversión en la actividad de generación considerando la problemática de poder de mercado; Gallardo et al. (2005a) y Gallardo et al. (2005b) mostraron aspectos que pueden afectar la inversión en la actividad de generación.

---

<sup>1</sup> Las empresas pueden ejercer poder de mercado cuando alteran el portafolio de generación que no es óptimo (Arellano y Serra, 2005).

<sup>2</sup> La libertad de inversión en capacidad, genera que las empresas tengan estrategias sobre sus decisiones considerando a las de otros (existentes o potenciales entrantes) en el mercado (González, 2008).

Tomando en cuenta que la decisión en los procesos de inversión en la actividad muestra que si bien las empresas manipulaban la regla de precios (tarifa de barra) hasta el 2006 mediante la disminución de invertir a futuro o por indisponibilidad, también se aprovechaba la rentabilidad de las centrales de diésel, visto que representaba un costo hundido y por la falta de competencia en el sector porque representaba un costo variable alto ejerciendo una presión al alza de los precios. Posteriormente, con el mecanismo de las licitaciones se buscó reducir el ejercicio de poder de mercado de los generadores e incentivarlos a contar con nuevas centrales de generación para poder abastecer la demanda creciente de los distribuidores, producto del aumento del consumo de electricidad.

El objetivo de este trabajo es analizar la importancia de los contratos de largo plazo y de la franja competitiva sobre las decisiones de inversión en capacidad, producción, precios de generación bajo un análisis dinámico de oligopolio para un horizonte temporal de 10 años. Para ello, se busca mostrar cómo interactúan los grupos económicos de generación que compiten a lo Cournot bajo el enfoque de teoría de juegos siguiendo a Pineau et al. (2011) y Pineau y Murto (2003), considerando que estos no están regulados en su decisión de producción, y no existen tarifas en barra definidas por el ente regulador.

En esa línea, es importante responder algunas preguntas que se derivan de la problemática planteada: ¿Cuál es el efecto de los contratos de largo plazo bajo un escenario de mercado liberalizado, sobre la inversión en capacidad, la producción y el precio? ¿Cuál sería la composición del parque generador con tecnologías hidráulica y térmica? ¿Qué pasa con las variables de elección cuando el mercado está altamente concentrado y se toma en cuenta el tamaño franja competitiva? ¿Cuál es la relevancia de dicho escenario para las decisiones estratégicas de los competidores?

El presente trabajo se desarrolla en 4 secciones. En la sección 2 se desarrolla el modelo dinámico de oligopolio y metodología. En la sección 3 se reportan los datos a utilizar en la simulación del modelo y se discuten los resultados para los casos de competencia perfecta, oligopolio (Cournot), oligopolio con franja competitiva y monopolio bajo escenarios sin contratos de largo plazo y con estos. Finalmente, en la sección 4, se desarrollan las conclusiones y recomendaciones.

## **2. Metodología y modelo.**

La competencia en el sector eléctrico peruano y las conductas estratégicas de los grupos económicos de generación eléctrica, que cuentan solo con disponibilidad para la toma de decisiones de inversión y con un alto nivel de concentración, permiten desarrollar un análisis dinámico de inversión basado en el enfoque de teoría de juegos. Las fusiones horizontales, permiten a un grupo operar con distintas tecnologías y abastecer diferentes bloques de horario (punta y fuera de punta). Asimismo, la actividad de generación se plantea bajo un análisis de mercado oligopólico, y la competencia de los grupos de generación, por las características del sector, se desarrolla como un modelo Cournot.

Por lo descrito, se considera un mecanismo de solución que se desarrolla mediante una calibración en GAMS (General Algebraic Modeling System), obteniendo los equilibrios de un modelo de oligopolio dinámico desarrollado como un MCP (Mixed Complementary Problem). Para esto se toma en cuenta a todos los grupos con datos iniciales de 2011, y se plantean cuatro escenarios para analizar el cambio en las variables de elección. El primero asume que todos los grupos son tomadores de precios (competencia perfecta), el segundo considera que solo existe un gran grupo generador (monopolio), el tercero asume que todos los grupos deciden estratégicamente (oligopolio), y finalmente cuando existe una franja competitiva donde los pequeños grupos compiten.

Generalizando el problema de maximización a implementar, una empresa tiene como objetivo obtener mayores beneficios de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \max \pi &= IT - CT \\ \max \pi &= pQ_t - C(Q_t, K_t) - \Psi(I_t) \\ &\text{s. a} \\ (1) \text{ capacidad del sistema} & K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t \\ (2) \text{ capacidad de producción} & Q_t \leq hK_t \\ (3) \text{ no negatividad} & Q_t, I_t \geq 0 \end{aligned}$$

donde  $p$  es el precio de electricidad,  $Q_t$  es la energía producida,  $C(Q_t, K_t)$  es costo de producción,  $\Psi(I_t)$  es la función de inversión,  $K_t$  es la capacidad de generación,  $I_t$  es inversión en capacidad de generación, y  $h$  es el número de horas. El problema a maximizar se modifica de la siguiente manera:

$$\max \pi_i = \bar{Q}_{ci} \cdot \bar{p}_{ci} + [Q_i - Q_{ci}] \cdot p_s(Q) - C(Q_t, K_t) - \Psi(I_t)$$

donde  $\bar{Q}_{ci}$  es la cantidad contratada que se concreta al distribuidor al precio  $\bar{p}_{ci}$  que está fijo por los años que dure el contrato. Al mercado spot se llega a vender la diferencia.

El modelo a seguir muestra que existe un número limitado de grupos eléctricos (jugadores),  $N = \{1, \dots, n\}$  que compiten en el mercado. Las tecnologías de generación asumidas son las hidroeléctricas y térmicas, que abastecen a demandas base y pico. Para esto se toma como referencia lo propuesto por Dammert et al. (2005), Pineau y Murto (2003) y Pineau et al. (2011). La generalización del modelo se expresa:

$$\max_{q_j, I} \pi_j = \sum_{t=0}^T \beta^t \{ p^{hp}(Q_t^{hp}, e_t) Q_t^{hp} + p^{hfp}(Q_t^{hfp}, e_t) Q_t^{hfp} - C^H(q^{H, hp} + q^{H, hfp}, K_t^H) - C^T(q^{T, hp} + q^{T, hfp}, K_t^T) - \Psi^H(I_t^H) - \Psi^T(I_t^T) \}$$

Considerando que la demanda eléctrica en el Perú está sujeta a mucha variabilidad en hora punta, no se realiza un análisis sobre la curva de carga para el modelo, por lo que se asume una demanda por bloque tipo lineal<sup>3</sup> y decreciente que caracteriza la cantidad total despachada en el mercado:

$$\begin{aligned} p^{hp} &= A^{hp} - GQ \\ p^{hfp} &= A^{hfp} - GQ \end{aligned}$$

En un escenario donde el mercado no cuenta con contratos, los grupos van a buscar maximizar sus beneficios teniendo como variables de elección la cantidad producida y la inversión. El problema de optimización está representado por:

$$\max_{q, I} \pi_j = \sum_{t=0}^9 \beta^t \{ p^{hp}(Q_t^{hp}) [Q_j]_t^{hp} + p^{hfp}(Q_t^{hfp}) [Q_j]_t^{hfp} - C^H(q^{H, hp} + q^{H, hfp}, K_t^H) - C^T(q^{T, hp} + q^{T, hfp}, K_t^T) - \Psi^H(I_t^H) - \Psi^T(I_t^T) \}$$

En un contexto de oligopolio donde los grupos eléctricos operan en todas las tecnologías, y en el que se introducen contratos de largo plazo, el nuevo problema de optimización<sup>4</sup> es representado por:

<sup>3</sup> Siguiendo a Dammert et al. (2005) y Pineau et al. (2011) se asume que el parámetro  $A$  crece a una tasa  $g$ , representando esta la tasa de crecimiento de la demanda  $A^t = (1 + g)^t A$ , de los dos bloques horarios.

<sup>4</sup> Se impone la restricción de cantidad contratada bajo el precio pactado. La producción total de energía se complementa con las diferencias de la cantidad total menos la contratada por los precios por bloque de horario.

$$\max_{q, I} \pi_j = \sum_{t=0}^9 \beta^t \{ \bar{Q}_{cj}^{hp} * \bar{p}_{cj}^{hp} + \bar{Q}_{cj}^{hfp} * \bar{p}_{cj}^{hfp} + p^{hp} (Q_t^{hp}) [Q_j - Q_{cj}]_t^{hp} + p^{hfp} (Q_t^{hfp}) [Q_j - Q_{cj}]_t^{hfp} - C^H(q^{H, hp} + q^{H, hfp}, K_t^H) - C^T(q^{T, hp} + q^{T, hfp}, K_t^T) - \Psi^H(I_t^H) - \Psi^T(I_t^T) \}$$

$$\begin{aligned} \text{s. a:} \\ K_{t+1}^i &= (1 - \delta)K_t^i + I_t^i \quad i = H, T \\ q_t^{i, hp} &\leq hp \cdot K_t^i \\ q_t^{i, hfp} &\leq hfp \cdot K_t^i \\ q_t^{i, hp}, q_t^{i, hfp}, I_t^i &\geq 0 \end{aligned}$$

donde:

$\bar{Q}_{cj}$	Energía contratada (MWh)
$Q_j$	Energía total producida (vendida) por empresa $j$
$Q$	Energía total producida (vendida) en el mercado
$q^{H, hp}, q^{H, hfp}$	Energía hidráulica en diferentes bloques de horario (MWh)
$q^{T, hp}, q^{T, hfp}$	Energía térmica en diferentes bloques de horario (MWh)
$I_t^H, I_t^T$	Inversión en capacidad de generación (MW)
$K_t^H, K_t^T$	Capacidad de generación (MW)
$\bar{p}_{cj}$	Precio pactado en contrato bilateral (mercado regulado)
$\beta$	Tasa de descuento intertemporal $0 < \beta < 1$
$\delta$	Tasa de depreciación

La capacidad instalada inicial por tipo de tecnología para cada grupo de generación eléctrica está representado por  $K_0^i$ , mientras que la inversión en capacidad inicial se deriva de los costos de inversión  $I_0^i$ .

Los costos de producción se caracterizan siguiendo lo propuesto por Pineau y Murto (2003), de tal manera que para las centrales hidráulicas, el costo marginal depende positivamente de la producción, mientras que para las centrales térmicas, el costo marginal depende de la capacidad y de la producción. Los costos de producción para tecnologías hidráulica y térmica:

$$\begin{aligned} C^H(q^H, K_t^H) &\triangleq C^H(q^H) = \alpha_H \cdot q^H \\ C^T(q^T, K_t^T) &= \alpha_T \cdot q^T + \frac{\gamma K_t^T}{\phi + 1} \left( \frac{q^T}{K_t^T} \right)^{\phi + 1} \end{aligned}$$

Se incorporan costos de inversión cuadrática dado que representan, por un lado, una función de centrales térmicas que a su vez disponen de más de una tecnología, lo que permite caracterizar mejor los costos de centrales por su capacidad (ciclo simple y/o ciclo combinado). Para ello, se asume que esta función es convexa y creciente en inversión en capacidad. Asimismo, para las centrales hidráulicas, se considera una función que depende de la capacidad e inversión en capacidad, de tal manera que la inversión marginal incrementa con la capacidad instalada. De esta manera los costos de inversión para tecnologías hidráulica y térmica:

$$\begin{aligned} \Psi(I_t^H) &= \psi_1 I_t + \frac{1}{2} \psi_2 I_t^2, \quad \text{donde } \psi_1 = \kappa K_t \\ \Psi(I_t^T) &= \frac{1}{2} \varphi I_t^2 \end{aligned}$$

Asimismo, las decisiones de cada empresa sobre la cantidad a producir y la inversión en generación se expresan en el siguiente vector:

$$x_i = [(q_{im}^t, \forall m \in \{hp, hfp\}, t = 0, \dots, T); (I_{im}^t, \forall m \in \{hp, hfp\}, t = 0, \dots, T - 1)]$$

El conjunto de acciones de cada jugador o empresa  $i$  es  $\Omega_i$ ; mientras que las acciones de todos los jugadores es determinado por  $\Omega = \prod_{i \in N} \Omega_i$ , que para el presente estudio  $N$  representa 7 jugadores. En el modelo se utiliza la estructura de información “open loop<sup>5</sup>” donde los jugadores basan sus decisiones en el tiempo y no son acumulativas en cada etapa. Entonces, el vector  $x^* = \{x_1^*, \dots, x_N^*\} \in \Omega$  va a ser el equilibrio de Nash<sup>6</sup> si:

$$\begin{aligned} \pi_i(x^*) &\geq \pi_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*), \forall x_i \in \Omega_i, \forall i \in N \\ &-\langle \nabla_{x_i} \pi_i(x^*), x_i - x_i^* \rangle \geq 0, \quad \forall x_i \in \Omega_i \end{aligned}$$

Se desarrolla el Lagrangiano con la restricción de la ecuación de acumulación del capital (variable rezagada) y la restricción de producción:

$$\begin{aligned} L_j^t &= \bar{Q}_{cj} \cdot \bar{p}_{cj} + p^{hp} (Q_t^{hp}) [Q_j - Q_{cj}]_t^{hp} + p^{hfp} (Q_t^{hfp}) [Q_j - Q_{cj}]_t^{hfp} - C^H (q^{H,hp} + q^{H,hfp}, K_t^H) \\ &- C^T (q^{T,hp} + q^{T,hfp}, K_t^T) - \Psi^H (I_t^H) - \Psi^T (I_t^T) + \sum_{i \in \{H,T\}} \lambda_{t+1}^i (I_t^i - \delta K_t^i) + \sum_{i \in \{H,T\}} \xi_t^i (h \cdot K_t^i - q_t^{i,h}) \end{aligned}$$

Resolviendo las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_j^t}{\partial q_j^{hfp}} &= A^{hfp} - B^{hfp} Q_{hfp} - C^{hfp} Q_{hp} - B_{hfp} [Q_j - Q_{cj}]^{hfp} - C_{hp} [Q_j - Q_{cj}]^{hfp} - \alpha_H - \xi^H \leq 0, \\ &j \in N \\ \frac{\partial L_j^t}{\partial q_j^{hp}} &= A^{hp} - B^{hp} Q_{hp} - C^{hp} Q_{hfp} - C_{hfp} [Q_j - Q_{cj}]^{hp} - B_{hp} [Q_j - Q_{cj}]^{hp} - \alpha_T - \gamma \left( \frac{q^T}{K_t} \right)^\phi - \xi^T \leq 0, \\ &j \in N \\ \frac{\partial L_j^t}{\partial I_j^{hfp=H}} &= -(\psi_1 + \psi_2 I) + \lambda_{t+1}^H \leq 0, \quad j \in N \\ \frac{\partial L_j^t}{\partial I_j^{hp=T}} &= -\phi I + \lambda_{t+1}^T \leq 0, \quad j \in N \\ \frac{\partial L_j^t}{\partial \xi_j^{hfp=H}} &= hfp \cdot K_t^i - q_t^{i,hfp} \geq 0, \quad j \in N \\ \frac{\partial L_j^t}{\partial \xi_j^{hp=T}} &= hp \cdot K_t^i - q_t^{i,hp} \geq 0, \quad j \in N \end{aligned}$$

Representación de variables de coestado:

$$\begin{aligned} \lambda_{t+1}^H - \frac{\lambda_t^H}{\beta} &= \kappa I_t + \delta \lambda_{t+1}^H - \xi_t^H hfp, \quad t \in T \\ \lambda_{t+1}^T - \frac{\lambda_t^T}{\beta} &= -\phi \frac{\gamma}{\phi + 1} \left( \frac{q_t^T}{K_t^T} \right)^{\phi+1} + \delta \lambda_{t+1}^T - \xi_t^T hp, \quad t \in T \end{aligned}$$

<sup>5</sup> Rasata y Zaccour (2010) reportan que una estructura de información open loop supone que el horizonte es finito, mientras que las inversiones en close loop supone un juego infinito.

<sup>6</sup> Nagurney (2002) hace referencia sobre el teorema de desigualdad variacional que está relacionado con el equilibrio derivado. Para esto se considera un supuesto de que el vector  $x^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$  es un equilibrio si y solo si  $x^* \in \Omega$  es una solución del método descrito. Entonces:

$$\begin{aligned} \langle F(x^*), x - x^* \rangle &\geq 0, \quad \forall x \in \Omega \\ F(x) &\equiv \left( -\nabla_{x_1} \pi_1(x), \dots, -\nabla_{x_n} \pi_n(x) \right), \text{ donde} \\ \nabla_{x_i} \pi_i(x) &= \left( \frac{\partial \pi_i(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \pi_i(x)}{\partial x_n} \right) \end{aligned}$$



Representación de las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} K_{t+1}^H &= (1 - \delta)K_t^H + I_t^{Hi}, & t \in T \\ K_{t+1}^T &= (1 - \delta)K_t^T + I_t^T, & t \in T \end{aligned}$$

Complementariamente, se precisan algunas limitaciones del modelo previamente planteado. No se incorpora la utilización de tecnologías renovables no convencionales (eólica, solar, hidráulica con capacidad menor a 20MW) en el parque generador, ni tampoco el efecto del subsidio que se le paga a estas tecnologías mediante el D.L 1002<sup>7</sup>, ya que se requeriría un tratamiento especial mediante algún componente estocástico, y que no cuenta con mucha representatividad en el consumo nacional de energía (menos del 5%), lo que no reflejaría una distorsión significativa en los resultados que se presentan en el siguiente capítulo.

Otro aspecto que no se considera dentro del modelo planteado son las restricciones de transmisión eléctrica que afectan la configuración del parque generador, de tal manera que la congestión de las líneas no son incorporados en las decisiones de los agentes generadores al momento de decidir invertir en nueva capacidad y generar electricidad, dado que esto podría incentivar a los generadores a ejercer poder de mercado.

### 3. Resultados: datos y simulación.

En la industria eléctrica se han identificado 7 grupos de generación eléctrica que operan con tecnologías térmicas e hidráulicas, de los cuales, el Estado y Endesa son los más importantes por su participación en el mercado y el presente trabajo se enfoca en estos como los competidores en un contexto de mercado eléctrico liberalizado donde se define precio, cantidad, e inversión. En la tabla 1 se muestra la capacidad instalada y producción.

**Tabla 1. Capacidad en el mercado eléctrico peruano, 2011.**

Grupo Económico	Tecnología	Capacidad instalada (MW)	Producción total (GWh)
Estado	hidráulico	1422	10249
	térmico	296	
Endesa	hidráulico	753	10009
	térmico	1174	
Duke Energy	hidráulico	351	2806
	térmico	547	
SN Power	hidráulico	264	1685
	térmico	-	
Suez	hidráulico	130	4675
	térmico	956	
Globoleq	hidráulico	-	3994
	térmico	602	
Otros	hidráulico	313,6	1799
	térmico	177	

Fuente: Elaboración propia a partir de MINEM – Documento Promotor 2012, OSINERGMIN – Boletín Anual 2011.

<sup>7</sup> Decreto Legislativo 1002 (Decreto Legislativo de promoción de la inversión para la generación de electricidad con el uso de energías renovables).

La calibración del modelo propuesto permite analizar un posible escenario en contraste con la verdadera situación del sector eléctrico. Para esto, se consideran parámetros como los propuestos en Dammert et al. (2005) y Pineau et al. (2011). Asimismo, se considera que el periodo de operación de las centrales eléctricas es anual (365 días x 24 horas = 8760 horas), y asumiendo que por lo general las centrales térmicas operan en hora punta que representan en promedio 4 horas diarias y la incorporación del gas natural (ciclo simple y ciclo combinado), se tiene dos bloques de horario representados por base (5760 horas) y pico (3000 horas).

Por otro lado, se consideran costos referenciales por tipo de tecnología que abastecen a los bloques de horario. Por ejemplo, en la tabla 2 se observa la relación negativa entre el costo de inversión (MW-año) y el costo variable (MWh), dado que implementar una central hidráulica es más costoso que una térmica.

**Tabla 2. Costos estándares de energía eléctrica (miles de US\$).**

Central	Inversión (MW)	Costo fijo anual (MW – Año)	Costo variable (MWh)
Diésel	350	55,12	74,4
Gas natural - CS	400	63	18,2
Gas natural - CC	550	86,62	11,9
Hidráulica	1250	176,63	0,9

Fuente: Dammert et al. (2010).

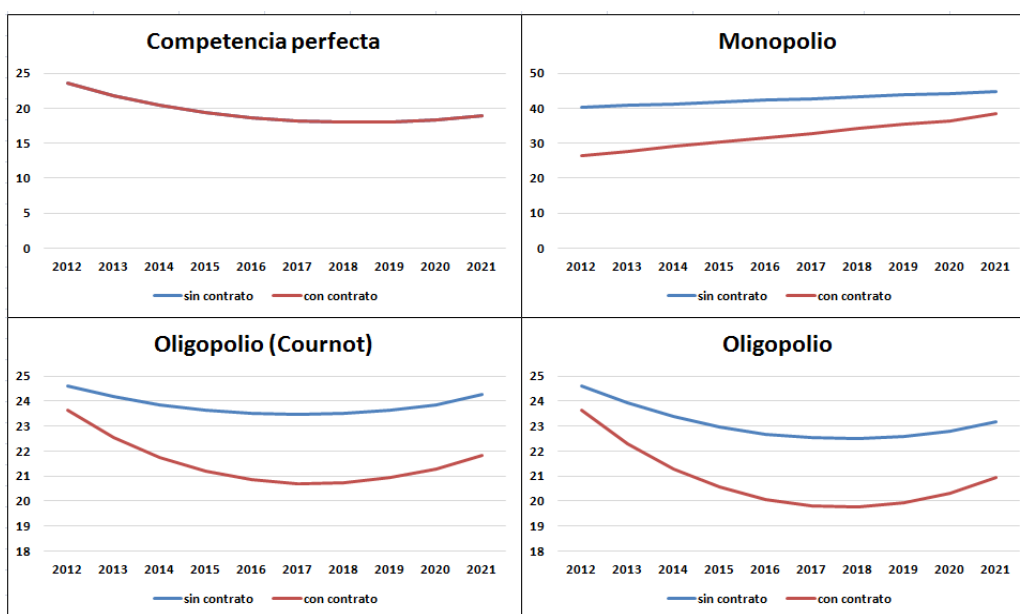
Los precios para cada demanda que abastecen las empresas generadoras se determinan en base a la agregación del precio de potencia y de energía obtenidos de los valores referenciales de los puntos de conexión del Sistema Eléctrico Interconectado Nacional. El precio contratado<sup>8</sup> por bloque de horario se basa en los factores de actualización al 2011 de precios a nivel de generación adjudicados. Para considerar la cantidad que cada grupo contrata con las distribuidoras en el mercado eléctrico se recurre al Balance de Generación Eléctrica por Interconexión y Empresas de Osinergmin – GART, donde se encuentran datos sobre la venta de energía por empresa. También, los parámetros para la simulación se obtienen de datos estándares para un mercado eléctrico mostrados por Dammert et al. (2005), Dammert et al. (2010), entre otros.

Los resultados del análisis de la actividad de generación eléctrica, consideran cuatro escenarios de competencia de mercado para cada contexto. Estos permiten comparar las respuestas de las estrategias de los diferentes grupos de generación y analizar la importancia de los contratos de largo plazo cuando se liberaliza el mercado.

La evolución del nivel de precios en bloque de horario (gráfico 1) base muestra un comportamiento decreciente durante los seis primeros años, a excepción de una situación en la que hay un solo generador que abastece al sector. El efecto de los contratos muestra una reducción de 24,48% para el monopolio, 9,73% para el oligopolio (Cournot), 9,83% para el oligopolio con franja competitiva. Para el monopolio se puede notar que los precios son mayores por el poder de mercado y la ausencia de potenciales grupos que no muestran incentivos a entrar; mientras que, en competencia perfecta, el resultado muestra el mismo comportamiento con la incorporación de contratos, pero la evolución de los precios tiende a ser más pronunciada. Asimismo, la franja competitiva permite que exista una demanda residual abastecida bajo precios ya determinados en el mercado y que haya una disminución del poder de mercado. Este efecto en los precios es mayor ante una situación de oligopolio (Cournot), pero el nivel de precios se reduce más para el oligopolio con franja competitiva.

<sup>8</sup> Resolución OSINERGMIN N° 193-2011-OS/CD.

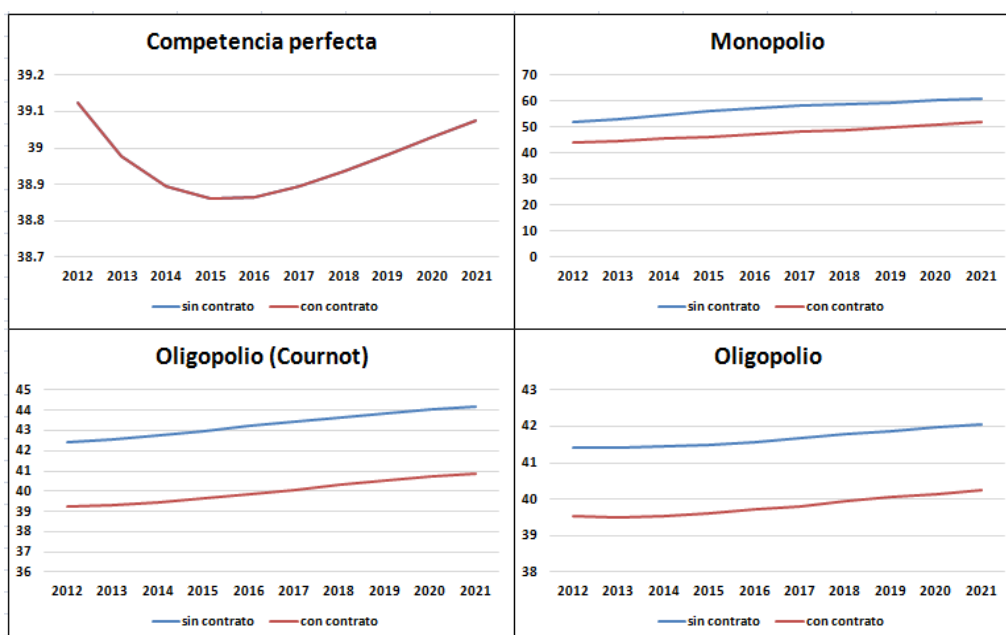
**Gráfico 1. Evolución del precio base (\$/MWh).**



Fuente: Elaboración propia.

El precio en el bloque horario pico (gráfico 2) muestra una clara diferencia con el resultado previo dado que se opera con tecnologías de combustión que implican costos marginales mayores ante la presión de una mayor demanda concentrada en un margen de horas. A excepción de competencia perfecta, se observa un crecimiento constante para todos los escenarios. El efecto de los contratos muestra una reducción de 16,32% para el monopolio, 7,62% para el oligopolio (Cournot), 4,45% para el oligopolio con franja competitiva. En competencia perfecta, la situación permanece inalterada. Asimismo, el efecto sobre el mercado que cuente con oligopolio (Cournot) es mayor a una situación de franja competitiva. Sin embargo, el nivel de precios del escenario de este último, presenta una mayor reducción a partir del cuarto año.

**Gráfico 2. Evolución del precio pico (\$/MWh).**

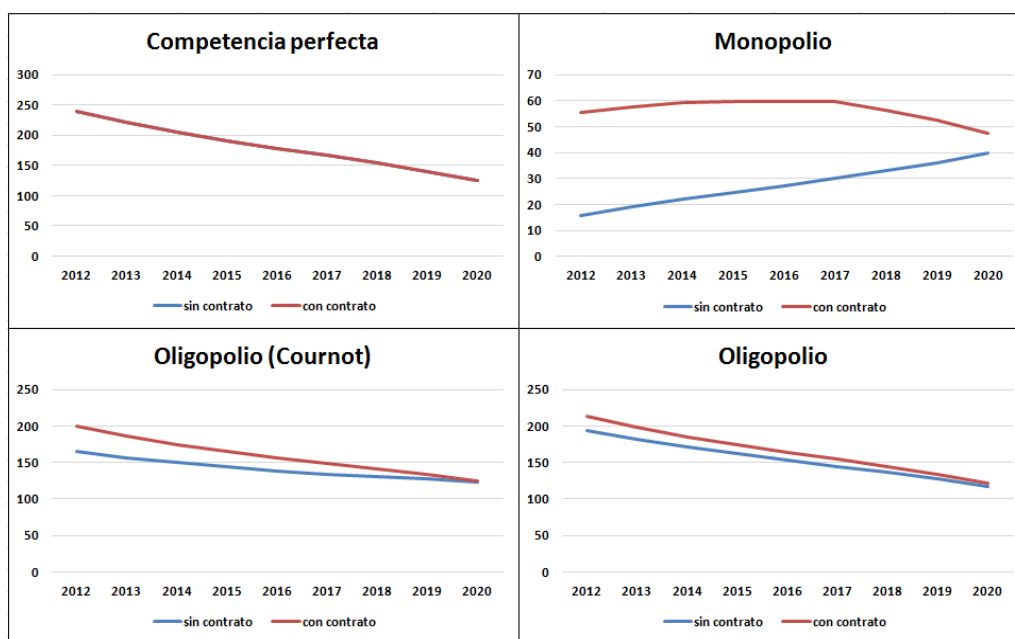


Fuente: Elaboración propia.

Si se toman en cuenta los contratos, la situación referida a los precios mejora porque disminuiría el poder de mercado que se pueda ejercer bajo la liberalización. La baja competencia entre los grupos permite que se venda energía a precios altos, pero cuando se contrata por varios años, restringiendo la influencia sobre el precio, la cantidad de energía que queda en el mercado spot se podría vender a un precio menor.

En cuanto a la inversión en capacidad de tecnología hidráulica (gráfico 3), el efecto de los contratos muestra un incremento de 123,62% para el monopolio, 12,15% para el oligopolio (Cournot), 7,18% para el oligopolio con franja competitiva. Se muestra que bajo un escenario de competencia perfecta, se tiene un incentivo a contar con mayor capacidad a corto plazo; también se observa que una incorporación de contratos no altera la evolución del escenario inicial. Otro escenario particular es el monopolio, donde el único grupo invierte crecientemente, pero con un nivel bajo, lo que se justificaría el poco incentivo a contar con centrales hidráulicas o invertir en mayor capacidad, lo que muestra que un costo fijo alto y costo variable bajo le genera poca rentabilidad al grupo monopolista. La inversión mejora con contratos, pero a partir de la segunda mitad, hay una desaceleración, reflejando un incentivo parcial. Analizando los casos que se ajustan al sector, el oligopolio con franja competitiva genera una inversión inicial mayor en capacidad que el resto, y presenta una reducción gradual durante el periodo de análisis. La incorporación de contratos en el modelo permite un incremento de la inversión.

**Gráfico 3. Inversión en tecnología hidráulica (MW).**

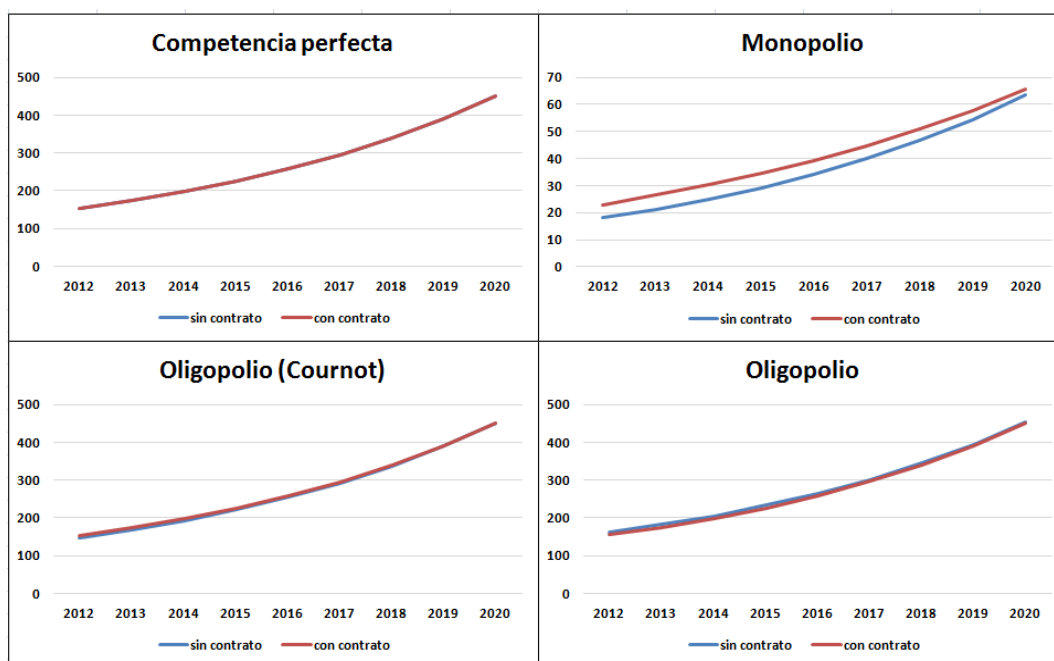


Fuente: Elaboración propia.

La tecnología térmica por su nivel de operatividad y rentabilidad, presenta una velocidad de crecimiento de inversión mayor a la tecnología hidráulica, en todos los escenarios (gráfico 4). El efecto de los contratos muestra un incremento de 15,22% para el monopolio, 1,37% para el oligopolio (Cournot) y una reducción del 2,27% para el oligopolio con franja competitiva. Bajo competencia perfecta, los grupos del sector son tomadores de precios por lo que cuentan con incentivos para invertir en centrales o capacidad de manera creciente. Para el caso de monopolio se observa un menor crecimiento, lo que podría hacer suponer que invierte solo en capacidad de centrales ya operativas. Situación similar a la de competencia perfecta se ve reflejada en los escenarios de oligopolio con franja competitiva, y de oligopolio (Cournot), siendo el primero en tener un ligero incentivo en mayor capacidad. En el contexto de contratos, el incentivo a invertir en la tecnología hidráulica es mayor a corto plazo que las térmicas, incluso se observa para el

caso de oligopolio con franja competitiva un incentivo a subinvertir en tecnología térmica y sobreinvertir en tecnología hidráulica.

**Gráfico 4. Inversión en tecnología térmica (MW).**

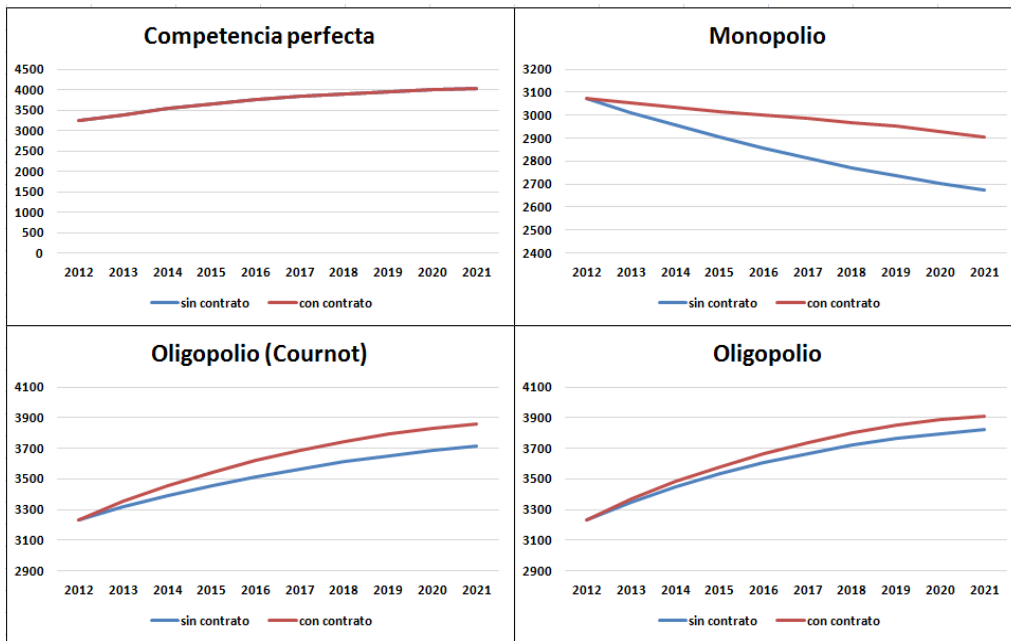


Fuente: Elaboración propia.

Con respecto a la capacidad de la tecnología hidráulica (gráfico 5) se observa una evolución creciente, producto de la fuerte inversión en nuevas centrales con nueva capacidad o en el incremento de la capacidad de las centrales ya operativas. El efecto de los contratos muestra un incremento de 5,09% para el monopolio, 2,68% para el oligopolio (Cournot), 1,56% para el oligopolio con franja competitiva. Considerando el periodo que puedan operar las centrales hidráulicas a diferencia de las térmicas, se asume un incremento sustancial en sus inversiones. Se muestra que, bajo el escenario de monopolio, el generador tiene incentivo a incrementar su precio distorsionando el parque, disminuyendo su capacidad. Los contratos permitirían que tal disminución se suavice. También, se observa que el aumento de capacidad se muestra en los escenarios de competencia perfecta, que no cuenta con un efecto de los contratos; mientras que el oligopolio con franja competitiva, y el oligopolio (Cournot), muestran un efecto positivo.

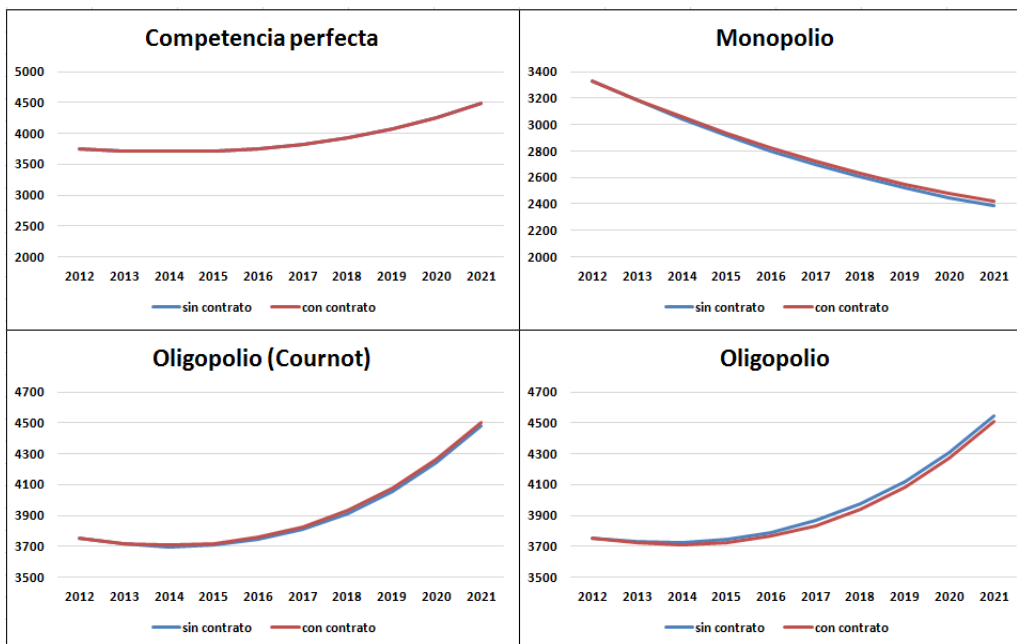
La situación ante el uso de tecnologías térmicas muestra una leve reducción de la capacidad de generación en todos los casos hasta la mitad del periodo, seguido por una rápida recuperación, a excepción del monopolio (gráfico 6). El efecto de los contratos muestra un incremento de 0,75% para el monopolio, 0,34% para el oligopolio (Cournot), y una reducción del 0,59% para el oligopolio con franja competitiva. Partiendo del caso de monopolio, que presenta una reducción de capacidad, se pueden considerar varios aspectos como el tiempo de operatividad de las centrales, el incremento de nuevas centrales con baja capacidad (diésel o residual), o la indisposición de éstas. En los escenarios restantes, la evolución de capacidad tiene el mismo patrón tendencial creciente. Si bien, dentro de las tecnologías térmicas no solo operan las de baja capacidad, sino las de ciclo simple y combinado (gas natural), el incremento de la inversión y la reducción de la capacidad hasta la mitad del periodo puede deberse en parte al retiro o conversión de las centrales operativas a diésel o residual a gas natural, lo que podría mantener inoperativas algunas centrales. Parte de la recuperación de la capacidad de generación haría suponer que es resultado de una reconfiguración óptima del parque generador.

**Gráfico 5. Capacidad de generación hidráulica (MW).**



Fuente: Elaboración propia.

**Gráfico 6. Capacidad de generación térmica (MW).**

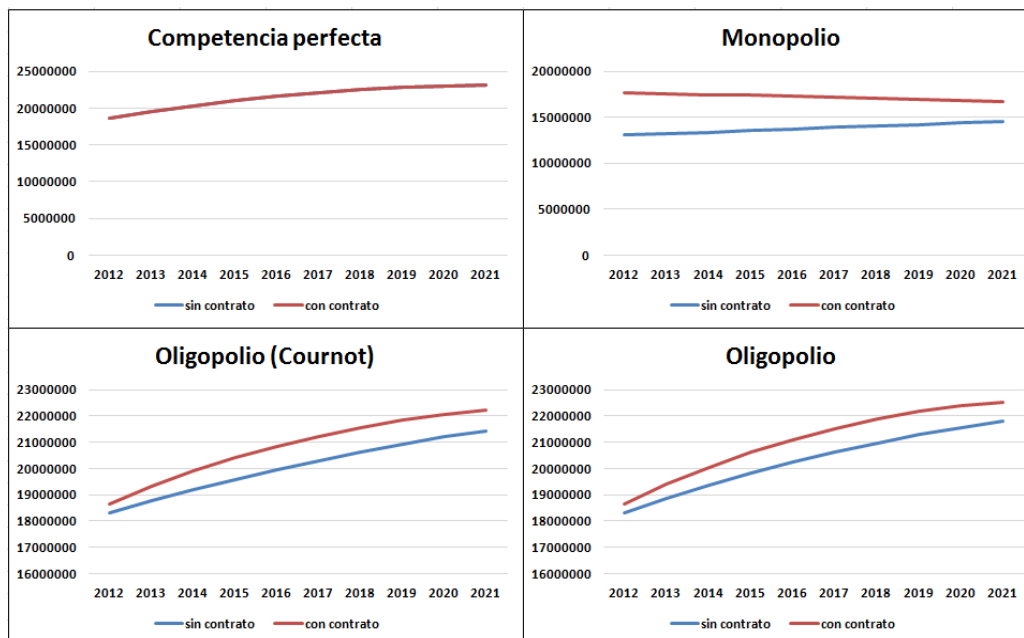


Fuente: Elaboración propia.

Los grupos económicos producen energía dependiendo de su inversión (capacidad), los competidores, el contrato determinado y el precio al que se venda por bloque. Dado esto, la cantidad producida bajo tecnología hidráulica muestra un componente creciente mayor a la térmica (gráfico 7). El efecto de los contratos muestra un incremento de 24,95% para el monopolio, 3,81% para el oligopolio (Cournot), 3,67% para el oligopolio con franja competitiva. Bajo el escenario de competencia perfecta, los grupos tienen incentivos por el incremento de la capacidad de generación en un contexto donde no existen indicios de poder de mercado ni grupos dominantes. En el escenario del monopolio, tiene incentivo a indisponer algunas centrales o

declararlas inoperativas, por lo que se observa que a partir del cuarto año se produce una disminución de la producción, cuyo efecto es significativo con la incorporación de los contratos. Considerando la presencia de una franja competitiva dentro de un oligopolio, se muestra que la producción de energía es mayor que un escenario de oligopolio (Cournot).

**Gráfico 7. Cantidad producida con tecnología hidráulica (MWh).**

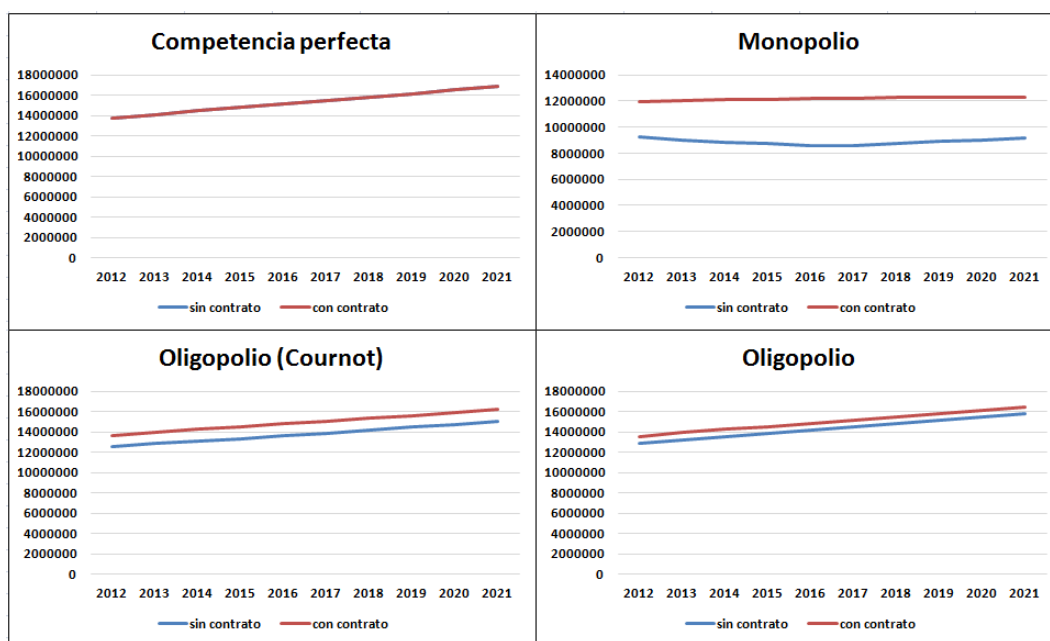


Fuente: Elaboración propia.

La producción de los grupos de electricidad bajo tecnología térmica, dada la configuración del parque generador y las necesidades en el horario fuera de punta, muestran un nivel menor a la hidráulica (gráfico 8). El efecto de los contratos muestra un incremento de 37,13% para el monopolio, 8,48% para el oligopolio (Cournot), 4,58% para el oligopolio con franja competitiva. En el escenario de competencia perfecta la evolución de la producción no muestra cambios considerando contratos a largo plazo. Ante la presencia de un solo grupo generador, este cuenta con incentivo para dejar de ir produciendo, producto de una disminución de la capacidad de generación; mientras que, con los contratos, se observa que la situación mejora considerablemente manteniendo una tendencia constante. Los escenarios restantes incrementan la producción por la posible incorporación de nuevas tecnologías que puedan darse ante la reconversión de centrales y un paulatino crecimiento de la capacidad de generación.

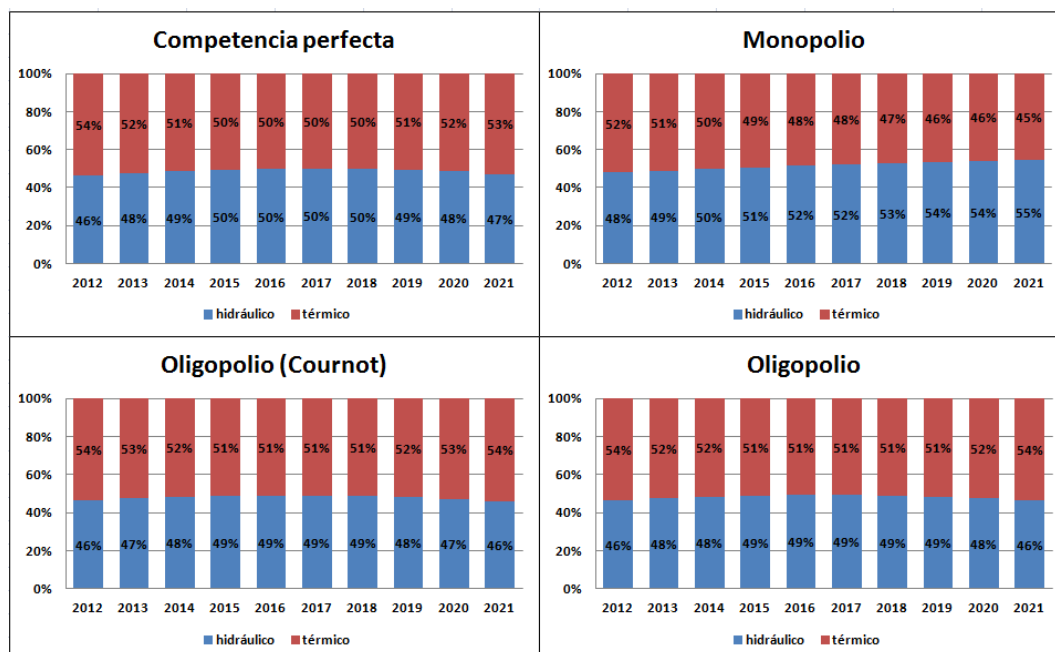
Adicionalmente se muestra la composición del parque generador en los diferentes escenarios de mercado, bajo la incorporación de contratos (gráfico 9). La situación de competencia perfecta refleja un comportamiento creciente de capacidad de la tecnología hidráulica, lo que ha de suponer que los grupos con centrales térmicas tengan incentivos a convertirse en más eficientes con la entrada de gas natural, efecto que se muestra a partir del cuarto periodo de análisis. Caso contrario se observa cuando existe un solo grupo en el sector, con un fuerte desincentivo de inversión en tecnología térmica, así como en hidráulica. En este caso el grupo ejerce poder de mercado en menor medida a la situación sin contratos, aliviando la distorsión del parque. El efecto de los contratos es más notorio cuando los grupos compiten a lo Cournot o con la presencia de una franja competitiva, ya que habrá mayor incentivo de inversión con este último reflejado en una mayor capacidad de generación hidráulica; situación similar se muestra en la térmica, por lo que el parque generador bajo el escenario de oligopolio con franja competitiva resulta ser más eficiente.

**Gráfico 8. Cantidad producida con tecnología térmica (MWh).**



Fuente: Elaboración propia.

**Gráfico 9. Composición del Parque Generador (%).**



Fuente: Elaboración propia.

#### 4. Conclusiones y recomendaciones.

En la presente investigación se realizó un análisis de la actividad de generación eléctrica bajo el supuesto de que el mercado peruano se encontraba liberalizado y se muestra el impacto de un esquema de contratos de largo plazo. Dentro de este contexto se hizo un análisis de un modelo de oligopolio con franja competitiva, dado el nivel de concentración de mercado, considerando otros escenarios, desde la presencia de un solo grupo que configura su decisión de manera independiente (monopolio) hasta la de grupos que son tomadores de precios (competencia



perfecta), donde se muestra su influencia sobre las variables de decisión que actualmente se encuentran reguladas. Para esto se trató de ejemplificar dicho comportamiento de los grupos bajo un modelo que considera un enfoque de teoría de juegos.

Los resultados muestran que contratando el 70% de energía hidráulica y el 66% de energía térmica en el periodo base, la inversión en capacidad con tecnología hidráulica para el contexto de oligopolio con franja competitiva, para un horizonte temporal de 10 años, incrementa en 7,18% (sobreinversión) y con tecnología térmica disminuye en 2,27% (subinversión); mientras que la producción, con tecnología hidráulica incrementa en 3,67%, mientras que bajo tecnología térmica, 4,58%. El precio en hora base disminuye en 9,83% y en hora pico, 4,45%. En ese sentido, se muestra que a pesar de que en los diferentes escenarios puedan existir indicios de poder de mercado, los contratos tienen un efecto positivo en inversión en capacidad y producción, y un efecto negativo sobre los precios. Los grupos económicos de generación tienen mayor incentivo a invertir en capacidad, incrementando la producción, dado que ya no podrían manipular el precio en el mercado spot, porque no tendría efecto sobre sus beneficios. Asimismo, considerando las tecnologías operativas, lo que se observa es que habría incentivos para sobreinvertir en capacidad en tecnología hidráulica y subinvertir en capacidad en tecnología térmica para el escenario que considera franja competitiva, por lo que la adecuación del parque no reflejaría indicios de distorsión.

Ante una posible entrada de nuevos grupos económicos en los escenarios analizados, se muestra mejores condiciones para el sector considerando un oligopolio con franja competitiva, lo que permitiría disminuir los precios por bloques de horario e incrementar la inversión mejorando la capacidad de generación.

De esta manera se incorporan una serie de recomendaciones que podrían ayudar a fomentar una generación eficiente reduciendo la exposición del parque generador a incrementos en el precio y posibles racionamientos, con efectos a terceros.

- Si bien es cierto que un mercado liberalizado no funcionaría de una forma completamente competitiva, se podría fomentar una disminución paulatina de la intervención administrativa, ya que los contratos de largo plazo tienen un efecto positivo sobre las variables de elección.
- Considerando que hay un grupo reducido de grupos económicos de generación eléctrica, el análisis por tipo de mercado responde parcialmente a proponer que a pesar que el costo fijo de inversión de las centrales hidroeléctricas es mayor que las térmicas, se debería fomentar este tipo de tecnología, ya que el efecto sobre el consumidor es menor y mejora la composición de parque generador.
- También es importante considerar un mecanismo de subastas anticipadas con un mayor plazo para promover el desarrollo del mercado e inversiones de los grupos participantes.
- Bajo la composición de la tecnología térmica que considera la entrada del gas natural se pueden promover iniciativas de reconversión gradual de centrales térmicas operativas a diésel y residual, fomentando mejoras en el parque generador y en las tarifas a los consumidores en el bloque de horario pico.

Sobre la base de las limitaciones descritas en la metodología, se puede considerar como extensión del modelo para futuros trabajos sobre el sector eléctrico, la incorporación de tecnologías renovables no convencionales en el parque generador, mediante algún tipo de modelamiento estocástico, dada la intermitencia de dichos recursos. Se pueden adoptar restricciones complementarias de transmisión eléctrica que afectan la configuración del parque generador, a fin de caracterizar problemas de congestión. Esto está ampliamente documentado a través de modelos de *unit commitment*. También, considerando la variabilidad de la demanda de

electricidad, se podría realizar un análisis de series de tiempo para capturar un patrón de demanda, de tal manera que no se asuma una representación lineal, así como profundizar sobre la curva de carga. Asimismo, se podría replicar el modelo bajo condiciones actuales y representarlo bajo un enfoque de juegos cooperativos de tal manera que se pueda calcular un valor de Shapley como un equilibrio industrial.

Por otro lado, la estructura oligopólica puede extenderse a un análisis bajo el modelo Kreps-Sheinkman, que se asemejaría a lo que pasa en el despacho. También, se puede considerar la incertidumbre como factor de la decisión de inversión, dado que se omiten aspectos políticos que puedan darse y no se toma en cuenta el cauce hídrico para las hidroeléctricas, tampoco la volatilidad del precio de los combustibles usados por térmicas.

## Agradecimientos

Este documento es una adaptación de la tesis de licenciatura en economía de Arnold Rivasplata Ramírez de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Agradecemos los valiosos comentarios y sugerencias de los profesores Abelardo Jordán (PUCP - Departamento de Ciencias), Alfredo Dammert (PUCP - Maestría de Regulación de Servicios Públicos), Pierre-Olivier Pineau (HEC Montréal - Département de Sciences de la Décision) y Arturo Vásquez (GÉRENS - Escuela de Gestión, PUCP – Departamento de Economía). Los errores u omisiones son exclusivamente responsabilidad de los autores.

## Referencias

- Arellano, M.S., & Serra, P. (2005). *Market power in price-regulated power industries*. Universidad de Chile. Centro de Economía Aplicada.
- Burger, A., & Ferstl, R. (2008). *Generation capacity investment in oligopolistic electricity markets under uncertainty*. *Electricity Market*. 5th International Conference on European.
- Dammert, A., García C., & Molinelli, F. (2010). *Regulación y supervisión del sector eléctrico (1ª ed.)*. Perú: Fondo Editorial PUCP.
- Dammert, A., García C., Quiso, L. (2005). Dinámica de la Inversión en Generación de Electricidad en el Perú. *XXII Encuentro de Economistas del Banco Central de Reserva del Perú*. OSINERG.
- De la Cruz, R., & García, R. (2002). *Mecanismos de competencia en generación de energía y su impacto en la eficiencia: el caso peruano*. CIES.
- Gallardo, J., García, R., & Pérez-Reyes, R. (2005a). *Determinantes de la inversión en el sector eléctrico peruano*. OSINERG. Documento de trabajo 3.
- Gallardo, J., García, R., & Távora, J. (2005b). *Instituciones y Diseño de Mercado en el Sector Eléctrico Peruano: Análisis de la Inversión en Generación*. CIES.
- Genc, T., Reynolds, S., & Sen, S. (2007). Dynamic oligopolistic games under uncertainty: a stochastic programming approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(1), 55-80.
- Genc, T., & Thille, H. (2011). Investment in Electricity Markets with Asymmetric Technologies. *Energy Economics*, 33(3), 379-387.

- González, J. (2008). *Desarrollo de inversiones en mercados eléctricos oligopólicos. Tesis de Maestría*. Pontificia Universidad Católica de Chile. Escuela de Ingeniería.
- MINEM (2012). Subsector Eléctrico. Documento Promotor 2012. Recuperado de: [http://www.minem.gob.pe/archivos/Documento\\_Promotor\\_2012.pdf](http://www.minem.gob.pe/archivos/Documento_Promotor_2012.pdf)
- Nagurney, A. (2002). *Oligopolies and Nash Equilibrium*. University of Massachusetts. Isenberg School of Management. Recuperado de: <https://pdfs.semanticscholar.org/f4dc/555273aa082542c9ca5e021f2ceffef416ee.pdf>
- Osinermin (2011). Operación del Sector Eléctrico. Boletín Anual 2011. [http://www2.osinerg.gob.pe/Publicaciones/pdf/BolAnualSectorElectric/Boletin-Anual-SEIN\\_2011.pdf](http://www2.osinerg.gob.pe/Publicaciones/pdf/BolAnualSectorElectric/Boletin-Anual-SEIN_2011.pdf)
- Pineau, P., & Murto, P. (2003). An oligopolistic Investment Model of Finnish Electricity Market. *Annals of Operations Research*, 121(1), 123-148.
- Pineau, P., Rasata, H., & Zaccour, G. (2011). A dynamic oligopolistic electricity market model with interdependent segments. *The Energy Journal*, 32(4), 183-217.
- Rasata, H., & Zaccour, G. (2010). *An empirical investigation of open-loop and closed-loop equilibrium investment strategies in an electricity oligopoly market*. Les Cahiers du GERAD 54.
- Zoetl, G. (2008). *Investment decisions in liberalized electricity markets: A framework of peak load pricing with strategic firms*. University of Cologne. Working paper series in economics 38.

## ANEXO: REPRESENTACIÓN EXTENSA DEL MODELO

$$L_j^t = \bar{Q}_{cj} \cdot \bar{p}_{cj} + p^{hp}(Q_t^{hp})[Q_j - Q_{cj}]_t^{hp} + p^{hfp}(Q_t^{hfp})[Q_j - Q_{cj}]_t^{hfp} - C^H(q^{H,hp} + q^{H,hfp}, K_t^H) \\ - C^T(q^{T,hp} + q^{T,hfp}, K_t^T) - \Psi^H(I_t^H) - \Psi^T(I_t^T) + \sum_{i \in \{H,T\}} \lambda_{t+1}^i (I_t^i - \delta K_t^i) + \sum_{i \in \{H,T\}} \xi_t^i (h \cdot K_t^i - q_t^{i,h})$$

Resolviendo las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_j^t}{\partial q_j^{hfp}} \leq 0; \quad q_j^{hfp} \geq 0; \quad q_j^{hfp} \frac{\partial L_j^t}{\partial q_j^{hfp}} &= 0 \\ \frac{\partial L_j^t}{\partial q_j^{hp}} \leq 0; \quad q_j^{hp} \geq 0; \quad q_j^{hp} \frac{\partial L_j^t}{\partial q_j^{hp}} &= 0 \\ \frac{\partial L_j^t}{\partial I_j^{hfp=H}} \leq 0; \quad I_j^{hfp=H} \geq 0; \quad I_j^{hfp=H} \frac{\partial L_j^t}{\partial I_j^{hfp=H}} &= 0 \\ \frac{\partial L_j^t}{\partial I_j^{hp=T}} \leq 0; \quad I_j^{hp=T} \geq 0; \quad I_j^{hp=T} \frac{\partial L_j^t}{\partial I_j^{hp=T}} &= 0 \\ \frac{\partial L_j^t}{\partial \xi_j^{hfp=H}} \geq 0; \quad \xi_t^H \geq 0; \quad \xi_t^H (hfp K_t^H - q_t^{H,hfp}) &= 0 \\ \frac{\partial L_j^t}{\partial \xi_j^{hp=T}} \geq 0; \quad \xi_t^T \geq 0; \quad \xi_t^T (hp K_t^T - q_t^{T,hp}) &= 0 \end{aligned}$$

Representación de variables de coestado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_j^t}{\partial K_t^H} = 0 &\rightarrow -\kappa I_t - \delta \lambda_{t+1}^H + \xi_t^H hfp = 0 \\ \lambda_{t+1}^H - \frac{\lambda_t^H}{\beta} &= \kappa I_t + \delta \lambda_{t+1}^H - \xi_t^H hfp \\ \frac{\partial L_j^t}{\partial K_t^T} = 0 &\rightarrow \phi \frac{\gamma}{\phi + 1} \left( \frac{q_t^T}{K_t^T} \right)^{\phi+1} - \delta \lambda_{t+1}^T + \xi_t^T hp = 0 \\ \lambda_{t+1}^T - \frac{\lambda_t^T}{\beta} &= -\phi \frac{\gamma}{\phi + 1} \left( \frac{q_t^T}{K_t^T} \right)^{\phi+1} + \delta \lambda_{t+1}^T - \xi_t^T hp \end{aligned}$$

Representación de las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} K_{t+1}^H &= (1 - \delta) K_t^H + I_t^H \\ K_{t+1}^T &= (1 - \delta) K_t^T + I_t^T \end{aligned}$$



## Conflicto distributivo y política de ingresos en torno al tipo de cambio real en una economía semiindustrializada agroexportadora

FIRMENICH, MARIO EDUARDO

Estudios de Economía y Empresa

Universitat Oberta de Catalunya

Correo electrónico: firmenich@economistes.com

### RESUMEN

Se plantea un conflicto de tipo ricardiano. Terratenientes latifundistas producen bienes salario exportables y consumen bienes de lujo importados; industriales pequeños producen manufacturas no transables con costes hundidos importando bienes de capital; los asalariados consumen bienes exportables y manufacturas no transables.

Las cantidades se miden en unidades físicas y los precios en dinero fiduciario. La divisa internacional es fiduciaria. No existe equilibrio de economía pura. Equilibrio de precios no implica pleno empleo.

Según la gestión política, un incremento (reducción) del tipo de cambio real beneficia (perjudica) a exportadores, reduce (aumenta) el salario real y tiene efectos oscilantes en beneficios industriales, generando alianzas oscilantes de industriales con terratenientes o asalariados buscando un tipo de cambio real favorable en un juego de suma cero. La estabilización con el enfoque monetario de la balanza de pagos es imposible.

El modelo teórico formaliza la crisis estructural de economías periféricas que financian industrias tecnológicamente dependientes con exportaciones agrícolas.

**Palabras clave:** conflicto distributivo, tipo de cambio real, crecimiento desequilibrado.

**Clasificación JEL:** O15; O24; O41.

**MSC2010:** 03C30; 37N40.

# Distributive conflict and income's policy around the real exchange rate in a semi industrialized agro-exporter economy

## ABSTRACT

A conflict of Ricardian type is arised. Landowners produce exportable salary-goods and consume imported luxury goods. Small industrialists produce non-tradable manufactures with sunk costs by importing capital goods. Employees consume exportable goods and non-tradable manufactures.

Quantities are measured in physical units and prices in fiat money. The international currency is fiduciary. There is no equilibrium of pure economy. Price equilibrium does not imply full employment.

According to the political management, an increase (reduction) in the real exchange rate benefits (harms) exporters, reduces (increases) the real salary and has oscillating effects on industrial benefits, generating oscillating alliances of the industrialists, with eather landowners or workers, in order to achive a favorable real change rate in a zero sum game. Stabilization with the monetary approach to the balance of payments is impossible.

The theoretical model formalizes the structural crisis of peripheral economies that finance technologically dependent industries with agricultural exports.

**Keywords:** distributive conflict, real exchange rate, unbalanced growth.

**JEL classification:** O15; O24; O41.

**MSC2010:** 03C30; 37N40.



## 1. Introducción.

Este trabajo formaliza la dinámica desequilibrada de una economía semiindustrializada agroexportadora. Se plantea un conflicto de tipo ricardiano con tres clases sociales: terratenientes latifundistas, capitalistas industriales pequeños y medianos y asalariados. El modelo teórico puede ilustrar la crisis estructural de muchas economías periféricas, especialmente latinoamericanas, que dependen de sus exportaciones agrícolas para financiar un desarrollo industrial tecnológicamente dependiente.

El caso típico de la economía argentina ha sido tratado en múltiples trabajos, como Díaz Alejandro (1965), Porto (1975), Gueberoff (1977), Braun y Leonard (1981). La evidencia empírica histórica del caso argentino para las cuatro décadas que van desde los años '20 hasta los años '60 del S. XX ha sido bien recopilada y analizada por Díaz Alejandro (1975), aunque el autor no formaliza el modelo que represente esa dinámica.

En este trabajo se desarrolla un modelo teórico general sin formalizar ningún caso particular. A diferencia de otros trabajos, incluyendo todos los mencionados, la formalización que plantea este artículo se aleja de la economía matemática habitual y de los supuestos de la teoría neoclásica en particular.

La estructura del trabajo está organizada del siguiente modo. En primer lugar, se formaliza los sectores productivos, las preferencias de los consumidores y las condiciones de equilibrio en los mercados de dinero, agropecuario, industrial, laboral, del sector externo y las condiciones del equilibrio macroeconómico. En segundo lugar, se analizan los efectos distributivos de las variaciones del tipo de cambio real. En tercer lugar, se analizan los efectos de las variaciones del tipo de cambio real sobre la renta nacional en el corto plazo. En cuarto lugar, se analiza los efectos de las variaciones del tipo de cambio real en la dinámica del crecimiento económico. Por último, se exponen las conclusiones.

## 2. Estructura básica del modelo y comportamiento de los agentes.

### 2.1. Los sectores productivos y sus respectivas tecnologías.

Existe un sector productor de bienes primarios alimenticios y un sector productor de bienes manufacturados de consumo final. En ambos casos la tecnología se representa por funciones de producción técnicas medidas en unidades físicas<sup>1</sup>. El sector agropecuario está constituido por latifundios y el sector industrial por empresas pequeñas y medianas.

---

<sup>1</sup> La homogeneidad de las unidades de medida físicas de los factores es posible en diversas formas. Pasinetti (1985) define la unidad física de capacidad productiva verticalmente integrada para una función de producción “genuina” de cada uno de los bienes del sistema. Con este procedimiento no es posible la consideración de todos los bienes del sistema en unidades físicas homogéneas y, por lo tanto, no es posible una función de producción agregada en unidades físicas homogéneas.

En ciertos casos puede considerarse a las variables en unidades físicas convencionales (toneladas, hectáreas, horas/hombre) usando las convenciones existentes para las unidades dimensionales en funciones matemáticas aplicadas a la economía; para el caso de las “ecuaciones empíricas”, se acepta que son formulaciones matemáticas que reflejan los valores numéricos de las relaciones entre constantes y/o variables diferentes sin necesidad de tener en cuenta sus unidades. Cf. Frits J. de Jong (1967, pp. 34-63). Este procedimiento podría ser objetado en ecuaciones de carácter teórico y no empírico.

En Firmenich (2015) se plantea la medición de las variables de cantidades de bienes y servicios en unidades físicas de flujos de energía sin que esta magnitud guarde ninguna relación con los precios relativos; los bienes alimenticios para la especie humana se miden en las calorías que proporcionan mediante su digestión; el trabajo humano se mide en las calorías consumidas por el cuerpo humano al realizar trabajo mecánico; la energía aplicada en los procesos productivos se mide directamente en unidades energéticas, los bienes de capital y las manufacturas en general se miden en el costo de producción energético acumulado que les ha dado origen.

**2.1.1. El sector agropecuario:** produce un bien salario que es exportable. La explotación extensiva de la tierra implica la casi inexistencia de inversión de capital fijo o industrial. El capital invertido es una porción del producto que se reinvierte en el período siguiente, (semilla o ganado reservado para reproducción). La tierra es una variable *stock*<sup>2</sup>. Puede tenerse tierra ociosa sin coste. La función de producción técnica es:

$$Y = f(T, L_Y, Y_K) \quad ; \quad Y = A \cdot \min \left\{ T^0, \frac{L_Y}{b}, \frac{Y_K}{a} \right\} \quad , \quad \frac{Y_K}{a} \leq T^0 \quad , \quad \frac{L_Y}{b} \leq T^0 \quad (1)$$

$Y$  es el bien primario,  $T^0$  es la cantidad de tierra fértil disponible,  $L_Y$  es el trabajo empleado en la producción e  $Y_K$  es la cantidad del bien primario usada como capital reproductivo. La tecnología tiene coeficientes fijos:  $a$  y  $b$ ;  $A$  es un coeficiente de productividad.

**2.1.2. El sector industrial:** su producción es sustitutiva de importaciones de manufacturas livianas de consumo final y no es competitiva internacionalmente; abastece el mercado interno con políticas proteccionistas. Los bienes de capital (máquinas-herramientas e insumos intermedios) son importados. El ahorro doméstico sólo se invierte en construcción y producción de herramientas simples, la inversión significativa es la importación de bienes de capital. La función de producción técnica depende del trabajo y la inversión depende del bien de capital importado,  $I_k$ :

$$\frac{dK}{dt} = I_K \quad (2)$$

La función de producción técnica de este sector es:

$$Q = g(L_Q, K) = B \cdot \min \{ c \cdot L_Q, K \} \quad , \quad \frac{K}{L_Q} = c \quad (3)$$

$Q$  es el bien manufacturado,  $K$  el capital empleado,  $c$  una constante,  $B$  un coeficiente de productividad y  $L_Q$  la cantidad de trabajo empleado en producir el bien manufacturado. Dado que el factor escaso son los bienes de capital importado, la función se expresa como:

$$Q = B \cdot K, \quad K \leq K_0 \quad (3 \text{ bis})$$

$K_0$  es el capital total instalado; la producción puede darse con capacidad instalada ociosa, aunque ello implicará un coste. El sistema tiene cambios estructurales discretos muy espaciados que modifican los valores de  $B$  y  $c$ .

## 2.2. La optimización en cada sector productivo.

**2.2.1. En el sector agropecuario:** es un oligopolio en el mercado doméstico; considerando la conducta de los terratenientes agremiados como una colusión, asumiremos que tiene una estructura de monopolio. Se asume la hipótesis de *pais pequeño*: la demanda externa del bien primario es infinitamente elástica al precio internacional exógeno.

La maximización de beneficios implica, para el mercado interno, la igualación del ingreso marginal ( $IMg$ ) del monopolio con su coste marginal ( $CMg$ ); pero en el mercado externo se puede vender cualquier cantidad al precio internacional dado. Sean:  $r$  el beneficio del sector agropecuario como productor monopolista,  $p_y$  el precio doméstico del bien agropecuario,  $Y^d$  la cantidad comprada por la demanda interna,  $tc^*$  el tipo de cambio real,  $p^*$  el precio internacional exógeno del bien exportable,  $X$  la cantidad del bien primario exportada,  $w$  el salario nominal (igual en toda la economía) e  $i$  la tasa normal de beneficio del capital (equiparable a la tasa de interés). Así, tenemos:

<sup>2</sup> Para que las unidades del factor tierra sean homogéneas con las de las restantes variables físicas, las unidades de superficie de Tierra pueden medirse por la cantidad de energía solar que pueden recibir y aprovechar con la fotosíntesis, de modo que una unidad de superficie puede ser representada por una magnitud en unidades de energía que mide su capacidad productiva agrícola. La misma magnitud de superficie equivaldrá a diferentes magnitudes de energía en función de la fertilidad del suelo (Firmenich 2015).



$$r = p_Y \cdot Y^d + tc^* \cdot p_Y^* \cdot X - w \cdot L_Y - (1 + i) \cdot p_Y \cdot Y_K \geq 0$$

En el mercado interno, considerando el trabajo y el capital proporcionales a la producción vendida internamente resulta (Apéndice Matemático *Dedución 1*):

$$\frac{1}{\varepsilon} = -\frac{Y^d}{p_Y} \cdot \frac{dp_Y}{dY^d}, \quad \varepsilon > 1 \quad (4)$$

$$p_Y = \frac{w \cdot b}{A \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) - (1+i) \cdot a} \quad (5)$$

$\varepsilon$  es la elasticidad-precio de la demanda interna. El precio interno del bien salario determina la cantidad  $Y^d$  que se venderá en el mercado doméstico. Para que existan ventas en el mercado interior, debe ser:

$$p_Y \geq tc^* \cdot p_Y^* \quad (6)$$

$$tc^* = tc \cdot \frac{p^*}{p} \quad (7)$$

$tc$  es el tipo de cambio nominal,  $p^*$  y  $p$  son los índices de precios exteriores y domésticos respectivamente. Los beneficios del productor agropecuario en las exportaciones (denotando con el doble apóstrofe " las variables relativas al sector externo), son:

$$r'' = tc^* \cdot p_Y^* \cdot X - w \cdot L_Y'' - (1 + i) \cdot tc^* \cdot p_Y^* \cdot Y_K'' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad tc^* \cdot p_Y^* \cdot [X - (1 + i) \cdot Y_K''] \geq w \cdot L_Y''$$

La renta diferencial de la tierra juega un papel en la variación de las exportaciones ante la variación relativa entre el salario nominal y el tipo de cambio real. Esto puede verse afectado por variaciones exógenas del precio internacional del bien salario exportable.

Si el ingreso por exportaciones genera beneficios, el sector agropecuario producirá el máximo permitido por la tierra disponible, venderá en el mercado interno la cantidad que maximice su beneficio monopolístico, ahorrará cierta cantidad para inversión reproductiva y el resto de la producción será vendida en el mercado externo:

$$X = Y - Y^d - Y_K \quad (8)$$

Las variables de la función de producción técnica serán constantes a sus valores máximos iniciales. No necesariamente las variables endógenas son incógnitas, ni las constantes datos conocidos (Pasinetti 1985, p. 88).

La maximización de beneficios del sector determina:

$$Y = Y^0 = A \cdot \min \left\{ T^0, \frac{L_Y^0}{b}, \frac{Y_K^0}{a} \right\}, \quad Y_K = Y_K^0 = T^0 \cdot a, \quad L_Y = L_Y^0 = T^0 \cdot b$$

El supraíndice 0 indica magnitudes constantes al valor físico máximo inicial.

Podemos expresarlo como: 
$$Y^0 = A \cdot \frac{L_Y^0}{b} = A \cdot \frac{Y_K^0}{a} \quad (1 \text{ bis})$$

Los ingresos agropecuarios agregados son la suma de los ingresos de todas las explotaciones. Considerando al sector como un monopolista, los beneficios son:

$$R = p_Y \cdot Y^d + tc^* \cdot p_Y^* \cdot X - w \cdot L_Y^0 - (1 + i) \cdot p_Y \cdot Y_K^0 \quad (9)$$

En los beneficios del sector existe la tasa de beneficio normal sobre el capital adelantado más la renta monopolística en el mercado interno.

**2.2.2. En el sector industrial:** existen muchas pequeñas y medianas empresas de capital y tecnología similares. La naturaleza no transable de esta producción, sumado a que los industriales no pueden desinvertir para invertir en el sector agropecuario, convierte a la inversión en bienes de capital importado en un activo específico, existiendo costes hundidos: caídas de la demanda interna generan pérdidas en la amortización de la inversión. Los precios no surgen de la optimización de un mercado competitivo. El precio de las manufacturas será superior al competitivo porque existe un aseguramiento empresario (Segura, 1993, p. 57).

Si un productor representativo pudiera maximizar sus beneficios como en un mercado competitivo, siendo  $p_K^*$  el precio del bien de capital importado e  $i$  el beneficio normal del capital, el precio de competencia perfecta igual al Coste Total Medio ( $CTMe$ ), con  $CMg = CTMe$ , sería (Apéndice Matemático *Deducción 2*):

$$p_q = \frac{w + tc^* \cdot p_k^* \cdot c \cdot (1+i)}{B \cdot c}$$

La oferta industrial sería infinitamente elástica al precio determinado por el coste, según el salario nominal y el tipo de cambio real, que determina el coste del capital importado. Pero no es así en este caso.

La línea de producción del bien  $Q$  con todos los costes, incluyendo la necesidad de aseguramiento es:

$$p_q \cdot Q = w \cdot L_q + tc^* \cdot p_k^* \cdot K \cdot (1+i) + i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot (K_0 - K) = CT$$

Cuando  $K_0 = K$  no hay costes adicionales. Pero si el capital empleado es menor al instalado, surge un coste financiero por capacidad instalada ociosa, elevando el  $CTMe$ . Aplicando propiedad distributiva y cancelando en la expresión anterior y sustituyendo según la función de producción, es:

$$CT = p_q \cdot Q = \frac{w \cdot Q}{B \cdot c} + tc^* \cdot p_k^* \cdot \frac{Q}{B} + i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K_0$$

El  $CTMe$  incluyendo el coste por el aseguramiento es:

$$CTMe = \frac{w}{B \cdot c} + \frac{tc^* \cdot p_k^*}{B} + i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot \frac{K_0}{Q} = \frac{w + tc^* \cdot p_k^* \cdot c \cdot \left(1 + i \cdot \frac{K_0}{K}\right)}{B \cdot c}$$

El término constante en la línea de producción no es un *Coste Fijo* sino un *coste irrecuperable*. Con la función de beneficios:

$$\pi = p_q \cdot Q - \left[ \frac{w \cdot Q}{B \cdot c} + tc^* \cdot p_k^* \cdot \frac{Q}{B} + i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K_0 \right]$$

la maximización de beneficios para el productor pequeño o mediano, que toma la tasa de interés como dada, implicaría pérdidas, pues el precio resultaría:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = 0 \quad p_q = \frac{w}{B \cdot c} + tc^* \cdot \frac{p_k^*}{B}$$

Pero este precio es menor que el de competencia perfecta y menor que  $CTMe$  con aseguramiento por los activos específicos:

$$\frac{w}{B \cdot c} + tc^* \cdot \frac{p_k^*}{B} < \frac{w}{B \cdot c} + tc^* \cdot \frac{p_k^*}{B} \cdot (1+i) < \frac{w}{B \cdot c} + tc^* \cdot \frac{p_k^*}{B} \cdot \left(1 + i \cdot \frac{K_0}{K}\right)$$

El precio de venta deberá ser mayor y la cantidad vendida menor que los valores correspondientes al punto de la eficiencia teórica. Aunque esto implica operar en la zona en que el  $CMg$  es menor que el  $CTMe$  decreciente, la atomización del sector impide una colusión. Ante una caída de la demanda, las empresas pequeñas y medianas que puedan se contentarán con cubrir el  $CTMe$  y las más apremiadas

aceptarán vender transitoriamente por encima de su  $CMg$  pero por debajo de su  $CTMe$ .

En general resultará:

$$\frac{w}{B \cdot c} + tc^* \cdot \frac{p_k^*}{B} \cdot (1 + i) \leq p_q \leq \frac{w}{B \cdot c} + tc^* \cdot \frac{p_k^*}{B} \cdot \left(1 + i \cdot \frac{K_0}{K}\right)$$

El precio de los bienes manufacturados incluirá entonces un "sobreprecio" pero sin cuasirrentas; el "exceso" de precio disminuirá a medida que se incrementa el uso del capital instalado hasta su pleno empleo. Si  $K = K_0$ , el precio resulta igual al de competencia perfecta.

Si hay capacidad instalada ociosa, será  $CMg < p_q < CTMe$ ; habrá pérdidas que desaparecerán si el precio es de competencia perfecta. Los capitalistas industriales necesitan la expansión del mercado interno hasta que no exista capacidad instalada ociosa. Supondremos, salvo que se aclare lo contrario, que  $p_q = CTMe$ :

$$p_q = \frac{w + tc^* \cdot p_k^* \cdot c \cdot \left(1 + i \cdot \frac{K_0}{K}\right)}{B \cdot c} \quad (10)$$

Los beneficios agregados de los industriales son (Apéndice Matemático *Deducción 3*):

$$\Pi = i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot [2 \cdot K - K_0] \quad (11)$$

### 2.3. Las preferencias de los consumidores.

Se supone que todos los individuos tienen iguales preferencias con diferentes restricciones presupuestarias<sup>3</sup>. Las preferencias son lexicográficas: primero, se satisface las Necesidades Básicas de alimentación; después, se satisface las Necesidades de Status con bienes de industria nacional; finalmente se consume bienes de lujo importados.

Si  $Y$  es el bien alimenticio,  $Q$  es el bien manufacturado nacional e  $I_c$ , es el bien de consumo de lujo importado, una combinación de bienes cualquiera  $A_i = (Y_i, Q_i, I_{c_i})$ , será preferida a otra combinación,  $A_j = (Y_j, Q_j, I_{c_j})$ , si se cumple:

- 1º)  $Y_i > Y_j / Y_i \leq Y_j^{NBS}$
- 2º)  $Y_i = Y_j, Q_i > Q_j / Q_i \leq Q_j^{NSS}$
- 3º)  $Y_i = Y_j, Q_i = Q_j, I_{c_i} > I_{c_j}$ .

$NBS$  y  $NSS$  indican el valor de las variables para Necesidades Básicas Satisfechas y Necesidades de Status Satisfechas. Cuando los ingresos aumentan cualquier individuo prefiere consumir bienes "más sofisticados"<sup>4</sup>. El nivel de renta diferencia tres estratos sociales:

- a) el sector de bajos ingresos, asalariado
- b) el sector de ingresos medios, pequeños y medianos capitalistas
- c) el sector de altos ingresos, terratenientes latifundistas.

<sup>3</sup> Cf. Musgrave, R. A. y Musgrave, P. B. (1992, p. 69) "...sostener que las necesidades se experimentan individualmente no supone negar la existencia de la interacción social. ... Además, la proposición de que las necesidades se experimentan individualmente no excluye el altruismo. ... Sin embargo, aceptando todo esto, lo que importa aquí es que la satisfacción se experimenta en último término por A y B de forma individual, y no por una tercera entidad misteriosa denominada A + B".

<sup>4</sup> Pasinetti (1985, p. 82) fundamenta esta conducta en la evidencia empírica de la Ley de Engel y sostiene que la utilidad marginal de los bienes preferidos en primer orden llega a ser negativa con los aumentos de renta. En rigor, para que se pase a una cesta con igual cantidad del bien preferido en primer orden y mayor cantidad del bien preferido en el orden siguiente, la condición necesaria y suficiente es que la utilidad marginal del primero sea inferior a la del segundo, lo que efectivamente ocurre cuando se alcanza el nivel de consumo de "necesidad básica satisfecha", que no es necesariamente idéntico a la saciedad.

Las preferencias lexicográficas no pueden ser representadas por una función de utilidad (Henderson & Quandt, 1991, p. 15)<sup>5</sup> lo que implica que no se puede deducir funciones de demanda con maximización restringida de la utilidad.

## 2.4. Función de consumo, restricciones presupuestarias de los consumidores y funciones de demanda.

**2.4.1. Función de consumo y restricción presupuestaria.** Partimos de una simplificación de la teoría del consumo y del ahorro basada en la renta del ciclo vital (Dornbusch, Fischer & Startz, 2002, pp. 315-318), incorporamos en las expectativas de ahorro y desahorro los períodos de edades activa y pasiva y los períodos sin ingresos por actividades productivas en edad activa; se define una restricción presupuestaria general que varía según la situación particular de ingresos.

Los ingresos pueden ser salariales, por beneficios empresariales, por renta de la tierra o cualquier combinación de ingresos. Los ingresos monetarios corrientes de actividades productivas,  $P$ , son:

$$P = w + \pi + r.$$

La función de consumo general de cada individuo en unidades monetarias es:

$$C = u.WR + v.P = p_y.Y^d + p_q.Q^d + tc^*.p^*_y.I_c^d$$

$C$  es el consumo,  $WR$  es la riqueza poseída al margen de los ingresos de actividades productivas,  $u$  y  $v$  son pensiones marginales a consumir.

La riqueza inicial puede tener cualquier valor, incluso 0, pero todos acumulan riqueza con el ahorro por actividades productivas. Es decir:  $WR(t) = WR_0 + \int (1-v).P(t).dt$

Los individuos pueden cambiar de clase social cambiando de categoría de renta. Si los ingresos merman, los individuos se financian con desahorro.

La relación entre restricción presupuestaria y consumo es:

$$\begin{array}{lll} u.[0 + \int (1-v).P(t).dt] + v.[P < w] & \Rightarrow C = p_y.Y^d & Y^d \leq Y^{NBS} \\ u.[0 + \int (1-v).P(t).dt] + v.[P = w] & \Rightarrow C = p_y.Y^d + p_q.Q^d & Y^d = Y^{NBS}, Q^d < Q^{NSS} \\ u.[WR_0 + \int (1-v).P(t).dt] + v.[P = w + \pi] & \Rightarrow C = p_y.Y^d + p_q.Q^d & Y^d = Y^{NBS}, Q^d \leq Q^{NSS} \\ u.[WR_0 + \int (1-v).P(t).dt] + v.[P = w + \pi + r] & \Rightarrow C = p_y.Y^d + p_q.Q^d + tc^*.p^*_y.I_c^d & Y^d = Y^{NBS}, Q^d = Q^{NSS} \end{array}$$

El primer nivel de renta corresponde a asalariados en situación de desempleo o subempleo. El segundo formaliza a los asalariados empleados. El tercer caso corresponde a los industriales pequeños y medianos. El cuarto, representa a los terratenientes.

El precio internacional del bien de lujo importado,  $p^*_{lc}$ , es exógeno.

### 2.4.2. Las funciones de demanda.

Para bienes normales, dada la renta, la cantidad demandada depende del precio en relación inversa y, según la Ley de Engel, para un incremento de la renta la demanda aumenta en proporciones decrecientes. Según Pasinetti (1985, pp. 83-84), para incrementos sucesivos de renta, la demanda de un bien se incrementa en proporciones decrecientes hasta independizarse de la renta y, para niveles suficientemente elevados de renta, también del precio. No necesitamos suponer esto último. Es suficiente aceptar la modificación en los escalones lexicográficos de consumo según los niveles de renta; en todos los casos la cantidad demandada dependerá inversamente del precio para una renta constante.

<sup>5</sup> Sen (1976, p. 53) comenta la misma implicación formal en cuanto a la imposibilidad de representar una ordenación lexicográfica completa por una función real, pero referido a la función de bienestar social y generaliza la afirmación en la Nota 7 de p. 121: "Con una ordenación lexicográfica, las alternativas pueden estar completamente ordenadas sin que haya una escala de utilidad (ni siquiera ordinal) que pueda ser ajustada a ella".

La demanda de mercado de cada bien es la suma horizontal, para cada nivel de la renta nacional, de las demandas de los tres niveles de renta *per cápita*; los supraíndices 1, 2 y 3 indican los niveles de asalariados, capitalistas y terratenientes. Cada demanda es un múltiplo del individuo representativo.

2.4.2.1. *Demanda de mercado del bien primario en el mercado interno.*

$$Y^d = h^1(p_y, W) + h^2(p_y) + h^3(p_y) \Rightarrow Y^d = h(p_y, W) \quad (12)$$

$$\frac{\partial h}{\partial p_y} < 0 \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial W} > 0$$

$W$  representa la masa salarial en la renta nacional:  $W = w.(L_q + L_y^0)$  (13)

La demanda de alimentos aumenta con incrementos de renta de los asalariados porque existen Necesidades Básicas insatisfechas en desempleados y subempleados.

2.4.2.2. *Demanda de mercado del bien manufacturado no transable.*

$$Q^d = j^1(p_q, W) + j^2(p_q, \Pi) + j^3(p_q) \Rightarrow Q^d = j(p_q, W, \Pi) \quad (14)$$

$$\frac{\partial j}{\partial p_q} < 0 \quad , \quad \frac{\partial j}{\partial W} > 0 \quad , \quad \frac{\partial j}{\partial \Pi} > 0$$

$\Pi$  es la sumatoria de los beneficios de los capitalistas industriales. La demanda se expande con incremento en  $W$  y/o en  $\Pi$  porque existen en ambos sectores Necesidades de Status insatisfechas.

2.4.2.3. *Demanda del bien de lujo importado.*

Tenemos:  $I_c^d = k(p_{Ic}^*) \quad , \quad \frac{\partial k}{\partial p_{Ic}^*} < 0$  (15)

El aumento del tipo de cambio no afecta la demanda del bien de lujo importado porque incrementa en igual proporción el precio en moneda doméstica y los ingresos de los exportadores-consumidores. Siendo este precio exógeno y no pudiendo, como regla dominante, los industriales convertirse en terratenientes, consideramos constante la demanda del bien de lujo importado:

$$I_c^d = I_c^0 \quad (15 \text{ bis})$$

## 2. 5. La definición del equilibrio.

**2.5.1. El mercado de dinero.** Existe una oferta de dinero real pasivo (Olivera, 1968) que se adapta a la demanda de saldos reales según se incrementen los precios (Olivera, 1960). Los precios son inflexibles a la baja, bajando más lentamente que lo que suben (Olivera, 1984). Por simplicidad supondremos que los precios no bajan. El numerario es una unidad monetaria abstracta de dinero fiduciario. Es decir, hay precios absolutos en unidades monetarias abstractas (precios relativos al dinero pasivo fiduciario) (Olivera, 1986). La ecuación del mercado de dinero resulta suprimida junto con la definición del numerario fiduciario, pero oferta y demanda de dinero real están en equilibrio siempre y la dinámica inflacionaria es (Apéndice Matemático *Deducción 4*):

$$\frac{dp}{dt} = l \left( \frac{dw}{dt}, \frac{d\tau c}{dt}, p^* \right) \quad , \quad l' > 0 \quad , \quad \frac{dw}{dt}, \frac{d\tau c}{dt} \geq 0 \quad (16)$$

**2.5.2. El mercado de bienes del sector agropecuario:** existe siempre equilibrio de cantidades. Cualquier cantidad ofrecida se distribuye entre un mercado interno monopolístico y un mercado externo que absorbe

cualquier excedente a un precio dado<sup>6</sup>: 
$$Y^S \equiv Y^d \quad , \quad \frac{w \cdot b}{\left[ A \cdot \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) - (1+i) \cdot a \right]} \cdot Y^S = p_y \cdot h(p_y, W)$$

$$tc^* \cdot p_y^* \cdot (Y^0 - Y^S - Y_k^0) = tc^* \cdot p_y^* \cdot X$$

$Y^S$  es la cantidad vendida por el monopolio en el mercado interno idéntica a la cantidad comprada. Esto ya estaba descrito por la ecuación: 
$$X = Y - Y^d - Y_k \quad (8)$$

**2.5.3. El mercado de bienes del sector manufacturero:** existe equilibrio de cantidades. La oferta, cuya elasticidad-precio tiende a infinito, Ec. (10), enfrenta una demanda de pendiente negativa para una renta dada:

$$Q^S = Q^d \quad ; \quad \left[ \frac{w}{B \cdot c} + tc^* \cdot \frac{p_k^*}{B} + i \cdot tc^* \cdot \frac{p_k^*}{B} \cdot \frac{K_0}{K} \right] \cdot B \cdot K = p_q \cdot j(p_q, W, \Pi) \quad (17)$$

La demanda de capital es una demanda derivada de la demanda del bien final:

$$K = \frac{1}{B} \cdot j(p_q, W, \Pi) \quad (18)$$

**2.5.4. El mercado de trabajo:** se supone que la oferta crece a la misma tasa constante que la población: 
$$L^S = L_0 \cdot e^{n \cdot t} \quad (19)$$

La demanda agregada de trabajo es la sumatoria de la demanda constante en el sector agropecuario y la demanda variable del sector manufacturero, que es una demanda derivada de la demanda del bien manufacturado:

$$L^d = L_q + L_y^0 \quad , \quad L_y^0 = b \cdot T^0 \quad , \quad L_q = \frac{Q^S}{B \cdot c} \quad (20)$$

$$\Rightarrow L_q = \frac{1}{B \cdot c} \cdot j(p_q, W, \Pi) \quad (21)$$

El sistema no garantiza que se vacíe el mercado de trabajo. Es posible el desempleo por escasa demanda ante el crecimiento de la oferta:

$$w \cdot (L^S - L^d) \geq 0 \quad (22)$$

Los desempleados financian su consumo, con desahorro:

$$w \cdot (L^S - L^d) \geq u \cdot \int [(1-v) \cdot P(t) \cdot dt] + v \cdot [P < w]$$

**2.5.5. El sector externo:** no se garantiza el equilibrio de la balanza comercial entre importaciones y exportaciones. La variable Déficit Externo,  $DE$ , representa un exceso de demanda de divisas financiado con endeudamiento externo. Existe Inversión Extranjera Directa,  $IED^*$ , como variable exógena en términos netos de flujo de capital; puede ser positiva, nula o negativa:

$$DE = - [p_y^* \cdot X + IED^* - p_{lc}^* \cdot I_c^d - p_{lk}^* \cdot I_k] \quad (23)$$

### 2.5.6. El ahorro y la inversión.

La única inversión capaz de dinamizar el crecimiento y crear empleo es la de bienes de capital importado; así, el ahorro relevante es el ahorro nacional de divisas,  $S$ , que sólo puede ser ahorrado por los terratenientes exportadores:

$$S = p_y^* \cdot X - p_{lc}^* \cdot I_c^d \quad (24)$$

<sup>6</sup> Dada la formalización adoptada, un salario muy elevado junto con un tipo de cambio real suficientemente bajo determinarían una reducción de la cantidad ofrecida, sin costes por dejar tierras ociosas, manteniéndose aproximadamente iguales las ventas en el mercado interno monopolístico y reduciéndose las exportaciones. En esto jugaría un rol importante la renta diferencial de la tierra. Las explotaciones agropecuarias cuyos rendimientos no permitan satisfacer la desigualdad  $tc^* \cdot p_y^* \cdot [X - (1+i) \cdot Y_k] \geq w \cdot L_y$  dejarán de producir para la exportación. Si el mercado interno monopolístico no absorbe las cantidades que se dejan de exportar, se reducirá la oferta global.

La ecuación del mercado de divisas se puede representar como la inversión en bienes de capital importados igualada a la sumatoria de ahorro nacional de divisas y flujos externos de divisas:

$$tc \cdot p^*_k \cdot dK/dt = tc \cdot [S + IED^* + DE] \quad (23 \text{ bis})$$

### 2.5.7. El equilibrio entre oferta agregada y demanda agregada.

El valor agregado por cada sector implica restar de las ventas el valor de los *inputs* intermedios. En el sector agropecuario el *input* es el bien primario invertido para reproducción; en el sector industrial los únicos *inputs* intermedios son los incluidos en los bienes de capital importados, de modo que son incluidos en la misma variable que la amortización del capital. Al no formalizar el sector público no existen impuestos indirectos y el Producto Nacional Neto (*PNN*) resulta igual a la renta nacional:

$PNN = \text{Consumo} + \text{Inversión} + \text{Exportaciones} - \text{Importaciones} - \text{Amortizaciones}$

$$\text{Consumo} = p_y \cdot Y^d + p_q \cdot Q^d + tc^* \cdot p^*_{Ic} \cdot I_c^0$$

$$\text{Inversión} = p_y \cdot Y_k^0 + tc^* \cdot p^*_k \cdot dK/dt$$

$$\text{Exportaciones} = tc^* \cdot p^*_y \cdot X$$

$$\text{Importaciones} = tc^* \cdot [p^*_k \cdot I_k + p^*_{Ic} \cdot I_c^0]$$

$$\text{Amortizaciones} = p_y \cdot Y_k^0 + \delta \cdot tc^* \cdot p^*_k \cdot K \quad 0 < \delta < 1$$

El parámetro  $\delta$  representa el desgaste de máquinas y herramientas más los *inputs* intermedios importados. Sustituyendo y cancelando es:

$$PNN = p_y \cdot Y^d + p_q \cdot Q^d + tc^* \cdot p^*_y \cdot X - tc^* \cdot p^*_k \cdot K \quad (25)$$

Como condición de equilibrio, la suma de los ingresos netos de la renta de la tierra, de los beneficios industriales y de la masa salarial, debe igualar al *PNN* en unidades monetarias:

$$R + II + W = PNN \quad (26)$$

## 2.6. Ecuaciones, variables y parámetros del modelo.

El modelo tiene las 26 ecuaciones numeradas, 27 variables endógenas ( $Y, L_y, Y_k, K, I_k, Q, L_q, \epsilon, Y^d, p_y, w, i, tc^*, tc, p, X, R, P_q, II, W, Q^d, I_c^d, L^S, L^d, DE, S, PNN$ ), 8 variables exógenas ( $T^0, p^*_y, p^*, p^*_k, K_0, p^*_{Ic}, L_0, IED^*$ ) y 7 parámetros ( $A, a, b, B, c, n, \delta$ ).

Existe un grado de libertad. Siguiendo a Pasinetti (1985, pp. 141-143), el sistema de precios desempeña dos funciones: una, referida a las decisiones descentralizadas en donde los precios proveen una evaluación de los *inputs* para la producción; la otra referida a la distribución de la renta, donde salario y tasa de beneficios son *variables distributivas*. El modelo tiene tres precios endógenos: los precios de los dos bienes producidos y el precio de la divisa extranjera. Además, están las dos variables distributivas.

Los precios no son independientes de la distribución de la renta (Sraffa, 1983). Alguna variable distributiva deberá ser determinada exógenamente. Una decisión de política económica fija una variable, (no necesariamente el salario nominal o la tasa de beneficios), determinando la distribución de la renta y, con ello, todas las variables endógenas.

En este modelo, la escasez de divisas está en el centro del conflicto distributivo; es un juego de suma cero en relación al ahorro en divisas. Las decisiones institucionales sobre la política de ingresos pueden beneficiar a los terratenientes exportadores, (incluyendo períodos en que los capitalistas industriales aceptan políticas recesivas para recomponer la balanza de pagos y disminuir los salarios reales), o a los capitalistas industriales y los asalariados, vinculados al mercado interno.

Se analizarán los efectos que tiene sobre la evolución del sistema y del conflicto distributivo una

política económica que, según las alianzas sociales, gestiona la variación de los precios relativos mediante la variación del tipo de cambio real.

### 3. Efectos distributivos de las variaciones del tipo de cambio real.

El efecto de las variaciones del tipo de cambio real sobre la distribución del ingreso se analiza con un sistema de 5 ecuaciones simultáneas con 5 incógnitas.

Las variables incógnitas y las ecuaciones son (Apéndice Matemático *Deducción 5*):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R}{\partial tc^*}, \frac{\partial \Pi}{\partial tc^*}, \frac{\partial W}{\partial tc^*}, \frac{\partial j}{\partial tc^*}, \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} \\ (3.I.) \quad & \frac{\partial R}{\partial tc^*} = p_y^* \cdot [Y^0 - Y_k^0 \cdot (2 + i)] \\ (3.II.) \quad & \frac{\partial \Pi}{\partial tc^*} = i \cdot p_k^* \cdot [2 \cdot K - K_0] + \frac{i}{B} \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot 2 \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} \\ (3.III.) \quad & \frac{\partial W}{\partial tc^*} = \frac{w}{B \cdot c} \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} \\ (3.IV.) \quad & \frac{\partial j}{\partial tc^*} = \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} + \frac{\partial j}{\partial W} \cdot \frac{\partial W}{\partial tc^*} + \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial tc^*} \\ (3.V.) \quad & \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} = \frac{p_k^*}{B} \cdot \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \left( 1 - \frac{tc^*}{j_{(p_q, W, \Pi)}} \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} \right) \right] \\ & \Rightarrow \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} = \frac{p_k^*}{B} \cdot \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \left( 1 - \varepsilon_{(Q^d, tc^*)} \right) \right] \end{aligned}$$

#### 3.1. Efectos de la variación del tipo de cambio real sobre los beneficios de los terratenientes.

De la ecuación (3.I.) surge que un aumento del tipo de cambio real mejora sus beneficios:

$$\frac{\partial R}{\partial tc^*} = p_y^* \cdot [y^0 - Y_k^0 \cdot (2 + i)] > 0$$

#### 3.2. Efectos de la variación del tipo de cambio real sobre la cantidad demandada del bien manufacturado.

Reemplazando (3.V), (3.II) y (3.III) en (3.IV) obtenemos (Apéndice Matemático *Deducción 6*):

$$\frac{\partial j}{\partial tc^*} = \frac{\frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} \cdot \left( 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \right) + \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot i \cdot p_k^* \cdot (2 \cdot K - K_0)}{1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \frac{tc^*}{B} \cdot K \cdot \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} - \frac{\partial j}{\partial W} \cdot \frac{w}{B \cdot c} - \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot \left\{ i \cdot p_k^* (2 \cdot K - K_0) + i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot \frac{2}{B} \right\}}$$

En el denominador todos los términos son negativos excepto el primero: *I*. Dadas las magnitudes involucradas, el denominador es negativo. En el numerador el primer término es negativo. Pero el segundo término será positivo mientras el capital empleado no deje una capacidad ociosa suficientemente grande como para convertirlo en nulo, negativo o muy pequeño; aunque si esto ocurriera, podría variar también el signo del denominador, con lo que la derivada sería negativa.

Si  $K = K_0$ , el denominador es negativo mientras que en el numerador disminuye el valor absoluto del primer término negativo y aumenta el valor absoluto del segundo término positivo. Puede esperarse entonces que el numerador sea positivo y que la derivada sea negativa. Para ello debe cumplirse que:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} \cdot (1 + i) > - \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot i \cdot p_k^* \cdot K_0 \\ & \Rightarrow \frac{1}{B \cdot K_0} \cdot \frac{\partial j}{\partial p_q} > - \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot \frac{i}{(1 + i)} \\ & \Rightarrow \varepsilon_{(Q^d, p_q)} < \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot p_q \cdot \frac{i}{(1 + i)} \end{aligned}$$



Dada la magnitud numérica de  $p_q$  es razonable esperar que esta relación se cumpla, aunque depende de comprobaciones empíricas. Aceptando que esta relación se verifica, con  $K = K_0$ , un incremento de  $tc^*$  hará caer la demanda del bien manufacturado y resultará:  $\partial j / \partial tc^* < 0$

### 3.3. Efectos de la variación del tipo de cambio real sobre el precio del bien manufacturado.

La ecuación (3.V.) permite decir que si la derivada de la demanda del bien manufacturado respecto del tipo de cambio real resulta negativa o nula, el efecto sobre el precio del bien manufacturado será positivo:

$$(3.V.) \quad \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} = \frac{p_k^*}{B} \cdot \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \left( 1 - \frac{tc^*}{j(p_q, W, \Pi)} \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial j}{\partial tc^*} \leq 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} > 0$$

Es importante destacar que aun si la derivada de la demanda del bien manufacturado,  $j$ , respecto de  $tc^*$  fuera positiva, el efecto sobre el precio seguiría siendo positivo dentro de ciertos límites que conviene estudiar.

En efecto, teniendo en cuenta que Ec. (3.V.) es:

$$\frac{\partial p_q}{\partial tc^*} = \frac{p_k^*}{B} \cdot \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \left( 1 - \varepsilon_{(Q^d, tc^*)} \right) \right]$$

para que el efecto de una subida del tipo de cambio real sobre el precio del bien manufacturado fuera negativo sería necesario que la elasticidad de la demanda respecto al tipo de cambio fuera positiva y bastante mayor que uno; debería cumplirse (Apéndice Matemático *Deducción 7*):

$$\varepsilon_{(Q^d, tc^*)} > 1 + \frac{K}{i} \cdot K_0$$

No hay razones ni teóricas ni empíricas para aceptar semejante suposición. Esto se confirma por el hecho de que si tomamos la ecuación del precio, Ec. (10), simplificada para la situación  $K = K_0$ , resulta:

$$p_q = \frac{[w + (1+i) \cdot tc^* \cdot p_k \cdot c]}{B \cdot c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} = (1+i) \cdot p_k^* \cdot \frac{c}{B \cdot c} > 0$$

Así, podemos aceptar que  $\partial p_q / \partial tc^* > 0$ . Esta conclusión refuerza la plausibilidad de la conclusión sobre el efecto negativo de la subida del tipo de cambio real sobre la demanda del bien manufacturado y, por lo tanto, cabe descartar la hipótesis de que la elasticidad de esta demanda respecto al tipo de cambio pueda ser positiva. En efecto:

$$(3.IV.) \quad \frac{\partial j}{\partial tc^*} = \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} + \frac{\partial j}{\partial W} \cdot \frac{\partial W}{\partial tc^*} + \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial tc^*}$$

$$\frac{\partial j}{\partial p_q} < 0 \quad , \quad \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} > 0 \quad , \quad \frac{\partial j}{\partial W} > 0 \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial tc^*} < 0 \quad , \quad \frac{\partial j}{\partial \Pi} > 0 \quad , \quad \frac{\partial \Pi}{\partial tc^*} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial j}{\partial tc^*} < 0$$

$$\frac{\partial j}{\partial tc^*} < 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{(Q^d, tc^*)} = \frac{tc^*}{j(p_q, W, \Pi)} \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} < 0$$

### 3.4. Efectos de la variación del tipo de cambio real sobre los beneficios industriales.

Retomando la discusión sobre el efecto de un aumento de  $tc^*$  sobre los beneficios de los industriales, teníamos:

$$(3.II.) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial tc^*} &= i \cdot p_k^* \cdot [2 \cdot K - K_0] + i \cdot \frac{tc^*}{B} \cdot p_k^* \cdot 2 \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} \\ \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial tc^*} &= i \cdot p_k^* \cdot [2 \cdot K - K_0] + i \cdot p_k^* \cdot 2 \cdot K \cdot \frac{tc^*}{Q^d} \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} \end{aligned}$$

Si la derivada de la demanda del bien manufacturado respecto al tipo de cambio real es negativa, siendo  $K = K_0$ , para que toda la expresión sea negativa debe cumplirse:

$$2 \cdot K_0 \cdot \frac{tc^*}{Q^d} \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} < -K_0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{(Q^d, tc^*)} < -\frac{1}{2}$$

Si esto se cumple, entonces:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial tc^*} = i \cdot p_k^* \cdot K_0 \cdot [1 + 2 \cdot \varepsilon_{(Q^d, tc^*)}] < 0$$

El impacto de una subida de  $tc^*$  en los ingresos de los industriales dependerá de si existe capacidad productiva ociosa o no y de la elasticidad de la demanda respecto a  $tc^*$ .

Hemos considerado por simplicidad que  $p_q = CTMe$ . Pero esto sólo es cierto para  $K = K_0$ ; en caso contrario, la caída de la demanda interna hará que  $CMg < p_q < CTMe$  y la reducción de beneficios podrá convertirse en pérdidas:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial tc^*} = i \cdot p_k^* \cdot [2 \cdot K \cdot (1 + \varepsilon_{(Q^d, tc^*)}) - K_0] < 0$$

La exigencia sobre el valor absoluto de la elasticidad se relaja en esta expresión. Dependiendo de la diferencia entre  $K$  y  $K_0$ , un valor absoluto de  $\varepsilon < 1/2$  puede convertir en negativa la expresión. Cuanto mayor sea la capacidad instalada ociosa, menor será el valor absoluto de elasticidad requerido para producir una caída en los beneficios industriales.

Podemos afirmar plausiblemente que, con desempleo de capital instalado, la caída de la demanda originada en la subida del tipo de cambio real eleva el precio del bien manufacturado, pero lo ubica por debajo del  $CTMe$ ; así, la subida del tipo de cambio real genera una caída de los beneficios industriales.

Con pleno empleo de capital y trabajo, la situación depende de las elasticidades. En casos de sobreempleo laboral, las consecuencias de una subida del tipo de cambio real pueden ser cuando menos neutras sobre los beneficios del sector industrial y quizás inclusive positivas. La razón es que, si bien una subida del tipo de cambio real reduce las cantidades de equilibrio, también eleva el precio de venta y reduce el empleo laboral reduciendo el salario real, pero sin generar capacidad productiva ociosa significativa del capital instalado. El efecto final sobre los beneficios depende de la elasticidad-precio de la demanda.

Esto daría origen a unas alianzas oscilantes del sector industrial. En épocas de recesión y alto desempleo de capital y trabajo, su alianza sería con los asalariados para lograr un aumento de la demanda interna mediante aumentos de salarios nominales trasladados a los precios de las manufacturas, mientras se contiene el tipo de cambio nominal; en consecuencia, cae el tipo de cambio real. Pero en épocas de pleno empleo, la tendencia es la subida del salario real que reduce el beneficio empresarial, a la vez que aumenta el consumo del bien salario reduciendo los saldos exportables y aumenta la importación de *inputs* intermedios. En este caso la alianza del sector se volcaría hacia los terratenientes; el objetivo sería devaluar el tipo de cambio nominal congelando los salarios nominales, produciendo una subida del tipo de cambio real. Así se mejoraría la balanza de pagos mientras se incrementan los beneficios

agropecuarios y se reduce el salario real con un efecto neutro o positivo sobre los beneficios industriales.

### 3.5. Efectos de la variación del tipo de cambio real sobre los ingresos de los asalariados.

Sobre la situación de los asalariados, teníamos:

$$(3.III.) \quad \frac{\partial W}{\partial tc^*} = \frac{w}{B.c} \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*}.$$

$$\text{Entonces:} \quad \frac{\partial j}{\partial tc^*} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W}{\partial tc^*} < 0$$

Surge así el conflicto distributivo ante la crisis de la balanza de pagos.

## 4. Efectos de la variación del tipo de cambio real sobre la renta nacional en el corto plazo.

### 4.1. Efectos de la variación del tipo de cambio real sobre el producto físico.

Partiendo de la ecuación (25), tras breves manipulaciones, se obtiene el *PNN* en unidades físicas (Apéndice Matemático *Deducción 8*). Su variación es:

$$\frac{\partial PNN(F)}{\partial tc^*} = \left(1 - \frac{\delta}{B}\right) \cdot \frac{\partial j[p_q, W, \Pi]}{\partial tc^*}.$$

Interesa el signo de esta expresión. Hemos aceptado que la derivada de la demanda de consumo del bien manufacturado respecto a  $tc^*$  es negativa pero  $(1 - \delta / B) > 0$ ; en consecuencia, una subida de  $tc^*$  hará caer el *PNN* en términos físicos, contradiciendo el concepto habitual de que una depreciación real de la moneda incrementa el producto "real".

Un alza de  $tc^*$  reduciría el producto físico porque el producto agropecuario no cambia y cae la demanda (igual a la producción) del bien manufacturado nacional debido al aumento de su precio.

### 4.2. Efectos de la variación del tipo de cambio real sobre el producto medido en unidades monetarias.

Según la ecuación (25), con la simplificación  $p_y = tc^* \cdot p_y^*$  y realizando algunas sustituciones resulta (Apéndice Matemático *Deducción 9*):

$$\frac{\partial PNN}{\partial tc^*} = p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + \left[ \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} - \delta \cdot \frac{p_k^*}{B} \right] \cdot Q^d + \left( p_q - \delta \cdot tc^* \cdot \frac{p_k^*}{B} \right) \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*}$$

El primer término es positivo y su valor absoluto elevado por la magnitud de la diferencia entre el producto agropecuario y los *inputs* reproductivos. El segundo término es positivo y una idea sobre la magnitud de su valor absoluto lo da la cantidad demandada del bien manufacturado. En el tercer término, la expresión entre paréntesis es positiva, pero su magnitud es comparativamente pequeña, pues es menor que el precio del bien manufacturado; la derivada de la demanda del bien manufacturado respecto de  $tc^*$  puede ser negativa, pero difícilmente su valor absoluto convierta en negativo todo el miembro derecho. Es muy probable que la derivada del *PNN* en unidades monetarias respecto a  $tc^*$  sea positiva. La diferencia entre el *PNN* en términos físicos y su medición en términos "reales" con el habitual índice deflactor, es cualitativa. La deflación del *PNN* podría hacer creer que el producto neto "real" ha crecido cuando el producto neto físico ha descendido.

### 4.3. Efecto de un incremento del tipo de cambio real sobre la inflación.

Una subida de  $tc^*$  resulta inflacionaria, por sus efectos sobre los precios domésticos de ambos bienes y por el encarecimiento en moneda doméstica del bien de lujo importado:

$$p_y \geq tc^* \cdot p_y^* \Rightarrow \frac{\partial p_y}{\partial tc^*} \geq 0$$

$$p_q = \frac{w + tc^* \cdot p_k^* \cdot c \cdot (1 + i \frac{K_0}{K})}{B.c} \Rightarrow \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} > 0$$

$$\frac{\partial (tc^* \cdot p_{Ic}^*)}{\partial tc^*} > 0$$

Esto es lo que refleja la ecuación (16):

$$\frac{dp}{dt} = l \left( \frac{dw}{dt}, \frac{dtc}{dt}, p^* \right), \quad l' > 0, \quad \frac{dw}{dt}, \frac{dtc}{dt} \geq 0 \quad (16)$$

Es posible la existencia de inflación importada. Dado que  $tc^* = tc \cdot p^*/p$ , un aumento de  $p^*$  implicará un aumento del tipo de cambio real, con los mismos efectos sobre los precios domésticos y sobre la distribución de la renta. Tal es el caso de los *shocks* externos.

El mismo fenómeno se produce ante un deterioro de los términos de intercambio. El deterioro de precios relativos entre materias primas exportadas y bienes de capital importados tiene como primera manifestación el estrangulamiento de la balanza de pagos. Pero además produce un alza del tipo de cambio real con consecuencias inflacionarias y de redistribución de la renta nacional a favor del sector exportador, junto a una caída del producto nacional neto en términos físicos.

## 5. Efectos de la variación del tipo de cambio real en la dinámica del crecimiento económico.

### 5.1. La dinámica general del crecimiento.

Partiendo de la ecuación (25), con la simplificación  $p_y = tc^* \cdot p_y^*$  y suponiendo  $K = K_0$ , obtenemos la expresión general de la dinámica del crecimiento (Apéndice Matemático *Deducción 10*):

$$\frac{dPNN}{dt} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{K}{c} + \frac{w}{c} \cdot \frac{dK}{dt} + p_k^* \cdot tc^* \left\{ K \frac{di}{dt} + (1 + i - \delta) \frac{dK}{dt} \right\}$$

$$+ \{ p_y^* (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) p_k^* \cdot K \} \frac{dtc^*}{dt}$$

### 5.2. La dinámica del crecimiento equilibrado.

En la ecuación de la dinámica del crecimiento del *PNN* están las variables nominales,  $dw/dt$  y  $di/dt$ , cuyo crecimiento -en forma independiente del crecimiento de las variables físicas y haciendo abstracción de la distribución de la renta-, sólo implicaría un crecimiento inflacionario del *PNN*; está la variable representativa del crecimiento económico real:  $dK/dt$ ; también está la variable que refleja el conflicto distributivo y los eventuales *shocks* externos, como el *shock* petrolero o el deterioro de los términos de intercambio:  $dtc^*/dt$ .

Hemos deducido la ecuación del crecimiento suponiendo  $K = K_0$ . Para estudiar un crecimiento equilibrado corresponde incluir pleno empleo laboral y ausencia de inflación; esto implica suponer que el conflicto distributivo se encuentra en un *estado de paz social* y, por lo tanto, no desencadena la inflación de costes. El pleno empleo laboral implica:  $w \cdot (L^S - L^d) = 0$ . Partiendo de esta condición se obtiene la inversión necesaria en función del crecimiento de la fuerza laboral (Apéndice Matemático *Deducción 11*):

$$\frac{dK}{dt} = c \cdot n \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t}$$

Por otra parte, la tasa normal de beneficio,  $i$ , es el coste de oportunidad representado por la tasa de interés nominal. Considerando constante la tasa de interés real,  $i^*$ , la tasa nominal es:

$$i^* = \frac{(i-\pi)}{(1+\pi)} \Rightarrow i = i^* + (1+i^*) \cdot \pi$$

Si  $\pi = 0$ , la tasa nominal resulta igual a la tasa real y la suponemos constante. En tal caso, el salario nominal constante equivale a un salario real constante. Si no hay una puja distributiva que incentive la variación de precios relativos, entonces  $tc^*$  también es constante.

En estas condiciones del crecimiento equilibrado será:  $dw/dt = 0$ ,  $di/dt = 0$ ,  $dtc^*/dt = 0$ . Sustituyendo estas derivadas y la dinámica de inversión con pleno empleo en la ecuación del crecimiento se obtiene:

$$\frac{dPNN}{dt} = \left[ \frac{w}{c} + p_k^* \cdot tc^* \cdot (1+i-\delta) \right] \cdot c \cdot n \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t}$$

Reordenando términos en la expresión entre corchetes y reemplazando por Ec. (10) en condiciones de  $K = K_0$ , resulta la ecuación de la dinámica del crecimiento equilibrado:

$$\frac{dPNN}{dt} = [p_q \cdot B - p_k^* \cdot tc^* \cdot \delta] \cdot c \cdot n \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t}$$

Para valores constantes de estas variables y parámetros, la renta nacional tendrá un crecimiento equilibrado a la tasa de crecimiento de la población. Pero existe un valor de  $tc^*$  que anula el crecimiento de la renta nacional:

$$p_q \cdot B - p_k^* \cdot tc^* \cdot \delta = 0 \Rightarrow tc^* = \frac{p_q \cdot B}{p_k^* \cdot \delta} \Leftrightarrow \frac{dPNN}{dt} = 0$$

Cuanto mayor sea la productividad tecnológica industrial,  $B$ , mayor será ese nivel de  $tc^*$ . Lo mismo cabe decir de la disminución de  $\delta$ , que representa también los *inputs* importados: una estrategia de sustitución de importaciones, con menor proporción de componentes importados, permitiría un crecimiento equilibrado con un  $tc^*$  más elevado, haciendo más competitiva internacionalmente la manufactura nacional.

Un incremento de  $B$  puede surgir de mejoras tecnológicas al adaptar la tecnología de los bienes de capital importado. Las mejoras de productividad surgen también de mejoras organizativas en la administración y en el proceso productivo, como el caso del *just in time*<sup>7</sup>.

Un  $tc^*$  mayor que este valor crítico generaría una caída exponencial de la renta nacional, ya que convertiría en negativa la expresión de la dinámica del crecimiento equilibrado. Este riesgo no es menor cuando se intenta mejorar la balanza de pagos con fuertes devaluaciones/depreciaciones sucesivas que intentan superar la inflación en contextos de conflicto distributivo. Este nivel crítico de  $tc^*$  es muy relevante para el conflicto distributivo y para la restricción de divisas que financian el crecimiento.

---

<sup>7</sup> La existencia de un nivel crítico más alto de  $tc^*$  no indica necesariamente que sea deseable ubicar la economía en una senda de crecimiento con ese  $tc^*$  constante más elevado; existirían de todos modos los efectos distributivos e inflacionarios analizados. La eventualidad de que eso fuera posible y deseable exigiría políticas fiscales correctoras de las perturbaciones inflacionarias y distributivas.

### 5.3. La restricción del sector externo al crecimiento equilibrado.

La condición de pleno empleo laboral supone:

$$\text{La ecuación (23 bis) es: } \quad \frac{dK}{dt} = \frac{[S+IED^*+DE]}{p_k^*} \cdot c.n.L_0.e^{n.t}$$

Igualando con la ecuación anterior, tomando logaritmos y derivando, resulta:

$$\frac{\left[\frac{dS}{dt} + \frac{dIED^*}{dt} + \frac{dDE}{dt}\right]}{[S+IED^*+DE]} = n.$$

La tasa de crecimiento de la disponibilidad de divisas para financiar el crecimiento equilibrado debe igualar la tasa de crecimiento de la población. Pero cabe prestar atención a las expresiones del numerador. De (10) y (8) resulta:

$$\frac{dS}{dt} = p_y^* \cdot \frac{dX}{dt} - p_{Ic}^* \cdot \frac{dI_c^d}{dt}, \quad \text{siendo} \quad \frac{dX}{dt} = -\frac{dY^d}{dt}$$

El aumento del ahorro de divisas exige que disminuya el consumo interno del bien salario, con perjuicio para los asalariados, o que disminuya el consumo del bien de lujo importado, con perjuicio para los terratenientes, o ambas cosas. Existe un conflicto distributivo en torno al incremento de  $I_c^*$  (para aumentar los saldos exportables) y al uso de las divisas disponibles (para importar o bienes de capital o bienes de lujo).

El escenario sería diferente si los saldos exportables pudieran aumentar sin reducir el consumo interno, pero ello exige un aumento continuo de productividad en el sector agropecuario:

$$Y = A \cdot \min \left\{ T^0, \frac{L_y}{b}, \frac{Y_k}{a} \right\}.$$

Un incremento del parámetro tecnológico  $A$  y una reducción de los parámetros  $b$  y  $a$ , permitiría que  $Y$  pudiera crecer superando la situación de la Ec. (1 bis):

$$Y^0 = A \cdot \frac{L_y^0}{b} = A \cdot \frac{Y_k^0}{a}.$$

La evidencia empírica en países semiindustrializados exportadores de materias primas sugiere que la financiación del crecimiento basado en importaciones de bienes de capital no ha sido posible por vía de un crecimiento exponencial del ahorro en divisas.

Además, la  $IED^*$  es exógena; no cabe esperar su evolución a la tasa de crecimiento de la población. Inclusive, cuando cada ingreso de capital por  $IED^*$  se convierte en un *stock* de inversiones que produce manufacturas no transables pero remite utilidades en divisas a una casa matriz extranjera, aparece un componente negativo en esta variable.

La conclusión es general para la estrategia de Industrialización Sustitutiva de Importaciones, basada en  $IED^*$ , para satisfacer la demanda interna, sin economías escala o con tecnología obsoleta que la hacen no competitiva internacionalmente.

Si, como extremo simplificador, fuera:  $dS/dt = 0$ ,  $d(IED^*)/dt = 0$ , entonces (por Ec. 23 bis y *Deducción 11*) será la deuda externa la que crecerá exponencialmente para financiar el crecimiento equilibrado:

$$\frac{\frac{dDE}{dt}}{[S+IED^*+DE]} = n, \quad DE = \frac{(p_k^* \cdot c.n.L_0)}{(S_0+IED_0^*)} \cdot e^{n.t}$$

Cualquier tasa de crecimiento de la disponibilidad de divisas inferior a la tasa de crecimiento de la oferta de trabajo generará desempleo laboral.

Cabe destacar que los saldos exportables constantes del bien primario no sólo implican tener que financiar la dinámica de la inversión de capital con *IED* o por endeudamiento externo, sino que, con ese aparente “crecimiento equilibrado” habría una reducción constante del consumo per cápita del bien alimenticio, sería una reducción sostenida del salario real a la tasa de crecimiento de la población.

Esta dinámica no es posible con estabilidad de precios, ya que la masa salarial, con salario nominal constante y pleno empleo, crece a la tasa de crecimiento de la oferta de trabajo; pero esa masa salarial creciente debe comprar una cantidad fija de bienes salarios exportables, con una necesaria tendencia al alza de  $p_y$ .

La restricción tecnológica de la productividad agropecuaria genera inflación y reducción del salario real, incentivando el conflicto distributivo mientras la restricción en la disponibilidad de divisas genera desempleo. En estas condiciones, no existe posibilidad de crecimiento equilibrado.

#### 5.4. La dinámica del crecimiento en situación de estanflación.

La ecuación general de la dinámica del crecimiento vista es:

$$\frac{dPNN}{dt} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{K}{c} + \frac{w}{c} \cdot \frac{dK}{dt} + p_k^* \cdot tc^* \left\{ K \frac{di}{dt} + (1 + i - \delta) \frac{dK}{dt} \right\} + \{ p_y^* (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) p_k^* \cdot K \} \frac{dte^*}{dt}$$

Supongamos que se frena el crecimiento de las divisas disponibles porque no aumentan las exportaciones, no se reducen las importaciones, se estanca la *IED*\* y los acreedores externos restringen el flujo del crédito.

La ecuación del crecimiento supone que  $K = K_0$ , o sea el ingreso de divisas puede financiar las importaciones de *inputs* intermedios y la reposición del capital instalado; pero no se incrementa la capacidad instalada, de modo que:  $dK/dt = 0$ .

Recordando la ecuación del PNN en términos físicos y hallando la dinámica del crecimiento en unidades físicas, obtenemos:

$$PNN(F) = Y^0 - Y_k^0 + (B - \delta) \cdot K \Rightarrow \frac{dPNN(F)}{dt} = (B - \delta) \cdot \frac{dK}{dt}$$

Para  $dK/dt = 0$  resulta  $d[PNN(F)]/dt = 0$ . Es decir que, anulando en la ecuación general del crecimiento los términos en que  $dK/dt$  aparece como factor, la ecuación reducida del crecimiento expresaría un proceso puramente inflacionario, en que el crecimiento de la renta nacional sólo ocurre en unidades monetarias, pero con crecimiento cero del producto físico:

$$\frac{dPNN}{dt} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{K}{c} + p_k^* \cdot tc^* \cdot K \cdot \frac{di}{dt} + \{ p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K \} \cdot \frac{dte^*}{dt}$$

Reemplazando  $K = c \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t}$  (no existiendo el crecimiento equilibrado,  $K$  no crece pero  $L$  sí), el crecimiento de los valores nominales de la renta nacional seguiría una trayectoria exponencial a la tasa de crecimiento de la población, rumbo a la hiperinflación.

## 5.5. La dinámica del crecimiento bajo la aplicación del enfoque monetario de la balanza de pagos en situación de estanflación y estrangulamiento del sector externo.

Supongamos que en este contexto el objetivo de la política económica es contener la inflación y mejorar el saldo de la balanza de pagos para pagar compromisos de deuda externa. Supondremos que el objetivo es una reducción de la tasa de inflación a niveles bajos y constantes -con una tasa de inflación esperada  $\pi^e$  definida políticamente-, a la vez que lograr saldos favorables en la balanza de pagos para pagar compromisos con acreedores externos.

Para reducir la inflación y el consumo de bienes salario exportables se congela  $w$  y se evita la reducción del tipo de interés real  $i^*$  sosteniendo su valor positivo constante, es decir:  $i > \pi$ . Al mismo tiempo, para mejorar el saldo de la balanza de pagos, se buscará elevar  $tc^*$ , devaluando  $tc$  a una tasa mayor que  $\pi$ .

Dado que en la estanflación existe estancamiento del producto físico, el objetivo de la tasa de inflación se puede medir por la tasa de crecimiento de la renta nacional en unidades monetarias. Así, los objetivos de esta política económica se pueden formalizar como:

$$\begin{aligned} \frac{dPNN}{PNN} = \frac{dp}{p} = \pi \leq \pi^e &\Rightarrow \frac{dPNN}{dt} = PNN \cdot \pi \leq \pi^e \\ \frac{dw}{dt} = 0, \quad \frac{d tc^*}{dt} > 0 \\ i > \pi, \quad i^* = \frac{i - \pi^e}{1 + \pi^e} &\Rightarrow i = i^* + (1 + i^*) \cdot \pi^e \Rightarrow \frac{di}{dt} = (1 + i^*) \cdot \frac{d\pi^e}{dt} \end{aligned}$$

Así, el gobierno actuará para que la ecuación reducida de la dinámica del crecimiento sea:

$$PNN \cdot \pi = p_k^* \cdot tc^* \cdot K \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d\pi^e}{dt} + [p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i + \delta) \cdot p_k^* \cdot K] \cdot \frac{d tc^*}{dt}$$

Con sucesivas transformaciones desde la ecuación anterior, resulta el tipo de cambio real necesario para los objetivos del ajuste según el enfoque monetario de la balanza de pagos (Apéndice Matemático *Deducción 12*):

$$tc^* = \frac{[-w \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t} \cdot \pi]}{[p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot c \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t}] \cdot \left[ 2 \cdot \pi - \frac{d tc}{tc} \right] - p_k^* \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d\pi^e}{dt} \cdot c \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t}}$$

Esta expresión tiene dos problemas: según los valores de variables y parámetros, puede ser indeterminada (por anulación del denominador) y podría ser negativa (absurdo) si el denominador fuera positivo. El problema no se resuelve con una tasa de inflación negativa, haciendo positivo el numerador, ya que entonces el denominador sería negativo. Ambos problemas se sortearían si la tasa de inflación no se acelerara,  $d\pi/dt = 0$ , y si la tasa de devaluación/depreciación no se acelerara. En tal caso, una tasa de devaluación igual al doble de la tasa de inflación generaría un valor límite positivo y definido de  $tc^*$  para  $t \rightarrow \infty$  (Apéndice Matemático *Demostración 1*).

Pero estas suposiciones son contrarias a realidades como la hiperinflación, o la sobrereacción del tipo de cambio<sup>8</sup>, o los Bancos Centrales que agotan sus reservas ante una fuga de capitales.

Si suponemos que tanto  $p$  como  $tc$  admiten múltiples derivadas sucesivas positivas respecto al tiempo, entonces, ante una inflación que se acelera a una tasa exponencial, los objetivos planteados de la política de ajuste pueden ser formalizados como funciones exponenciales a algunas tasas particulares:

$$\frac{d\pi}{dt} = e^{P \cdot t}, \quad \frac{d tc}{tc} = e^{TC \cdot t}, \quad \frac{di}{dt} = (1 + i^*) \cdot \frac{d\pi^e}{dt} = (1 + i^*) \cdot e^{I \cdot t}$$

<sup>8</sup> Cf. Dornbusch (1976, pp. 1161-1176).



$$TC > P \quad , \quad \Pi > P$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación anterior, el  $tc^*$  necesario para el éxito del ajuste con el enfoque monetario de la balanza de pagos resulta (Apéndice Matemático *Deducción 13*):

$$tc^* = \frac{-w}{p_y^*(Y^0 - Y_k^0)L_0^{-1}(2e^{-n.t} - e^{(TC-P-n).t}) + (1+i-\delta)p_k^*.c(2 - e^{(TC-P).t}) - p_k^*(1+i^*)e^{(\Pi-P).t}.c}$$

El valor límite con  $t \rightarrow \infty$  depende de las relaciones entre las tasas exponenciales.

Suponiendo las condiciones descritas, en el corto plazo el valor de  $tc^*$  resulta indeterminado, su evolución es inestable y errática con tendencia descendente: su aumento tras cada devaluación se diluye en la dinámica inflacionaria, obligando a sucesivas devaluaciones y subidas del tipo de interés. El resultado es un círculo vicioso que acelera la inflación, la depreciación y el aumento de la tasa de interés nominal, con continua caída del salario real y del tipo de cambio real, rumbo a la hiperinflación.

Para el largo plazo, un valor límite del  $tc^*$  con  $t \rightarrow \infty$  resulta negativo o nulo, lo que económicamente es absurdo (Apéndice Matemático *Demostración 2*). Este absurdo debe ser interpretado como la imposibilidad de alcanzar el nivel del tipo de cambio real necesario para cumplir el objetivo de esta política económica.

## 6. Conclusiones.

La formalización no neoclásica del modelo colabora para un desempeño más realista del mismo. El sistema posee un grado de libertad. Su equilibrio no existe en el marco de la *economía pura*, sino que una política económica no neutral gestiona un equilibrio (entendido como determinación del sistema de precios y no como igualación a cero de todos los excesos de demanda) basado en cierta direccionalidad en la distribución de la renta. Esto explica un conflicto distributivo, en un juego de suma cero, en que se lucha por el poder de decidir los valores de  $tc$ , de  $w$  o de  $i$ , para alcanzar un valor favorable del  $tc^*$ .

En el modelo se integran ecuaciones microeconómicas con ecuaciones y dinámica macroeconómica. Pero la macroeconomía no es la suma de elementos microeconómicos; existe una estructura sistémica que trasciende la *economía pura*, representada por la existencia de un grado de libertad.

Los valores de algunas variables endógenas pueden ser constantes.

Las funciones de demanda no se deducen de funciones de utilidad; surgen de preferencias lexicográficas sobre Necesidades Básicas de subsistencia y Necesidades de Status, combinadas con la ley de Engel y aceptando el ahorro y el desahorro.

El estudio del crecimiento económico combinado con el conflicto distributivo puede abordarse mejor al diferenciar variables físicas de variables monetarias. Para ello, se supera el concepto de "*variables reales*" considerando la producción en términos técnicos y unidades físicas como algo independiente de los valores monetarios.

Esto permite analizar la *estanflación* considerando el estancamiento de las variables físicas junto al crecimiento de las variables monetarias.

El modelo puede tener interés teórico para cualquier economía agroexportadora semiindustrializada. Si bien algunas economías agropecuarias no exportan bienes salario, el coste de oportunidad de uso de la tierra plantea un dilema entre dedicarla a la producción de bienes salario o a la producción de bienes exportables.

La dinámica del modelo evidencia los cuellos de botella que estrangulan el desarrollo en la estructura descripta. En estas condiciones estructurales no es posible el crecimiento equilibrado y la dinámica genera un conflicto distributivo que tiene en su centro la escasez de divisas. Queda en evidencia un problema económico estructural con diversas facetas:

- a) Hay una contradicción entre el aprovechamiento de la capacidad exportadora del sector agropecuario y el salario real de los trabajadores urbanos porque se exporta “bienes salario”. Dada la diferencia de poder de mercado de los exportadores entre el mercado interno y el internacional, el precio doméstico resulta mayor o igual al precio internacional.
- b) Hay una contradicción entre un tipo de cambio real alto para exportar y un salario real alto para sostener con el consumo el crecimiento del mercado interno. El tipo de cambio real alto implica un salario real bajo y viceversa.
- c) Hay una contradicción entre el crecimiento de la renta per cápita en base al desarrollo industrial para el mercado interno y el financiamiento de dicho desarrollo mediante las divisas generadas por la renta de la tierra. Si los terratenientes exportadores no invierten en la industria y pueden tener tierra ociosa con coste  $\theta$  se plantea un conflicto por el uso de las divisas generadas con mayor poder en manos de terratenientes.
- d) Hay una contradicción entre crecimiento económico sostenido en base a una producción industrial para el mercado interno (no transable) y la balanza de pagos, que se estrangula por una alta “propensión marginal a importar” debido a la dependencia tecnológica de la industria, al aumento del consumo de los bienes salario que reduce los saldos exportables y a la falta de incentivos para los agroexportadores bajo la hegemonía industrialista.

La gestión macroeconómica sólo a través de la política de ingresos es incapaz de resolver el problema estructural y genera ciclos de expansión y recesión. El crecimiento equilibrado exige cambios estructurales que permitan que:

- a) la inversión en  $I + D + I$  permita una producción industrial competitiva internacionalmente sin un tipo de cambio real artificialmente alto;
- b) no existan costes hundidos en la industria, lo que exige diversificación industrial, la posibilidad de transferir inversiones entre el sector agropecuario y el industrial y el desarrollo del sector servicios con capacidad exportadora;
- c) la innovación tecnológica en el sector agropecuario permita incrementar la producción de bienes salario a la tasa de crecimiento de la población para sostener el salario real sin reducir los saldos exportables;
- d) el desarrollo del capital humano permita un salario real alto sin un tipo de cambio real artificialmente bajo, para que resulte financiable el consumo de los bienes exportables al precio internacional en moneda nacional;
- e) sea imposible la tenencia sin costo fiscal de tierra productiva ociosa, reduciendo el poder de mercado sobre el precio de los bienes-salario.

## Referencias

- Braun, O., & Leonard J. (1981). Un modelo de estancamiento económico. Estudio de caso sobre la economía argentina, *Desarrollo Económico. Revista de Ciencias Sociales*, 80(20), 585-604.
- Díaz Alejandro, C.F. (1965). *Exchange-rate devaluation in a semi-industrialized country: the experience of Argentina 1955 – 1961*, The M.I.T. Press.
- Díaz Alejandro, C.F. (1975). *Ensayos sobre la historia económica argentina*. Buenos Aires: Amorrortu Editores.
- Dornbusch, R. (1976). Expectations and Exchange Rate Dynamics. *Journal of Political Economy*, 84(6), 1161-1176.

- Dornbusch, R., Fischer, S., & Startz, R. (2002). *Macroeconomía*, 8ª Ed. Madrid: Mc Graw Hill.
- Firmenich, M.E. (2015). *Teoría de los sistemas político - económicos*, EDUCO, Neuquén.
- Frits, J. de Jong (1967). *Dimensional analysis for economists*. Amsterdam: North – Holland Publishing Company.
- Guerberoff, S. (1977). Un análisis de la *performance* del segmento industrial estable y su impacto en el modelo de crecimiento argentino (1949-1967). *Desarrollo Económico. Revista de Ciencias Sociales*, 64(16), IDES, enero-marzo.
- Henderson, J.M., & Quandt, R.E. (1991). *Teoría microeconómica - Edición revisada y puesta al día*. Barcelona: Ariel Economía.
- Musgrave, R.A., & Musgrave, P.B. (1992). *Hacienda pública teórica y aplicada – Quinta edición*. Madrid: McGraw Hill.
- Olivera, J.H. (1960). La Teoría no Monetaria de la Inflación. *El Trimestre Económico*, (octubre - diciembre), 616 - 628.
- Olivera, J.H. (1968). El Dinero Pasivo. *El Trimestre Económico*, vol. 35, Nº 140(4) (octubre – diciembre), 695 - 706.
- Olivera, J.H. (1984). Sur l'inflexibilité des prix a la baisse. *Revue d'Economie Politique*, 6.
- Olivera, J.H. (1986). El Patrón monetario. En: Banco Central de la República Argentina, *El Banco Central en su 50º aniversario: 1935-1985*.
- Pasinetti, L.L. (1985). *Cambio estructural y crecimiento económico*. Madrid: Ed. Pirámide.
- Porto, A. (1975). Un modelo simple sobre el comportamiento macroeconómico argentino en el corto plazo. *Desarrollo Económico. Revista de Ciencias Sociales*, 59 (15), IDES
- Segura, J. (1993). *Teoría de la Economía Industrial*. Madrid: Editorial Civitas.
- Sen, A.K. (1976). *Elección colectiva y bienestar social*. Madrid: Alianza Universidad.
- Sraffa, P. (1983). *Producción de Mercancías por Medio de Mercancías*. Barcelona: Oikos-tau.

## APÉNDICE MATEMÁTICO

### Deducción 1

Deducción de la elasticidad–precio del bien salario y de su precio monopolista en el mercado interno:  
ecuaciones (4) y (5)

Los beneficios del productor agropecuario son:

$$r = IT - CT$$

$$r = p_y \cdot Y^d + tc^* \cdot p_y^* \cdot X - [w \cdot L_y + (1 + i) \cdot p_y \cdot Y_k] \geq 0$$

En el mercado interno (denotando con el apóstrofe ' las variables relativas al sector interno), considerando las cantidades de trabajo y capital proporcionales a la producción vendida internamente, resulta:

$$r' = p_y \cdot Y^d - [w \cdot L_y' + (1 + i) \cdot p_y \cdot Y_k']$$

Las relaciones establecidas en la función de producción técnica son:

$$L_y' = b \cdot T' = b \cdot \frac{Y^d}{A}, \quad Y_k' = a \cdot T' = a \cdot \frac{Y^d}{A}$$

donde  $a$ ,  $b$ , y  $A$  son los parámetros ya definidos. Por lo tanto, reemplazando según estas relaciones resulta:

$$r' = p_y \cdot Y^d - \left[ w \cdot \frac{b}{A} \cdot Y^d + (1 + i) \cdot p_y \cdot \frac{a}{A} \cdot Y^d \right]$$

La maximización de beneficios del monopolista significa:

$$IMg = CMg$$

$$\Rightarrow p_y \cdot \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) = w \cdot \frac{b}{A} + (1 + i) \cdot p_y \cdot \frac{a}{A}$$

$\varepsilon$  es la elasticidad–precio de la demanda interna, por lo tanto, su inversa es:

$$\frac{1}{\varepsilon} = - \left( \frac{Y^d}{p_y} \right) \cdot \frac{dp_y}{dY^d}, \quad \varepsilon > 1 \quad (4)$$

De la expresión de igualdad de  $IMg$  y  $CMg$  surgen el precio interno del bien salario y la cantidad  $Y^d$  que se venderá en el mercado interno:

$$p_y \cdot \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) = w \cdot \frac{b}{A} + (1 + i) \cdot p_y \cdot \frac{a}{A} \Rightarrow p_y \cdot \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \cdot A = w \cdot b + (1 + i) \cdot a \cdot p_y$$

$$\Rightarrow \left[ \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \cdot A - (1 + i) \cdot a \right] \cdot p_y = w \cdot b$$

$$p_y = \frac{w \cdot b}{\left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \cdot A - (1 + i) \cdot a} \quad (5)$$

### Deducción 2

Deducción de la maximización de beneficios del sector industrial en competencia perfecta

Si un hipotético productor representativo maximizara sus beneficios del modo habitual para un mercado competitivo, teniendo en cuenta las relaciones estipuladas en la función de producción técnica, denotando al precio del bien de capital importado como  $p_k^*$  y al beneficio normal del capital equiparable a la tasa de interés  $i$ , resultaría:

$$\pi = p_q \cdot Q - [w \cdot L_q + tc^* \cdot p_k^* \cdot K \cdot (1 + i)] \geq 0$$

Las relaciones establecidas en la función de producción técnica son:

$$K = \frac{Q}{B}, \quad L_q = \frac{K}{c} = \frac{Q}{B \cdot c}$$

Reemplazando estas relaciones en la función de beneficios resulta:

$$\pi = p_q \cdot Q - \left[ w \cdot \frac{Q}{B \cdot c} + tc^* \cdot p_k^* \cdot \frac{Q}{B} \cdot (1+i) \right] \geq 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = 0 \Rightarrow p_q = \frac{w}{B \cdot c} + tc^* \cdot p_k^* \cdot \frac{(1+i)}{B}$$

### Deducción 3

#### Deducción de los beneficios agregados de los capitalistas industriales: ecuación (11)

El Costo Total de cada productor industrial es la sumatoria de los costos laborales, los costos de capital empleado como *input* y el costo financiero de la capacidad instalada:

$$CT = w \cdot L_q + tc^* \cdot p_k^* \cdot K + i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K_0$$

Según la función de producción técnica:

$$Q = B \cdot K \Rightarrow K = \frac{Q}{B} \quad , \quad \frac{K}{L_q} = c \Rightarrow L_q = \frac{K}{c}$$

Sustituyendo en *CT* resulta:

$$CT = w \cdot \frac{K}{c} + tc^* \cdot p_k^* \cdot \frac{Q}{B} + i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K_0$$

$$CT = w \cdot \frac{Q}{B \cdot c} + tc^* \cdot p_k^* \cdot \frac{Q}{B} + i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K_0$$

El Costo Total Medio resulta:

$$CTMe = \frac{CT}{Q} = \frac{\left[ w \cdot \frac{Q}{B \cdot c} + tc^* \cdot p_k^* \cdot \frac{Q}{B} + i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K_0 \right]}{Q} = \frac{w}{B \cdot c} + tc^* \cdot \frac{p_k^*}{B} + i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot \frac{K_0}{B \cdot K}$$

$$CTMe = \left[ w + tc^* \cdot p_k^* \cdot c + i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot c \cdot \frac{K_0}{K} \right] \cdot \frac{1}{B \cdot c}$$

Por lo tanto, si el precio es igual al *CTMe* resulta:

$$p_q = \left[ w + tc^* \cdot p_k^* \cdot c + i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot c \cdot \frac{K_0}{K} \right] \cdot \frac{1}{B \cdot c}$$

Con un precio que cubre el costo unitario de producción los beneficios económicos de un productor representativo serán normales o nulos. Un beneficio económico nulo significa la existencia de un beneficio contable igual al costo de oportunidad de los recursos empleados; dicho costo de oportunidad está representado por los intereses que devengaría el valor monetario del capital empleado, es decir:  $i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K$ . El beneficio contable agregado de todos los productores es la participación del capital en la renta nacional.

Los beneficios agregados de todos los capitalistas industriales en la renta nacional serán:

$$\Pi = \sum_{j=1}^n [i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K^j - i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot (K_0^j - K^j)]$$

$$\Pi = \sum_{j=1}^n 2 \cdot i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K^j - i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K_0^j$$

$$\Pi = i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot \sum_{j=1}^n [2 \cdot K^j - K_0^j]$$

$$\Pi = i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot [2 \cdot K - K_0] \quad (11)$$

Deducción 4  
Deducción de la ecuación (16)

En este modelo de 4 bienes, los 2 precios de producción nacional dependen del salario y del tipo de cambio real, en tanto que los 2 precios importados son exógenos y deben ser convertidos a moneda doméstica con el tipo de cambio nominal. Si se define el índice de precios  $p = \frac{\sum p_i^t \cdot q_i^0}{\sum p_i^0 \cdot q_i^0}$ , en nuestro modelo de cuatro bienes, dos producidos nacionalmente y dos importados, resulta:

$$p = \frac{p_Y^t \cdot q_Y^0 + p_q^t \cdot q_q^0 + p_{IC}^* \cdot q_{IC}^0 \cdot tc + p_k^* \cdot q_k^0 \cdot tc}{\sum p_i^0 \cdot q_i^0}$$

Con excepción de los precios corrientes de los dos bienes de producción doméstica y del tipo de cambio nominal, todas las demás variables son valores fijos. Por lo tanto, podemos expresar el índice de precios como:

$$p = \alpha_y \cdot p_y(w, tc^*) + \alpha_q \cdot p_q(w, tc^*) + [\alpha_k \cdot p_k^* + \alpha_c \cdot p_{IC}^*] \cdot tc.$$

Cada coeficiente  $\alpha_i = \frac{q_i^0}{\sum p_i^0 \cdot q_i^0}$  es constante.

Derivando esta expresión de  $p$  con respecto al tiempo resulta:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha_y \cdot \left[ \frac{\partial p_y}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dt} + \frac{\partial p_y}{\partial tc^*} \cdot \frac{d tc^*}{dt} \right] + \alpha_q \cdot \left[ \frac{\partial p_q}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dt} + \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} \cdot \frac{d tc^*}{dt} \right] + (\alpha_k p_k^* + \alpha_c p_{IC}^*) \cdot \frac{d tc}{dt}$$

La derivada del tipo de cambio real con respecto al tiempo es:

$$\frac{d tc^*}{dt} = \frac{p^*}{p} \cdot \frac{d tc}{dt} - tc \cdot \frac{p^*}{p^2} \cdot \frac{dp}{dt}$$

Sustituyendo esta derivada del tipo de cambio real, en la derivada del índice de precios con respecto al tiempo y despejando  $dp/dt$ , se obtiene una ecuación diferencial que depende de las variables  $dw/dt$ ,  $d tc/dt$  y  $p^*$ . Esto es lo que se formula en general en la ecuación (16):

$$\frac{dp}{dt} = l \left( \frac{dw}{dt}, \frac{d tc}{dt}, p^* \right).$$

Deducción 5

Deducción de los efectos distributivos de las variaciones del tipo de cambio real

El análisis del efecto de las variaciones del tipo de cambio real sobre la distribución del ingreso nos plantea un sistema de cinco ecuaciones simultáneas con cinco incógnitas, que podemos resolver con sucesivas sustituciones. En efecto, a partir de las ecuaciones:

$$R = p_Y \cdot Y^d + tc^* \cdot p_Y^* \cdot X - w \cdot L_Y^0 - (1 + i) \cdot p_Y \cdot Y_K^0 \quad (9)$$

$$\Pi = i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot [2 \cdot K - K_0] \quad (11)$$

$$W = w \cdot (L_q + L_y^0) \quad (13)$$

Sustituyendo, en la ecuación (9), la simplificación  $p_y = tc^* \cdot p_y^*$  y, luego, reemplazando  $Y^d$  de acuerdo a la ecuación (8)  $Y^0 - Y_k^0 = Y^d + X$ , resulta:

$$R = tc^* \cdot p_y^* \cdot [Y^0 - Y_k^0 - (1 + i) \cdot Y_k^0] - w \cdot L_y^0$$

$$\Rightarrow R = tc^* \cdot p_y^* \cdot [Y^0 - Y_k^0 \cdot (2 + i)] - w \cdot L_y^0$$

Sustituyendo en la ecuación (11) la variable  $K$  según la ecuación (18)  $K = \frac{1}{B} \cdot j(p_q, W, \Pi)$ , resulta:

$$\Pi = (i \cdot tc^* \cdot p_k^*) \cdot \left[ \frac{2}{B} \cdot j(p_q, W, \Pi) - K_0 \right]$$

Sustituyendo en la ecuación (13) la variable  $L_q$  según la ecuación (21)  $L_q = \frac{1}{B.c} \cdot j(p_q, W, \Pi)$  resulta:

$$W = w \cdot \left[ \frac{j(p_q, W, \Pi)}{B.c} + L_y^0 \right]$$

Derivando las expresiones halladas de  $R$ ,  $\Pi$  y  $W$  respecto al tipo de cambio real obtenemos el sistema de ecuaciones que queremos resolver:

$$(3.I.) \quad \frac{\partial R}{\partial tc^*} = p_y^* \cdot [Y^0 - Y_k^0 \cdot (2 + i)]$$

$$(3.II.) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial tc^*} = i \cdot p_k^* \cdot [2 \cdot K - K_0] + \frac{i}{B} \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot 2 \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*}$$

$$(3.III.) \quad \frac{\partial W}{\partial tc^*} = \frac{w}{B.c} \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*}$$

Pero además en (3.II.) y (3.III.) tenemos:

$$(3.IV.) \quad \frac{\partial j}{\partial tc^*} = \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} + \frac{\partial j}{\partial W} \cdot \frac{\partial W}{\partial tc^*} + \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial tc^*}$$

Partiendo de la ecuación (10):

$$p_q = \frac{w + tc^* \cdot p_k^* \cdot c + i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot \frac{K_0}{K}}{B.c} = \frac{w}{B.c} + \frac{tc^* \cdot p_k^*}{B} + \frac{i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K_0}{B.K}$$

Derivando luego  $p_q$  con respecto al tipo de cambio real, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} &= 0 + \frac{p_k^*}{B} + \frac{i \cdot p_k^* \cdot K_0 \cdot B \cdot K - i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K_0 \cdot \frac{\partial(B.K)}{\partial tc^*}}{(B.K)^2} \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} \\ &= \frac{p_k^*}{B} + \frac{i \cdot p_k^* \cdot K_0}{B.K} - \frac{i \cdot p_k^* \cdot K_0}{B.K} \cdot \frac{tc^*}{B.K} \cdot \frac{\partial(B.K)}{\partial tc^*} \end{aligned}$$

Factoreando, resulta:

$$\frac{\partial p_q}{\partial tc^*} = \frac{p_k^*}{B} \cdot \left[ 1 + \frac{i \cdot K_0}{K} - \frac{i \cdot K_0}{K} \cdot \frac{tc^*}{B.K} \cdot \frac{\partial(B.K)}{\partial tc^*} \right]$$

Sustituyendo ahora con la ecuación (18)  $K = \frac{1}{B} \cdot j(p_q, W, \Pi)$  es:

$$\frac{\partial p_q}{\partial tc^*} = \frac{p_k^*}{B} \cdot \left[ 1 + \frac{i \cdot K_0}{K} - \frac{i \cdot K_0}{K} \cdot \frac{tc^*}{j(p_q, W, \Pi)} \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} \right]$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\begin{aligned} (3.V.) \quad \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} &= \frac{p_k^*}{B} \cdot \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \left( 1 - \frac{tc^*}{j(p_q, W, \Pi)} \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} \right) \right] \\ &\Rightarrow \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} = \frac{p_k^*}{B} \cdot \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \left( 1 - \varepsilon_{(Q^d, tc^*)} \right) \right] \end{aligned}$$

Los efectos distributivos de las variaciones del tipo de cambio real involucran finalmente estas 5 ecuaciones con 5 incógnitas, que son

$$\frac{\partial R}{\partial tc^*}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial tc^*}, \quad \frac{\partial W}{\partial tc^*}, \quad \frac{\partial j}{\partial tc^*}, \quad \frac{\partial p_q}{\partial tc^*}$$

Deducción 6

Deducción de los efectos de la variación del tipo de cambio real sobre la cantidad demandada del bien manufacturado

Reemplazando (3.V.) en (3.IV.) tenemos:

$$\frac{\partial j}{\partial tc^*} = \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \left[ \frac{p_k^*}{B} \cdot \left( 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} - i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \frac{tc^*}{B \cdot K} \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} \right) \right] + \frac{\partial j}{\partial W} \cdot \frac{\partial W}{\partial tc^*} + \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial tc^*}$$

Distribuyendo en el primer término del segundo miembro, pasando al primer miembro el término con derivada de la demanda del bien manufacturado respecto al tipo de cambio real y factorando en el primer miembro, es:

$$\left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \frac{tc^*}{B \cdot K} \cdot \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} \right] \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} = \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} \cdot \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \right] + \frac{\partial j}{\partial W} \cdot \frac{\partial W}{\partial tc^*} + \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial tc^*}$$

Sustituyendo (3.III.) en esta ecuación, resulta:

$$\left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \frac{tc^*}{B \cdot K} \cdot \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} \right] \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} = \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} \cdot \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \right] + \frac{\partial j}{\partial W} \cdot \frac{w}{B \cdot c} \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} + \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial tc^*}$$

Sustituyendo ahora (3.II.) en esta expresión, tenemos:

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \frac{tc^*}{B \cdot K} \cdot \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} \right] \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} = \dots \\ \dots &= \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \right] + \frac{\partial j}{\partial W} \cdot \frac{w}{B \cdot c} \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} + \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot \left[ i \cdot p_k^* \cdot (2 \cdot K - K_0) + \frac{i}{B} \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot 2 \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \frac{tc^*}{B \cdot K} \cdot \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} - \frac{\partial j}{\partial W} \cdot \frac{w}{B \cdot c} \right] \frac{\partial j}{\partial tc^*} = \dots \\ \dots &= \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} \cdot \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \right] + \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot \left[ i \cdot p_k^* \cdot (2 \cdot K - K_0) + \frac{i}{B} \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot 2 \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} \right] \\ & \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \frac{tc^*}{B \cdot K} \cdot \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} - \frac{\partial j}{\partial W} \cdot \frac{w}{B \cdot c} \right] \frac{\partial j}{\partial tc^*} = \dots \\ \dots &= \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} \cdot \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \right] + \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot \left[ i \cdot p_k^* \cdot (2 \cdot K - K_0) + \frac{i}{B} \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot 2 \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \frac{tc^*}{B \cdot K} \cdot \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} - \frac{\partial j}{\partial W} \cdot \frac{w}{B \cdot c} - \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot \frac{2}{B} \right] \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} = \dots \\ \dots &= \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} \cdot \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \right] + \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot i \cdot p_k^* \cdot (2 \cdot K - K_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto, resulta:

$$\frac{\partial j}{\partial tc^*} = \frac{\frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} \cdot \left( 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \right) + \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot i \cdot p_k^* \cdot (2 \cdot K - K_0)}{1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \frac{tc^*}{B \cdot K} \cdot \frac{\partial j}{\partial p_q} \cdot \frac{p_k^*}{B} - \frac{\partial j}{\partial W} \cdot \frac{w}{B \cdot c} - \frac{\partial j}{\partial \Pi} \cdot i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot \frac{2}{B}}$$



Deducción 7

Deducción de los efectos de la variación del tipo de cambio real sobre el precio del bien manufacturado

Si la derivada de la demanda del bien manufacturado respecto del tipo de cambio real es negativa, la derivada del precio de dicho bien respecto del tipo de cambio real debe ser positiva. Para que el efecto de una subida del tipo de cambio real sobre el precio del bien manufacturado fuera negativo sería necesario que la elasticidad de la demanda respecto al tipo de cambio real no sólo fuera positiva sino que, además, fuera bastante mayor que uno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} &= \frac{p_k^*}{B} \cdot \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot (1 - \varepsilon_{Q^d, tc^*}) \right] < 0 \Rightarrow \left[ 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot (1 - \varepsilon_{Q^d, tc^*}) \right] < 0 \\ &\Rightarrow 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} - i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \varepsilon_{Q^d, tc^*} < 0 \\ &\Rightarrow 1 + i \cdot \frac{K_0}{K} < i \cdot \frac{K_0}{K} \cdot \varepsilon_{Q^d, tc^*} \\ &\Rightarrow \varepsilon_{Q^d, tc^*} > 1 + \frac{K}{i \cdot K_0} \end{aligned}$$

Deducción 8

Deducción de la derivada del PNN físico respecto del tipo de cambio real

Partiendo de la ecuación (25), que está expresada en términos monetarios, podemos obtener la expresión del PNN con las variables físicas en unidades homogéneas de energía:

$$\begin{aligned} PNN &= p_y \cdot Y^d + p_q \cdot Q^d + tc^* \cdot p_y^* \cdot X - \delta \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K \\ PNN(F) &= Y^d + Q^d + X - \delta \cdot K \end{aligned}$$

Sustituyendo en esta expresión la ecuación (8)  $X = Y^0 - Y^d - Y_k^0$ , con explotación de toda la tierra disponible resulta:

$$PNN(F) = Y^0 - Y_k^0 + Q^d - \delta \cdot K$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (14)  $Q^d = j(p_q, W, \Pi)$  y (18)  $K = \frac{1}{B} \cdot j(p_q, W, \Pi)$  y factorizando, tenemos:

$$PNN(F) = Y^0 - Y_k^0 + \left(1 - \frac{\delta}{B}\right) j(p_q, W, \Pi)$$

Derivando el Producto Nacional Neto físico respecto al tipo de cambio real resulta:

$$\frac{\partial PNN(F)}{\partial tc^*} = \left(1 - \frac{\delta}{B}\right) \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*}$$

Deducción 9

Deducción de la derivada del PNN nominal respecto del tipo de cambio real

Veamos ahora la situación con el efecto sobre la renta nacional contabilizada monetariamente, según la ecuación (25):

$$PNN = p_y \cdot Y^d + p_q \cdot Q^d + tc^* \cdot p_y^* \cdot X - \delta \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K$$

Introduciendo la simplificación  $p_y = tc^* \cdot p_y^*$  y sustituyendo según la ecuación (8) con explotación de toda la tierra disponible,  $X = Y^0 - Y^d - Y_k^0$ , según la ecuación (14)  $Q^d = j(p_q, W, \Pi)$  y según la ecuación (18)  $K = \frac{1}{B} \cdot j(p_q, W, \Pi)$  y luego cancelando términos, tendremos:

$$PNN = tc^* \cdot p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + p_q \cdot j(p_q, W, \Pi) - \delta \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot \frac{1}{B} \cdot j(p_q, W, \Pi)$$

Derivando el PNN en unidades monetarias respecto del tipo de cambio real, resulta:

$$\frac{\partial PNN}{\partial tc^*} = p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} \cdot Q^d + p_q \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*} - \delta \cdot p_k^* \cdot \frac{Q^d}{B} - \delta \cdot tc^* \cdot \frac{p_k^*}{B} \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial PNN}{\partial tc^*} = p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + \left[ \frac{\partial p_q}{\partial tc^*} - \delta \cdot \frac{p_k^*}{B} \right] \cdot Q^d + \left( p_q - \delta \cdot tc^* \cdot \frac{p_k^*}{B} \right) \cdot \frac{\partial j}{\partial tc^*}$$

Deducción 10

Deducción la expresión general de la dinámica del crecimiento

Partiendo de la ecuación (25):

$$PNN = p_y \cdot Y^d + p_q \cdot Q^d + tc^* \cdot p_y^* \cdot X - \delta \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K$$

Recurriendo a la simplificación  $p_y = tc^* \cdot p_y^*$  y sustituyendo según la ecuación (8) con la especificación de la ecuación (1 bis),  $X = Y^0 - Y^d - Y_k^0$ , sustituyendo además, por otro lado, según las ecuaciones (17)  $Q^d = Q^S$  y (3 bis)  $Q = B \cdot K$  por otro lado, y factorando tenemos:

$$PNN = tc^* \cdot p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (p_q \cdot B - \delta \cdot tc^* \cdot p_k^*) \cdot K$$

A partir de esta expresión estudiaremos la dinámica del crecimiento derivando la misma con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d(PNN)}{dt} &= \frac{d(tc^*)}{dt} \cdot p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + \left( \frac{dp_q}{dt} \cdot B - \delta \cdot \frac{d(tc^*)}{dt} \cdot p_k^* \right) \cdot K + (p_q \cdot B - \delta \cdot tc^* \cdot p_k^*) \cdot \frac{dK}{dt} \\ \Rightarrow \frac{d(PNN)}{dt} &= \frac{dp_q}{dt} \cdot B \cdot K + [p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) - \delta \cdot p_k^* \cdot K] \cdot \frac{d(tc^*)}{dt} + (p_q \cdot B - \delta \cdot tc^* \cdot p_k^*) \cdot \frac{dK}{dt} \end{aligned}$$

Suponiendo que el sistema funciona con pleno empleo del capital instalado,  $K_0 = K$ , la ecuación (10) es  $p_q = \frac{[w + tc^* \cdot p_k^* \cdot c + i \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot c]}{B \cdot c}$ . Derivando esta expresión del precio del bien manufacturado con respecto al tiempo resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dp_q}{dt} &= \frac{dw}{dt} \cdot \frac{1}{B \cdot c} + \frac{d(tc^*)}{dt} \cdot \frac{p_k^*}{B} + \frac{di}{dt} \cdot \frac{tc^* \cdot p_k^*}{B} + \frac{i \cdot p_k^*}{B} \cdot \frac{d(tc^*)}{dt} \\ \Rightarrow \frac{dp_q}{dt} &= \frac{dw}{dt} \cdot \frac{1}{B \cdot c} + \frac{di}{dt} \cdot \frac{tc^* \cdot p_k^*}{B} + \left( \frac{p_k^*}{B} + \frac{i \cdot p_k^*}{B} \right) \cdot \frac{d(tc^*)}{dt} \\ \Rightarrow \frac{dp_q}{dt} &= \frac{dw}{dt} \cdot \frac{1}{B \cdot c} + \frac{di}{dt} \cdot \frac{tc^* \cdot p_k^*}{B} + (1 + i) \cdot \frac{p_k^*}{B} \cdot \frac{d(tc^*)}{dt} \end{aligned}$$

Reemplazando esta expresión en la derivada del PNN respecto al tiempo y simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d(PNN)}{dt} &= \left( \frac{dw}{dt} \cdot \frac{1}{c} + \frac{di}{dt} \cdot tc^* \cdot p_k^* + (1 + i) \cdot p_k^* \cdot \frac{d(tc^*)}{dt} \right) \cdot K + \dots \\ \dots &+ [p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) - \delta \cdot p_k^* \cdot K] \cdot \frac{d(tc^*)}{dt} + (p_q \cdot B - \delta \cdot tc^* \cdot p_k^*) \cdot \frac{dK}{dt} \end{aligned}$$

Reemplazando ahora la ecuación de  $p_q$  y simplificando resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d(PNN)}{dt} &= \left( \frac{dw}{dt} \cdot \frac{1}{c} + \frac{di}{dt} \cdot tc^* \cdot p_k^* + (1 + i) \cdot p_k^* \cdot \frac{d(tc^*)}{dt} \right) \cdot K + \dots \\ \dots &+ [p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) - \delta \cdot p_k^* \cdot K] \cdot \frac{d(tc^*)}{dt} + \left( \frac{w}{c} + tc^* \cdot p_k^* + i \cdot tc^* \cdot p_k^* - \delta \cdot tc^* \cdot p_k^* \right) \cdot \frac{dK}{dt} \end{aligned}$$

Factorando y reordenando términos resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d(PNN)}{dt} &= \frac{dw}{dt} \cdot \frac{K}{c} + \frac{di}{dt} \cdot tc^* \cdot p_k^* \cdot K + (1 + i) \cdot p_k^* \cdot K \cdot \frac{d(tc^*)}{dt} + \dots \\ \dots &+ [p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) - \delta \cdot p_k^* \cdot K] \cdot \frac{d(tc^*)}{dt} + \left[ \frac{w}{c} + (1 + i - \delta) \cdot tc^* \cdot p_k^* \right] \cdot \frac{dK}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{d(PNN)}{dt} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{K}{c} + \frac{w}{c} \cdot \frac{dK}{dt} + p_k^* \cdot tc^* \left( K \cdot \frac{di}{dt} + (1 + i - \delta) \frac{dK}{dt} \right) + [p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) p_k^* \cdot K] \cdot \frac{d tc^*}{dt}$$

### Deducción 11

#### Deducción de la inversión en función del crecimiento de la fuerza laboral

El pleno empleo laboral significa igualdad de la oferta y la demanda de trabajo:

$$w \cdot (L^S - L^d) = 0$$

Sustituyendo a partir de la ecuación (19)  $L^S = L_0 \cdot e^{n \cdot t}$  y de la ecuación (20)

$$L^d = L_q + L_y^0, \quad L_y^0 = b \cdot T^0, \quad L_q = \frac{Q^S}{B \cdot c}, \text{ se obtiene:}$$

$$w \cdot \left( L_0 \cdot e^{n \cdot t} - \frac{Q^S}{B \cdot c} - L_y^0 \right) = 0 \Rightarrow e^{n \cdot t} = \frac{Q^S}{B \cdot c} + L_y^0$$

Sustituyendo ahora de acuerdo a las ecuaciones (17)  $Q^d = Q^S$  y (3 bis)  $Q = BK$ , resulta:

$$\begin{aligned} L_0 \cdot e^{n \cdot t} &= \frac{K}{c} + L_y^0 \\ K &= c \cdot (L_0 \cdot e^{n \cdot t} - L_y^0) \\ \Rightarrow \frac{dK}{dt} &= c \cdot n \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t} \end{aligned}$$

### Deducción 12

#### Deducción del tipo de cambio real necesario para los objetivos del ajuste con el enfoque monetario de la balanza de pagos

El gobierno actuará operando sobre diversas variables (salarios, tasa de interés, tipo de cambio) de modo que la ecuación reducida de la dinámica del crecimiento se convierta en:

$$\frac{dPNN}{dt} = PNN \cdot \pi = p_k^* \cdot tc^* \cdot K \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d\pi^e}{dt} + [p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K] \cdot \frac{d tc^*}{dt}$$

A partir de la ecuación (7)  $tc^* = tc \cdot \frac{p^*}{p}$ , aplicando logaritmos y derivando respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{\frac{d tc^*}{dt}}{tc^*} = \frac{d tc}{dt} - \frac{d p}{dt} \Rightarrow \frac{d tc^*}{dt} = tc^* \left[ \frac{d tc}{dt} - \pi \right]$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación anterior y factorizando resulta:

$$PNN \cdot \pi = \left\{ p_k^* \cdot K \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d\pi^e}{dt} + [p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K] \cdot \left( \frac{d tc}{dt} - \pi \right) \right\} \cdot tc^*$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que:

$$PNN = tc^* \cdot p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (p_q \cdot B - \delta \cdot tc^* \cdot p_k^*) \cdot K$$

Y que en condiciones de pleno empleo del capital instalado es:

$$p_q = \frac{w}{B \cdot c} + \frac{tc^* \cdot p_k^*}{B} + \frac{i \cdot tc^* \cdot p_k^*}{B}$$

Reemplazando  $p_q$  en  $PNN$  y simplificando resulta:

$$\begin{aligned} PNN &= tc^* \cdot p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + \left( \frac{w}{c} + tc^* \cdot p_k^* + i \cdot tc^* \cdot p_k^* - \delta \cdot tc^* \cdot p_k^* \right) \cdot K \\ \Rightarrow PNN &= tc^* \cdot p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + \left[ \frac{w}{c} + (1 + i - \delta) \cdot tc^* \cdot p_k^* \right] \cdot K \\ \Rightarrow PNN &= tc^* \cdot [p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K] + w \cdot \frac{K}{c} \end{aligned}$$

Reemplazando esta expresión en  $PNN$ ,  $\pi$ , se obtiene:

$$\left\{ tc^* \cdot [p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K] + w \cdot \frac{K}{c} \right\} \cdot \pi = \dots$$

$$\dots = \left\{ p_k^* \cdot K \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d\pi^e}{dt} + [p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K] \cdot \left( \frac{d\pi^e}{tc} - \pi \right) \right\} \cdot tc^*$$

Distribuyendo, reordenando y factorizando surge:

$$tc^* \cdot \pi \cdot \{ p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K \} - p_k^* \cdot K \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d\pi^e}{dt} \cdot tc^* = \dots$$

$$\dots = tc^* \cdot \left\{ p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) \cdot \left( \frac{d\pi^e}{tc} - \pi \right) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K \cdot \left( \frac{d\pi^e}{tc} - \pi \right) \right\} - \frac{wK}{c} \cdot \pi$$

$$tc^* \cdot \left[ \pi \cdot \{ p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K \} - p_k^* \cdot K \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d\pi^e}{dt} \right] = \dots$$

$$\dots = tc^* \cdot \left\{ p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) \cdot \left( \frac{d\pi^e}{tc} - \pi \right) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K \cdot \left( \frac{d\pi^e}{tc} - \pi \right) \right\} - \frac{wK}{c} \cdot \pi$$

$$tc^* \cdot \left[ \pi \cdot p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + \pi \cdot (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K - p_k^* \cdot K \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d\pi^e}{dt} \right] = \dots$$

$$\dots = tc^* \cdot \left\{ p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) \cdot \frac{d\pi^e}{tc} - p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) \cdot \pi \right\}$$

$$+ tc^* \cdot \left\{ (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K \cdot \frac{d\pi^e}{tc} - (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K \cdot \pi \right\} - \frac{w \cdot K}{c} \cdot \pi$$

$$tc^* \cdot \left[ 2 \cdot \pi \cdot p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + 2 \cdot \pi \cdot (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K - p_k^* \cdot K \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d\pi^e}{dt} \right] = \dots$$

$$\dots = tc^* \cdot \left\{ p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) \cdot \frac{d\pi^e}{tc} + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K \cdot \frac{d\pi^e}{tc} \right\} - \frac{w \cdot K}{c} \cdot \pi$$

$$tc^* \cdot \left[ \{ p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot K \} \cdot \left( 2 \cdot \pi - \frac{d\pi^e}{tc} \right) - p_k^* \cdot K \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d\pi^e}{dt} \right] = - \frac{w \cdot K}{c} \cdot \pi$$

Despejando  $tc^*$  y reemplazando según  $K = c \cdot L_0 \cdot e^{nt}$ , resulta el tipo de cambio real que satisface las condiciones de la política sugerida por F.M.I., o sea, el valor del tipo de cambio real que habría que alcanzar para lograr los objetivos del ajuste conforme al enfoque de la balanza de pagos:

$$tc^* = \frac{[-w \cdot L_0 \cdot e^{nt} \cdot \pi]}{[p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot c \cdot L_0 \cdot e^{nt}] \cdot \left[ 2\pi - \frac{d\pi^e}{tc} \right] - p_k^* \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d\pi^e}{dt} \cdot c \cdot L_0 \cdot e^{nt}}$$

Demostración 1

Demostración de la consistencia del tipo de cambio real si la tasa de inflación no puede sufrir aceleraciones y la tasa de devaluación/depreciación es completamente controlable por la autoridad monetaria.

Partiendo del valor necesario del tipo de cambio real para alcanzar el éxito en la política inspirada en el enfoque monetario de la balanza de pagos en situación de estanflación, tenemos:

$$tc^* = \frac{-w \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t} \cdot \pi}{[p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot c \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t}] \cdot \left[ 2 \cdot \pi - \frac{d \cdot tc}{d \cdot t} \right] - p_k^* \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d \pi^e}{d \cdot t} \cdot c \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t}}$$

Si ocurre que:

$$\frac{d \pi}{d t} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 \pi^e}{d t^2} = 0 \quad . \quad \frac{d \left( \frac{d \cdot tc}{d \cdot t} \right)}{d t} = 0$$

entonces se podrá hallar el valor límite de  $tc^*$  cuando el tiempo tiende a infinito siguiendo la regla de L'Hôpital. Aplicando dicha regla y factorizando resulta:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tc^* = \frac{-w \cdot L_0 \cdot n \cdot e^{n \cdot t} \cdot \pi}{\left[ (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot \left( 2 \cdot \pi - \frac{d \cdot tc}{d \cdot t} \right) - p_k^* \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d \pi^e}{d \cdot t} \right] \cdot c \cdot L_0 \cdot n \cdot e^{n \cdot t}}$$

Simplificando, es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tc^* = \frac{-w \cdot \pi}{\left[ (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot \left( 2 \cdot \pi - \frac{d \cdot tc}{d \cdot t} \right) - p_k^* \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d \pi^e}{d \cdot t} \right] \cdot c}$$

Dado que el numerador es negativo, el denominador también debe serlo, de lo contrario el valor límite del tipo de cambio real sería negativo, lo que es absurdo. Para obtener un valor consistente debe cumplirse la restricción:

$$(1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot \left( 2 \cdot \pi - \frac{d \cdot tc}{d \cdot t} \right) < p_k^* \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d \pi^e}{d \cdot t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d \cdot tc}{d \cdot t} > 2 \cdot \pi - \frac{(1 + i^*)}{(1 + i - \delta)} \cdot \frac{d \pi^e}{d \cdot t}$$

Si fuera  $2 \cdot \pi = \frac{d \cdot tc}{d \cdot t}$ , entonces el valor límite bien determinado del tipo de cambio real sería:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tc^* = \frac{w \cdot \pi}{p_k^* \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d \pi^e}{d \cdot t} \cdot c}$$

Deducción 13

Se parte de la expresión hallada para el tipo de cambio real necesario para el éxito del ajuste basado en el enfoque monetario de la balanza de pagos en situación de estanflación:

$$tc^* = \frac{-w \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t} \cdot \pi}{[p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot c \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t}] \cdot \left[ 2 \cdot \pi - \frac{d \cdot tc}{d \cdot t} \right] - p_k^* \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{d \pi^e}{d \cdot t} \cdot c \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t}}$$

Suponiendo que se cumple:

$$\frac{d \pi}{d t} = e^{P \cdot t} \quad , \quad \frac{d \cdot tc}{d \cdot t} = e^{T \cdot t} \quad , \quad \frac{d i}{d t} = (1 + i^*) \cdot \frac{d \pi^e}{d t} = (1 + i^*) \cdot e^{E \cdot t}$$

Los objetivos de la política de ajuste exigen:

$$T C > P \quad , \quad E > P$$

Sustituyendo estas expresiones, en las que se permite la aceleración de la tasa de inflación, de la tasa de devaluación y de la tasa de crecimiento del tipo de interés nominal, en la ecuación del tipo de cambio real necesario para el ajuste basado en el enfoque monetario de la balanza de pagos resulta:

$$tc^* = \frac{-w \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t} \cdot e^{P \cdot t}}{[p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot c \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t}] \cdot [2 \cdot e^{P \cdot t} - e^{TC \cdot t}] - p_k^* \cdot (1 + i^*) \cdot e^{E \cdot t} \cdot c \cdot L_0 \cdot e^{n \cdot t}}$$

Dividiendo el numerador y el denominador por  $L_0 \cdot e^{n \cdot t}$  se convierte la expresión en:

$$tc^* = \frac{-w \cdot e^{P \cdot t}}{\frac{p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) \cdot [2 \cdot e^{P \cdot t} - e^{TC \cdot t}]}{L_0 \cdot e^{n \cdot t}} + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot c \cdot [2 \cdot e^{P \cdot t} - e^{TC \cdot t}] - p_k^* \cdot (1 + i^*) \cdot e^{E \cdot t} \cdot c}$$

Si dividimos ahora el numerador y el denominador por  $e^{P \cdot t}$ , resulta:

$$tc^* = \frac{-w}{\frac{p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) \cdot \left[2 - \frac{e^{TC \cdot t}}{e^{P \cdot t}}\right]}{L_0 \cdot e^{n \cdot t}} + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot c \cdot \left[2 - \frac{e^{TC \cdot t}}{e^{P \cdot t}}\right] - p_k^* \cdot (1 + i^*) \cdot \frac{e^{E \cdot t}}{e^{P \cdot t}} \cdot c}$$

Pasando los divisores a exponentes negativos y factorizando es:

$$tc^* = \frac{-w}{p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) \cdot L_0^{-1} \cdot (2 \cdot e^{-n \cdot t} - e^{(TC-P-n) \cdot t}) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot c \cdot (2 - e^{(TC-P) \cdot t}) - p_k^* \cdot (1 + i^*) \cdot e^{(E-P) \cdot t} \cdot c}$$

### Demostración 2

Partiendo de la expresión:

$$tc^* = \frac{-w}{p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) \cdot L_0^{-1} \cdot (2 \cdot e^{-n \cdot t} - e^{(TC-P-n) \cdot t}) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot c \cdot (2 - e^{(TC-P) \cdot t}) - p_k^* \cdot (1 + i^*) \cdot e^{(E-P) \cdot t} \cdot c}$$

La obtención de un valor determinado en el límite, cuando  $t$  tiende a infinito, depende de la relación entre las tasas de los factores exponenciales.

Si suponemos, en una primera aproximación, que las tasas a las que crecen exponencialmente el tipo de cambio nominal, la tasa de inflación y el tipo de interés nominal son iguales entre sí,  $P = TC = E$ , tendríamos:

$$tc^* = \frac{-w}{p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) \cdot L_0^{-1} \cdot e^{-n \cdot t} + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot c - p_k^* \cdot (1 + i^*) \cdot c}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tc^* = \frac{-w}{(i - i^* - \delta) \cdot p_k^* \cdot c}$$

Para que esta expresión tenga sentido económico es necesario que el denominador sea negativo, o sea, que

$$i - i^* - \delta < 0$$

Sin embargo, no sólo no hay ninguna seguridad de que esto pueda cumplirse, sino que, especialmente cuando existen niveles de alta inflación que crecen exponencialmente, lo normal es esperar que esta expresión sea mayor que cero. En ese caso, el tipo de interés nominal es mayor que uno (tiende a ser mayor o igual que la inflación) y muy superior en valor absoluto al tipo de interés real, cuyo valor normal es aproximadamente del orden de  $i^* \cong 0,02$ , llegando en condiciones excepcionales a ser una tasa anual negativa. Estas realidades harían que el denominador fuera positivo y, en consecuencia, que el valor límite del tipo de cambio real resultara un absurdo desde el punto de vista económico.

Además, existe un valor de  $i$  que convierte en cero al denominador dejando totalmente indeterminado el valor del tipo de cambio real, inclusive en el límite cuando  $t$  tiende a infinito.

Por otra parte, aun cuando el denominador fuera negativo y existiera un valor definido del tipo de cambio real con sentido económico, cabe recordar que eso procedería de haber supuesto que la tasa de incremento de la devaluación era igual a la tasa de crecimiento de la inflación, con lo cual el tipo de cambio real no sufre ninguna mejora. Lo mismo ocurre con la tasa de crecimiento del tipo de interés nominal, que hemos supuesto igual a la de la tasa de inflación, lo que implica que no existe mejora del tipo de interés real.

La persistencia en los objetivos de la política económica del ajuste propiciado por el enfoque monetario de la balanza de pagos exige que:

$$TC > P, \quad E > P$$

Suponiendo por ahora que:

$$TC - P - n < 0$$

Entonces tenemos que a partir de la expresión:

$$tc^* = \frac{-w}{p_y^* \cdot (Y^0 - Y_k^0) \cdot L_0^{-1} \cdot (2 \cdot e^{-n \cdot t} - e^{(TC-P-n) \cdot t}) + (1 + i - \delta) \cdot p_k^* \cdot c \cdot (2 - e^{(TC-P) \cdot t}) - p_k^* \cdot (1 + i^*) \cdot e^{(E-P) \cdot t} \cdot c}$$

En el límite, resulta una expresión del tipo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tc^* = \frac{w}{\frac{C_1}{\infty} - \frac{C_2}{\infty} + C_3 - C_4 \cdot \infty - C_5 \cdot \infty} = 0$$

Donde las  $C_i$  son valores numéricos constantes.

Esta conclusión no se modifica si ocurriera que:  $TC - P - n \geq 0$



## Tiempo, Población y Modelos de Crecimiento

CAYSSIALS, GASTON

Departamento de Métodos Cuantitativos  
Facultad de Ciencias Económicas y de Administración  
Universidad de la Republica (Uruguay)  
Correo electrónico: [gcayssials@ccee.edu.uy](mailto:gcayssials@ccee.edu.uy)

### RESUMEN

En este trabajo se presenta un análisis de las implicaciones que tiene sobre los modelos de crecimiento estándar asumir una hipótesis alternativa al crecimiento exponencial de la población y cómo la forma de modelizar el tiempo puede alterar el comportamiento dinámico de estos modelos. Se estudia también una extensión (en tiempo continuo y en tiempo discreto) del modelo de crecimiento de Mankiw-Romer-Weil al apartarse del supuesto estándar de la tasa de crecimiento de la población constante. Más concretamente, se asume que esta tasa es decreciente en el tiempo y se introduce una ley general de crecimiento de la población que verifica esta característica. Con esta especificación, el modelo puede ser representado por un sistema dinámico de dimensión tres, que admite una única solución para cualquier condición inicial. Se muestra que existe un único equilibrio no trivial que es un atractor global. Además, se caracteriza a la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario, mostrando que en este modelo la velocidad es inferior a la del modelo original de Mankiw-Romer-Weil.

**Palabras clave:** modelo de crecimiento de Mankiw-Romer-Weil, tiempo discreto, tiempo continuo, tasa de crecimiento de la población decreciente, velocidad de convergencia.

**Clasificación JEL:** C62; O41.

**MSC2010:** 91B55; 91B62.



# Time, population and economic growth model

## ABSTRACT

This paper presents an analysis of the implications it has on standard growth models assume an alternative hypothesis to the exponential growth of the population and how modeling time can alter the dynamic behavior of these models. An extension (in continuous time and discrete time) of the Mankiw-Romer-Weil growth model is also studied by departing from the standard assumption of the constant population growth rate. More concretely, this rate is assumed to be decreasing over time and a general population growth law verifying this characteristic is introduced. In this setup, the model can be represented by a three dimensional dynamical system which admits a unique solution for any initial condition. It is shown that there is a unique nontrivial equilibrium which is a global attractor. In addition, the speed of convergence to the steady state is characterized, showing that in this framework this velocity is lower than in the original model.

**Keywords:** Mankiw-Romer-Weil economic growth model, discrete time, continuous time, decreasing population growth rate, speed of convergence.

**JEL classification:** F17; F15; C16; C13 C62; O41.

**MSC2010:** 91B55; 91B62.



## 1. Introducción.

Dentro de la teoría económica, las teorías del crecimiento ocupan un lugar central. Describir y explicar las fuentes y el proceso del crecimiento del producto per cápita es el principal objetivo. Preguntas como: ¿qué factores determinan el crecimiento?, ¿por qué algunas economías crecen más que otras?, ¿por qué algunas crecen a mayor velocidad que otras?, son centrales para las teorías de crecimiento dominantes. El presente trabajo se enfoca en dos particularidades que se presentan en los esquemas de análisis, es decir, en los modelos que utilizan estas teorías de crecimiento.

La primera particularidad es cómo se incorpora en los modelos de crecimiento la dinámica de la población. Los modelos de crecimiento básicamente se diferencian en el foco de generación de crecimiento. Solow (1956) en el papel de la acumulación de capital. Ramsey (1928), Cass (1965) y Koopmans (1963) en el consumo y el ahorro. El modelo de crecimiento endógeno de Romer (1986) en los rendimientos crecientes a escala asociados a las externalidades del capital. Lucas (1988) y Uzawa (1965) en la creación y acumulación de capital humano. El modelo de Mankiw, Romer, y Weil (1992) ampliando el modelo de Solow con capital humano. Todos estos, entre otros modelos, comparten el supuesto que la fuerza de trabajo, asociada con la población, crece a una tasa constante,  $n \geq 0$ . Esta hipótesis condiciona fuertemente los resultados de los modelos. Por poner un ejemplo, en el modelo de Solow, en la trayectoria del crecimiento equilibrado (en ausencia de progreso tecnológico) todas las variables crecen a la misma tasa, que coincide con la tasa de crecimiento de la población.

El segundo aspecto es la forma de modelizar el tiempo. En su formulación original todos estos modelos se plantearon en tiempo continuo. En el presente trabajo analizamos las implicaciones que tiene sobre los modelos de crecimiento estándar asumir una hipótesis alternativa al crecimiento exponencial de la población y como la forma de modelizar el tiempo puede alterar el comportamiento dinámico de estos modelos.

Por último, como una aplicación de lo anterior, presentamos una extensión del modelo de crecimiento desarrollado por Mankiw, Romer y Weil incorporando una dinámica de la población alternativa al crecimiento exponencial, más ajustada a los hechos estilizados. Desde su publicación en 1992 el trabajo ha tenido una influencia notable en la amplia bibliografía empírica sobre el crecimiento y sus determinantes, influencia que se mantiene hasta la actualidad. El análisis del modelo reformulado lo planteamos en tiempo continuo y en tiempo discreto, comparando los resultados entre sí y con la formulación original. Con esta especificación, el modelo puede ser representado por un sistema dinámico de dimensión tres, que admite una única solución para cualquier condición inicial. Se muestra que existe un equilibrio no trivial único que es un atractor global. Además, se caracteriza a la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario, mostrando que, en este modelo, la velocidad es inferior a la del modelo original de Mankiw-Romer-Weil. Estos resultados se encuentran tanto en la formulación continua como en la formulación discreta.

## 2. La modelización del tiempo en los modelos de crecimiento.

En general, los modelos de crecimiento vienen representados por un sistema dinámico que describe la interrelación y el comportamiento temporal de las variables relevantes, donde la variable independiente, el tiempo, puede ser representado en modo discreto o continuo. Al momento de formular un modelo dinámico (como los modelos de crecimiento) una elección fundamental que debe tomar el investigador es la forma de modelar el tiempo. En tiempo continuo,  $t$  puede tomar cualquier valor en la recta real y la descripción es instante a instante, en tiempo discreto el tiempo transcurre en termino de periodos. Desde una perspectiva matemática, en tiempo continuo se utiliza la teoría de las ecuaciones diferenciales, mientras que en tiempo

discreto las ecuaciones en diferencias finitas. Esto provoca que las técnicas utilizadas sean muy distintas.

Esta elección que toma el investigador responde implícitamente a varias cuestiones. En primer lugar, se refiere a la forma de concebir el tiempo, a cuál es el concepto del tiempo en economía. Responde también a la idea de que el fenómeno que se quiere describir y explicar es mejor representado en tiempo continuo o en tiempo discreto. Y lo más importante, tuvo en cuenta las implicaciones que puede tener esa elección sobre los resultados del modelo. El tema de cómo introducir el tiempo en la teoría económica es muy amplio, el análisis se centrará en la forma de modelizar el tiempo en los modelos de crecimiento estándar, en las justificaciones de tal elección y las posibles implicaciones que tiene sobre los resultados y recomendaciones de política que de los modelos se pueden derivar.

Existen algunos casos donde los autores argumentan y comparan los méritos de una u otra formulación. En el libro de texto de Dinámica Económica de Lomel y Rumbos (2003) se encuentran argumentos a favor y en contra y en el libro de Gandolfo (1997) se defiende la modelización en tiempo continuo en economía. Sin embargo, estos son casos aislados. Comúnmente se cree que esta elección no afecta el comportamiento cualitativo del modelo y es raro encontrar una justificación del por qué se optó por una u otra alternativa. Sin embargo, la modelización del tiempo no es trivial ni neutral y puede tener consecuencias, los resultados del modelo y las recomendaciones de política que se pueden derivar de estos pueden cambiar considerablemente según como se formulen.

El ejemplo clásico es la ecuación logística. En tiempo continuo se trata de un modelo simple ya que todas las soluciones de la ecuación diferencial logística convergen monótonamente a un valor constante, independientemente de los valores de los parámetros. La **ecuación logística en tiempo continuo** es:

$$y' = ay(M - y) \quad a > 0, M > 0$$

Las soluciones de la ecuación son:

$$y(t) = \left[ \frac{y(0)}{M - y(0)} \right] \left[ \frac{M e^{kt}}{1 + \left( \frac{y(0)}{M - y(0)} \right) e^{kt}} \right], \quad \text{con } k = aM$$

y éstas convergen monótonamente a un valor constante para cualquier condición inicial  $y(0)$ . En particular si  $y(0) = 0$  o si  $y(0) = M$ , la solución es constante ( $y(t) = 0$  o  $y(t) = M$  para todo  $t$ ). Si  $y(0) > M$  la solución es decreciente y converge a  $M$ . Finalmente, si  $y(0) < M$  la solución es creciente y también converge a  $M$ .

Sin embargo, la **ecuación logística en tiempo discreto**:

$$y_{t+1} = ay_t(M - y_t)$$

puede producir dinámicas muy complejas y hasta caóticas para un intervalo continuo de los parámetros (en particular si  $a/M \in (3,4)$ )<sup>1</sup>.

La complejidad del modelo logístico discreto ha producido una línea de investigación en el área de sistemas dinámicos. En particular luego de la publicación del trabajo seminal de May et al. (1976) el estudio de las propiedades matemáticas de la ecuación logística discreta ha producido un gran número de aplicaciones económicas de la teoría del caos. En Sordi (1996) se puede encontrar una revisión exhaustiva de la bibliografía acerca de teoría del caos y dinámica económica. En esos trabajos la dinámica de los modelos viene caracterizada por un desfase temporal de un periodo y una no linealidad unimodal (una ecuación en diferencias finitas de

<sup>1</sup> Ver Lomel y Rumbos (2003) por más detalles.

primer orden logística). Muchas de esas aplicaciones son revisiones de modelos tradicionales formulados en tiempo discreto. El trabajo de Day (1982) es uno de los pioneros en ese aspecto. Al incorporar el efecto polución (la productividad del capital se reduce al concentrar el capital) al modelo de Solow, la ecuación de acumulación de capital es dada por la ecuación logística:

$$k_{t+1} = h(k_t) = \frac{sAk_t^\beta(m - k_t)^\gamma}{1 + n}, \quad \beta, \gamma, \in (0, 1)$$

donde el factor  $(m - k_t)^\gamma$  recoge el efecto polución,  $A$  es una constante que representa la tecnología,  $s$  la tasa de ahorro y  $n$  la tasa de crecimiento (exógena y constante) de la población.

En su trabajo, Day muestra que existe un rango para el valor del parámetro  $A$  que hace que se verifiquen las condiciones suficientes del teorema “periodo tres implica caos” (Li-Yorke, 1975):

1. existen orbitas periódicas de todos los periodos
2. existen orbitas caóticas, órbitas que se acercan entre ellas y se alejan
3. existe un conjunto  $S$  no numerable tal que ninguna trayectoria que comienza en  $S$  converge a una trayectoria periódica.

Para ese rango de valores del parámetro  $A$  el modelo describe una dinámica caótica para la trayectoria del capital per cápita. Sin embargo, en dicho trabajo, no se encuentra ninguna mención respecto a la elección del tiempo discreto y es sencillo mostrar que la dinámica del modelo cambia radicalmente si se formula en tiempo continuo<sup>2</sup>.

Otros autores que analizan las implicaciones que tiene la teoría del caos en economía son Barnett, Serletis y Serletis (2015). Ellos muestran cómo la introducción de sistemas dinámicos caóticos deterministas puede generar resultados cualitativamente similares a los observados en las series económicas reales. Afirman que, si bien esto no es un argumento concluyente para explicar las fluctuaciones, muestra que no necesariamente éstas se explican por choques aleatorios exógenos y justifica explorar esa alternativa, al proporcionar una explicación endógena de la irregularidad. Federici y Gandolfo (2014) hacen notar, que en un sistema dinámico caótico, la predicción es imposible. Dada la dependencia sensible a las condiciones iniciales, diferencias mínimas en las condiciones iniciales generan trayectorias muy distintas (efecto mariposa). Dada esta característica, no es posible una solución analítica y la posibilidad de simular numéricamente es muy limitada. Además, cuestiona seriamente la teoría de las expectativas racionales, ya que los agentes tendrían que tener una precisión infinita para evitar la sensibilidad a las condiciones iniciales. La situación se agrava si además hay perturbaciones aleatorias.

Dejando de lado las implicaciones de la teoría del caos en economía en la literatura encontramos diversos autores que analizan las diferencias que aparecen al modelar el tiempo y los problemas que pueden presentarse. Sin ser exhaustivo, comentaremos algunos de estos trabajos. Medio et al. (2011) discute las posibles consecuencias de decidir por una u otra alternativa al modelar el tiempo y la duración del periodo cuando el modelo es discreto. Centrando su análisis en los sistemas dinámicos que surgen a partir de los modelos de crecimiento óptimo muestra cómo para valores pequeños de la tasa de descuento el comportamiento es sensible a los cambios en la duración del periodo. Con la misma óptica, Giannitsarou y Anagnostopoulos (2005) analizan la importancia de la frecuencia en la toma de decisiones para la dinámica económica y explican cómo la estabilidad local puede cambiar a partir de cambios en la longitud del periodo.

Bosi y Ragot (2012) muestran modelos donde la modelización del tiempo es neutral (al discretizar el modelo de Solow se mantienen las propiedades dinámicas de la solución) y modelos que no lo son (en el modelo de Ramsey pueden cambiar dependiendo del valor de los parámetros).

---

<sup>2</sup> En tiempo continuo se necesita un sistema dinámico de al menos dimensión tres para que el comportamiento sea caótico y el modelo que utiliza Day es de dimensión uno.

En el trabajo de Gómez (2014) se muestra cómo la estabilidad del equilibrio en un modelo de crecimiento endógeno con consumo de durables cambia en una u otra formulación. En tiempo continuo el único equilibrio es un punto de silla con convergencia monótona. En tiempo discreto, la estabilidad depende de la elasticidad de sustitución intertemporal, pudiendo ser inestable o un punto de silla con convergencia monótona o uno con convergencia oscilatoria, dependiendo del valor que tome el parámetro. González y Pecha (1995), utilizando un modelo keynesiano, muestran cómo las recomendaciones de política que se pueden derivar pueden cambiar según la forma de modelizar el tiempo. Las respuestas del producto y la tasa de interés frente a cambios en la propensión marginal a consumir o cambios en la eficiencia marginal del capital tiene signos opuesto en una u otra formulación.

Sin embargo, desde un punto de vista económico son variados los argumentos a favor de la modelización en tiempo discreto: información económica fundamental es recolectada en intervalos discretos, existen decisiones fundamentales que se toman en intervalos discretos, los estudios empíricos necesariamente son en tiempo discreto, etc.<sup>3</sup>.

Al mismo tiempo, al no existir un resultado general desde el punto de vista matemático que permita afirmar que el comportamiento dinámico es invariante a la forma de modelar el tiempo, no hay acuerdo en la teoría económica acerca de cómo representar el tiempo y hay argumentos a favor y en contra para ambas formulaciones. ¿Cuál es la mejor forma de modelizar el tiempo en economía es un problema abierto? Hay argumentos de peso por ambas formulaciones y seguramente no se admita una respuesta concluyente. Dependerá, entre otras cosas, del fenómeno que se quiera describir y explicar. Sin embargo, el investigador debería justificar la elección y analizar si los resultados del modelo son sensibles a la forma de modelizar.

### 3. La dinámica de la población en los modelos de crecimiento.

El segundo aspecto que se propone analizar el presente trabajo es acerca de cómo modelizar la dinámica de la población en los modelos de crecimiento económico. Es habitual que los modelos de crecimiento clásicos recurran al supuesto de que la población crece a tasa constante. Dicho supuesto, que condiciona los resultados, implica que la población crece indefinidamente conforme el tiempo avanza. En tiempo discreto esto se traduce en la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$L_{t+1} = (1 + n)L_t$$

donde  $L_t$  es el tamaño de la población en el periodo  $t$  y  $n$  es la tasa de crecimiento ( $n$  positiva)

$$\frac{L_{t+1} - L_t}{L_t} = n$$

Y en tiempo continuo, por la siguiente ecuación diferencial:

$$L'(t) = nL(t)$$

Esto implica que  $L_t = L_0(1 + n)^t$  (o  $L(t) = L(0)e^{nt}$  si es en tiempo continuo), donde  $L_0 = L(0)$  es la población inicial, la población crece exponencialmente y tiende a infinito cuando  $t$  tiende a infinito. Claramente el supuesto no es realista, si bien es cierto que en los periodos iniciales la población puede crecer mucho, ese crecimiento no es sostenible en el largo plazo. De acuerdo con los datos de Naciones Unidas DESA (2015) la tasa de crecimiento de la población se ha reducido en promedio en los últimos cien años. Para el quinquenio 1960-1965 era mayor a 2% y ha ido decreciendo para situarse en una tasa promedio cercana al 1% en el quinquenio 2010-2015. Más

---

<sup>3</sup> Puede consultarse a Licandro y Puch (2006) para una discusión acerca de la dimensión temporal en los modelos económicos y las referencias presentadas en el artículo.

aún, en vastas regiones, principalmente de Europa, la tasa es prácticamente nula e incluso negativa en algunos países. Por otra parte, las proyecciones para los próximos años es que esta tendencia continuará debido a menores tasas de fertilidad.

En resumen, los datos empíricos revelan dos hechos estilizados: i) la población no crece a una tasa constante, y ii) esta tasa disminuye y es cercana a cero.

Verhulst (1838) sostuvo que el crecimiento de una población estable debe llegar a un nivel de saturación característico, usualmente llamado capacidad de carga del entorno<sup>4</sup>, que define una cota superior al crecimiento. Para incorporar esta cota en la tasa de crecimiento Verhulst introduce una ecuación logística como una extensión al modelo exponencial. Por otro lado, Maynard (1974) sostiene que una ley de crecimiento de la población realista debería verificar las siguientes propiedades:

1. Cuando la población es suficientemente pequeña en relación con la capacidad de carga, la población crece a una tasa constante  $n_0$ .
2. Cuando la población es lo suficientemente grande en relación con la capacidad de carga los recursos se vuelven escasos y esto afecta negativamente la tasa de crecimiento de la población.
3. La tasa de crecimiento de la población decrece a cero.

Si bien el origen teórico de estas propiedades es la biología, pronto se comenzaron a utilizar en otras disciplinas. Es así que estas propiedades también se verifican en las leyes de población usadas por demógrafos y científicos sociales<sup>5</sup> y es congruente con la teoría de las poblaciones estables (una de las teorías demográficas más aceptada, desarrollada por Lotka (1934)). Desde el punto de vista empírico constituye una hipótesis más ajustada a los hechos estilizados y generalmente es utilizada por demógrafos para hacer proyecciones (por ejemplo, Ordorica-Mellado (2009) usa la función logística para proyectar el tamaño de la población mundial en el año 2050). En tiempo discreto la ecuación logística presentada por Pielou et al. (1969) y la ecuación de Beverton (1957) son ejemplos de leyes poblacionales que verifican dichas propiedades<sup>6</sup>.

Recientemente varios estudios se han enfocado en la reformulación de los modelos de crecimiento introduciendo leyes de población alternativas a la ley exponencial, leyes que verifican las propiedades antes mencionadas. Logrando describir mejor la realidad económica al incorporar una dinámica de la población más ajustada a los hechos estilizados. La reformulación de los modelos clásicos de crecimiento ya ha sido estudiada para el modelo de Solow (problema de dinámica puro) por varios autores. Scarpello y Ritelli (2003), Wanxin y Zequn (2013), Brianzoni, Mammana, y Michetti (2012), Guerrini (2006) y Cai (2012) usan la ley logística. Bay (2013) utiliza la ecuación de Richards. La ecuación de Von Bertalanffy es usada por Brida y Maldonado (2010). Cai (2012) asume que la población es acotada. Y Brida y Pereyra (2008) y Brida (2008) una ley general de población que verifica las propiedades antes mencionadas.

Para el modelo de Ramsey (problema de optimización dinámico) Accinelli y Brida (2007a), Ferrara y Guerrini (2009), Guerrini (2010a), Guerrini (2010e) y Guerrini (2010c) utilizan la ecuación logística. Accinelli y Brida (2007b) y Guerrini (2010b) reformulan el modelo usando la ley de Von Bertalanffy. Y usando una ley general Brida, Cayssials y Pereyra (2014).

---

<sup>4</sup> En Arrow, Bolin, Costanza, Dasgupta, Folke, Holling, Jansson, Levin, Mäler, Perrings, et al. (1995), Cohen (1995a), Cohen (1995b) y Daily y Ehrlich (1992) puede encontrarse información sobre el concepto de capacidad de carga.

<sup>5</sup> Ver Brauer y Castillo-Chavez (2001) para un análisis más detallado de estas leyes.

<sup>6</sup> Ver también Brianzoni, Mammana, y Michetti (2007) y Gushing y Henson (2001).

El único trabajo que reformula el modelo de Mankiw, Romer y Weil es Guerrini (2010d) usando la ley de población logística. El análisis lo hace en tiempo continuo. En el apartado siguiente generalizamos los resultados obtenidos por este autor, reformulando el modelo en tiempo continuo y en tiempo discreto, usando una ley de población general con tasa decreciente a cero (la ley logística es un caso particular de ésta).

#### 4. El modelo de crecimiento de Mankiw, Romer y Weil.

El modelo propuesto por Mankiw, Romer y Weil en 1992, también conocido como modelo de Solow ampliado con capital humano, marca un hito en el resurgimiento de los modelos neoclásicos de crecimiento en los años 90 y su trabajo es una de las piezas más influyentes y es ampliamente citado en la literatura empírica sobre el crecimiento. El estudio introduce un análisis de regresión para demostrar que su especificación proporciona una mejor descripción de los datos comparativos entre países que la descripción obtenida cuando se utiliza el modelo original de Solow. Al considerar una definición más amplia de capital, el modelo predice una menor velocidad de convergencia<sup>6</sup> al equilibrio que la tasa que se deriva del modelo de Solow. Esto implica que el modelo de Mankiw, Romer y Weil se ajusta mejor a los datos empíricos que el modelo original de Solow. Este resultado, junto con la aparición de modelos de crecimiento endógeno, promovió el desarrollo de una línea de investigación empírica que se centró en la convergencia y la dispersión ( $\sigma$ -convergencia) del producto per cápita entre los países, grupos de países o regiones de un mismo país. Los estudios de De la Fuente (1997) o de Durlauf y Aghion (2005) confirman la influencia y el peso del modelo en esta literatura. La relevancia empírica del modelo de Mankiw, Romer y Weil para comprender el crecimiento económico a largo plazo o las diferencias de ingreso per cápita entre países está documentada por una gran cantidad de investigaciones empíricas posteriores. En particular en el área de crecimiento empírico y convergencia económica, que discute la robustez de este resultado e, implícitamente, la relevancia empírica del modelo de Solow ampliado (ver Bernanke y Gürkaynak (2001), Solow (2001), Jones (2002), Gundlach (2005), McQuinn y Whelan (2007), Ding y Knight (2009), Acemoglu, Johnson, y Robinson (2012)). En todas estas obras el modelo de Mankiw, Romer y Weil es un pilar fundamental.

En esta sección se analizará el modelo de crecimiento de Mankiw, Romer y Weil, incorporando una ley de población general, que verifique las propiedades antes mencionadas y donde se generalizaran los resultados obtenidos por Guerrini (2010d) donde el autor modifica el modelo en tiempo continuo mediante la introducción de la ley logística de la población. Teniendo en cuenta que la introducción de una ley alternativa de crecimiento de la población implica cambios en la velocidad de convergencia al equilibrio, el presente trabajo también puede ser visto como una contribución a esta línea de investigación empírica.

##### 4.1. Formulación original.

Comenzamos introduciendo el modelo original Mankiw-Romer-Weil con ley de crecimiento de la población exponencial y el análisis de las principales propiedades dinámicas del modelo (ver Mankiw, Romer, y Weil (1992) por una descripción más detallada del modelo.)

Se considera una economía cerrada, con un único sector productivo, que utiliza el capital físico ( $K(t)$ ), la fuerza de trabajo ( $L(t)$ ) y capital humano ( $H(t)$ , entendido como capacidades, competencias y habilidades de los trabajadores individuales) como factores de producción ( $Y(t)$ ). La economía está dotada de una tecnología definida por una función de producción de Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala:

$$Y(t) = K^\alpha(t)H^\beta(t)L^{1-\alpha-\beta}(t), \alpha, \beta, \alpha + \beta \in (0, 1)$$

---

<sup>6</sup> En la literatura sobre el tema se refieren a la  $\beta$ -convergencia, definida como el tiempo que demora una economía en alcanzar el equilibrio.

El cambio en el stock de capital físico  $K$  es igual a la inversión bruta  $I_k = s_k Y(t)$  menos la depreciación del capital  $\delta K$ :

$$\dot{K} = s_k Y(t) - \delta K(t) \quad (1)$$

El cambio en el stock de capital humano  $H$  es igual a la inversión bruta  $I_h = s_h Y(t)$  menos la depreciación del capital  $\delta H$ :

$$\dot{H} = s_h Y(t) - \delta H(t) \quad (2)$$

El modelo asume que la población crece a una tasa constante  $n > 0$ :

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) &= nL(t) \\ L(0) &> 0 \end{aligned} \quad (3)$$

En términos per cápita la función de producción se puede expresar como:

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{K^\alpha(t)H^\beta(t)L^{1-\alpha-\beta}(t)}{L(t)} = \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^\alpha \left(\frac{H(t)}{L(t)}\right)^\beta = y(t) \quad (4)$$

Si definimos a  $K/L = k$  como el capital físico por trabajador y a  $H/L = h$  como el capital humano por trabajador. El producto per cápita es:

$$y(t) = k^\alpha(t)h^\beta(t) \quad (5)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\dot{k} = \frac{d\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)}{dt} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - kn \quad (6)$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{L} \frac{1}{(K/L)} - \frac{kn}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - n \quad (7)$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{s_k Y(t) - \delta K(t)}{K(t)} - n = \frac{s_k k^\alpha(t)h^\beta(t)L(t)}{K(t)} - \delta - n \quad (8)$$

se tiene que, la tasa de crecimiento del capital físico por trabajador es:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{s_k k^\alpha(t)h^\beta(t)}{(K(t)/L(t))} - \delta - n \quad (9)$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{s_k k^\alpha(t)h^\beta(t)}{k(t)} - (\delta + n) \quad (10)$$

Así, la acumulación de capital físico por trabajador está dada por:

$$\dot{k} = s_k k^\alpha(t)h^\beta(t) - (\delta + n)k(t) \quad (11)$$

Por un razonamiento similar, se llega a la ecuación que describe la acumulación de capital humano per cápita:

$$\dot{h} = s_h k^\alpha(t)h^\beta(t) - (\delta + n)h(t) \quad (12)$$

A continuación, el sistema dinámico de dimensión dos:



$$\begin{aligned} \dot{k} &= s_k k^\alpha(t) h^\beta(t) - (\delta + n) k(t) \\ \dot{h} &= s_h k^\alpha(t) h^\beta(t) - (\delta + n) h(t) \end{aligned} \quad (13)$$

describe la dinámica del modelo.

El equilibrio no trivial es el punto  $(k^*, h^*)$  tal que:

$$\begin{cases} k^* = \left[ \frac{s_k^{1-\beta} s_h^\beta}{\delta+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ h^* = \left[ \frac{s_h^{1-\alpha} s_k^\alpha}{\delta+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \end{cases} \quad (14)$$

y el producto de equilibrio es:

$$y^* = (k^*)^\alpha (h^*)^\beta = \left[ \frac{s_k}{\delta+n} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left[ \frac{s_h}{\delta+n} \right]^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \quad (15)$$

Luego, los valores de equilibrio de largo plazo del capital (físico y humano) y el producto, dependen positivamente de las tasas de ahorro  $(s_k, s_h)$  y del grado de eficiencia de escala de los factores reproducibles  $(\alpha, \beta)$  y negativamente de la tasa de depreciación  $(\delta)$  y del crecimiento de la población  $(n)$ .

Con el fin de analizar la estabilidad del estado estacionario se considera la aproximación lineal de la función  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$G(k, h) = (s_k k^\alpha h^\beta - (\delta + n)k, s_h k^\alpha h^\beta - (\delta + n)h)$$

Que brinda la aproximación de primer orden del modelo como:

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = G(k, h)$$

La dinámica de la transición al equilibrio  $(k^*, h^*)$  puede ser cuantificada a través de la linealización del sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = G(k^*, h^*) + J_G \begin{pmatrix} k - k^* \\ h - h^* \end{pmatrix} = J_G \begin{pmatrix} k - k^* \\ h - h^* \end{pmatrix}$$

donde  $J_G$  es la matriz jacobiana de  $G$  evaluada en el equilibrio.

$$J_G = \begin{pmatrix} s_k \alpha \frac{(\delta+n)}{s_k} - (\delta+n) & \frac{s_k}{s_h} \beta (\delta+n) \\ \frac{s_h}{s_k} \alpha (\delta+n) & s_h \beta \frac{(\delta+n)}{s_h} - (\delta+n) \end{pmatrix}$$

$$J_G = \begin{pmatrix} (\delta+n)(\alpha-1) & \frac{s_k}{s_h} \beta (\delta+n) \\ \frac{s_h}{s_k} \alpha (\delta+n) & (\delta+n)(\beta-1) \end{pmatrix} !$$

El polinomio característico de la matriz jacobiana es:

$$P(X) = (\delta+n)^2(1-\alpha-\beta) - (\alpha+\beta-2)(\delta+n)X + X^2$$

que presenta dos autovalores negativos:  $\lambda_1 = (\delta+n)(\alpha+\beta-1)$  y  $\lambda_2 = -(\delta+n)$ . Esto implica que el equilibrio es un atractor global.

*Observación 1.* La velocidad de convergencia está determinada por el menor de los autovalores en valor absoluto, esto es, por  $\lambda_1 = (\delta + n)(\alpha + \beta - 1)$ . Una de las características del modelo es que la velocidad de convergencia es menor que en el modelo de Solow<sup>7</sup>. Esto implica que el modelo de Mankiw-Romer-Weil ajusta mejor a los datos empíricos que el modelo de Solow (ver Barro y Sala-i Martin (2003), cap. 1).

Un enfoque alternativo para analizar las propiedades dinámicas del modelo (presentadas en el trabajo seminal Mankiw, Romer, y Weil (1992)) es introducir una aproximación loglineal del sistema 13:

$$\begin{cases} \dot{\bar{k}} = (\delta + n) [(\alpha - 1)(\bar{k} - \bar{k}^*) + \beta(\bar{h} - \bar{h}^*)] \\ \dot{\bar{h}} = (\delta + n) [\alpha(\bar{k} - \bar{k}^*) + (\beta - 1)(\bar{h} - \bar{h}^*)] \end{cases} \quad (16)$$

y sustituir en  $\frac{d(\log(y))}{dt} = \dot{y} = \alpha\dot{\bar{k}} + \beta\dot{\bar{h}}$

$$\dot{\bar{y}} = (\delta + n)(\alpha + \beta - 1) [\bar{y} - \bar{y}^*] = \lambda_1 [\bar{y} - \bar{y}^*]$$

Notar que en este caso la velocidad de convergencia puede ser interpretada como la velocidad a la que una economía se acerca al equilibrio en el instante  $t$ . Resolviendo esta ecuación diferencial, el producto se puede escribir como:

$$\bar{y}(t) = \bar{y}(0)e^{\lambda_1 t} + (1 - e^{\lambda_1 t})\bar{y}^*$$

y reemplazando  $\bar{y}$  por su valor de equilibrio,  $\bar{y}^* = \alpha\bar{k}^* + \beta\bar{h}^*$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \log(y(t)) - \log(y(0)) = \\ & -(1 - e^{\lambda_1 t})\log(y(0)) + (1 - e^{\lambda_1 t}) \left[ \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \log\left(\frac{s_k}{\delta + n}\right) + \frac{\beta}{1 - \alpha - \beta} \log\left(\frac{s_h}{\delta + n}\right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Esta ecuación se utiliza para estimar el modelo en los estudios empíricos de crecimiento. En particular, para contrastar lo que en la literatura sobre el crecimiento se conoce como *hipótesis de convergencia*, es decir, si existe una relación negativa entre la distancia al equilibrio y la velocidad de convergencia.

#### 4.2. Extensión del modelo en tiempo continuo.

En el modelo anterior, se sustituye la ley de crecimiento de la población  $L'(t) = nL(t)$  por una ley  $L'(t) = p(t)L(t)$  que coherentemente con lo descrito anteriormente a partir del trabajo de Maynard [1974], verifica las siguientes propiedades:

1. Población creciente y acotada.

$$L(0) = L_0 > 0, \dot{L}(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = L_\infty.$$

2. La tasa de crecimiento de la población es decreciente y tiende a 0.

3. Si  $p(t) = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$  se cumple:  $p(t) < 0, \forall t \geq 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 0$

Ejemplos de algunas leyes de población que verifican estas propiedades se muestran en la siguiente tabla.

<sup>7</sup> La velocidad de convergencia que predice el modelo de Solow es:  $(\delta + n)(\alpha - 1)$ .

**Tabla 1. Ejemplos de leyes de población en tiempo continuo.**

Ley de Población		$L(t)$	$p(t)$
Logística	$\dot{L} = aL - bL^2$ $L(0) = L_0 > 0$	$\frac{aL_0e^{at}}{a+bL_0(e^{at}-1)}$	$\frac{a(a-bL_0)}{a-bL_0(e^{at}-1)}$
Verhulst [1838]	$\dot{L} = rL(1 - \frac{L}{L_\infty})$ $L(0) = L_0 > 0$	$\frac{L_0L_\infty e^{rt}}{L_0e^{rt} + L_\infty - L_0}$	$\frac{r(L_\infty - L_0)}{e^{rt} + L_\infty - L_0}$
Von Bertalanffy [1938]	$\dot{L} = r(L_\infty - L)$ $L(0) = L_0 > 0$	$\frac{e^{rt}L_\infty + L_0 - L_\infty}{ert}$	$\frac{r(L_\infty - L_0)}{L_0 - L_\infty + L_\infty e^{rt}}$

Fuente: Elaboración propia a partir de las referencias.

Después de sustituir la ley exponencial por la ecuación  $\dot{L}(t) = p(t)L(t)$  y repitiendo los pasos de la subsección anterior, el sistema dinámico que describe el modelo modificado puede ser representado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de orden 3:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= s_k k^\alpha(t) h^\beta(t) - (\delta + p(L(t))) k(t) \\ \dot{h} &= s_h k^\alpha(t) h^\beta(t) - (\delta + p(L(t))) h(t) \\ \dot{L}(t) &= L(t)p(L(t)) \end{aligned} \quad (18)$$

#### 4.2.1. Equilibrio y estabilidad: análisis cualitativo.

##### El estado estacionario

En esta sección investigamos el comportamiento dinámico de la solución del modelo  $(k(t), h(t), L(t))$ .

**Lema 1.** Si se excluye la solución trivial que se obtiene de considerar  $k = 0$ ,  $h = 0$  y  $L = 0$ , se tiene que el modelo admite un único equilibrio positivo  $(k^*, h^*, L^*)$  que verifica:

$$\begin{cases} k^* = \left[ \frac{s_k^{1-\beta} s_h^\beta}{\delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ h^* = \left[ \frac{s_h^{1-\alpha} s_k^\alpha}{\delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ L^* = L_\infty \end{cases} \quad (19)$$

*Demostración.* La demostración es inmediata resolviendo el sistema (18) y buscando una solución constante.

*Observación 2.* Los valores de  $k^*$ ,  $h^*$  y  $y^*$  coinciden con los valores del modelo original de Mankiw-Romer-Weil cuando  $n = 0$ . Esto implica que los valores de equilibrio del modelo modificado son mayores que los del modelo original, (es decir, si  $n = 0$ ; ver las ecuaciones (14) y (15)) y los parámetros de la ley población no entran en los determinantes de  $k^*$ ,  $h^*$  y  $y^*$ . Los valores en el estado estacionario del capital físico y capital humano dependen sólo de los parámetros de tecnología  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  y de las tasas de ahorro exógenas,  $s_k$  y  $s_h$ . Ésta es una diferencia importante con respecto al modelo original, donde un aumento en la tasa intrínseca de crecimiento de la población conduce a los leves bajas de estas variables en el largo plazo. Además, ya que en el modelo, el tamaño de la población es limitada por la capacidad de carga  $L^* = L_\infty$ , se tiene que los valores agregados del capital físico y humano en el largo plazo son finitos e iguales a  $K^* = L^*k^*$  and  $H^* = L^*h^*$  respectivamente (a diferencia del modelo original de Mankiw-Romer-Weil donde tienden a infinito).

**Proposición 1.** *El punto de equilibrio  $(k^*, h^*, L^*)$  es un atractor global.*

*Demostración.* A partir del sistema (18):

$$\begin{aligned} \dot{k} &= s_k k^\alpha(t) h^\beta(t) - (\delta + p(L(t))) k(t) \\ \dot{h} &= s_h k^\alpha(t) h^\beta(t) - (\delta + p(L(t))) h(t) \\ \dot{L}(t) &= L(t)p(L(t)) \end{aligned} \quad (20)$$

Para analizar la estabilidad de la solución de estado estacionario, consideremos la aproximación lineal de la función  $M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$M(k, h, L) = (s_k k^\alpha h^\beta - (\delta + p(L))k, s_h k^\alpha h^\beta - (\delta + p(L))h, Lp(L))$$

en las proximidades del punto de equilibrio  $(k^*, h^*, L^*)$ . La matriz Jacobiana de la aproximación lineal viene dada por:

$$J_M = \begin{pmatrix} \delta(\alpha - 1) & \frac{s_k}{s_h} \beta \delta & k^* p'(L_\infty) \\ \frac{s_h}{s_k} \alpha \delta & \delta(\beta - 1) & h^* p'(L_\infty) \\ 0 & 0 & L_\infty p'(L_\infty) \end{pmatrix}$$

Y el polinomio característico de la matriz viene dado por:

$$R(X) = (L_\infty p'(L_\infty) - X) ((\delta(\alpha - 1) - X)(\delta(\beta - 1) - X) - \alpha\beta\delta^2) \quad (21)$$

El polinomio presenta tres autovalores negativos:  $\lambda_1 = \delta(\alpha + \beta - 1) < 0$ ,  $\lambda_2 = -\delta < 0$  y  $\lambda_3 = L_\infty p'(L_\infty) < 0$  y esto implica que el equilibrio es un atractor global.

#### 4.2.2. Transición dinámica y velocidad de convergencia.

El modelo de Mankiw-Romer-Weil es una buena aproximación del mundo real, que demostró ser más robusto empíricamente, ajustar mejor a los datos empíricos, que el modelo de Solow. Sin embargo, la realidad económica que describe es incompleta. En el modelo modificado la dinámica es más rica.

La dinámica de la transición en las proximidades del equilibrio de largo plazo  $(k^*, h^*, L^*)$  puede ser cuantificado mediante la linealización del sistema (18):

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{h} \\ \dot{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(\alpha - 1) & \frac{s_k}{s_h} \beta \delta & k^* p'(L_\infty) \\ \frac{s_h}{s_k} \alpha \delta & \delta(\beta - 1) & h^* p'(L_\infty) \\ 0 & 0 & L_\infty p'(L_\infty) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k - k^* \\ h - h^* \\ L - L_\infty \end{pmatrix}$$

Sabemos que la matriz que representa este sistema lineal tiene tres autovalores negativos:  $\lambda_1 = \delta(\alpha + \beta - 1) < 0$ ,  $\lambda_2 = -\delta < 0$  y  $\lambda_3 = L_\infty p'(L_\infty) < 0$ .

En esta sección se proporciona una evaluación cuantitativa de la velocidad de convergencia de la dinámica de transición. La velocidad depende de los parámetros de la tecnología, las tasa de ahorro y los parámetros de la población y se pueden calcular a partir de la matriz  $J_M(k^*, h^*, L_\infty)$ . Los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son análogos a los coeficientes de convergencia del modelo original cuando la tasa de crecimiento de la población es nula. El autovalor  $\lambda_3 = L_\infty p'(L_\infty)$  corresponde a la velocidad de convergencia de la población a la capacidad de carga del entorno  $L_\infty$ . Cada valor propio corresponde a una fuente de convergencia y cada ruta de transición estable a la constante estado del sistema toma la forma:

$$\begin{cases} k(t) = k^* + C_1 v_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 v_{21} e^{\lambda_2 t} + C_3 v_{31} e^{L_\infty p'(L_\infty) t} \\ h(t) = h^* + C_1 v_{12} e^{\lambda_1 t} + C_2 v_{22} e^{\lambda_2 t} + C_3 v_{32} e^{L_\infty p'(L_\infty) t} \\ L(t) = L_\infty + (L_0 - L_\infty) e^{L_\infty p'(L_\infty) t} \end{cases} \quad (22)$$

Donde  $C_1, C_2, C_3, v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{12}, v_{22}$  y  $v_{32}$  depende de las condiciones iniciales y de los coeficientes de  $J_M(k^*, h^*, L_\infty)$ . Entonces la velocidad de convergencia de capital físico y humano depende de los autovalores  $\lambda_1 = \delta(\alpha + \beta - 1)$  y  $L_\infty p'(L_\infty)$ . Tenga en cuenta que, al ser la ley de población dada exógenamente, la velocidad de convergencia de la población solamente depende de  $L_\infty p'(L_\infty)$ . De hecho, la transición depende del menor autovalor en valor absoluto. Si  $|L_\infty p'(L_\infty)| > |\lambda_1|$ , se tiene que la velocidad de convergencia de  $L_t$  es mayor que la de  $k(t)$  y  $h(t)$  y si  $|L_\infty p'(L_\infty)| < |\lambda_1|$  entonces todas las variables convergen a la velocidad  $L_\infty p'(L_\infty)$ .

*Observación 3.* Independientemente de si la velocidad de convergencia es  $\lambda_1$  (solo depende del grado de eficiencia de los factores reproducibles de escala y de la tasa de depreciación) o  $\lambda_3$  (que solo depende de la ley de población), en ambos casos es menor que en el modelo original. Recordemos que en el modelo original la velocidad de convergencia es:  $(\delta + n)(\alpha + \beta - 1) = \lambda MRW$ .

Un enfoque alternativo para analizar las propiedades dinámicas del modelo (como se presenta en el documento Mankiw, Romer, y Weil (1992)), en particular, para deducir la velocidad de convergencia en este nuevo marco, es introducir la aproximación log-lineal del sistema (16):

$$\begin{cases} \dot{\bar{k}} = (\alpha - 1)\delta(\bar{k} - \bar{k}^*) + \beta\delta(\bar{h} - \bar{h}^*) - p'(L_\infty)L_\infty(\bar{L} - \bar{L}^*) \\ \dot{\bar{h}} = \alpha\delta(\bar{k} - \bar{k}^*) + (\beta - 1)\delta(\bar{h} - \bar{h}^*) - p'(L_\infty)L_\infty(\bar{L} - \bar{L}^*) \\ \dot{\bar{L}} = p'(L_\infty)L_\infty(\bar{L} - \bar{L}^*) \end{cases} \quad (23)$$

y sustituir en

$$\begin{aligned} \frac{d(\log(y))}{dt} = \dot{\bar{y}} &= \alpha\dot{\bar{k}} + \beta\dot{\bar{h}} \\ \dot{\bar{y}} &= \delta(\alpha + \beta - 1)(\bar{y} - \bar{y}^*) - (\alpha + \beta)p'(L_\infty)L_\infty(\bar{L} - \bar{L}^*) \end{aligned} \quad (24)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial (se requiere especificar una ley de población), se obtiene la ecuación a utilizar para estimar empíricamente la tasa de convergencia en este nuevo marco.

### 4.3. Extensión del modelo en tiempo discreto.

En esta sección presentamos una extensión del modelo en tiempo discreto, donde únicamente modificamos la ley de población por una que verifica las propiedades antes mencionadas.

Sin perder la simplicidad, suponemos que la ley de población puede ser representada por una ecuación en diferencias autónoma, donde  $L_t$  es la solución del problema de valor inicial representado por:

$$L_{t+1} = P(L_t) \quad (25)$$

$$L_0 > 0$$

Suponemos además que la función  $P(\cdot)$  verifica las siguientes propiedades:

1.  $P(L) \geq L > 0, \forall L \leq L_\infty$ .

Esto implica que la tasa de crecimiento de la población es no negativa:  $n(L_t) =$

- $\frac{L_{t+1}-L_t}{L_t} = \frac{P(L_t)}{L_t} - 1 \geq 0$ .<sup>9</sup>
2.  $\frac{P(L_t)}{L_t} \geq \frac{P(L_{t+1})}{L_{t+1}}$   
 Esto es, la *población crece a tasa decreciente*:  $n(L_t) \geq n(L_{t+1}) \geq 0$ .<sup>10</sup>
3.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(L_t)}{L_t} - 1 = 0$   
 La *tasa de crecimiento de la población tiende a ser nula* cuando el tiempo tiende a infinito.
4. Existe  $L_\infty$  tal que  $L_t \leq L_\infty$  para todo  $t$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} L_t = L_\infty$   
 Esto es, la *población está acotada y converge a  $L_\infty$* .

<sup>9</sup>Notar que, si  $P' \geq 0$  está propiedad se cumple.

<sup>10</sup>Notar que esta condición es equivalente a que  $P'(L) \leq \frac{P(L)}{L}, \forall L$ .

**Tabla 2. Ejemplos de leyes de población en tiempo discreto.**

Ley de Población	$P(L_t)$	$L_\infty$	$P'(L_\infty)$
Beverton (1957)	$\frac{aL_t}{1 + bL_t}$	$\frac{a-1}{b}$	$\frac{1}{a}$
Ricker (1954)	$aL_t e^{-bL_t}$	$\frac{\log(a)}{b}$	$1 - \log(a)$
Hassell (1975)	$\frac{aL_t}{(1+bL_t)^c}$	$\frac{a^{\frac{1}{c}}-1}{b}$	$1 - c\left(\frac{a^{\frac{1}{c}}-1}{a^{\frac{1}{c}}}\right)$
Verhulst (1838)	$L_t e^{r(1-\frac{L_t}{K})}$	$K$	$1 - r$

Fuente: Elaboración propia a partir de las referencias.

Algunos ejemplos bien conocidos de leyes de población que verifican estas propiedades, para un rango en el valor de los parámetros (ver Brauer y Castillo-Chavez (2001)), se describen en la tabla 2:

Ahora en tiempo discreto el producto agregado de la economía viene dado por:

$$Y_t = K_t^\alpha H_t^\beta L_t^{1-\alpha-\beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \in (0, 1)$$

El cambio en el stock de capital físico es igual a la inversión bruta  $Ik_t = s_k Y_t$  menos la depreciación del capital  $\delta K_t$ :

$$K_{t+1} - K_t = s_k Y_t - \delta K_t \quad (26)$$

El cambio en el stock de capital humano es igual a la inversión bruta  $Ih_t = s_h Y_t$  menos la depreciación del capital  $\delta H_t$ :

$$H_{t+1} - H_t = s_h Y_t - \delta H_t \quad (27)$$

La función de producción en términos per cápita se puede expresar como:

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^\alpha H_t^\beta L_t^{1-\alpha-\beta}}{L_t} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^\alpha \left(\frac{H_t}{L_t}\right)^\beta = y_t \quad (28)$$

Si definimos a  $K/L = k$  y a  $H/L = h$  como el capital físico y el capital humano por trabajador respectivamente. El producto por trabajador es:

$$y_t = k_t^\alpha h_t^\beta \quad (29)$$

Notar que:

$$\frac{K_{t+1} - K_t}{L_t} = s_k \frac{K_t^\alpha}{L_t^\alpha} \frac{H_t^\beta}{L_t^\beta} \frac{L_t^{1-\alpha-\beta}}{L_t^{1-\alpha-\beta}} - \delta \frac{K_t}{L_t} \quad (30)$$

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} \frac{L_{t+1}}{L_t} - \frac{K_t}{L_t} = s_k k_t^\alpha h_t^\beta - \delta k_t \quad (31)$$

$$k_{t+1}(P(L_t)/L_t) - k_t = s_k k_t^\alpha h_t^\beta - \delta k_t \quad (32)$$

La ecuación de movimiento para el modelo que describe cómo el capital físico por trabajador varía con el tiempo es:

$$k_{t+1} = \frac{s_k k_t^\alpha h_t^\beta + (1 - \delta)k_t}{P(L_t)/L_t} \quad (33)$$

Por un razonamiento similar, llegamos a la ecuación de movimiento para el modelo que describe cómo el capital humano por trabajador varía con el tiempo:

$$h_{t+1} = \frac{s_h k_t^\alpha h_t^\beta + (1 - \delta)h_t}{P(L_t)/L_t} \quad (34)$$

Y el sistema dinámico que describe el modelo modificado en tiempo discreto puede ser representado por el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias de orden 3:

$$\begin{cases} k_{t+1} = \frac{s_k k_t^\alpha h_t^\beta + (1-\delta)k_t}{P(L_t)/L_t} \\ h_{t+1} = \frac{s_h k_t^\alpha h_t^\beta + (1-\delta)h_t}{P(L_t)/L_t} \\ L_{t+1} = P(L_t) \end{cases} \quad (35)$$

#### 4.3.1. Equilibrio y estabilidad: análisis cualitativo.

##### El estado estacionario

En esta sección investigamos el comportamiento dinámico de la solución del modelo  $(k, h, L_t)$ .

**Lema 2.** Si se excluye la solución trivial que se obtiene de considerar  $k = 0$ ,  $h = 0$  y  $L = 0$ , se tiene que el modelo presenta un único equilibrio positivo  $(k^*, h^*, L^*)$  que verifica:

$$\begin{cases} k^* = \left[ \frac{s_k^{1-\beta} s_h^\beta}{\delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ h^* = \left[ \frac{s_h^{1-\alpha} s_k^\alpha}{\delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ L^* = L_\infty \end{cases} \quad (36)$$

*Demostración.* La demostración es inmediata resolviendo el sistema (35) y buscando una solución constante.

*Observación 4.* Los valores de  $k^*$ ,  $h^*$  y  $y^*$  coinciden con los del modelo original de Mankiw-Romer-Weil cuando  $n = 0$  y son mayores cuando  $n$  es positiva. Además, los parámetros de la ley de población no forman parte de los determinantes de  $k^*$ ,  $h^*$  y  $y^*$ . Los valores del estado estacionario

del capital físico y el capital humano dependen solo de los parámetros de la tecnología  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  y de las tasas de ahorro exógenas  $s_k$  y  $s_h$ . Esta es una diferencia importante con el modelo original, donde un aumento en la tasa intrínseca de crecimiento de la población conduce a niveles menores de estas variables en el largo plazo. Además, dado que, en el modelo modificado, el tamaño de la población está limitado por la capacidad de carga  $L^* = L_\infty$ , las cantidades agregadas de capital físico y humano en el largo plazo son finitas y equivalentes a  $K^* = L^*k^*$  y  $H^* = L^*h^*$  respectivamente (mientras que en el modelo original de Mankiw-Romer-Weil eran infinitas).

**Proposición 2.** *El punto de equilibrio  $(k^*, h^*, L^*)$  es un atractor global.*

*Demostración.* Para analizar la estabilidad de la solución del estado estacionario, consideremos la aproximación lineal de la función  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$T(k, h, L) = \left( \frac{s_k k^\alpha h^\beta + (1 - \delta)k}{P(L)/L}, \frac{s_h k^\alpha h^\beta + (1 - \delta)h}{P(L)/L}, P(L) \right)$$

en las proximidades del punto de equilibrio  $(k^*, h^*, L^*)$ . La matriz jacobiana de la aproximación lineal está dada por:

$$J_T = \begin{pmatrix} \delta(\alpha - 1) + 1 & \frac{\beta s_k \delta}{s_h} & k^* \left( \frac{1 - P'(L_\infty)}{L_\infty} \right) \\ \frac{\alpha s_h \delta}{s_k} & \delta(\beta - 1) + 1 & h^* \left( \frac{1 - P'(L_\infty)}{L_\infty} \right) \\ 0 & 0 & P'(L_\infty) \end{pmatrix}$$

Y el polinomio característico de esta matriz está dado por:

$$R(X) = (P'(L_\infty) - X) [(\delta(\alpha - 1) + 1 - X)(\delta(\beta - 1) + 1 - X) - \alpha\beta\delta^2] \quad (37)$$

$$R(X) = (P'(L_\infty) - X) [(1 - \delta)(\delta(\alpha + \beta) + 1 - \delta) - (\delta(\alpha + \beta - 2) + 2)X + X^2] \quad (38)$$

Este polinomio presenta tres autovalores positivos reales y menores que la unidad:  $\lambda_1 = \delta(\alpha + \beta - 1) + 1 < 1$ ,  $\lambda_2 = 1 - \delta < 1$  y  $\lambda_3 = P'(L_\infty) < 1$ . Esto implica que el estado estacionario es un atractor global.

#### 4.3.2. Transición dinámica y velocidad de convergencia.

El modelo de Mankiw-Romer-Weil es una buena aproximación a los datos reales, empíricamente ha demostrado ser más robusto, más adecuado a los datos empíricos, que el modelo de Solow, pero describe mejor la realidad económica si incorpora una dinámica de la población más realista. El modelo modificado, ahora en tiempo discreto, tiene una dinámica más rica, tiene un crecimiento positivo en los niveles de equilibrio del capital físico y humano.

En esta sección proporcionamos una evaluación cuantitativa de la velocidad de convergencia de la dinámica de transición. La velocidad depende de los parámetros de la tecnología y de las tasas de ahorro y se puede calcular a partir de la matriz  $J_T(k^*, h^*, L_\infty)$ . La dinámica de transición en torno al estado estacionario  $(k^*, h^*, L_\infty)$  se puede cuantificar mediante la linealización del sistema (35):

$$\begin{pmatrix} k_{t+1} \\ h_{t+1} \\ L_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^* \\ h^* \\ L_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta(\alpha - 1) + 1 & \frac{\beta s_k \delta}{s_h} & k^* \left( \frac{1 - P'(L_\infty)}{L_\infty} \right) \\ \frac{\alpha s_h \delta}{s_k} & \delta(\beta - 1) + 1 & h^* \left( \frac{1 - P'(L_\infty)}{L_\infty} \right) \\ 0 & 0 & P'(L_\infty) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k - k^* \\ h - h^* \\ L - L_\infty \end{pmatrix}$$



Donde los tres autovalores de la matriz  $J_T(k^*, h^*, L_\infty)$  son reales, positivos y dados por:  $\lambda_1 = \delta(\alpha + \beta - 1) + 1 < 1$ ,  $\lambda_2 = 1 - \delta < 1$  y  $\lambda_3 = P'(L_\infty) < 1$ .

Los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  coinciden con los hallados en el modelo estándar cuando la tasa de crecimiento de la población es nula. El autovalor  $\lambda_3 = P'(L_\infty)$  corresponde a la velocidad de convergencia de la población a la capacidad de carga  $L_\infty$ . Cada valor propio corresponde a una fuente de convergencia y cada camino de transición estable a la constante estado del sistema toma la forma:

$$\begin{cases} k_t = k^* + C_1 v_{11} \lambda_1^t + C_2 v_{21} \lambda_2^t + C_3 v_{31} (P'(L_\infty))^t \\ h(t) = h^* + C_1 v_{12} \lambda_1^t + C_2 v_{22} \lambda_2^t + C_3 v_{32} (P'(L_\infty))^t \\ L(t) = L_\infty + (L_0 - L_\infty) (P'(L_\infty))^t \end{cases} \quad (39)$$

donde  $C_1, C_2, C_3, v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{12}, v_{22}$  y  $v_{32}$  depende de las condiciones iniciales ( $k_0, h_0$  y  $L_0$ ) y de los elementos de la matriz  $J_T(k^*, h^*, L_\infty)$ . Entonces la velocidad de la convergencia del capital físico y humano depende de los valores propios  $\lambda_1 = \delta(\alpha + \beta - 1) + 1$  y  $P'(L_\infty)$ . Tener en cuenta que, al ser la población exógena, la velocidad de convergencia de la población solo depende de  $P'(L_\infty)$ . De hecho, la transición depende del autovalor con mayor valor absoluto. Si  $|P'(L_\infty)| < |\lambda_1|$ , entonces el velocidad de convergencia de  $L_t$  es más rápida que la de  $k_t$  y  $h_t$ . En ese caso la velocidad de convergencia viene dada por  $\lambda_1$ . Si  $|P'(L_\infty)| > |\lambda_1|$  entonces todas las variables convergen a la velocidad  $P'(L_\infty)$ .

*Observación 5.* Independientemente de si la velocidad de convergencia es  $\lambda_1$  (solo depende del grado de eficiencia de los factores reproducibles de escala ( $\alpha$  y  $\beta$ ) y de la tasa de depreciación  $\delta$ ) o  $\lambda_3$  (que solo depende de los parámetros de la ley de población), en ambos casos es menor que en el modelo original.

*Observación 6.* Ya sea que la velocidad de convergencia sea  $\lambda_1$  o  $\lambda_3$ , ésta dependerá de los parámetros de la tecnología o de los parámetros de la ley de población, pero no de ambos.

#### 4.4. Comparando resultados.

En la teoría del crecimiento económico se suele suponer que el crecimiento de la población sigue una ley exponencial. Esto, claramente no es realista porque implica que la población tiende a infinito cuando el tiempo tiende a infinito. En este estudio una versión mejorada del modelo de crecimiento Mankiw-Romer-Weil (en tiempo continuo y en tiempo discreto) se desarrolla mediante la introducción de una ley general de población.

El modelo se presenta como un sistema dinámico de dimensión tres, que es compatible con un equilibrio único distinto del trivial, que es, como en el modelo original, de un atractor global. En los valores de equilibrio del modelo modificado, tanto en su versión continua como discreta, el producto, el capital físico y el capital humano per cápita dependerán del grado de eficiencia de escala de los factores reproducibles ( $\alpha, \beta$ ), de la tasa de depreciación ( $\delta$ ) y de las tasas de ahorro ( $s_k, s_h$ ), pero no dependen de los parámetros de la población. Además, sus valores son mayores que lo del modelo original, sea cual sea la tasa constante  $n > 0$  de crecimiento de la población y coinciden solamente si la tasa de crecimiento es nula.

En el equilibrio del modelo clásico de Mankiw-Romer-Weil, el capital físico y humano agregados tienden a infinito de forma poco realista cuando  $t$  tiende a infinito, porque la población crece hasta el infinito. Esta situación se mejora en el modelo modificado, tanto en su versión continua como en la discreta, donde los valores agregados de equilibrio del capital físico y humano tienden a valores finitos  $K^* = L_\infty k^*$  y  $H^* = L_\infty h^*$ .

El documento muestra que el modelo tiene una velocidad finita de convergencia, que sólo depende de los parámetros de la tecnología y de la tasa de depreciación o de la ley de la población, pero no de ambos. Y, en cualquier caso, es menor que en el modelo original.

Finalmente, el comportamiento dinámico en ambas formulaciones es cualitativamente similar. Este hecho puede parecer obvio, sin embargo, no se podía prever con absoluta certeza sin realizar el análisis ya que no hay, desde el punto de vista matemático un resultado que permita afirmarlo.

## 5. Conclusiones.

En nuestro trabajo nos enfocamos en las implicaciones que tiene sobre los modelos de crecimiento la forma de modelizar el tiempo. En particular mostramos como en el modelo de Mankiw, Romer y Weil, el comportamiento dinámico es similar en ambas formulaciones. Al mismo tiempo este análisis se hizo incorporando una ley general de población más ajustada a los hechos estilizados y, por lo tanto, mejoramos el modelo original. El modelo se presenta como un sistema dinámico de dimensión tres, compatible con un equilibrio único distinto del trivial que es un atractor global. En los valores de equilibrio, el capital físico y el capital humano per cápita dependerán del grado de eficiencia de escala de los factores reproducibles  $(\alpha, \beta)$ , de la tasa de depreciación  $(\delta)$  y de las tasas de ahorro  $(s_k, s_h)$ , pero no dependen de los parámetros de la población. Y sus valores son mayores que los del modelo original, sea cual sea la tasa constante  $n > 0$  de crecimiento de la población y coinciden (con los del modelo original) únicamente si la tasa de crecimiento es nula. A diferencia de la formulación original, los valores agregados de equilibrio del capital físico y humano tienden a valores finitos  $K^* = L_\infty k^*$  y  $H^* = L_\infty h^*$ . Respecto a la velocidad de convergencia, depende de los parámetros de la tecnología y de la tasa de depreciación o de la ley de la población, pero no de ambos. Y, en cualquier caso, es menor que en el modelo original.

Teniendo en cuenta que el modelo de Solow es un caso particular ( $\beta = 0$ ) del modelo de Mankiw, Romer y Weil, nuestro análisis engloba todos los trabajos encontrados en la literatura, que reformulan estos modelos incorporando leyes de población particulares. Incluyendo a las formulaciones originales si se supone una tasa nula de crecimiento de la población.

Teniendo en cuenta que al introducir de una ley alternativa de crecimiento de la población encontramos cambios en la velocidad de convergencia al equilibrio, nuestro análisis puede ser visto como una contribución a la línea de investigación empírica. Una futura investigación es el estudio empírico bajo una especificación que sigue el modelo modificado, siguiendo la que se deduce de la ecuación (24).

Otra posible investigación a futuro es la reformulación del modelo endogenizando el crecimiento de la población, donde la tasa de fecundidad, la capacidad de carga o ambas, no sean exógenas y dependan de algunas de las variables del modelo.

Finalmente sería relevante actualizar el trabajo de Sordi (1996) y realizar una revisión exhaustiva sobre las incorporaciones más recientes de la teoría del caos a la economía. Determinar si se limitaron a incluir la ecuación logística o existieron otras aportaciones. Vinculado a lo anterior sería interesante estudiar una reformulación del modelo de Mankiw, Romer y Weil que incorpore el efecto polución, siguiendo los pasos de Day.

## Agradecimientos

Nuestra investigación fue apoyada por CSIC-UDELAR (Proyecto “Grupo de investigación en Dinámica Económica”, ID 881928, y Programa de Iniciación a la Investigación -2017- proyecto “Crecimiento económico y dinámica de la población: teoría y análisis empírico”, ID 406). Una versión preliminar de este trabajo apareció como Working paper en los preprints de SSRN.

## Referencias

- Accinelli, E., & Brida, J. (2007a). The Ramsey model with logistic population growth. *Economics Bulletin*, 3, 1-8.
- Accinelli, E., & Brida, J.G. (2007b). The dynamics of the Ramsey economic growth model with the Von Bertalanffy population growth law. *Applied Mathematical Sciences*, 1(1-4), 109-118.
- Acemoglu, D., Johnson, S., & Robinson, J. A. (2012). The colonial origins of comparative development: An empirical investigation: Reply. *The American Economic Review*, 102(6), 3077-3110.
- Arrow, K., Bolin, B., Costanza, R., Dasgupta, P., Folke, C., Holling, C. S., Jansson, B.-O., et al. (1995). Economic growth, carrying capacity, and the environment. *Ecological Economics*, 15(2), 91-95.
- Barnett, W.A., Serletis, A., & Serletis, D. (2015). Nonlinear and complex dynamics in economics. *Macroeconomic Dynamics*, 19(8), 1749-1779.
- Barro, R.J., & Sala-i Martin, X. (2003). *Economic Growth, 2nd edition*. Boston: MIT press.
- Bay, N. (2013). On the attraction of positive equilibrium point in Solow economic discrete model with Richards population growth. *Journal of Applied Mathematics & Bioinformatics*, 2(3), 177-192.
- Bernanke, B.S., & Gurkaynak, R.S. (2001). Is growth exogenous? Taking Mankiw, Romer, and Weil seriously. *NBER macroeconomics annual*, 16, 11-57.
- Beverton, R. (1957). On the dynamics of exploited fish populations. *UK Ministry of Agriculture and Fisheries Investigations (Ser 2)*, 19.
- Bosi, S., & Ragot, L. (2012). Time representation in economics. *Theoretical Economics Letters*, 2(01), 10-15.
- Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2001). *Mathematical models in population biology and epidemiology*, vol. 40. New York: Springer.
- Brianzoni, S., Mammana, C., & Michetti, E. (2007). Complex dynamics in the neoclassical growth model with differential savings and non-constant labor force growth. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 11(3), 3-3.
- Brianzoni, S., Mammana, C., & Michetti, E. (2012). Variable elasticity of substitution in a discrete time Solow-Swan growth model with differential saving. *Chaos, Solitons & Fractals*, 45(1), 98-108.

- Brida, J.G. (2008). Población y crecimiento económico. Una versión mejorada del modelo de Solow. *El Trimestre Económico*, 75(SPECI), 5-22.
- Brida, J.G., Cayssials, G., & Pereyra, J.S. (2014). The Ramsey model in discrete time and decreasing population growth rate. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 22, 97-115.
- Brida, J.G., & Maldonado, E.L. (2010). Closed form solutions to a generalization of the Solow growth model. *Applied Mathematical Sciences*, 1, 1991-2000.
- Brida, J.G., & Pereyra, J.S. (2008). The Solow model in discrete time and decreasing population growth rate. *Economics Bulletin*, 41(3), 1-14.
- Cai, D. (2012). An economic growth model with endogenous carrying capacity and demographic transition. *Mathematical and Computer Modelling*, 55(3), 432-441.
- Cass, D. (1965). Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. *The Review of Economic Studies*, 32(3), 233-240.
- Cohen, J.E. (1995a). *How many people can the earth support?* WW Norton & Company.
- Cohen, J.E. (1995b). Population growth and earth's human carrying capacity. *Science*, 269(5222), 341-346.
- Daily, G.C., & Ehrlich, P.R. (1992). Population, sustainability, and Earth's carrying capacity. *BioScience*, 42(10), 761-771.
- Day, R.H. (1982). Irregular growth cycles. *The American Economic Review*, 72(3), 406-414.
- De la Fuente, A. (1997). The empirics of growth and convergence: a selective review. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21(1), 23-73.
- DESA, U. (2015). *World population prospects: The 2015 revision, key findings and advance tables*. Working paper ESA/P/WP. 227, United Nations Department of Economic and Social Affairs, Population Division., New York.
- Ding, S., & Knight, J. (2009). Can the augmented Solow model explain China remarkable economic growth? A cross-country panel data analysis. *Journal of Comparative Economics*, 37(3), 432-452.
- Durlauf, S.N., & Aghion, P. (2005). *Handbook of Economic Growth*. Amsterdam: Elsevier.
- Federici, D., & Gandolfo, G. (2014). Chaos in economics. *Journal of Economics and Development Studies*, 2(1), 51-79.
- Ferrara, M., & Guerrini, L. (2009). The Ramsey model with logistic population growth and Benthamite felicity function revisited. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 8, 41-50.
- Gandolfo, G. (1997). *Economic Dynamics: study edition*. Springer Science & Business Media.
- Giannitsarou, C., & Anagnostopoulos, A. (2005). Modeling Time and Macroeconomic Dynamics. In *Money Macro and Finance (MMF) Research Group Conference 2005*, no. 60.

- Gómez, M.A. (2014). Discrete Versus Continuous Time in an Endogenous Growth Model with Durable Consumption. *Mathematical Economics Letters*, 2(3-4), 67-75.
- González, J.I., & Pecha, A. (1995). La dinámica en economía. Los enfoques de Hicks y Samuelson. *Cuadernos de Economía*, 14(23), 92-116.
- Guerrini, L. (2006). The Solow-Swan model with a bounded population growth rate. *Journal of Mathematical Economics*, 42(1), 14-21.
- Guerrini, L. (2010a). A closed-form solution to the Ramsey model with logistic population growth. *Economic Modelling*, 27(5), 1178-1182.
- Guerrini, L. (2010b). A Closed-Form Solution to the Ramsey Model with the Von Bertalanffy Population Law. *Applied Mathematical Sciences*, 4(65), 3239-3244.
- Guerrini, L. (2010c). The dynamic of the AK Ramsey growth model with quadratic utility and logistic population change. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 62(2), 221-225.
- Guerrini, L. (2010d). Logistic population change and the Mankiw-Romer-Weil model. *APPS. Applied Sciences*, 12, 96-101.
- Guerrini, L. (2010e). Transitional dynamics in the Ramsey model with AK technology and logistic population change. *Economics Letters*, 109(1), 17-19.
- Gundlach, E. (2005). Solow vs. Solow: Notes on identification and interpretation in the empirics of growth and development. *Review of World Economics*, 141(3), 541-556.
- Gushing, J., & Henson, S.M. (2001). Global Dynamics of Some Periodically Forced, Monotone Difference Equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, 7(6), 859-872.
- Hassell, M. (1975). Density-dependence in single-species populations. *The Journal of animal ecology*, pp. 283-295.
- Jones, C. (2002). *Introduction to Economic Growth*. New York: WW Norton.
- Koopmans, T.C. (1963). On the concept of optimal economic growth. *Discussion paper, Cowles Foundation for Research in Economics*, Yale University.
- Li, T.Y., & Yorke, J.A. (1975). *Il American Math. Monthly*, 82, 985-992.
- Licandro, O., & Puch, L.A. (2006). Is discrete time a good representation of continuous time? *Working paper ECO No. 2006/28*, European University Institute, San Domenico di Fiesole, Italy.
- Lomelí, H., & Rumbos, B. (2003). *Métodos Dinámicos en Economía: Otra búsqueda del tiempo perdido*. México: Thomson Editorial.
- Lotka, A.J. (1934). *Theorie analytique des associations biologiques*. Discussion paper.
- Lucas, Jr.R.E. (1988). On the mechanics of economic development. *Journal of monetary economics*, 22(1), 3-42.

- Mankiw, N.G., Romer, D., & Weil, D.N. (1992). A contribution to the empirics of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 407-437.
- May, R.M., et al. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560), 459-467.
- Maynard, S.J. (1974). *Models in ecology*. Cambridge: Cambridge UP.
- McQuinn, K., & Whelan, K. (2007). Conditional convergence and the dynamics of the capital-output ratio. *Journal of Economic Growth*, 12(2), 159-184.
- Medio, A. et al. (2011). *Simple and Complex Dynamics: A Hidden Parameter*. Discussion paper, Mimeo, University of Nice.
- Ordorica-Mellado, M. (2009). En la búsqueda del estado estacionario de la población del planeta. *Papeles de población*, 15(61), 39-51.
- Pielou, E.C., et al. (1969). *An introduction to mathematical ecology*. New York: Wiley-Interscience.
- Ramsey, F.P. (1928). A mathematical theory of saving. *The Economic Journal*, 38(152), 543-559.
- Ricker, W.E. (1954). Stock and recruitment. *Journal of the Fisheries Board of Canada*, 11(5), 559-623.
- Romer, P.M. (1986). Increasing returns and long-run growth. *Journal of Political Economy*, 94(5), 1002-1037.
- Scarpello, G.M., & Ritelli, D. (2003). The Solow model improved through the logistic manpower growth law. *Annali dell'Universit`a di Ferrara*, 49(1), 73-83.
- Solow, R.M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65-94.
- Solow, R.M. (2001). What have we learned from a decade of empirical research on growth? Applying Growth Theory across Countries. *The World Bank Economic Review*, 15(2), 283-288.
- Sordi, S. (1996). *Chaos in Macrodynamics: an excursion through the Literature*. Citeseer.
- Uzawa, H. (1965). Optimum technical change in an aggregative model of economic growth. *International Economic Review*, 6(1), 18-31.
- Verhulst, P.-F. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. Correspondance Mathematique et Physique Publiee par A. *Quetelet*, 10, 113-121.
- Von Bertalanffy, L. (1938). A quantitative theory of organic growth (inquiries on growth laws II). *Human biology*, 10(2), 181-213.
- Wanxin, W., & Zequn, G. (2013). A Localization of Solow Growth Model with Labor Growth Pattern in China. *Technology and Investment*, 4(1B), 24-26.



## Modelación y co-movimientos de la tasa de cambio colombiana, 2011-2017

MAYA SIERRA, GIULIANA

Departamento de Ingeniería Financiera  
Universidad de Medellín (Colombia)

Correo electrónico: gmayas@ultraserfinco.com

MARÍN RODRÍGUEZ, NINI JOHANA

Departamento de Economía  
Universidad de Medellín (Colombia)

Correo electrónico: njmarin@udem.edu.co

### RESUMEN

La tasa de cambio está influenciada por múltiples factores macroeconómicos nacionales e internacionales, lo que genera altos niveles de incertidumbre. El objetivo de esta investigación es la construcción de modelos ARIMA-GARCH y ARIMAX-GARCH como herramienta para el pronóstico de la tasa de cambio en Colombia a partir de los retornos diarios de los precios de cierre USD/COP y su análisis de correlación dinámica con algunas variables de interés. Los resultados sugieren que la incorporación de variables exógenas significativas dentro de la modelación ARIMAX-GARCH con correlación persistente según el modelo DCC (por sus siglas en inglés Dinamic Conditional Correlation) al par USD/COP genera pronósticos fuera de muestra con mejor desempeño que los modelos univariados ARIMA-GARCH.

**Palabras clave:** variables macroeconómicas, modelos de pronóstico, tasa de cambio, correlación.

**Clasificación JEL:** E6; C51; F31; C30.

**MSC2010:** 91B64; 91B70; 91B84; 91G70; 62H20.

## Modeling and comovements of the Colombian exchange rate, 2011-2017

### ABSTRACT

The exchange rate is influenced by multiple national and international macroeconomic factors, which generates high levels of uncertainty. The objective of this research is the construction of ARIMA-GARCH and ARIMAX-GARCH models as a tool for the forecast of the exchange rate in Colombia from the daily returns of the closing prices USD/COP and its analysis of dynamic correlation with some of the most explicative variables. The results suggest that the incorporation of significant exogenous variables within the ARIMAX-GARCH model with persistent correlation according to the DCC (Dinamic Conditional Correlation) model to the USD/COP pair generates out-of-sample forecasts with better performance than the ARIMA-GARCH univariate models.

**Keywords:** Macroeconomic fundamentals, forecast models, exchange rate, correlation.

**JEL classification:** E6; C51; F31; C30.

**MSC2010:** 91B64; 91B70; 91B84; 91G70; 62H20.





## 1. Introducción

La tasa de cambio en economías con regímenes cambiarios flexibles es más que un término de intercambio de una moneda local frente a otras. Ésta es un indicador que permite evaluar el desempeño de una economía con el resto del mundo, dado que la volatilidad de la misma tiene efectos directos en la economía de un país o región que impacta desde el nivel de flujos de capital, la balanza de cuenta corriente, la inflación y otras variables macroeconómicas que afectan el crecimiento económico. Por esta razón, el entendimiento y pronóstico de esta tasa se ha convertido en foco de interés para académicos, analistas, empresarios de diferentes sectores económicos, inversionistas y gobiernos de los países donde el régimen cambiario tiene algún tipo de flexibilidad. Lo anterior, porque el comportamiento del tipo de cambio va a estar explicado por la configuración de diversas variables macroeconómicas, técnicas, variables macroeconómicas y choques coyunturales en las economías.

La importancia de dichas variables como catalizadores del nivel de tasa de cambio no es estática en el tiempo y esto hace que la esencia del comportamiento de la tasa de cambio en el corto plazo sea un reto para quienes se han preocupado por la generación de modelos eficientes de pronóstico y por la identificación de las variables determinantes de la tasa de cambio en dichas economías, pues para países en los que el régimen cambiario está sujeto a algún tipo de control no tiene sentido hacer ningún tipo de análisis en la medida en que dicha evolución depende de los intereses del gobierno.

Los primeros acercamientos para su pronóstico desde los modelos econométricos se dieron a partir de Meese y Rogoff (1983), quienes demostraron que el modelo de caminata aleatoria es un buen estimador de la tasa de cambio en economías abiertas. En la misma línea Chinn y Meese (1995) compararon los pronósticos por medio de diferentes modelos estructurales como el de Hooper-Morton, entre otros y destacan que se obtienen estadísticamente mejores resultados por medio del modelo de caminata aleatoria para horizontes de corto plazo.

Otros autores (Majhi, Panda, & Sahoo, 2009; Panda & Narasimhan, 2007) han realizado afirmaciones acerca de las limitaciones de los modelos lineales para capturar el impacto de asimetrías en las series y comparando los resultados con los alcanzados por medio de modelos como las redes neuronales. Para el caso colombiano Jalil y Misas (2007) indican que a la luz de las funciones de pérdida asimétricas, los modelos no lineales tienen una mejora considerable en capacidad de pronóstico, con respecto a los modelos lineales. Sin embargo, recientemente Pacelli (2012) demuestra que los modelos autorregresivos en varianza ARCH (Modelos Autorregresivos Condicionales Heteroscedásticos) y GARCH (Modelos Generalizados Autorregresivos Condicionales Heteroscedásticos) tienen un mejor desempeño comparado con los modelos de redes neuronales para analizar la dinámica de la tasa de cambio.

De esta manera, conociendo la relevancia que tiene el comportamiento del tipo de cambio, el objetivo de esta investigación es identificar dentro de la familia de los modelos ARIMA-GARCH cuál es el modelo que mejor se ajusta y pronostica la tasa de cambio diaria en Colombia a partir de la serie de retornos diarios para el precio de cierre del par USD/COP y conocer sus co-movimientos con algunas variables macroeconómicas de interés en el período de tiempo seleccionado. Inicialmente el modelo ARIMA (Modelo Autorregresivo integrado de Medias Móviles) propuesto por Box y Jenkins (1970) busca pronosticar series estocásticas estacionarias. Teniendo presente que la mayoría de series financieras violan este supuesto, tal como lo demostró Fama (1965); es necesario transformar la serie hasta obtener un proceso estacionario. El modelo ARIMA está basado en rezagos de la serie temporal estacionaria que incluye los modelos Autorregresivos (o Modelos AR) junto con los errores al estimar el valor de la variable en los períodos anteriores, es decir, los modelos de medias móviles (o Modelos MA, por sus siglas en inglés *Moving Average*), los cuales son utilizados frecuentemente, dada su eficiente nivel de ajuste ante cambios en la tendencia. Así mismo, teniendo presente que no solo

el componente autorregresivo es el mejor predictor para las variables financieras se explora el modelo ARIMAX (Modelo Autorregresivo integrado de Medias Móviles con variables exógenas), el cual nace a partir la incorporación de variables independientes o exógenas a un modelo ARIMA permitiendo capturar la correlación con el comportamiento de otras variables. Por último con los modelos GARH se modela la estructura temporal de la varianza, el cual hace parte de la familia de modelos ARCH introducida por Engle (1982) y Bollerslev (1986).

Es así como a partir de un análisis de las variables macroeconómicas y otras series financieras que influyen en la formación de la tasa de cambio para el caso colombiano permiten que el modelo pueda captar la influencia de factores externos y generar pronósticos más precisos, tal como proponen otros autores (Stein & Allen, 1997; Abhyankar, Sarno & Valente, 2005; Ehrmann & Fratzscher, 2005; MacDonald & Marsh, 1997; Medeiros & Rossi, 2009; Murcia & Rojas, 2015).

En esta investigación se realizó un análisis de las principales variables que impactan el nivel del tipo de cambio. El análisis arrojó como variables significativas que permiten explicar su comportamiento para el periodo 1 de enero de 2011 al 15 de mayo de 2017: los TES de vencimiento 2024<sup>1</sup>, el índice DXY (por sus siglas en inglés *de U.S. Dollar Index*) y el precio del petróleo de la referencia WTI (por sus siglas en inglés *de West Texas Intermediate*) que influyen en la formación de la tasa de cambio, lo cual se contrastó con el uso del modelo de Correlación Condicional Dinámica, DCC, para observar sus co-movimientos con algunas variables macroeconómicas de interés, tales como el Índice DXY, Índice Colcap, CDS 10 años Colombia, Índice IBR, Tesoros con vencimiento 10 años, índice MXEF, WTI, TES con vencimiento 2024, índice VIX, USD/CLP y USD/MXN y se encontró la relación de dependencia lineal en el tiempo.

El documento está dividido en tres partes. En la primera se destacan los aspectos centrales del papel de la tasa de cambio en economías abiertas con tipo de cambio flexible principalmente el caso colombiano, la importancia de su análisis y las variables que permiten determinar la formación de la tasa de cambio en Colombia. En la segunda sección se realiza una descripción general de los modelos ARIMA, ARIMAX y GARCH. En la tercera se presenta un análisis de los datos y se exponen los resultados obtenidos en la aplicación de los modelos para estimación del USD/COP y el análisis de las Correlaciones Condicionales Dinámicas entre el tipo de cambio y el Índice DXY, Índice Colcap, CDS 10 años Colombia, Índice IBR, Tesoros con vencimiento 10 años, índice MXEF, WTI, TES con vencimiento 2024, índice VIX, USD/CLP y USD/MXN para identificar cómo ha evolucionado en los últimos años la relación de dependencia lineal y, por último, se presentan algunas conclusiones.

## **2. Marco Teórico.**

### **2.1. La importancia de la modelación de la Tasa de Cambio en Colombia.**

El papel del dólar en el mundo no está fundamentado en que es un simple instrumento para transacciones internacionales sino como principal activo de inversión de flujos capital e inversión de las reservas de los Bancos Centrales alrededor del mundo, las cuales son un indicador de solvencia de los países y son un instrumento para intervenir en pro de mantener la estabilidad el mercado cambiario (Tosoni, 2011). Lo anterior, convierte al tipo de cambio frente al dólar en una guía de la realidad económica de los países con tasa de cambio flotantes. Colombia en septiembre de 2000 abandonó el esquema de banda cambiaria, que había operado en el país a partir de septiembre de 1994 (Chavarro, 2008), y a partir de ese momento deja flotar el tipo de cambio, aunque conserva la autonomía para realizar intervenciones puntuales en el

---

<sup>1</sup> Títulos de deuda soberana de Colombia, son la referencia más líquida del mercado de deuda pública. Fueron emitidos por el Ministerio de Hacienda y administrados por el Banco de la República con vencimiento el 24 de julio del 2024.

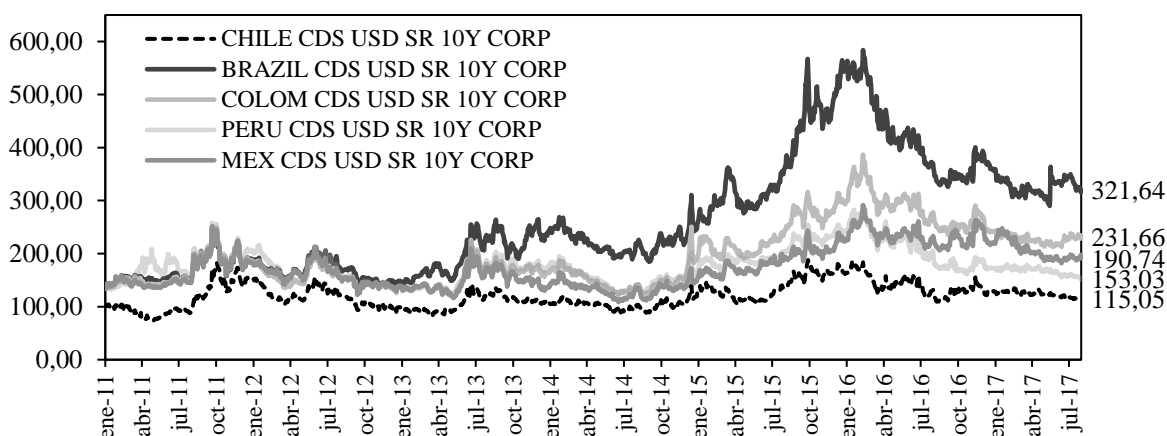
mercado a través de distintos mecanismos como opciones *Put* o *Call* <sup>2</sup> y la intervención discrecional y las subastas directas (Davis, 2017).

En la medida que la economía mundial ha empezado a salir de la desaceleración económica en la cual se había visto sumergida a raíz de la crisis *subprime* de Estados Unidos en 2007, donde los capitales abandonaron en gran proporción la economía estadounidense, por su alto nivel de volatilidad y bajas tasas de interés, se presentó un flujo de capitales de portafolio hacia países emergentes que ofrecían una mejor relación riesgo-retorno. Es así como el movimiento de la liquidez mundial le ha dado un protagonismo mayor a la importancia que tiene el dólar en el contexto global y profundizó su impacto en las economías emergentes donde se suman nuevos factores que generan volatilidad.

Sin embargo, una vez que Estados Unidos comenzó a mostrar signos de recuperación y otras potencias como China y Europa presentaron datos de bajo crecimiento, los mercados emergentes no tienen un escenario más promisorio en este sentido. Es por ello que una de las variables a monitorear es los CDS (por sus siglas en inglés *Credit Default Swap*), que son considerados como un indicador de la prima de riesgo comparados con Estados Unidos. Es así, como se muestra en el Gráfico 1 para los principales países de la región como Chile, Perú, México, Brasil y Colombia un fuerte impacto en términos de percepción de riesgo, cuando las señales de recuperación de Estados Unidos y el resto de economías han sido desiguales, convirtiéndose en catalizador de volatilidad. El comportamiento CDS como fuente de información para el mercado de capitales es analizado por diversos autores, entre ellos Hassan, Kayhan y Bayat (2017) que concluye con que el CDS permite explicar el comportamiento de la tasa de cambio en Turquía y en escenario regional Carr y Wu (2007) analizaron la volatilidad del mercado cambiario por medio de la fuerte correlación con los CDS de México y Brasil.

Sumado a esta recuperación, los movimientos en términos de política monetaria por parte de los Bancos centrales, las tensiones geopolíticas y los cambios de líneas gobierno se han traducido en una revaluación del dólar frente al resto de monedas en el mundo, generando más incertidumbre que incrementan los rápidos movimientos de los flujos de inversión, buscando inversiones seguras (Julio & Yook, 2016).

**Gráfico 1. Comportamiento CDS Chile, Perú, México, Brasil y Colombia 2011- Julio de 2017.**

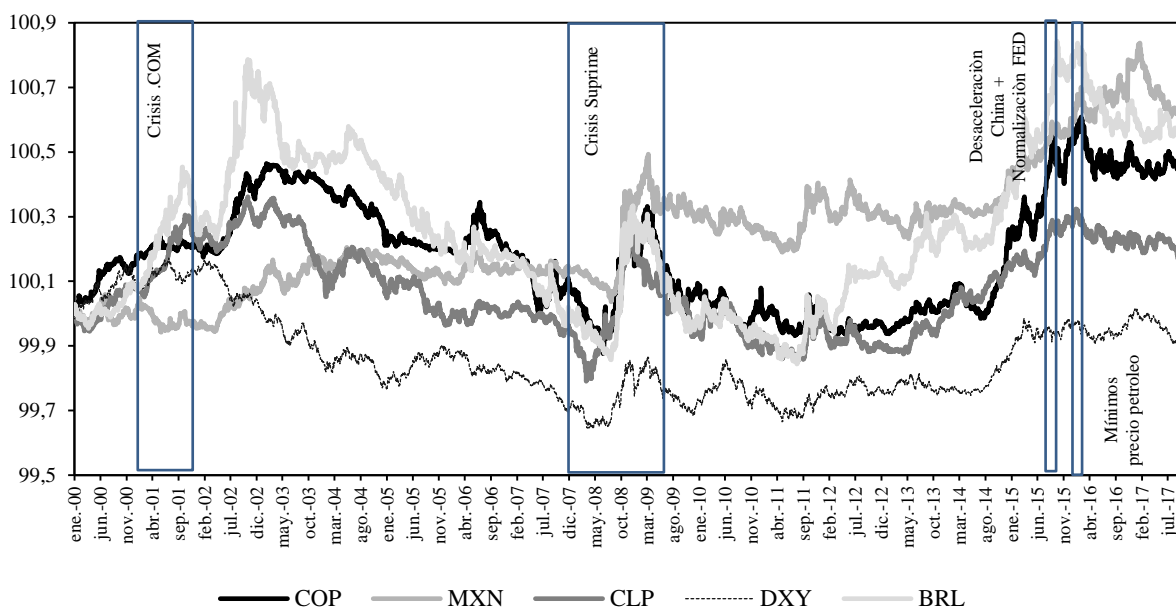


Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

<sup>2</sup> Venta de Opciones *Put* (Venta) y Opciones *Call* (Compra), instrumentos financieros para acumulación o desacumulación de reservas internacionales y para el control de la volatilidad por parte del Banco de la República.

En el Gráfico 2, se observa el comportamiento que han tenido para el periodo 2000-2017 las monedas de las economías más representativas de Latinoamérica como lo son Colombia, Brasil, Perú, Chile, México y el Índice DXY. Donde se evidencia que, en los períodos posteriores a las crisis norteamericanas, la presión sobre el tipo de cambio por la migración de flujos ha generado una depreciación pronunciada de las monedas locales; como se presentó en la crisis del punto *COM* que tuvo lugar entre marzo y noviembre del 2001 y para la recesión del 2007 por la crisis *Subprime*, la cual data de diciembre 2007 hasta junio 2009.

**Gráfico 2. Comportamiento de monedas suramericanas frente al dólar 2000 - junio 2017, serie normalizada.**



Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

En general, las economías se vieron afectadas por la volatilidad en los precios de petróleo, normalización monetaria por parte de la FED (por sus siglas en inglés *Federal Reserve*) y la fase de ralentización de la economía China, que siendo uno de los principales demandantes de materias primas a nivel mundial aporta mayor incertidumbre en los precios de los *commodities* y, por ende, una menor perspectiva de ingresos para las economías emergentes que dependen de ellas, lo que repercute en el valor de sus monedas.

La volatilidad en la tasa de cambio tiene efectos directos en la economía de un país o región, desde el nivel de flujos de capital, la balanza de cuenta corriente, inflación y otras variables macroeconómicas que afectan el crecimiento económico (Cardenas, 1997). Es por esto que se hace necesario un estudio sobre la tasa de cambio, los impactos que pueden tener los diferentes choques externos sobre ésta, y aplicar modelos autorregresivos ARIMA-GARCH y ARIMAX- GARCH, junto con la metodología DCC con el objetivo de explicar su comportamiento en el corto plazo y sus co-movimientos con unas variables macroeconómicas de interés. En la actualidad se encuentra un amplio rango de literatura que se ha preocupado por encontrar la tasa de cambio de equilibrio óptimas para cada una de las economías y a su vez por la generación de modelos que permitan comprender y pronosticar el comportamiento futuro de las mismas.

## 2.2. Variables que influyen en la formación de la tasa de cambio.

En el sentido de que la tasa de cambio tenga algún tipo de movilidad y flexibilidad, se generan interrogantes sobre qué variables pueden llegar a explicar su comportamiento en términos de depreciación o apreciación frente a la moneda foránea de referencia y de dicha selección depende la eficiencia del modelo.

En este sentido, se han identificado algunas variables que a lo largo de la historia influyen en la trayectoria de corto y largo plazo de las tasas de cambio de las economías con regímenes cambiarios de tipo de cambio flexible. El comportamiento del tipo de cambio en Colombia más que una dinámica de oferta y demanda de mercado, se ve influenciada por las variables macroeconómicas locales e internacionales, activos financieros y movimientos de flujos de capitales internacionales, entre otros.

**Tabla 1. Matriz de correlaciones, ventana de tiempo de 1 año corte junio de 2016 a junio de 2017.**

	COP	MXN	CLP	BRL	CDS 10 Años	DXY	COLCAP	MXEF	HEES	Tasa Intervención	IBR	IPC Anual	TES 2024	WTI	BRENT	VIX	Tesoros 10 Años	PIB Trimestral
COP	1	0.50	0.58	0.46	0.58	0.18	-0.32	-0.40	-0.16	-0.01	-0.02	-0.21	-0.46	-0.44	-0.41	0.27	0.10	0.71
MXN	0.498	1	0.37	0.44	0.51	0.17	-0.17	-0.31	0.10	-0.01	-0.01	0.12	-0.41	-0.22	-0.20	0.12	0.29	-1.00
CLP	0.582	0.37	1	0.38	0.33	0.33	-0.20	-0.43	-0.04	-0.11	-0.05	0.32	-0.24	-0.27	-0.23	0.15	0.13	1.00
BRL	0.459	0.44	0.38	1	0.46	0.21	-0.23	-0.28	-0.07	-0.03	0.05	-0.02	-0.26	-0.16	-0.12	0.25	0.27	0.13
CDS 10 Años	0.576	0.51	0.33	0.46	1	0.12	-0.36	-0.37	-0.18	0.03	0.04	-0.60	-0.44	-0.44	-0.41	0.40	0.13	0.89
DXY	0.179	0.17	0.33	0.21	0.12	1	-0.08	-0.11	0.15	-0.05	0.05	-0.36	-0.24	-0.06	-0.04	-0.03	0.45	-0.11
COLCAP	-0.32	-0.17	-0.20	-0.23	-0.36	-0.08	1	0.31	0.16	-0.06	0.02	0.29	0.15	0.38	0.37	-0.20	0.02	0.54
MXEF	-0.404	-0.31	-0.43	-0.28	-0.37	-0.11	0.31	1	-0.04	0.05	0.07	0.58	0.16	0.16	0.16	-0.20	-0.03	-0.91
HEES	-0.161	0.10	-0.04	-0.07	-0.18	0.15	0.16	-0.04	1	-0.08	-0.02	0.02	0.04	0.27	0.27	-0.40	0.24	0.30
Tasa Intervención	-0.006	-0.01	-0.11	-0.03	0.03	-0.05	-0.06	0.05	-0.08	1	-0.01	-0.10	-0.09	-0.08	-0.06	0.00	-0.01	-0.91
IBR	-0.016	-0.01	-0.05	0.05	0.04	0.05	0.02	0.07	-0.02	-0.01	1	-0.33	-0.06	0.00	0.05	0.00	0.10	-0.99
IPC Anual	-0.206	0.12	0.32	-0.02	-0.60	-0.36	0.29	0.58	0.02	-0.10	-0.33	1	0.16	-0.14	-0.04	-0.50	-0.34	-0.55
TES 2024	-0.461	-0.41	-0.24	-0.26	-0.44	-0.24	0.15	0.16	0.04	-0.09	-0.06	0.16	1	0.18	0.11	-0.19	-0.35	-0.88
WTI	-0.44	-0.22	-0.27	-0.16	-0.44	-0.06	0.38	0.16	0.27	-0.08	0.00	-0.14	0.18	1	0.96	-0.18	0.06	-0.36
BRENT	-0.411	-0.20	-0.23	-0.12	-0.41	-0.04	0.37	0.16	0.27	-0.06	0.05	-0.04	0.11	0.96	1	-0.16	0.13	-0.19
VIX	0.272	0.12	0.15	0.25	0.40	-0.03	-0.20	-0.20	-0.40	0.00	0.00	-0.50	-0.19	-0.18	-0.16	1	-0.05	0.81
TESOROS 10 Años	0.101	0.29	0.13	0.27	0.13	0.45	0.02	-0.03	0.24	-0.01	0.10	-0.34	-0.35	0.06	0.13	-0.05	1	0.09
PIB Trimestral	0.708	-1.00	1.00	0.13	0.89	-0.11	0.54	-0.91	0.30	-0.91	-0.99	-0.55	-0.88	-0.36	-0.19	0.81	0.09	1

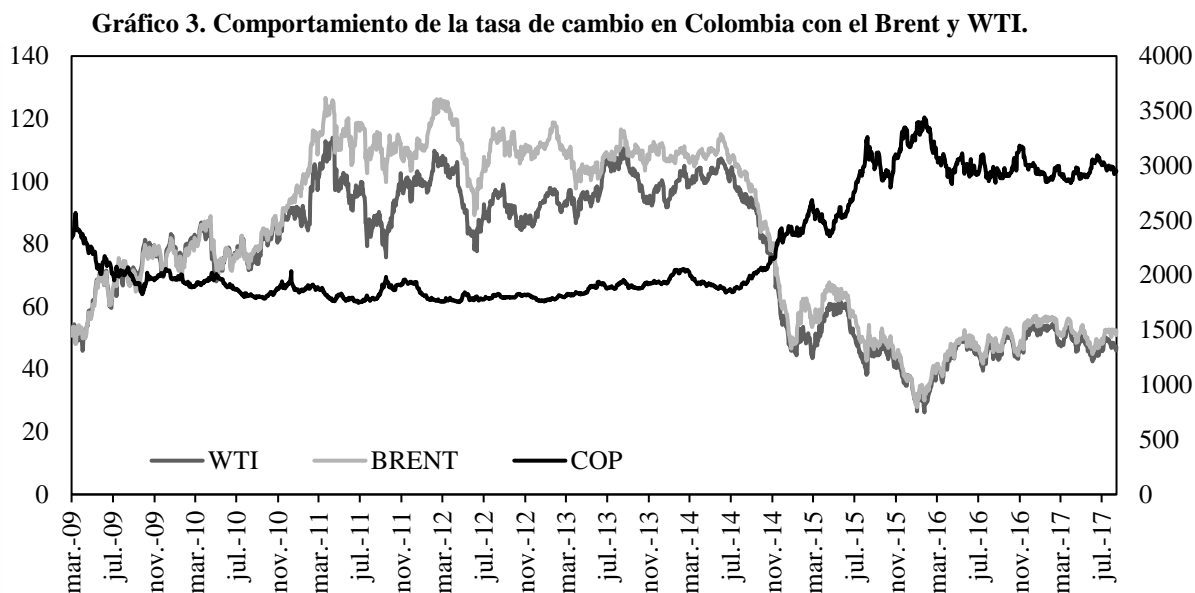
Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

En esta investigación se realizó un análisis de las principales variables que influyen en la determinación de la tasa de cambio colombiana, tales como los flujos de capitales, la política monetaria internacional y local, el rebalanceo de índices bursátiles donde Colombia tenga alguna participación, las variables macroeconómicas como crecimiento, balanza comercial, IPC (Índice de Precios al Consumo), tasa de interés y variables cualitativas como cambios de gobierno, reuniones de bancos centrales, acuerdos de OPEP (Organización de Países Exportadores de Petróleo) y movimientos en las calificaciones de deuda soberana. En el Anexo 1 se presenta el resumen de las diferentes variables.

En la Tabla 1 se realizó una validación de algunas correlaciones promedio para el último año. En ésta se evidencian niveles fuertes de correlación en algunas variables. Sin embargo, la prima de riesgo país desde el CDS a 10 años, el índice DXY y las principales divisas de la región como el real y el peso mexicano, se destacan como las variables con mayor índice de correlación con el comportamiento de la tasa de cambio en Colombia.

Adicionalmente, en las correlaciones analizadas en la Tabla 1, se evidencia una correlación negativa fuerte del USD/COP frente al Índice de la Bolsa de Valores de Colombia (Colcap), el cual agrupa el comportamiento de los principales 20 emisores locales, entre los que

se encuentran Bancolombia S.A., ISA S.A. Ecopetrol S.A., Grupo Sura S.A. Grupos Argos S.A. Grupo Aval S.A., entre otros. Estos emisores tienen presencia internacional y son vulnerables al contexto global, debido a que son objetivo de inversionistas extranjeros e índices bursátiles. Así, un escenario positivo en el mercado accionario anticipa flujos de dólares para la compra de activos locales, por lo cual dicha correlación es negativa.



Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

A su vez, en el Gráfico 1 se observa la correlación entre los precios de cierre del USD/COP versus el petróleo posterior la apertura económica en Colombia, donde es notable la importancia del crudo para el país dada la indexación de los ingresos por la actividad petrolera, en especial la referencia Brent<sup>3</sup>, la cual es la base de negociación del agente más importante en Colombia (Ecopetrol S.A) y el precio del WTI que es la principal referencia en el mundo. Se puede apreciar que el precio del crudo tiene una correlación inversa con la tasa de cambio y la respuesta de ésta ante movimientos del crudo ha sido rápida, con una magnitud más pronunciada.

Desde el análisis realizado se permite concluir que las variables pueden tener una importancia dinámica en el tiempo y algunos autores (Rime, Sarno, & Sojli, 2010) han llegado a la conclusión de que las variables macroeconómicas no son un buen estimador de la tasa de cambio pero, por lo contrario, sí es la tasa de cambio un estimador eficiente de las variables macroeconómicas. Esta condición le da sentido a la aplicación del modelo DCC para validar la correlación de las variables en el tiempo.

### 2.3. Algunos métodos de modelación y pronóstico.

La teoría de los regímenes cambiarios y su comportamiento ha sido objeto de estudio (como lo compilan Marsh y Sarno, 2012) en el *Handbook of Exchange Rates* y se ha visto el continuo surgimiento de diversas metodologías para tratar de pronosticar el comportamiento de éste. De esta manera, el análisis fundamental y los modelos monetarios en diferentes modalidades, no

<sup>3</sup> Brent *crude* o London Brent, su nombre se origina en la investigación petrolífera a la región del Mar del Norte de UK por Exxon Mobil y Royal Dutch Shell en el campo Shell UK Exploration con referencia al Ganso Brent, adicionalmente es acrónimo de importantes Abogados de la industria petrolera Broom, Rannoch, Etive, Ness and Tarbert. Brent contiene 0,37% de azufre por lo cual se categoriza como dulce (One Financial Markets & CB Financial Services Ltd, 2012).

han logrado explicar satisfactoriamente el comportamiento volátil del tipo de cambio en el corto plazo, debido a que para esta temporalidad se encuentra determinado por fuerzas de oferta y demanda, que se ven influenciadas por múltiples factores. Por su parte, el comportamiento a medio y largo plazo, en contraste, sí permite la aplicación de modelos monetarios donde se puede analizar mediante el estudio de las variables macroeconómicas como la oferta monetaria, el PIB (Producto Interno Bruto), las tasas de interés, inflación, cuenta corriente, déficit fiscal, expectativas de los agentes en términos de liquidez, entre otras (Ordoñez, 2016).

Los modelos monetarios buscan determinar el tipo de cambio nominal y real en el largo plazo, tal como el modelo de paridad de poder adquisitivo (PPP por sus siglas en inglés *purchasing power parity*), desde Cassel (1922) donde a partir de los agregados monetarios se determina el valor relativo de la paridad frente a otras monedas. Por su parte, el modelo de Samuelson (1965) expone que los diferenciales de tasas de interés entre países van a predecir las variaciones del tipo de cambio y, por lo tanto, no seguirán un camino aleatorio. En la misma línea, autores como Meese y Rogoff (1983) y Taylor (2009) concluyen que a partir de los modelos estructurales se obtienen pronósticos de largo plazo mejores que los de caminata aleatoria. Sin embargo, para algunos horizontes de tiempo reconocen que el modelo de caminata aleatoria tiene un mejor desempeño considerando la media de los errores. En el mercado bursátil el modelo de caminata aleatoria ha sido abanderado por el autor Malkiel (2015), como un modelo que permite aprovechar las oportunidades del mercado.

La teoría PPP ha sido caso de estudio para diferentes autores tras la conferencia de Bretton Woods que dio lugar a la libre convertibilidad de unas monedas por otras. Por ejemplo para el análisis internacional diferentes autores (Frenkel & Mussa, 1985; Zalduendo, 2006; Kim, Kim & Oh, 2009; MacDonald & Marsh, 1997) analizaron el diferencial de tasas de interés reales teniendo en cuenta las variables macroeconómicas. Por su parte, Stein y Allen (1997) consideraron el diferencial de tasas nominales de interés para el corto y el largo plazo y Edwards y Savastano (1999) realizaron una compilación bibliográfica de los estudios más representativos en términos de estudio de los determinantes de la tasa de cambio de equilibrio en el largo plazo.

Autores como Echavarría, Misas y López (2007) apuestan por la modelación de la tasa de equilibrio desde el modelo estructural de corrección de errores SVEC (por su sigla en inglés *Structural Vector Error Correction Model*). El modelo SVEC es, en esencia, un modelo VAR estructural (vector autorregresivo) que considera la cointegración entre las variables que lo conforman. En este análisis encontraron una relación de cointegración entre la tasa real de cambio y sus variables macroeconómicas: los activos externos netos, los términos de intercambio y la apertura comercial. Adicionalmente Echavarría, Vásquez y Villamizar (2005) realizaron una clasificación de los modelos para tasa de cambio de equilibrio donde los principales autores fueron MacDonald y Marsh (1997).

Para el caso colombiano, Murcia y Rojas (2015) utilizan en sus modelos la variable *Order Flows* para explicar el comportamiento del peso colombiano en el corto plazo, y la construyen como la diferencia entre los sumatorios del valor de órdenes de compra (cotizaciones del *bid*) y las órdenes de venta (cotizaciones del *ask*) en cada intervalo de tiempo. En su artículo concluyen que los determinantes responderían principalmente a efectos de microestructura de mercado, solo para el corto plazo, dado que en trayectorias mayores obedecen a variables macroeconómicas. Otros autores se han preocupado por generar modelos partir de la microestructura de mercado y modelos tradicionales bajo fundamentales macroeconómicos; entre los más relevantes se encuentran Evans (2010) y Engel y West (2005), pero se puede concluir que los autores no hallan una conexión persistente de las variables macroeconómicas con la tasa de cambio. Adicionalmente, uno de los hallazgos más importantes para la modelación de la tasa de cambio a nivel internacional fue concluido por Engel y West (2005), quienes después de hacer un análisis compilatorio de los modelos de tipo de cambio como el

modelo simple de mercados eficientes de Samuelson (1965), entre otros, concluyen que la tasa de cambio se ajusta a una caminata aleatoria.

Quizás uno de los principales problemas de los modelos multivariados para series financieras consiste en que los activos financieros cambian rápidamente de fuentes de volatilidad, es decir, la correlación entre los activos cambia en el tiempo. Por esta razón, algunos autores (Reboredo, 2012; Wu, Chung, & Chang, 2012) se han preocupado por este efecto de correlación dinámica y han realizado estudios a partir de los modelos DCC. Es así como Reboredo (2012) demuestra que la importancia de los precios del petróleo con los movimientos de la tasa de cambio para el periodo de análisis (2000-2010) es débil; sin embargo después de la crisis se evidencia una mayor relación, que se magnifica dependiendo del tipo de economía, es decir, si es importadora o exportadora del crudo. Otros autores como Wu et al., (2012) evalúan también los co-movimientos de los rendimientos del precio del crudo con el dólar y concluyen que los modelos DCC que parten de los modelos GARCH presentan mejores desempeños que los modelos con CCC (Correlación Condicional Constante).

Por su parte, desde la introducción de los modelos autorregresivos ARIMA por Box y Jenkins (1970), que a pesar de ser univariados resultan convenientes para la realización de pronósticos de series de tiempo, en especial para el tipo de cambio por tratarse de modelos lineales paramétricos, tal y como lo demuestran varios autores (Lothian & Taylor, 1996; Babu & Reddy, 2015; Anggraeni, Vinarti y Kurniawati, 2015; Peter & Silvia, 2012, entre otros).

Los modelos ARIMA son comúnmente utilizados como *benchmark* para evaluar otros métodos de pronósticos como las redes neuronales. Kamruzzaman y Sarker (2003) comparan los modelos ARIMA con los modelos ANN (por sus siglas en inglés *Artificial Neural Network*) dada su calidad de ajuste al dólar australiano frente a varias monedas y se concluye un mejor desempeño por parte de los modelos multivariados ANNs. En la misma línea de estudio dentro de los modelos ANNs, autores como Fahimifard, Homayounifar, Sabouhi y Moghaddamnia (2009), Gioqinang y Hu (1998) en sus artículos para el pronóstico de las paridades Iran Rial/Euro e Iran Rial/Dólar y Libra/Dólar, respectivamente resaltan que en periodos cortos los pronósticos bajos ANNs presentan mejor ajuste. De igual forma, Velásquez y González (2006) en su artículo los residuales obtenidos del modelo ANNs son menores en magnitud con relación a un modelo lineal que utiliza los mismos regresores para el índice del tipo de cambio colombiano.

De la mano de los modelos autorregresivos de medias móviles y como respuesta a las debilidades que generan los supuestos de los modelos ARIMA al suponer una varianza homecedastica, la familia de modelos ARCH ocupa también un lugar muy importante para el pronóstico de series de tiempo financieras en su segundo momento (varianza) y es un complemento a la aplicación de los modelos ARIMA para la modelación del primer momento (media). Para el caso colombiano, Uribe, Jiménez y Fernández (2015), utilizan los modelos ARCH con cambios de régimen (SWARCH), encontrando que en Colombia el tipo de cambio responde más a los flujos internaciones de capital que a las intervenciones en política monetaria, constituyéndose así la caminata aleatoria como el mejor estimador. Otros autores como Ordoñez (2016), realizaron la modelación de la volatilidad por medio de modelos ARIMA con la asociación de choques aleatorios y modelo de la volatilidad por medio de los modelos GARCH con el objetivo de capturar la heterocedasticidad de la serie de tiempo.

La tendencia de los agentes del mercado para la predicción de activos financieros ha dejado de ser tan estructural para pasar a técnicas mucho más eficientes para la toma de decisiones y en las que muchos estudios comparativos han demostrado el resultado de aplicar metodologías como el análisis técnico para la predicción. Lo que tiene buenos resultados generalmente para los portafolios de inversión, buscando patrones de comportamiento predecibles en las series de precios y de volúmenes de negociación. La referenciación de estudios en materia de análisis técnico y redes neuronales es amplia y autores como González



(2003), Parisi, Parisi y Cañas (2002), Fernández, González y Sosvilla (2000) y Fernández-Rodríguez, Sosvilla-Rivero y Andrada-Félix (1999) demuestran que este tipo de metodologías tienen relevancia en el mercado bursátil.

En el próximo apartado se presentarán los modelos autorregresivos ARIMA, ARIMAX, la familia de modelos ARCH y el modelo DCC para posteriormente presentar la aplicación y análisis para el tipo de cambio peso frente al dólar.

### 3. Metodología.

#### 3.1. Modelo Autorregresivo Integrado de Medias Móviles (ARIMA).

El comportamiento de la mayoría de series financieras están explicadas como caminatas aleatorias y en especial al tasa de cambio, como lo demuestran Meese y Rogoff (1983). Para su pronóstico es común aplicar metodologías de modelación de series de tiempo como el modelo “autorregresivo integrado en media móvil” ARIMA, el cual fue introducido por Box y Jenkins (1970). El proceso general parte de dos componentes: el componente AR es la serie rezagada en sí misma, y el componente MA son los rezagos en término de error originados por el carácter estocástico de los modelos ARMA. Es decir, los términos autorregresivos para una variable dependiente son sus valores rezagados que tienen una relación estadísticamente significativa con su valor más reciente y, por su parte los términos de medias móviles son residuos o errores rezagados de las estimaciones realizadas.

Un proceso general ARMA  $(p, q)$  con  $p$  términos autorregresivos y  $q$  términos de promedio móviles:

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (1)$$

Sea  $Y_t$  un proceso estocástico no estacionario pero que al diferenciarlo  $d$  – veces, se transforma en estacionario en media, y se dice que  $Y_t$  sigue un proceso ARIMA  $(p, d, q)$  si la  $d$  – ésima diferencia de  $Y_t$  sigue un proceso estacionario ARMA  $(p, q)$ .

$$\text{Sea } W_t = (1 - L)^d Y_t, \quad (2)$$

Como  $W_t$  es un proceso estacionario en media, se puede modelar bajo la estructura ARMA. Bajo la notación del operador de rezagos:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) W_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) \varepsilon_t, \quad (3)$$

Sustituyendo ecuación (2) en ecuación (3):

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) (1 - L)^d Y_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) \varepsilon_t$$

Se obtiene

$$\phi(L) (1 - L)^d Y_t = \theta_0 + \theta(L) \varepsilon_t, \quad (4)$$

Lo cual corresponde al modelo ARIMA  $(p, d, q)$ , notación algebraica:

$$\Delta y_t = \theta_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (5)$$

donde:

$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$ ; es el operador AR estacionario

$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$  ; es el operador MA invertible.

No existen factores comunes entre  $\phi(L)$  y  $\theta(L)$  y  $\varepsilon_t$  es un proceso de ruido blanco de media cero.

El parámetro  $\theta_0$  juega papeles muy distintos cuando  $d = 0$  y cuando  $d > 0$ . En el caso de tener  $d = 0$ , el proceso original  $Y_t$  es estacionario y  $\theta_0$  está relacionado con la media del proceso original:

$$\theta_0 = \varepsilon\phi(1) = \varepsilon(1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p), \quad (6)$$

Cuando  $d > 0$ ,  $\theta_0$  corresponde al coeficiente  $t^d$  de una tendencia determinística de orden  $d$ .  $\theta_0$  Es llamado deriva y debe ser incluido en el modelo cuando realmente sea necesitado.

### 3.2. Modelo Autorregresivo Integrado de Medias Móviles con Variable Exógena (ARIMAX).

El modelo ARIMAX es una extensión del modelo ARIMA y el desempeño de ambos modelos ha sido caso de estudio por diferentes autores que se han preocupado por comparar ambos modelos (Andrews & Dean, 2013; Pektaş & Kerem Cigizoglu, 2013; Anggraeni et al., 2015). En ocasiones no es suficiente con los términos de AR y MA en un modelo ARIMA para pronosticar la variable, por lo que se hace necesario incorporar al modelo una variable independiente que le permita capturar la influencia de los choques externos a la variable dependiente. Este tipo de modelos han tomado gran relevancia para activos con sensibilidad a choques externos por cambios en las variables macroeconómicas y financieras, con niveles de correlación significativos para el periodo de análisis.

La denotación para un proceso general con términos autorregresivos, nivel de diferencias, términos de promedios móviles y variables explicativas sería:

$$\Delta y_t = \varepsilon_t + \delta + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (7)$$

Existen cuatro supuestos estadísticos que se deben examinar para asegurar que los resultados del modelo ARIMAX sean válidos:

1. Las series de tiempo correspondientes a las variables y deben ser estacionarias, es decir, cuando es estable y tanto la media como la varianza no son constantes en el tiempo.
2. Los residuos no deben poseer un nivel significativo de autocorrelación. En el caso de dependencia lineal de los residuos se debe calibrar el modelo por medio de los procesos AR y/o MA. Se evalúa mediante el *test* de Breush-Godfrey o Durbin-Watson - Q de Ljung-Box.
3. El valor-p de las variables exógenas debe ser significativo para que éstas puedan estar incluidas dentro del modelo, por lo tanto, si el coeficiente es significativo los residuos de la regresión sean ruido blanco.
4. La variable exógena puede mostrar o no una relación significativa con la variable dependiente. Sin embargo, la variable dependiente no debería explicar las variables exógenas. Con el objetivo de verificar el cumplimiento del supuesto se aplicara el *Test* de causalidad de Granger<sup>4</sup> (Chong & Aguilar, 2016); si la variable exógena posee un nivel significativo de causalidad debe ser retirada del modelo para evitar multicolinealidad.

---

<sup>4</sup> Test de causalidad de Granger para identificar causalidad de las variables (Granger, 1986).

### 3.3. Familia de Modelos de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva ARCH.

Las series financieras son modeladas generalmente a partir de los retornos de las mismas, los cuales capturan los movimientos de las variables que son irregulares. Sin embargo, los modelos econométricos realizan fuertes supuestos sobre la volatilidad de las series suponiéndola constante en el tiempo; sin embargo la mayoría de series financieras presentan periodos inusuales de volatilidad (*Clusters*<sup>5</sup>), como lo trata Mandelbrot (1963) tienden a tener exceso de curtosis (leptocurticas), con colas más pesadas que la distribución normal; esta condición invalida el supuesto de homocedasticidad.

Los modelos ARHC fueron introducidos por Engle (1982) con el objetivo de capturar algunos de los hechos estilizados o en otros términos la heterocedasticidad de las variables. El modelo ARCH de orden  $p$ , tiene la siguiente estructura:

$$\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \delta_p \varepsilon_{t-p}^2, \quad (8)$$

donde el Coeficiente  $\delta_0$  tal que  $\delta_0 > 0$  y  $\delta_i$  tal que  $0 \leq \delta_i < 1$ , para  $i = 1, 2, \dots, p$ .

En términos del operador de rezagos el modelo general ARCH se puede expresar como,

$$\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta(L)\varepsilon_t^2, \quad (9)$$

donde  $\delta(L) = \delta_0 + \delta_1(L) + \dots + \delta_p(L)^p$

El modelo ARCH asume que los choques negativos y positivos tienen el mismo efecto sobre la volatilidad, debido a que ella depende del cuadrado de los rezagos de las perturbaciones y genera supuesto de normalidad para garantizar que la varianza sea positiva, por lo cual nacen otros modelos de volatilidad condicional heteroscedástica que explican la dinámica de  $\sigma_t^2$  y cómo evoluciona en el tiempo. Entre ellos se encuentran los modelos GARCH con asimetría, el cual permite una especificación más parsimoniosa para la función de la varianza condicional, eliminando el supuesto de normalidad e incorporando la realidad de la mayoría de series financieras que cumplen con la característica de colas pesadas y *clusters* de volatilidad. El modelo GARCH tiene una estructura más flexible al incorporar rezagos de la varianza condicional. El modelo GARCH ( $s, m$ ) tiene la siguiente estructura algebraica:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= r_t - \mu_t = z_t \sigma_t & (10) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 = \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_s \sigma_{t-s}^2 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2, \end{aligned}$$

donde  $z_t$  es una serie de variables aleatorias i.i.d (independientes e idénticamente distribuidas) con media cero y varianza 1, con  $\alpha_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, m$  y  $\beta_j \geq 0$  para  $j = 1, \dots, s$ , el cumplimiento de estos supuestos garantizan que la varianza sea no negativa.

En términos del operador de rezagos,

$$\beta(L)\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(L)\varepsilon_t^2, \quad (11)$$

donde  $\alpha(L) = \alpha_1(L) + \dots + \alpha_m(L)^m$  y  $\beta(L) = 1 - \beta_1 - \dots - \beta_s(L)^s$

<sup>5</sup> Grandes (pequeños) cambios en la variable retorno tienden a ser seguidos por grandes (pequeños) cambios de cualquier signo.

Otros modelos de la Familia ARCH son por ejemplo EGARCH (GARCH exponencial), APARCH (ARCH con potencia asimétrica), SWGARCH y modelos de umbral TARARCH entre otros. Uribe et al. (2015) y Ordoñez (2016) hicieron uso de los modelos SWARCH y GARCH para modelar al volatilidad de la tasa de cambio en Colombia.

### 3.4. Modelo de correlación dinámica condicional (DCC)

Engle (2002) desarrolló los modelos ARCH e introdujo a su vez el modelo de correlación dinámica condicional, el cual sugiere una medida de correlación dinámica en el tiempo entre una variable endógena y un grupo de variables exógenas. Este tipo de modelos ha sido utilizado en el análisis de cambios de correlación durante periodos de crisis en Europa y Asia por diferentes autores (Syllignakis & Kouretas, 2011; Serwa & Bohl, 2005; Chiang, Jeon, & Li, 2007) que encontraron que en periodos de crisis, dado el aumento de la correlación de los activos del mercado bursátil con las variables macroeconómicas y el nivel de tipo de cambio, generan un efecto de contagio financiero.

El modelo DCC parte de un GARCH multivariado donde los números de parámetros son independientes al número de series utilizadas y por eso también son llamados modelos DCC-GARCH. Sea  $w_t$  un proceso estocástico donde  $M$  es una matriz de correlaciones condicionales y  $D_t$  es una matriz diagonal con la siguiente forma:

$$W_t = D_t M_t D_t. \quad (12)$$

$$D_t = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3,t}^2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

donde  $\sigma_{i,t}^2$  se estima a través de un modelo GARCH multivariado de la siguiente forma:

$$\sigma_{i,t}^2 = \alpha_i + \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_j \epsilon_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^{q_i} \beta_j \sigma_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^{n_i} \gamma_j \epsilon_{i,t-j}^2, \quad (14)$$

Siendo:

$\sigma_{i,t}^2$  Varianza condicional de la serie.

$\alpha_i$  Valor constante de la estimación.

$\beta_j$  Término constante que mide la persistencia de la volatilidad.

$\alpha_j$  Término constante que mide los efectos ARCH.

$\gamma_j$  Término constante que mide la asimetría de la varianza.

Bajo la condición de que  $\alpha_j > 0, \alpha_j + \beta_j < 1$ , una vez obtenido los parámetros  $\alpha_i, \beta_j$  y  $\alpha_j$ , se calculan las correlaciones las correlaciones dinámicas de la siguiente manera:

$$E_{t-1}(\epsilon_t \epsilon_t') = D_t^{-1} W_t D_t^{-1} = M_t, \quad (15)$$

$$\rho_{i,j,t} = \frac{q_{i,j,t}}{\sqrt{q_{i,i,t} q_{j,j,t}}} \quad (16)$$

Luego se obtiene la matriz de correlaciones  $W_t$ :

$$W_t = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2,t} & \rho_{1,3,t} \\ \rho_{2,1,t} & 1 & \rho_{2,3,t} \\ \rho_{3,1,t} & \rho_{3,2,t} & 1 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

## 4. Método de estimación, datos y resultados.

### 4.1. Análisis exploratorio de los datos.

Se propone un análisis de carácter exploratorio en el que se busca determinar el modelo con mejor ajuste de corto plazo para la tasa de cambio en Colombia por medio de los retornos diarios de los precios de cierre USD/COP, dado que estos precios presentan valores de correlación más altos con las variables explicativas. Adicionalmente, se modela la serie de tipo de cambio bajo la misma base de último precio y no sobre un promedio ponderado como lo es la TRM (Tasa Representativa del Mercado<sup>6</sup>) que puede tener un sesgo frente a los hechos de cierre por su metodología de cálculo.

Inicialmente se realizó un análisis de co-movimientos entre los retornos diarios del tipo de cambio y las series Índice DXY, Índice Colcap, CDS 10 años Colombia, Índice IBR, Tesoros con vencimiento 10 años, índice MXEF, WTI, TES con vencimiento 2024, índice VIX, USD/CLP y USD/MXN en el periodo que comprende desde el 3 de enero de 2011 hasta el 15 de mayo de 2017 para un total de 1661 observaciones.

En el modelo ARIMAX-GARCH se utilizó información histórica para las diferentes variables analizadas a partir del DCC. Sin embargo, en la calibración del modelo ARIMAX-GARCH fueron significativas las siguientes variables exógenas para la explicación del USD/COP: los TES vencimiento julio 2024, el Índice DXY y el precio del petróleo por medio de la referencia WTI. Adicionalmente, se realizó la incorporación de una variable *Dummy*<sup>7</sup> (D1) tanto en el Modelo ARIMA como en el Modelo ARIMAX con el objeto de capturar valores atípicos por choques exógenos de gran impacto que no son recurrentes, tales como las reuniones más relevantes OPEC<sup>8</sup> del 24 al 31 de agosto de 2015 y el 8 de diciembre de 2015, pues se considera que estas dos reuniones generaron mucha incertidumbre en el mercado cambiario colombiano, al ser el petróleo la principal exportación colombiana.

Los valores *missing* correspondientes a periodos no operativos en uno u otro mercado debidos a festivos fueron reemplazados por el dato inmediatamente anterior para obtener semanas de cinco días. La elección de los datos se hizo con base en información de mercado y análisis de correlaciones donde se evidencia mayor incidencia de los movimientos de las variables seleccionadas en el nivel la tasa de cambio en Colombia. La fuente de los datos fue la plataforma Bloomberg. Los cálculos de los Modelos ARIMA y ARIMAX se hicieron en el software econométrico R. El Gráfico 4 muestra la evolución de las series en el período seleccionado.

En la estimación de los modelos se validaron todas las variables estudiadas en el Anexo 1 que fueron analizadas bajo el modelo DCC, de las cuales fueron seleccionadas para la modelación las variables con nivel de significancia positiva, descartando las demás variables de los análisis.

La inspección visual de series de originales parece indicar no estacionariedad (ver Gráfico 4) en cada una de las series, lo que es una característica propia de las series financieras.

---

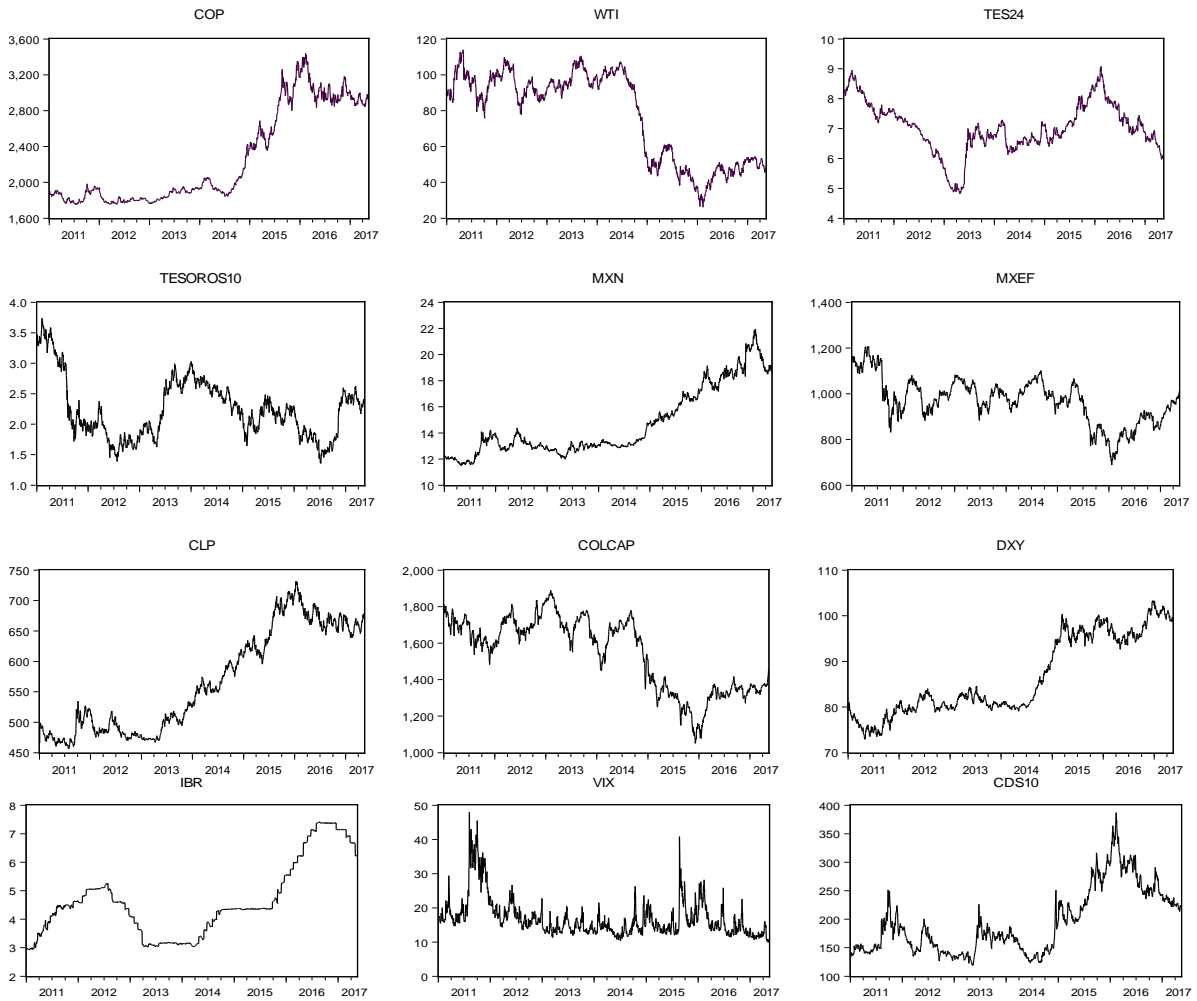
<sup>6</sup> En Colombia la Tasa Representativa del Mercado se conoce como TRM, que corresponde a la cantidad de pesos colombianos por dólar estadounidense y es calculada como el promedio ponderado de las operaciones de compra y venta de moneda legal colombiana contra dólar, realizadas por los Intermediarios del Mercado Cambiario (IMC) en el mercado spot (Banco de la Republica Colombia, 2017).

<sup>7</sup> La variable *Dummy* (D1) es una variable binaria que toma el valor de 1 durante reuniones de la OPEC y 0 en los demás días.

<sup>8</sup> Organización de Países Exportadores de Petróleo, por su denominación en ingles OPEC (Organization of the Petroleum Exporting Countries).

A partir de estas series se calculó el retorno logarítmico, el cual se presenta a continuación en el Gráfico 5.

**Gráfico 4. Evolución de las series diarias, periodo 2011-2017.**

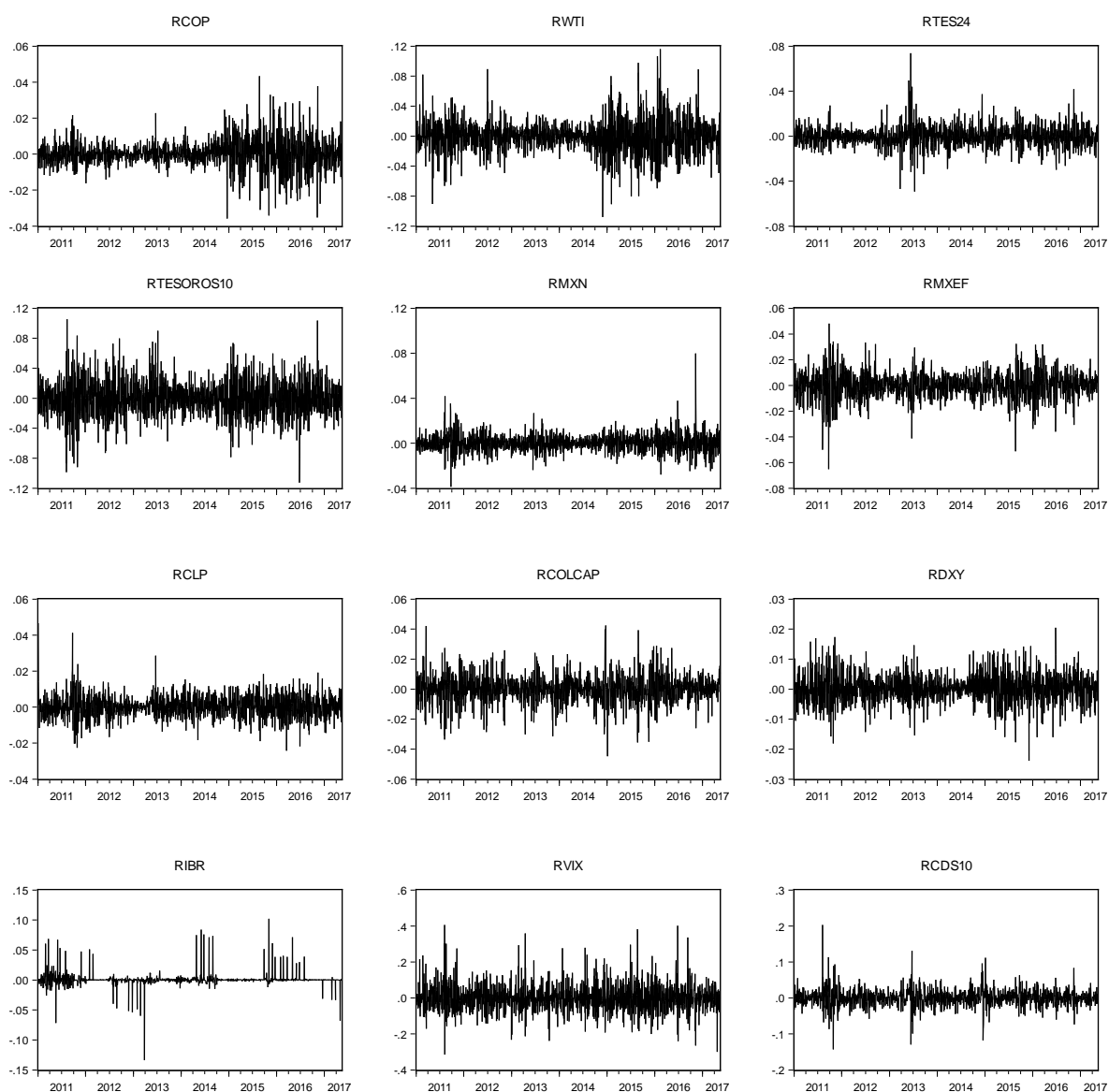


Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

Los retornos de las variables presentan volatilidad irregular que se puede identificar a través de la presencia de *clusters*, así como también datos atípicos que pueden originarse por choques externos de gran magnitud. Por ende, las distribuciones de las series tendrán la característica de colas pesadas.

Según la Tabla 2, el P-Valor del Jarque-Bera comprueba que las series originales no se ajustan a una distribución normal, adicionalmente el P-valor del *test* de Dickey Fuller no rechaza la hipótesis nula de la existencia de raíz unitaria, por esta razón ninguna de las series es estacionaria. La condición anterior hace necesario realizar la modelación sobre los retornos de las series y no sobre los valores en niveles.

**Gráfico 5. Retornos diarios periodo 2011-2017.**



Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

**Tabla 2. Estadísticos descriptivos para las series diarias originales, 2011 - 2017.**

	COP	WTI	TES24	TESOROS10	MXN	MXEF	CLP	COLCAP	DXY	IBR	VIX	CDS10
Media	2,260.08	77.14	7.03	2.24	14.69	968.35	566.82	1,541.77	86.57	4.64	16.83	194.29
Mediana	1,932.85	88.73	7.00	2.18	13.34	975.46	551.20	1,609.71	82.36	4.36	15.31	176.00
Máximo	3,440.55	113.93	9.08	3.74	21.96	1,206.49	731.46	1,889.30	103.30	7.40	48.00	386.69
Mínimo	1,747.65	26.21	4.82	1.36	11.50	688.52	456.38	1,051.25	72.93	2.92	9.77	118.85
Desviación estándar	526.06	24.80	0.84	0.49	2.61	98.43	83.57	199.54	8.69	1.31	5.54	57.02
Asimetría	0.69	-0.40	-0.24	0.70	0.93	-0.20	0.30	-0.41	0.39	0.75	2.14	0.84
Curtosis	1.80	1.52	3.34	3.04	2.59	2.92	1.54	1.89	1.59	2.60	8.40	2.77
P-Valor Jarque-Bera	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
P-Valor Dickey Fuller	0.89	0.80	0.39	0.07	0.87	0.05	0.81	0.38	0.83	0.84	0.03	0.31
P-Valor Ljung-Box	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

Por medio de la Tabla 3, se evidencia que las series de retornos son leptocúrticas. El retorno de la paridad USD/COP y las variables explicativas presentan asimetría positiva en la mayoría de los casos, a excepción del colcap y el índice MXEF. En todos casos se rechaza la hipótesis de normalidad y el p-valor del *test* de Dickey Fuller en todos los casos se rechaza la hipótesis nula de presencia de raíz unitaria en los retornos por lo cual se comprueba que dichas series son estacionarias. El p-valor del estadístico Ljung-Box rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación, lo cual indica que hay evidencia a favor de la existencia de estructura de dependencia temporal en media, razón por la cual los modelos ARIMA son apropiados para la modelación.

**Tabla 3. Estadísticos descriptivos para los retornos de las series diarias, 2011 - 2017.**

	COP	WTI	TES24	TESOROS10	MXN	MXEF	CLP	COLCAP	DXY	IBR	VIX	CDS10
Media	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Mediana	0.000	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.002	0.000
Máximo	0.043	0.116	0.074	0.105	0.080	0.048	0.047	0.042	0.020	0.102	0.405	0.203
Mínimo	-0.036	-0.108	-0.049	-0.113	-0.039	-0.065	-0.024	-0.045	-0.024	-0.134	-0.314	-0.143
Desviación estándar	0.007	0.021	0.009	0.024	0.008	0.010	0.006	0.009	0.005	0.010	0.073	0.023
Asimetría	0.054	0.146	0.542	0.078	0.815	-0.379	0.456	-0.132	0.022	1.077	0.698	0.394
Curtosis	7.097	6.235	8.967	4.548	11.374	6.059	7.156	5.611	4.708	59.853	6.717	10.849
P-Valor Jarque-Bera	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
P-Valor Dickey Fuller	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
P-Valor Ljung-Box	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

#### 4.2. Aplicación del modelo ARIMA-GARCH

La modelación de los retornos de USD/COP se realizó a partir del modelo ARIMA para la parte en media y se complementó con el modelo GARCH para la modelación en varianza con el objetivo de capturar la existencia de estructura de dependencia temporal tanto en media como en varianza.

Para la identificación del orden de la serie temporal de la estructura ARIMA se generó el correlograma de los retornos del USD/COP y se observaron los gráficos de ACF (Autocorrelación) y PACF (Correlación Parcial) (ver Anexo 2) para identificar la presencia de los componentes AR y/o MA en la serie. Se obtuvo como resultado con un nivel de significación del 5% la presencia de estructura AR en los rezagos 1 y 9. Sin embargo, no se encontró presencia de estructura MA.

Se estimaron los modelos ARIMA (1,1,0) y ARIMA (9,1,0), los cuales fueron verificados bajo los criterios de selección Akaike, Schwarz, Hannan-Quinn, R-cuadrado y Durbin Watson (ver Anexo 3) y se seleccionó el modelo ARIMA (9,1,0).

Los residuales del modelo ARIMA permitieron evidenciar existencia de efecto ARCH, por medio del correlograma de los cuadrados de los residuales,  $\varepsilon_t^2$  (ver Anexo 4), respaldo adicionalmente por el test ARCH - LM (Test Multiplicador de Lagrange) con un p-valor para Chi-Cuadrado de Cero (0), rechazando la hipótesis nula de no existencia de efecto ARCH.

El modelo GARCH fue propuesto por Bollerslev (1986) como una extensión al modelo ARCH. Ésta es una especificación más parsimoniosa para la función de la varianza condicional con una estructura de rezago más flexible que la ofrecida por el modelo ARCH, el cual permite la inclusión de rezagos de la varianza condicional en la ecuación de varianza.



La validación final de modelo se realizó aplicando de nuevo el análisis de los correlogramas de los residuos y los residuos al cuadrado por medio de la realización de pruebas de Ljung y Box (ver Anexo 5) donde se acepta la hipótesis nula de no autocorrelación serial de los residuos y se comprueba la remoción de la estructura de dependencia temporal en media y en varianza. También se aplicó el test de Dickey-Fuller aumentado con el cual se comprueba que los errores son ruido blanco. Adicionalmente el test ARCH - LM arrojó un p-valor para Chi-Cuadrado de Cero (0.73), con lo cual se aceptó la hipótesis nula de no existencia de efecto ARCH para los errores al cuadrado, reflejando una buena calibración del modelo.

Por lo tanto, dada la condición de heterocedasticidad condicional se procedió a estimar el modelo bajo la estructura ARCH y se obtuvo un modelo ARIMA (9,1,0) - GARCH (1,1) (Tabla 4).

**Tabla 4. Resultados del Modelos ARIMA - GARCH.**

<b>Ecuación de la Media</b>				
Variable	Coefficiente	Error Estándar	Estadístico -Z	Probabilidad
C	8.77E-05	0.000151	0.581927	0.5606
D1	0.006981	0.001523	4.583067	0
AR(1)	0.067072	0.024999	2.683049	0.0073
AR(9)	0.093356	0.026592	3.510645	0.0004
<b>Ecuación de la Varianza</b>				
Variable	Coefficiente	Error Estándar	Estadístico -Z	Probabilidad
C	1.29E-07	0.000000	2.620183	0.0088
RESID(-1)^2	0.058359	0.005895	9.900282	0.0000
GARCH(-1)	0.941879	0.005378	175.147	0.0000
R-squared	0.009248	Mean dependent var		0.000253
Adjusted R-squared	0.007453	S.D. dependent var		0.007449
S.E. of regression	0.007422	Akaike info criterion		-7.369054
Sum squared resid	0.091213	Schwarz criterion		-7.346222
Log likelihood	6123.315	Hannan-Quinn criter.		-7.360592
Durbin-Watson stat	2.004227			

Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

#### **Ecuación Media modelo ARIMA-GARCH**

$$\Delta USD/COP_t = 8.77E-05 + 0.067072 \Delta USD/COP_{t-1} + 0.093356 \Delta USD/COP_{t-9} + 0.006981D1 \quad (18)$$

#### **Ecuación Varianza modelo ARIMA-GARCH**

$$\sigma_t^2 = 1.29E-07 + 0.058359\varepsilon_{t-1}^2 + 0.941879\sigma_{t-1}^2 \quad (19)$$

El modelo presenta un coeficiente muy relevante para el rezago superior  $t + 9$  del 9.33%, es decir, el rezago a nueve periodos tiene un impacto directamente proporcional y la información más actualizada del activo teniendo en cuenta que es una serie ruido blanco la aporta un 6.70% por ende la historia del par USD/COP nos es el factor determinante del nivel de tasa de cambio, sin embargo, ambos rezagos capturan la mayor cantidad de información para la construcción de la tasa de cambio.

### 4.3. Resultados de los modelos DCC.

Los modelos GARCH permiten eliminar grandes supuestos de otros modelos de pronóstico que no consideran los cambios de volatilidad, como el efecto de los *clusters*, que hacen que los choques de volatilidad sean persistentes por un tiempo, siendo una realidad inherente a la mayoría de activos financieros la probabilidad de valores atípicos que da lugar a distribuciones de colas pesadas. Es así como dada la dinámica de los activos en el tiempo, el modelo DCC que parte de la modelación de la varianza condicional de cada activo permite analizar, a su vez, la dinámica de la interacción entre las variables de estudio por medio de la correlación.

Dentro de los modelos DCC estimados se evidencia que la mayoría de las variables exógenas analizadas, incluyendo las variables significativas en el modelos ARIMAX (Ver Tabla 8) para el tipo de cambio en Colombia, la suma de los parámetros  $\alpha + \beta \approx 1$  son cercanas a 1 (Tabla 5). Lo cual significa que tienen una correlación dinámica persistente en el tiempo e indica a su vez la magnitud de reversión a la media, excluyendo las variables índice IBR, índice VIX y los CDS de 10 años que la suma de los parámetros indican correlación que no hay presencia de correlación dinámica condicional.

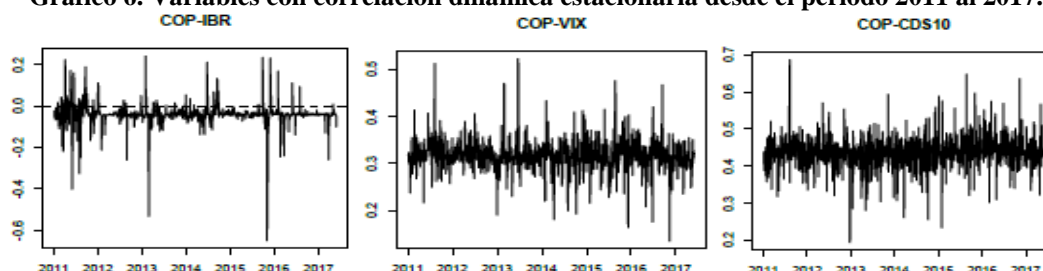
**Tabla 5. Parámetros modelo DCC.**

Pareja D.C.C. ( $\rho$ )	Alpha ( $\alpha$ )	Beta ( $\beta$ )	( $\alpha$ ) + ( $\beta$ )
USD/COP_WTI	0.0110	0.9850	0.9960
USD/COP_TES24	0.0190	0.9720	0.9910
USD/COP_TESOROS10Y	0.0180	0.9720	0.9900
USD/COP_MXN	0.0060	0.9830	0.9890
USD/COP_MXEF	0.0160	0.9700	0.9860
USD/COP_CLP	0.0150	0.9700	0.9850
USD/COP_Colcap	0.0240	0.9530	0.9770
USD/COP_DXY	0.0340	0.9240	0.9580
USD/COP_IBR	0.0660	0.5920	0.6580
USD/COP_VIX	0.0280	0.4810	0.5090
USD/COP_CDS10	0.0480	0.0000	0.0480

Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

Para el caso de las variables índice IBR, VIX y CDS10 se encontró que no presentan un índice de correlación dinámica significativo contra el par USD/COP. De esta manera, y como se puede observar en el Gráfico 6, las correlaciones DCC presentan estacionariedad por lo cual es preciso decir que son constantes en media y la relación de dependencia frente a la tasa de cambio es estable en el tiempo para el periodo de análisis. Adicionalmente, en la Tabla 6 se presentan los estadísticos descriptivos para las mismas variables, en donde sobresale el exceso de curtosis y baja desviación frente a la media.

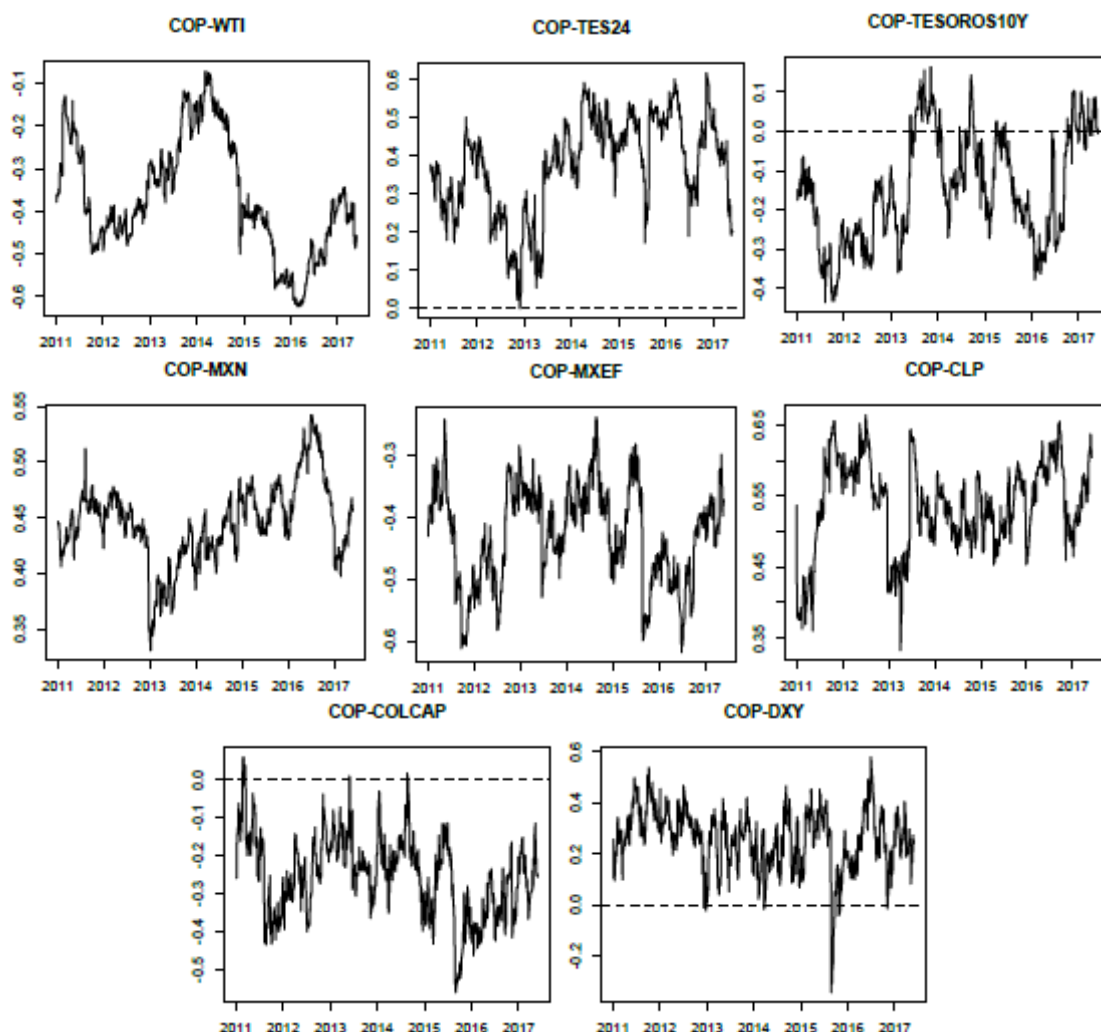
**Gráfico 6. Variables con correlación dinámica estacionaria desde el periodo 2011 al 2017.**



Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

En el Gráfico 7, se presenta la evolución de las correlaciones para las demás variables con correlación dinámica, donde para el WTI, los TES con vencimiento 2024, los Tesoros con vencimiento 10 años, el USD/MXN, el índice MXEF, el USD/CLP, el Índice Colcap y el Índice DXY es evidente la dinámica de la dependencia temporal.

**Gráfico 7. Correlaciones DCC históricas desde el período 2011 al 2017.**



Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

El modelo DCC para las variables USD/COP - WTI permite inferir que a niveles de petróleo por encima de los 80 dólares por barril, la correlación se ubica entre un -30% al -10% y disminuye cuando se presenta un periodo importante de estabilidad en el precio del crudo tal como el periodo 2013 a 2014 en el que el crudo estuvo en niveles históricamente altos. De esta manera, en periodos de estabilidad para una de las variables más importante para los ingresos del país la fuente de correlación puede disminuir y adquieren importancia otras variables. Sin embargo, una vez se da el choque por la caída de los precios del petróleo a niveles mínimos en el 2015 la correlación llega a niveles cercanos al -60%.

La correlación negativa no solo se da con los retornos del precio de petróleo, también para la tasa de los bonos del Tesoro a 10 años y los índices MXEF y Colcap con una media de -44% y -25% respectivamente, cuando se dan valorizaciones (desvalorizaciones) en los índices se generan presiones de revaluación (devaluación), lo cual puede ser explicado por el apetito de inversionistas extranjeros en los activos locales generando flujos de compra (venta). Adicionalmente, en relación con los flujos al mercado accionario, se ha mencionado en

apartados anteriores la existencia de una creencia en el mercado, donde se cree que el mercado accionario es el mejor indicador para anticipar el ciclo económico.

En el caso de la correlación con la tasa TES se presenta una fuerte dinámica que puede ser explicada por movimientos en la curva de rendimientos dado decisiones de política monetaria, *Outlook* de calificadoras como en el 2013 y por rebalanceo de índices internacionales de deuda emergente. A pesar de los cambios que ha tenido a lo largo del tiempo en promedio se ubica en 37% positivo (Tabla 6), una de las correlaciones más altas para el USD/COP y con menor coeficiente de variación de la muestra. No obstante, para el año 2017 se encuentra en niveles mínimos, a razón de que el TES con vencimiento de 2024 había sido durante un largo periodo la referencia más líquida del mercado de deuda pública local por ser la referencia de 10 años según estándares internacionales, pero actualmente su vencimiento corresponde a 7 años dando lugar para que otras referencias capturen la liquidez que normalmente se destinaba a este título.

**Tabla 6. Estadística descriptiva de las series de correlación dinámica DCC.**

	Correlación USD/COP versus -										
	WTI	TES24	TESOROS	MXN	MXEF	CLP	Colcap	DXY	IBR	VIX	CDS10
Media	-0.368	0.373	-0.149	0.445	-0.428	0.535	-0.255	0.257	-0.041	0.317	0.437
Mediana	-0.395	0.399	-0.158	0.447	-0.418	0.540	-0.246	0.271	-0.041	0.317	0.437
Máximo	-0.071	0.617	0.164	0.542	-0.238	0.664	0.060	0.577	0.241	0.522	0.686
Mínimo	-0.624	0.000	-0.436	0.331	-0.618	0.332	-0.560	-0.342	-0.650	0.136	0.194
Desviación	0.135	0.128	0.138	0.036	0.079	0.063	0.106	0.119	0.054	0.029	0.035
Asimetría	0.255	-0.553	0.135	-0.121	-0.251	-0.449	-0.097	-0.836	-2.376	0.243	-0.059
Curtosis	2.223	2.619	1.993	3.618	2.395	2.808	2.965	5.270	31.608	10.387	11.090

Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

El índice DXY es de gran relevancia para la formación de las tasas de cambio en el mundo por ser un indicador de la fortaleza del dólar frente a las principales divisas. La correlación observada para el periodo entre los retornos del DXY y los retornos USD/COP se ha ubicado generalmente entre un 20% y 40%, con media 25%, se considera que la relación entre ambas variables tiene memoria de largo plazo.

Por último, las variables con mayor media de correlación dinámica son USD/CLP (53%) y USD/MXN (44%), las cuales tienen una dependencia dinámica para el periodo de análisis con la tasa de cambio USD/COP que ha fluctuado desde 33% hasta 66%. Este resultado es congruente con los países de la región dada su dependencia a los precios de materias primas (*Commodities*) están expuestos a factores externos similares. Es importante resaltar que a pesar del nivel de correlación no es recomendable modelar a partir de las otras monedas de la región para evitar problemas de multicolinealidad con el índice DXY que recoge el movimiento del dólar a través de una canasta de monedas en el mundo.

#### 4.4. Aplicación del modelo ARIMAX-GARCH.

Para la introducción de variables exógenas en el modelo ARIMA-GARCH con miras a mejorar la estimación, en primera instancia se realizó un análisis previo de correlaciones promedio (ver Tabla 1) y la aplicación de los modelos DCC con las principales variables que interactúan con la formación del par USD/COP. Posteriormente, se procedió a verificar el nivel de significancia de cada una de las variables que presentaban un nivel de correlación significativa y que en la práctica son observadas por los inversionistas para anticipar movimientos en la tasa de cambio.

Una vez fueron identificadas las variables significativas como se estipula en el supuesto III de los modelos ARIMAX, se seleccionaron las siguientes variables: el índice DXY, los TES con vencimiento en julio 2024 y el WTI. Además, se verificó la condición de estacionariedad para los rendimientos diarios para garantizar el cumplimiento del supuesto I de la estacionariedad de las series (Tabla 3).

En la identificación del modelo ARIMAX se evidencian *clusters* de volatilidad que, así como en el modelo ARIMA, se modelaron haciendo uno de los modelos ARCH. Sin embargo, también se incluyó la variable *Dummy* (D1), anteriormente descrita.

Antes de realizar un análisis del modelo ARIMAX, se presenta el *Test* de Causalidad Granger para identificar la causalidad entre las variables seleccionadas (exógenas) y USD/COP (endógena). Como se observa en la Tabla 7 cada uno de los retornos de las variables exógenas tienen un p-valor menor al 5%, dando como resultado el rechazo de la hipótesis nula y se comprueba que causan a los retornos diarios de los cierres USD/COP. Es muy importante verificar que la relación contraria no se cumple y esto permite afirmar que la selección de variables ha sido bien realizada y que no existen problemas de multicolinealidad como lo busca garantizar el supuesto IV de los modelos ARIMAX.

**Tabla 7. Test de Causalidad de Granger.**

Hipótesis Nula	Obs	F-Estadístico	Probabilidad
RDXY no causa a la Granger a RCOP	1661	6.010	0.0025
RCOP no causa a la Granger a RDXY		1.213	0.2975
RTES24 no causa a la Granger a RCOP	1661	8.407	0.0002
RCOP no causa a la Granger a RTES24		0.424	0.6548
RWTI no causa a la Granger a RCOP	1661	7.046	0.0012
RCOP no causa a la Granger a RWTI		0.353	0.7024
RTES24 no causa a la Granger a RDXY	1661	0.834	0.4344
RDXY no causa a la Granger a RTES24		0.032	0.9683
RWTI no causa a la Granger a RDXY	1661	0.123	0.8847
RDXY no causa a la Granger a RWTI		0.060	0.9419
RWTI no causa a la Granger a RTES24	1661	2.265	0.1042
RTES24 no causa a la Granger a RWTI		0.732	0.4811

Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

Una vez se identificó la presencia de autocorrelación para la variable endógena, se estimó el modelo ARIMAX bajo la previa identificación del ARIMA (9,1,0) y se incluyeron las variables exógenas. Al evaluar el correlograma de los residuos al cuadrado de esta estimación en media (Anexo 6), se evidenció la presencia de dependencia temporal para la varianza, lo cual se corroboró por medio del *Test* de Heterocedasticidad - ARCH y se afirmó la presencia de efectos ARCH. Esto hace necesario realizar la modelación por medio de la familia ARCH para corregir la dependencia temporal de la varianza en el tiempo.

La estimación del modelo bajo los parámetros ARCH, generan como modelo propuesto un ARIMAX (9,1,0) - GARCH (1,1), donde a diferencia del modelo ARIMA (9,1,0) - GARCH (1,1), no es significativo el rezago AR (1).

Por último, para garantizar la no autocorrelación serial de los residuos y los residuos al cuadrado, se evaluaron los correlogramas de los mismos (Anexo 7). En este caso, se obtuvieron p-valores mayores al nivel de confianza con el cual se acepta la hipótesis nula, que indica que no hay autocorrelación serial ni en media ni en varianza, razón por la que las estimaciones realizadas son adecuadas para la realización de pronósticos.

En la Tabla 8, se presentan los resultados del modelo USD/COP que arrojó un Durbin-Watson de 1.943312, el cual se encuentra en el rango contemplado según las tablas de significancias para un modelo con 1650 observaciones y cinco variables exógenas, que requiere un Durbin-Watson inferior a 1.9155 y superior a 1.9249. De esta manera, se da cumplimiento al supuesto II para la estimación de modelos ARIMAX, dado que el Durbin-Watson del modelo estimado no presenta evidencia estadística de autocorrelación.

**Tabla 8. Resultados del Modelo ARIMAX - GARCH.**

Ecuación de la Media				
Variable	Coefficiente	Error Estándar	Estadístico -Z	Probabilidad
C	0.000113	0.000132	0.856268	0.3918
RDXY(-2)	0.070795	0.026411	2.680478	0.0074
RTES24(-1)	0.064075	0.010809	5.928041	0.0000
RWTI(-1)	-0.019595	0.007479	-2.619993	0.0088
D1	0.006156	0.001473	4.179949	0.0000
AR(9)	0.059423	0.025215	2.356681	0.0184
Ecuación de la Varianza				
Variable	Coefficiente	Error Estándar	Estadístico -Z	Probabilidad
C	1.15E-07	0.000000	2.39709	0.0165
RESID(-1)^2	0.056433	0.006132	9.203322	0.0000
GARCH(-1)	0.943792	0.005564	169.6181	0.0000
R-squared	0.019825	Mean dependent var		0.000256
Adjusted R-squared	0.016860	S.D. dependent var		0.007449
S.E. of regression	0.007386	Akaike info criterion		-7.380615
Sum squared resid	0.090185	Schwarz criterion		-7.351244
Log likelihood	6131.220	Hannan-Quinn criter.		-7.369729
Durbin-Watson stat	1.943312			

Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

Una vez se garantiza el cumplimiento de los supuestos de modelo ARIMAX se presentan las siguientes ecuaciones que permiten generar los pronósticos para las series.

#### Ecuación Media Modelo ARIMAX

$$\Delta USD/COP_t = \Delta y_t$$

$$\Delta y_t = 0.00011 + 0.070795RDXY_{t-2} + 0.064075RTES24_{t-1} - 0.019595RWTI_{t-1} + 0.059423y_{t-9} + 0.006156D1 \quad (20)$$

#### Ecuación Varianza modelo GARCH

$$\sigma_t^2 = 1.15E-07 + 0.056433\varepsilon_{t-1}^2 + 0.943792\sigma_{t-1}^2 \quad (21)$$

Según el modelo obtenido, el índice DXY es una de las variables exógenas que más relevancia tiene para explicar el comportamiento del par USD/COP y esto es coherente con la situación actual de la globalización de los mercados financieros y más para el caso de Colombia donde los principales tenedores de la deuda soberana (TES) después de los fondos de pensiones y cesantías son los fondos de capital extranjero que desde el 2011 han pasado de tener una participación cercana al 5% para alcanzar niveles superiores el 25% del total de deuda soberana en pesos, según reportes de tenedores de deuda publicados mensualmente por el Banco de la República. Por esta razón, el DXY es un índice que captura el valor del dólar en el mundo y que se ve afectado por los temas geopolíticos, políticos, normalización monetaria de la FED, crecimiento mundial y precio de las materias primas, lo que genera un efecto inmediato en la devaluación o revaluación de monedas de economías emergentes como Colombia dependiente altamente de flujos de capital extranjero. Así, un movimiento del 1% en los rendimientos del

DXY genera un efecto directamente proporcional del 7% en los rendimientos de la tasa de cambio.

Al analizar otras variables exógenas de relevancia para la determinación del tipo de cambio, tal como el petróleo por medio de la referencia WTI, se observa la correlación negativa que tiene con la paridad USD/COP, donde a mayores precios de petróleo menor será el avance en términos de retornos diarios para la tasa de cambio, siendo consecuentes con la relevancia que tiene el petróleo dentro del PIB de Colombia cercano al 40%. Así mismo, la variable *dummy* (D1) también permite incorporar los hechos estilizados por las reuniones de la OPEP que generaron fuertes tensiones en el 2015 que se reflejó en un avance en los precios del petróleo y tuvo como efecto la revaluación de la moneda colombiana.

Por otro lado, el comportamiento de los TES permite capturar el apetito por riesgo versus la rentabilidad ofrecida que tienen los inversionistas extranjeros en el país y la confianza que les genera en el medio plazo la economía local para realizar inversiones de portafolio.

Así mismo, los retornos diarios de nivel de tipo de cambio para el regazo significativo de nueve días siguen siendo de gran importancia para capturar la tendencia de la tasa de cambio en el mercado y ajustar el modelo a los movimientos estacionarios propios de la serie.

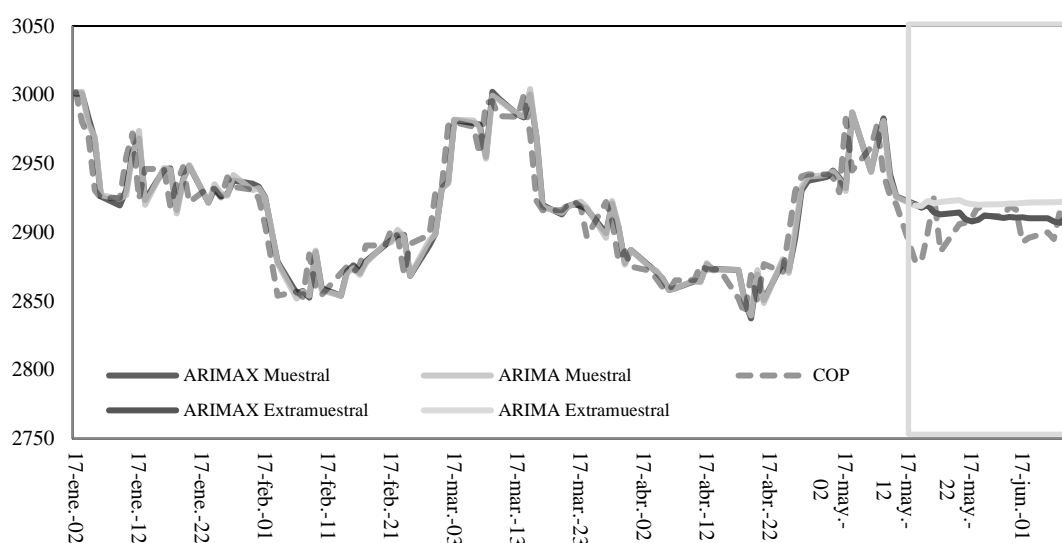
En el siguiente apartado se presentan los pronósticos muestrales y extra muestrales para poder discernir sobre qué modelo presenta mejor ajuste para el tipo de cambio colombiano.

#### **4.5. Pronósticos de los modelos estimados.**

Se realizaron pronósticos muestrales para 96 días que corresponden al periodo del 2 de enero del 2017 al 15 de mayo del 2017 y extramuestrales para 24 días que corresponden al periodo del 15 de mayo del 2017 al 15 de junio del 2017 con el objetivo de identificar cuál es el modelo que mejor se ajusta al nivel de USD/COP observado.

A partir de la observación del Gráfico 8 de pronósticos para los modelos ARIMA-GARCH y ARIMAX-GARCH del USD/COP observado para el periodo, se evidencia que los pronósticos muestrales para ambos modelos presentan un ajuste muy cercano a la formación observada de la tasa de cambio y adicionalmente los movimientos de ambos modelos son muy ajustados entre sí. En el periodo de pronóstico extra muestral a partir del 15 de mayo de 2017 se presentan diferencias importantes contra el cierre observado por ambos modelos, con una mayor desviación para el pronóstico desde el modelo ARIMA-GARCH. Esto hace evidente la deficiencia del modelo donde presume un nivel de estabilidad en la variable en el corto plazo y no se capturan los cambios de volatilidad. En contraste, como se presenta en la Tabla 9 el modelo ARIMAX permite ajustarse mucho más a los movimientos de tendencia por cada periodo que efectivamente se observaron en los precios de cierre USD/COP.

**Gráfico 8. Pronósticos Modelos ARIMA y ARIMAX.**



Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

**Tabla 9. Valores de los pronósticos extramuestrales ARIMA-GARCH y ARIMAX-GARCH.**

Fecha	USD/COP Observado	ARIMA (9,1,0)	ARIMAX (9,1,0)
15/05/2017	2879.00	2919.62	2920.36
16/05/2017	2878.60	2919.05	2917.87
17/05/2017	2899.89	2922.77	2919.70
18/05/2017	2926.00	2920.84	2914.45
19/05/2017	2885.90	2922.01	2913.08
22/05/2017	2905.95	2923.42	2914.35
23/05/2017	2907.00	2921.35	2909.41
24/05/2017	2911.00	2920.35	2907.93
25/05/2017	2919.00	2920.03	2909.16
26/05/2017	2911.75	2920.18	2912.32
29/05/2017	2911.75	2920.38	2910.34
30/05/2017	2919.00	2920.86	2911.26
31/05/2017	2916.40	2920.99	2910.70
01/06/2017	2892.85	2921.29	2911.02
02/06/2017	2896.00	2921.63	2910.28
05/06/2017	2900.00	2921.74	2910.26
06/06/2017	2895.00	2921.90	2907.92
07/06/2017	2916.50	2922.11	2906.85
08/06/2017	2920.00	2922.35	2911.74
09/06/2017	2915.00	2922.60	2914.73
12/06/2017	2933.00	2922.87	2916.06
13/06/2017	2933.35	2923.12	2916.85
14/06/2017	2935.50	2923.38	2914.81
15/06/2017	2953.25	2923.65	2919.19

Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

Con el fin de identificar estadísticamente el modelo con un menor error medio para los dos grupos de pronósticos, se contrastaron los errores medios y el coeficiente de desigualdad Theil que mide los errores medios en términos relativos y observados al generar los pronósticos (Tabla 10).



**Tabla 10. Errores de pronóstico de los modelos estimados.**

	ARIMA- GARCH	ARIMAX- GARCH	ARIMA- GARCH	ARIMAX- GARCH
	Muestrales		Extramuestrales	
Media Error Absoluto	14.6634	14.4911	16.3032	14.1785
Media Error Absoluto %	0.5022	0.4800	0.5616	0.4877
Coefficiente Theil	0.0033	0.0032	0.0034	0.0031

Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

Según las medidas desviación del modelo frente a los valores observados en ambos grupos de pronósticos muestrales y extramuestrales, es posible afirmar que el modelo ARIMAX-GARCH presenta un mejor ajuste a la variable USD/COP y se realizó una adecuada selección de variables independientes que permitieron ajustar el modelo ARIMAX-GARCH en un mayor porcentaje que si solo se realizaran los pronósticos desde el modelo ARIMA-GARCH, es decir, que los retornos de la variable USD/COP por sí solos no son el mejor estimador para su comportamiento futuro. Adicionalmente a partir de los criterios de selección de modelos, se corrobora que el mejor modelo es un ARIMAX (9,1,0)-GARCH (1,1), al obtener mejores resultados en todos los casos (Tabla 11).

**Tabla 11. Criterios de selección.**

Modelo / Criterios	ARIMA (9,1,0) GARCH (1,1)	ARIMAX (9,1,0) GARCH (1,1)
R-squared	0.009248	0.019825
Adjusted R-squared	0.007453	0.016860
Akaike info criterion	-7.369054	-7.380615
Schwarz criterion	-7.346222	-7.351244
Hannan-Quinn criter.	-7.360592	-7.369729

Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg (2017).

## 5. Conclusiones.

La creciente importancia que juega el riesgo y la incertidumbre en la teoría económica y financiera ha conllevado que sea de interés de inversionistas, gobierno y el público en general, el desarrollo de nuevas técnicas que permitan el pronóstico de la tasa de cambio. Principalmente en países donde el tipo de cambio tiene algún nivel de flexibilidad como para el caso de estudio la tasa de cambio en Colombia. Es por ello que no solo los modelos de tasa de cambio de equilibrio, el análisis técnico o los modelos de microestructura de mercado suplen la necesidad de pronósticos eficientes que se ajusten a las condiciones propias de la variable de estudio. Las aproximaciones econométricas de series de tiempo que permitan capturar las dependencias temporales, correlaciones dinámicas y volatilidades heterocedásticas de las series financieras han obtenido gran relevancia para el pronóstico de activos financieros como el tipo de cambio.

En la actualidad, existen diversas fuentes de volatilidad para los mercados financieros en general, tales como los discursos de los miembros de la FED, las decisiones del Banco Central Europeo (BCE) y en general las políticas monetarias en el mundo que generan incertidumbre a consecuencia de los futuros movimientos de la hoja de balance, que modifica la liquidez global que ha estado en su nivel más boyante desde el 2009, junto con riesgos geopolíticos como las tensiones entre Estados Unidos y Corea del Norte, cambios de gobierno a nivel mundial con un enfoque más populista en general. Todos estos eventos dan relevancia al desarrollo de modelos que incorporen cada vez más hechos estilizados que introducen choques en volatilidad.

La tasa de cambio de un país está influenciada por diferentes variables financieras, políticas y variables macroeconómicas que hacen de su pronóstico un reto en la selección más eficiente de éstas. Por esta razón, se realizó un amplio estudio de variables con un nivel alto de correlación con el par USD/COP (Anexo 1). Sin embargo, la medida de correlación lineal convencional de Pearson ofrece señales para un momento estático en el tiempo, lo que no recoge la relación lineal de dependencia dinámica entre un par de variables, sino que se limita a mostrar una relación lineal promedio. Es así como fue de interés de esta investigación el análisis de los co-movimientos de las variables por medio de la aplicación de los modelos DCC para un análisis dinámico de la correlación entre los retornos diarios del tipo de cambio y las series Índice DXY, Índice Colcap, CDS 10 años Colombia, Índice IBR, Tesoros con vencimiento 10 años, índice MXEF, WTI, TES con vencimiento 2024, índice VIX, USD/CLP y USD/MXN.

Los resultados obtenidos permiten concluir que el tipo de cambio en Colombia tiene una correlación dinámica persistente en el tiempo con las principales variables de estudio, por ejemplo, para el caso de la dependencia temporal entre USD/COP y el WTI en periodos amplios de desvalorizaciones a consecuencia de choques de volatilidad se presentaron incrementos significativos en la correlación, ubicándose en niveles superiores al -60%, mientras que en periodos de baja volatilidad otras variables adquieren mayor relevancia, como los índices bursátiles y el comportamiento de las monedas de la región. Es importante concluir que la aplicación del modelo DCC para las variables IBR, VIX y CDS 10 años en relación con el par USD/COP permitió inferir que su correlación es constante en el tiempo y, por lo tanto, dicha relación no se ve fuertemente afectada por cambios en el entorno financiero.

Colombia siendo uno de los países de la región con más vulnerabilidad macroeconómica por su déficit fiscal, bajo crecimiento económico, riesgo político y la sensibilidad de los actuales inversionistas a realizar una salida masiva de flujos de inversión, se convierte en un escenario propicio para la aplicación los modelos econométricos que incorporen cierto grado de incertidumbre. Es así como se realizó la estimación de un modelo de tipo de cambio por medio de la aplicación de los modelos autorregresivos ARIMA-GARCH y ARIMAX-GARCH. Este último, dado que fue interés de esta investigación incorporar variables macroeconómicas, financieras, políticas, entre otras que de alguna u otra forma interactuaran con la formación de la tasa de cambio en Colombia. Los resultados encontrados sugieren una evidencia a favor de los modelos ARIMAX-GARCH, pues en el modelo calibrado solo desde la variable dependiente USD/COP por sí misma no es el mejor estimador para las proyecciones fuera de muestra al no incorporar hechos estilizados.

Como resultado, en el proceso de modelación fueron seleccionadas las variables DXY, TES con vencimiento en 2024 y el precio del petróleo por medio de la referencia WTI, variables que actualmente presentan un nivel de correlación alta con la formación de cierre para USD/COP y que son comúnmente seguidas por los inversionistas para anticipar movimientos en la tasa de cambio. Sin embargo, los activos financieros que tienen influencia de un grupo tan amplio de variables cambian contantemente los niveles de correlación entre sí.

El modelo ARIMAX (9,1,0)-GARCH(1,1) presentó un mejor nivel de ajuste no solo para el periodo de pronósticos muestrales sino para los pronósticos extramuestrales, con un margen de error medio mucho menor que para la serie de pronósticos ARIMA-GARCH, el modelo permite pronosticar el comportamiento dinámico de la serie en el tiempo y aunque existen diferencias frente a los cierres observados para el par USD/COP, los pronósticos son congruentes con la tendencia de corto plazo de la serie observada; la identificación adecuada de las variables con influencia en la tasa de cambio hacen que este modelo sea una fuente eficiente de información para la toma de decisiones.

En futuras investigaciones se recomienda incorporar al modelo de predicción de tipo de cambio colombiano el efecto de la economía subterránea existente como consecuencia de las actividades ilícitas que generan movimientos de flujos en moneda extranjera. Este fenómeno

afecta el cálculo del producto interno bruto del país, la balanza cambiaria y, como estos recursos permean en la economía real, pueden generar presiones en la formación de la tasa de cambio, que no pueden ser explicadas por otras variables nominales.

## Referencias

- Abhyankar, A., Sarno, L., & Valente, G. (2005). Exchange rates and fundamentals: Evidence on the economic value of predictability. *Journal of International Economics*, 66(2), 325-348.
- Andrews, B.H., & Dean, M.D. (2013). Building ARIMA and ARIMAX Models for Predicting Long-Term Disability Benefit Application Rates in the Public / Private Sectors Sponsored by Society of Actuaries Health Section Prepared by University of Southern Maine. *Building ARIMA and ARIMAX Models for Predicting Long-Term Disability Benefit Application Rates in the Public/Private Sectors Sponsored*.
- Anggraeni, W., Vinarti, R.A., & Kurniawati, Y.D. (2015). Performance Comparisons between Arima and Arimax Method in Moslem Kids Clothes Demand Forecasting: Case Study. *Procedia Computer Science*, 72, 630-637.
- Babu, A.S., & Reddy, B.A. (2015). Exchange Rate Forecasting using ARIMA, Neural Network and Fuzzy Neuron. *Journal of Stock & Forex Trading*, 4(3), 1-5.
- Bloomberg, L.P. (2017). Stock last price from 1/1/11 to 06/30/17. Bloomberg Terminal. Recuperado de: <https://www.bloomberg.com/>
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.
- Box, G. E., & Jenkins, G.M. (1970). *Time series analysis, control, and forecasting*. San Francisco, CA: Holden Day, 3226(3228), 10.
- Cardenas, M. (1997). La tasa de cambio en Colombia. *Cuadernos de Fedesarrollo*, No. 012740. Bogotá
- Carr, P., & Wu, L. (2007). Theory and evidence on the dynamic interactions between sovereign credit default swaps and currency options. *Journal of Banking and Finance*, 31(8), 2383-2403.
- Cassel, G. (1922). Money and foreign exchange after 1914. London: Constable and Company Limited, pp. 101 - 170.
- Chavarro, F. (2008). Política monetaria en Colombia, 1999-2000. *Revista Criterio Libre*, 9, 73-93.
- Chavarro, F., & Grautoff, M. (2010). El trilema de la Banca Central Colombiana: un problema intertemporal. *Criterio Libre*, 8, 15-30. Recuperado de: <http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:No+Title#0>
- Chiang, T.C., Jeon, B.N., & Li, H. (2007). Dynamic correlation analysis of financial contagion: Evidence from Asian markets. *Journal of International Money and Finance*, 26(7), 1206-1228.

- Chinn, M.D., & Meese, R.A. (1995). Banking on currency forecasts: How predictable is change in money? *Journal of International Economics*, 38(1-2), 161-178.
- Chong, M., & Aguilar, R. (2016). Proyección de Series de Tiempo para el Consumo de la Energía Eléctrica a Clientes Residenciales en Ecuador, 29(Julio), 56-76.
- Davis, J.S. (2017). External debt and monetary policy autonomy. *Ensayos Sobre Política Económica*, 35, 53-63.
- Echavarría, J.J., Misas, M., & López, E. (2007). La Tasa de Cambio Real de Equilibrio en Colombia y su Desalineamiento: Estimación a través de un modelo SVEC. *Borradores de Economía*, 472, 2-37.
- Echavarría, J.J., Vásquez, D., & Villamizar, M. (2005). The Real Exchange Rate in Colombia: Too Far from Equilibrium? *Ensayos Sobre Política Económica*, 49, 134-191.
- Ecopetrol S.A. (2016, 14 de junio). Recuperado de: <http://www.ecopetrol.com.co/wps/portal/es/ecopetrol-web/nuestra-empresa/quienes-somos/acerca-de-ecopetrol/nuestra-historia>
- Edwards, S., & Savastano, M.A. (1999). Exchange Rates in Emerging Economies: What do we Know? What do we need to know? *National Bureau of Economic Research Working Paper Series*.
- Ehrmann, M., & Fratzscher, M. (2005). Exchange rates and fundamentals: New evidence from real-time data. *Journal of International Money and Finance*, 24(2), 317-341.
- Engel, C., & West, K.D. (2005). Exchange Rates and Fundamentals. *Journal of Political Economy*, 113(3), 485-517.
- Engle, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation1. *Econometrica*, 50(4), 987-1007.
- Engle, R. (2002). Dynamic Conditional Correlation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 339-350.
- Evans, M.D.D. (2010). Order flows and the exchange rate disconnect puzzle. *Journal of International Economics*, 80(1), 58-71.
- Fahimifard, S.M., Homayounifar, M., Sabouhi, M., & Moghaddamnia, A.R. (2009). Comparison of ANFIS, ANN, GARCH and ARIMA Techniques to Exchange Rate Forecasting. *Journal of Applied Sciences*, 9(20), 3641-3651.
- Fama, E.F. (1965). The Behavior of Stock-Market Prices. *The Journal of Business*, 38(1), 34-105.
- Fernández-Rodríguez, F., Sosvilla-Rivero, S., & Andrada-Félix, J. (1999). Exchange-rate forecasts with simultaneous nearest-neighbour methods: evidence from the EMS. *International Journal of Forecasting*, 15, 383-392.
- Fernández-, F., González, C., & Sosvilla, S. (2000). On the profitability of technical trading rules based on artificial neural networks: *Economics Letters*, 69(1), 89-94.

- Frenkel, J.A., & Mussa, M.L. (1985). Chapter 14 Asset markets, exchange rates and the balance of payments, *Handbook of International Economics*, 2, 679-747.
- Gioqinang, Z., & Hu, M.Y. (1998). Neural network forecasting of the British Pound/US Dollar exchange rate. *Omega*, 26(4), 495-506.
- Gómez, J., & Hernández, J.M. (2011). Composición cambiaria y Poder Adquisitivo de las reservas internacionales. *Borradores de Economía, Banco de La Republica*, (654).
- González, C. (2003). *Nuevas perspectivas del análisis técnico de los mercados bursátiles mediante el aprendizaje automático. Aplicaciones al índice general de la bolsa de Madrid*. *Research Gate*. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/10553/2156>
- Granger, C.W. (1986). Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-spectral Methods. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 37(3), 424-438.
- Hassan, M. K., Kayhan, S., & Bayat, T. (2017). Does credit default swap spread affect the value of the Turkish LIRA against the U.S. dollar? *Borsa Istanbul Review*, 17(1), 1-9.
- Jalil, M.A., & Misas, M. (2007). Evaluación de pronósticos del tipo de cambio utilizando redes neuronales y funciones de pérdida asimétricas. *Revista Colombiana de Estadística*, 30(1), 143-161.
- Julio, B., & Yook, Y. (2016). Policy Uncertainty , Irreversibility , and Cross-Border Flows of Capital Federal Reserve Board of Governors. *Journal of International Economics*, 103, 13-26.
- Kamruzzaman, J., & Sarker, R.A. (2003). Forecasting of currency exchange rates using ANN: a case study. *Neural Networks and Signal Processing*, 1, 793-797.
- Kim, B.-H., Kim, H.-K., & Oh, K.-Y. (2009). The purchasing power parity of Southeast Asian currencies: A time-varying coefficient approach. *Economic Modelling*, 26(1), 96-106.
- Krugman, P.R., Obstfeld, M., & Melitz, M.J. (2012). *Economía internacional: Teoría y política*. Pearson.
- Lothian, J.R., & Taylor, M.P. (1996). Real exchange rate behavior: the recent float from the perspective of the past two centuries. *Journal of Political Economy*, 104(3), 488-509.
- MacDonald, R., & Marsh, I.W. (1997). On Fundamentals and Exchange Rates: A Casselian Perspective. *The Review of Economics and Statistics*, 79(4), 655-664.
- Majhi, R., Panda, G., & Sahoo, G. (2009). Efficient prediction of exchange rates with low complexity artificial neural network models. *Expert Systems with Applications*, 36(1), 181-189.
- Malkiel, B.G. (2015). *A Random Walk Down Wall Street: The Time-Tested Strategy for Successful Investing (10th Edition)*. *W W Norton & Co Inc*, 496.
- Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*, 36(4), 394-419.
- Marsh, I.W., & Sarno, L. (2012). *Handbook of Exchange Rates. Handbook of Exchange Rates*.

- Medeiros, R., & Júnior, J.L.R. (2009). O Relacionamento entre a Taxa de Câmbio R \$/US \$ e Fundamentos (No. wpe\_190). *Inspere Working Paper*, Insper Instituto de Ensino e Pesquisa. IBMEX Sao Paulo.
- Meese, R., & Rogoff, K. (1983). The Out-of-Sample Failure of Empirical Exchange Rate Models: Sampling Error or Misspecification? In *Exchange rates and international macroeconomics*. University of Chicago Press, pp. 67-112.
- Murcia, A., & Rojas, D. (2015). Determinantes de la tasa de cambio en Colombia: un enfoque de microestructura de mercados. *Ensayos Sobre Política Económica*, 33(74), 207-219.
- One Financial Markets, & CB Financial Services Ltd. (2012). UK Brent Oil. Recuperado de: <https://www.onefinancialmarkets.com/market-library/uk-brent-oil>
- Ordoñez, M.L. (2016). Riesgo y volatilidad del tipo de cambio en Colombia, evaluación y pronóstico 2000 - 2006. *Revista FACE*, 2, 33-57.
- Pacelli, V. (2012). Forecasting Exchange Rates: a Comparative Analysis. *International Journal of Business and Social Science*, 3(10), 145-156.
- Panda, C., & Narasimhan, V. (2007). Forecasting exchange rate better with artificial neural network. *Journal of Policy Modeling*, 29(2), 227-236.
- Parisi, A., Parisi, F., & Cañas, E. (2002). Reglas simples de analisis tecnico y modelos autpregresivos en el mercado cambiario chileno entre 1995 al 2001. *Estudios de Administración*, 9(2), 69-88.
- Pektaş, A.O., & Kerem, H. (2013). ANN hybrid model versus ARIMA and ARIMAX models of runoff coefficient. *Journal of Hydrology*, 500, 21-36.
- Peter, Ď., & Silvia, P. (2012). ARIMA vs. ARIMAX - which approach is better to analyze and forecast macroeconomic time series? *Proceedings of 30th International Conference Mathematical Methods in Economics*, 2, 136-140.
- Reboredo, J.C. (2012). Modelling oil price and exchange rate co-movements. *Journal of Policy Modeling*, 34(3), 419-440.
- Rime, D., Sarno, L., & Sojli, E. (2010). Exchange rate forecasting, order flow and macroeconomic information. *Journal of International Economics*, 80(1), 72-88.
- Rojas, M.E., & Duque, A.F. (2014). Colombia sobre el producto interno bruto , la inversión extranjera directa y la balanza comercial. *Escuela de Ingenieria de Antioquia*. Recuperado de: <http://repository.eia.edu.co/bitstream/11190/238/1/ADMO0817.pdf>
- Samuelson, P.A. (1965). Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *IMR; Industrial Management Review*, 6(2), 41-49.
- Serwa, D., & Bohl, M.T. (2005). Financial contagion vulnerability and resistance: A comparison of European stock markets. *Economic Systems*, 29(3), 344-362.
- Stein, J. L., & Allen, P. R. (1997). *Fundamental determinants of exchange rates*. United Kingdom: Clarendon Press, Oxford.

- Syllignakis, M.N., & Kouretas, G.P. (2011). Dynamic correlation analysis of financial contagion: Evidence from the Central and Eastern European markets. *International Review of Economics & Finance*, 20(4), 717-732.
- Taylor, M.P. (2009). Editorial: Long-run purchasing power parity and real exchange rates: introduction and overview. *Applied Economics Letters*, 16(1), 1-4.
- Tosoni, G.A. (2011). Necessary Levels, Costs and Policies for International Reserves in Latin America. *Economía Mexicana Nueva Época*, XX(1), 145-180. Recuperado de: <http://ideas.repec.org/a/emc/ecomex/v20y2011i1p145-180.html>
- Uribe, J., Jiménez, D., & Fernández, J. (2015). Regímenes de volatilidad del tipo de cambio en Colombia e intervenciones de política, *LXXIV*(100), 1-31.
- Velásquez, D.J., & González, L.M. (2006). Modelado del índice de tipo de cambio real colombiano usando redes neuronales artificiales. *Cuadernos de Administración*, 19(32), 319-336. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=20503213>
- Wu, C.C., Chung, H., & Chang, Y.H. (2012). The economic value of co-movement between oil price and exchange rate using copula-based GARCH models. *Energy Economics*, 34(1), 270-282.
- Zaldueño, J. (2006). Determinants of Venezuela's Equilibrium Real Exchange Rate. *IMF Working Paper*, WP/06/74, 3-17.

## Anexos

### Anexo 1. Descripción de las variables exógenas analizadas desde su impacto a la tasa de cambio en Colombia.

Variable	Descripción
<b>CDS</b>	<p><i>Credit Defaul Swap</i> es un derivado financiero el cual representa el intercambio de riesgo crédito de una nación con otra, en términos de país se intercambia el riesgo país de Colombia contra el de Estados Unidos. Ésta es una variable de seguimiento constante por inversionistas, es la prima de riesgo y brinda señales del mercado de la confianza de los inversionistas por un emisor. En otras palabras el CDS es conocido como la prima de riesgo (Ver Gráfico 1)</p> <p>En el caso de correlación con la tasa de cambio, observamos que los CDS al representar el riesgo país ajustado día a día a las condiciones de mercado, influencia el comportamiento de la tasa de cambio por medio de los flujos de capital.</p>
<b>Órdenes del mercado</b>	<p>El mercado cambiario en Colombia está conformado por todas las operaciones de negociación de la divisa peso/dólar realizadas a través de los Intermediarios del Mercado Cambiario (IMC), los cuales son conformados por Bancos Comerciales, los bancos hipotecarios, las corporaciones financieras, las compañías de financiamiento comercial, la FEN, Bancoldex, las cooperativas Financieras, las sociedades comisionistas de Bolsa y las casas de cambio.</p> <p>Los análisis de microestructura lo que buscan es medir la profundidad del mercado por medio de la diferencia entre el <i>bid</i> (Compra) y <i>ask</i> (Venta).</p>
<b>Forwards TRM</b>	<p>La tasa <i>Forward TRM</i> nos permite conocer las expectativas de los agentes del mercado en un instante superior al T+1, donde sería una fuente primaria de información para conocer la tendencia de corto plazo.</p>
<b>Dólar vs Pares del peso en la Región</b>	<p>La globalización lleva a ver el mundo como un todo y a su vez en el caso de Latinoamérica es para los inversionistas del mundo una región, por lo cual el comportamiento de pares como Pesos Mexicanos contra dólar, Reales, chilenos y Sol peruano son altamente correlacionados con la tasa de cambio en Colombia; por lo que es considerado como una variable de impacto.</p>
<b>PIB</b>	<p>El producto interno bruto representa el crecimiento de una economía en función de la producción de bienes y servicios, generada por nacionales residentes en el país y por extranjeros residentes en el país, y excluye la producción de nacionales residentes en el exterior. El indicador de preferencia de la salud de una economía, para la estimación de la tasa de cambio es importante comprender la actividad económica principal del país, su ciclo y las perspectivas futuras.</p> <p>Los inversionistas deben realizar seguimiento del crecimiento local y global, tener un mapa de cómo se distribuirá y cuales es la tendencia.</p>
<b>Inflación</b>	<p>El costo de la calidad de vida en el país, es la preocupación principal del Banco central; principalmente en economías como la colombiana donde se tiene un target de inflación objetivo del 2%-4%.</p> <p>La autoridad monetaria debe implementar políticas que permitan que la inflación converja al target, sin embargo esas políticas tiene repercusión económicas relevantes en términos de crecimiento y TRM, como lo trabaja (Chavro &amp; Grautoff, 2010).</p>
<b>Tasa de interés local</b>	<p>La tasa de interés de intervención es el instrumento de política monetaria que el Banco central utiliza para buscar un equilibrio en la inflación, a su vez es importante para los inversionistas el nivel de tasas de interés porque es un catalizador de la economía en términos de liquidez y rentabilidad real. Donde a niveles altos de tasa reales los inversionistas extranjeros se pueden ver motivados a ingresar recursos.</p>



<b>Variable</b>	<b>Descripción</b>
<b>Tasa de interés EEUU</b>	La tasa de interés de la FED así como la de Colombia es una guía de inversión, dado que si hay una mayor tasa de interés en un país como EEUU, lo inversionistas prefieren <i>fly to quality</i> que realizar inversiones en países emergentes con mayor nivel de riesgo. La política monetaria de Estados Unidos es un factor de vital importancia para determinar hacia donde están yendo los flujos de capital. Al ser considerado como una de las economías más seguras, y sus bonos soberanos son considerados como bonos libres de riesgo, tal vez los bonos más seguros que existen.
<b>Política Monetaria OP CALL – PUT, Tasa de Intervención.</b>	Aplicación de los instrumentos de política monetaria, pueden mitigar la volatilidad de la tasa de cambio en el caso de las opciones <i>put</i> y <i>call</i> , el objetivo de esta intervención es disminuir el impacto antes choques de mercado, pero es difícil que la aplicación de estos instrumentos genere un cambio de trayectoria en la tasa de cambio.
<b>Cuenta Corriente</b>	Registro de las transacciones de Colombia con el resto de mundo, en otras palabras, es la relación entre las exportaciones e importaciones. La cuenta corriente un indicador de los movimientos reales de la oferta y demanda de divisas en nuestro país
<b>Flujos de Capital e Inversión Extranjera Directa</b>	Esta variable es finalmente la respuesta a una mejor perspectiva de riesgo y rentabilidad de los inversionistas extranjeros, donde la destinación de recursos para inversión migra a países como Colombia. La inversión extranjera es parte de la cuenta financiera dentro de la balanza de pagos, y su vez se constituye por inversión extranjera directa e inversión de portafolio. La inversión extranjera de capital tiene mayor importancia, dado que permanece mucho más tiempo en el país y los flujos son mayores en contraste con la inversión de portafolio que es más cíclica y sensible a las condiciones globales de la economía de la región y el país.
<b>Calificación</b>	El riesgo soberano es medido y clasificado en determinados rangos por empresas especializadas a nivel internacional, las cuales juegan un papel muy importante desde el punto de vista de los inversionistas, ya que se pronuncian sobre el riesgo soberano de los países que emiten deuda en los mercados internacionales, y sirven para determinar la prima de riesgo. Para dicho fin, se evalúan aspectos coyunturales que puedan representar situaciones de riesgo para el inversionista, abarcando temas relacionados con lo económico, lo político, lo social y lo internacional (a nivel de legislaciones). La calificación nación y los diferentes <i>outlooks</i> de las principales calificadoras, tienen un impacto indirecto en la tasa de cambio y esto se da porque cuando la calificación es positiva hay un mayor flujo de inversionistas extranjeros por lo contrario si es negativo el saldo de flujos negativo genera una depreciación de la moneda local. El resultado de la calificación tiene impacto en el variables como el PIB, Cuenta corriente y IED <sup>9</sup> (Rojas & Duque, 2014).
<b>Reservas Internacionales</b>	Las reservas internacionales están formadas por los activos externos que están bajo control de la autoridad monetaria, particularmente en Colombia el Banco de la República. El Banco mantiene reservas internacionales en cuantías que considera suficientes para intervenir en el mercado cambiario y para facilitar el acceso del Gobierno y del sector privado a los mercados internacionales de capitales. Las reservas internacionales se han constituido en una herramienta esencial para los bancos centrales de todo el mundo. El mantenimiento de un adecuado nivel de las mismas sostiene la confianza en las medidas monetarias que adoptan y permite mantener la capacidad de intervención para moderar fluctuaciones excesivas en la unidad monetaria nacional (Gómez & Hernández, 2011).

<sup>9</sup> Inversión extranjera directa.

Variable	Descripción
<b>Commodities (Petróleo)</b>	<p>La intervención en el mercado cambiario es uno de los instrumentos de los que dispone el Banco para cumplir con el objetivo básico de mantener una tasa de inflación estable dentro del rango meta de largo plazo (2% a 4%) y lograr que el producto crezca alrededor de su tendencia de largo plazo. Por ejemplo, cuando una depreciación rápida del peso amenaza el logro de las metas de inflación, el Banco puede mitigar las presiones cambiarias mediante la venta de divisas en el mercado, evitando recargar el ajuste exclusivamente en la tasa de interés. Así mismo, el Banco puede intervenir en el mercado cambiario con el propósito de controlar movimientos atípicos o bruscos de la tasa de cambio, caracterizados por una alta volatilidad y por la ampliación significativa del margen entre el precio de compra y el de venta de la divisa, los cuales pueden influir sobre el desempeño de otros activos financieros conectados con el mercado cambiario y comprometer el objetivo del funcionamiento adecuado de los pagos internos y externos.</p> <p>La economía colombiana en los últimos años ha tenido una alta dependencia en el sector minero energético, donde para el 2014 las exportaciones de este sector llegaron a pesar el 60%; algunos analistas han llegado a catalogar esta dependencia con el nombre de enfermedad holandesa<sup>10</sup>. Durante los años de bonanza del petróleo el cual alcanzo en referencias como la WTI valores por encima de los 100 dólares y una tasa de cambio que oscilaba entre los 1500 - 1900, el crecimiento de la economía colombiana se veía catapultada y los ingresos de la nación que en un alto porcentaje se componían de las utilidades de Ecopetrol<sup>11</sup> (ver Gráfico 3).</p> <p>En este sentido en economías con alta dependencia a los precios de los <i>commodities</i>, en este escenario Petróleo; la tasa de cambio es la variable que primero se ajusta a un choque en el nivel de producción y precio internacional de Petróleo y se agudiza dado que Colombia es una economía pequeña y abierta y tiene un régimen cambiario en el que la tasa de cambio flota con ligeras intervenciones marginales del Banco de la República.</p> <p>En la matriz de correlaciones se observa que para los diferentes periodos de análisis la correlación existente entre la TRM y Petróleo (Referencia genérica fuente Bloomberg) es inversa (ver Gráfico 3 y Tabla 1). Esto quiere decir que cuando caen los precios de petróleo, la tasa de cambio se eleva porque ingresan menos dólares a la economía.</p>
<b>Índices Internacionales</b>	<p>Los índices internacionales de deuda soberana como lo son índices de mercados soberanos de deuda creados por JP Morgan, conocidos como GBI-EM (GBI-EM <i>Global Diversified</i> y en el GBI-EM Global) y el MXEF. Son relevantes para el mercado dado que movimientos en la participación de Colombia en estos índices generan movimientos de flujo, estos índices son un referente a nivel mundial para los inversionistas. Estos índices son rebalanceados trimestralmente.</p>
<b>Expectativas Analistas y Encuestas de Mercado</b>	<p>El conocimiento de los expertos realmente es una de las variables más importantes a pesar de los sesgos por subjetividad y conflictos de interés, el mercado de valores en el mundo está siendo cada vez más consiente que la visión a futuro no la da solo las cifras históricas y los modelos de proyección y pronóstico. Por ejemplo, hoy la economía global ha continuado con menores tasas de crecimiento desde la crisis suprime, por</p>

<sup>10</sup> Término que significa el crecimiento acelerado de un sector en la economía, en este caso el sector minero energético, crecimiento de ingresos por exportaciones de ese sector generan entradas desmedida de divisas al país y generan una dependencia que afecta la competitividad de la industria y el agro.

<sup>11</sup> Ecopetrol S.A. es la empresa más grande del país con una utilidad neta de \$15,4 billones registrada en 2011 y la principal compañía petrolera en Colombia. Por su tamaño, pertenece al grupo de las 40 petroleras más grandes del mundo y es una de las cuatro principales de Latinoamérica.(Ecopetrol S.A., 2016)

Variable	Descripción
	<p>ciclo económico la tendencia sería una recuperación en el corto plazo, pero la realidad es que existen factores de incertidumbre, presiones económicas y políticas que no hacen tan factible este cambio de tendencia para los analistas. Inclusive en el caso local, la inflación en Colombia llegó a máximos históricos desde 1993 en una tendencia alcista, donde los modelos técnicos y los ciclos anticipaban una corrección superior a 200 pb<sup>12</sup> para cierre de 2016, pero constantes choques en términos de transables, alimentos y energía no pintan un panorama tan claro de corrección para los especialistas del mercado.</p> <p>Es en este sentido que es importante considerar las visiones de los analistas dentro de los modelos de pronóstico y modelamiento de las tasas de interés, a su vez quizás no sea solo una visión acertada, lo que lleva a las variables a ubicarse al nivel de las proyecciones de los analistas: si no adicional a esto la psicología de los agentes ayuda a que estos niveles sean mucho más realizables.</p>
<b>Liquidez</b>	<p>Un mercado se considera líquido cuando hay compradores y vendedores dispuestos a realizar operaciones de compra/venta en cualquier momento y a cualquier nivel de precios en el que cotice el activo. Una forma práctica de medir esta variable es con el spread entre las órdenes de compra y venta en un momento específico de tiempo, éste se construye con la diferencia entre la mejor orden de compra y venta (el precio más alto en el <i>bid</i> y más bajo en el <i>ask</i> respectivamente). Cuanto menor sea esta diferencia, más líquido estará el mercado en ese instante de tiempo.</p> <p>La falta de liquidez hace que este spread entre el <i>bid</i> y <i>ask</i> sea más amplio, y por tanto es más probable que se generen movimientos de mayor rango en los precios, lo que aumenta la volatilidad en estos momentos de poca liquidez.</p> <p>Los datos de <i>bid</i> y <i>ask</i> se pueden descargar desde la plataforma SET-FX en el intervalo de tiempo deseado.</p>
<b>Deuda Soberana</b>	<p>La curva de rendimientos es una guía de inversión, los inversionistas extranjeros están motivados a invertir en economías como Colombia, dado que encuentran una prima en términos de tasa al comprar con las potencias mundiales que en la actualidad tienen tasas por debajo del 1%, inclusive negativas.</p> <p>Es importante para el mercado identificar los movimientos en términos de deuda, liquidez y emisiones, dado que puede motivar la entrada o salida de flujos de inversión.</p>
<b>Dollar Index DXY</b>	<p>Este índice muestra la actualizad del dólar si se aprecia o deprecia frente a las principales monedas de la región, su función está basada en comparar el comportamiento del estadounidense frente a las principales seis divisas del mundo, euro, yen japonés, libra esterlina, dólar canadiense, corona sueca y el franco suizo.</p> <p>La composición del índice actualmente es dólar-euro (57.6%), dólar-yen japonés (13.6%), dólar-libra esterlina (11.9%), dólar-dólar canadiense (9.1%), dólar-corona sueca (4.2%), dólar-franco suizo (3.6%).</p> <p>Este índice permite a los operadores tener señales del mercado rápidas para prever cómo va reaccionar la moneda local.</p>
<b>Tasa de Cambio de equilibrio</b>	<p>La tasa de equilibrio está expresada en función de los valores sostenibles de los fundamentales macroeconómicos en el tiempo, existen diferentes metodologías para su cálculo como la teoría de paridad del poder adquisitivo (PPA), postula que el precio doméstico de los bienes está determinado por el precio internacional medido en moneda local, y que la tasa de cambio nominal debe compensar los diferenciales de inflación entre países. Ello lleva a una tasa de cambio real constante en la versión relativa de la PPA o igual a 1 en su versión absoluta. Sin embargo la</p>

<sup>12</sup> Puntos básicos, inflación actual 3.97% octubre de 2017, pronósticos del gobierno cierre de 2017 dentro del rango meta, mientras que el mercado espera que cierre alrededor de 4.15%.

Variable	Descripción
Noticias	<p>historia muestra que la tasa de equilibrio no es estática en el tiempo (Echavarría et al., 2007). Autores como Echavarría et al. (2007) obtienen un efecto importante para dicha variable, pero éste desaparece en el muy largo plazo. Otros autores afirman que la relación entre la tasa de cambio nominal y real simplemente indica que, a diferencia de lo que sugieren los modelos nominales, los shocks reales también afectan la tasa de cambio nominal (Krugman, Obstfeld, &amp; Melitz, 2012).</p> <p>En general las noticias locales e internacionales con impacto económico y coyuntural generan choques en los niveles de la tasa de cambio, algunos analistas se han preocupado por generar modelos con choques por información.</p> <p>Existen diferentes tipos de noticias como las imprevistas de coyunturas, conflictos, descubrimientos y desastres naturales, entre otros y noticias de revelación de datos que el mercado conoce con antelación la fecha en la que se va a dar información como son la revelación de indicadores macroeconómicos, la aprobación de leyes y la aplicación de políticas.</p> <p>Es importante tener en cuenta cómo se interpretan estas noticias por el mercado. No es tan importante si la noticia fue mala o buena, sino que tan alejada fue la noticia con respecto a lo esperado por el mercado. Los mercados financieros descuentan con el movimiento en los precios el resultado de estas noticias antes de que sean publicadas; si el mercado espera en dato malo en la próxima noticia de inflación, lo más común es que desde meses o días atrás el mercado haya descontado los efectos de esta noticia, por tanto, cuando salga en línea con lo que el mercado esperaba, lo más probable es que no se presenten cambios significativos en las cotizaciones de los activos.</p> <p>Así pues, lo que genera más volatilidad y cambio en los precios, son las noticias que se alejan mucho de lo que el mercado en general está esperando. Este efecto es posible medirlo mediante la construcción de una variable de sorpresa, que cuantifica cuánto sorprendió al mercado una noticia.</p>
<p>Otras Variables como Desempleo, salarios, confianza del consumidor e índice de precios de productor no se consideran determinantes de la tendencia por sí solos, pero son incluidos de forma indirecta dentro de las demás variables.</p>	

Fuente: Elaboración propia.

## Anexo 2. Correlograma Retornos diarios TRM.

Con un nivel de confianza del 5% se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación serial, dado que todos los p-valor son igual a cero.

Autocorrelación	Correlación Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.19	0.19	63.40	0.00
		2	-0.02	-0.06	64.31	0.00
		3	-0.02	0.00	64.77	0.00
		4	0.00	0.00	64.77	0.00
		5	0.00	0.00	64.77	0.00
		6	0.00	0.01	64.80	0.00
		7	-0.02	-0.02	65.42	0.00
		8	0.03	0.04	67.15	0.00
		9	0.06	0.05	73.29	0.00
		10	0.00	-0.02	73.31	0.00
		11	-0.03	-0.03	75.00	0.00
		12	-0.02	-0.01	75.70	0.00
		13	0.01	0.02	76.02	0.00
		14	0.02	0.01	76.81	0.00
		15	0.00	-0.01	76.81	0.00
		16	0.00	0.00	76.81	0.00
		17	0.00	-0.01	76.84	0.00
		18	-0.02	-0.02	77.21	0.00
		19	0.01	0.01	77.26	0.00
		20	0.04	0.04	80.12	0.00

Fuente: Elaboración propia.

## Anexo 3. Comparación Modelos ARIMA.

Se selecciona el modelo ARIMA (9,1,0) como el mejor modelo para la estimación del par USD/COP.

Modelo / Criterios	ARIMA (9,1,0)	ARIMA (1,1,0)
R-squared	0.009248	0.004608
Adjusted R-squared	0.007453	0.003406
Akaike info criterion	-7.369054	-7.366083
Schwarz criterion	-7.346222	-7.346512
Hannan-Quinn criter.	-7.360592	-7.358829
Durbin-Watson stat	2.004227	2.014018

Fuente: Elaboración propia.

#### Anexo 4. Correlograma Residuos al cuadrado modelo ARIMA.

Se comprueba el efecto ARCH con un p-valor de 0, se rechaza la hipótesis nula de no presencia de efecto ARCH.

Autocorrelación		Correlación Parcial		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.17	0.17	49.85	0.00	
		2	0.16	0.13	90.20	0.00	
		3	0.19	0.15	149.46	0.00	
		4	0.15	0.09	187.80	0.00	
		5	0.10	0.03	203.47	0.00	
		6	0.11	0.05	224.59	0.00	
		7	0.19	0.14	286.46	0.00	
		8	0.11	0.03	307.50	0.00	
		9	0.12	0.05	331.64	0.00	
		10	0.12	0.04	356.85	0.00	
		11	0.13	0.05	386.48	0.00	
		12	0.12	0.04	409.39	0.00	
		13	0.19	0.12	471.71	0.00	
		14	0.16	0.06	513.51	0.00	
		15	0.17	0.08	561.12	0.00	
		16	0.14	0.03	594.19	0.00	
		17	0.11	0.00	615.24	0.00	
		18	0.15	0.05	653.13	0.00	
		19	0.10	0.00	670.47	0.00	
		20	0.11	0.01	690.71	0.00	

Fuente: Elaboración propia.

#### Anexo 5. Correlograma de los residuos y los residuos al cuadrado Modelo ARIMA (9,1,0) - GARCH (1,1).

Con un nivel de confianza del 5% se acepta la hipótesis nula de no autocorrelación serial, dado que todos los p-valor son mayores a 5%, los residuos del modelo no están autorrelacionados y son ruido blanco.

Residuos							Residuos al Cuadrado						
Autocorrelación	Correlación Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob		Autocorrelación	Correlación Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.00	0.00	0.01				1	0.01	0.01	0.29	0.59
		2	0.04	0.04	3.06				2	0.05	0.05	4.12	0.13
		3	0.00	0.00	3.06	0.08			3	0.03	0.03	5.35	0.15
		4	0.00	-0.01	3.08	0.22			4	0.00	-0.01	5.37	0.25
		5	0.00	0.00	3.08	0.38			5	0.02	0.02	5.87	0.32
		6	0.01	0.01	3.29	0.51			6	-0.04	-0.04	8.23	0.22
		7	0.00	0.00	3.29	0.66			7	0.03	0.02	9.24	0.24
		8	0.02	0.02	4.07	0.67			8	-0.01	0.00	9.28	0.32
		9	0.01	0.01	4.13	0.77			9	0.01	0.01	9.51	0.39
		10	-0.04	-0.05	7.24	0.51			10	-0.02	-0.02	10.26	0.42
		11	0.05	0.05	11.60	0.24			11	0.00	0.01	10.28	0.51
		12	-0.03	-0.03	13.14	0.22			12	-0.01	-0.01	10.51	0.57
		13	0.01	0.01	13.43	0.27			13	-0.02	-0.02	11.46	0.57
		14	0.03	0.03	14.66	0.26			14	0.03	0.03	12.63	0.56
		15	0.00	0.00	14.69	0.33			15	-0.01	-0.01	12.88	0.61
		16	0.01	0.01	15.02	0.38			16	0.02	0.02	13.52	0.63
		17	-0.02	-0.02	15.73	0.40			17	0.01	0.02	13.86	0.68
		18	-0.01	-0.01	15.99	0.45			18	-0.02	-0.02	14.47	0.70
		19	-0.02	-0.02	16.50	0.49			19	-0.03	-0.03	15.94	0.66
		20	0.04	0.04	18.80	0.41			20	-0.04	-0.03	18.27	0.57

Fuente: Elaboración propia.

### Anexo 6. Correlograma Residuos al cuadrado Modelo ARIMAX.

Se comprueba el efecto ARCH con un p-valor de 0, se rechaza la hipótesis nula de no presencia de efecto ARCH.

Autocorrelación		Correlación Parcial		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.18	0.18	53.87	0.00	
		2	0.20	0.17	119.03	0.00	
		3	0.22	0.17	196.33	0.00	
		4	0.14	0.06	227.93	0.00	
		5	0.12	0.04	251.70	0.00	
		6	0.11	0.03	272.19	0.00	
		7	0.17	0.11	318.82	0.00	
		8	0.13	0.05	345.42	0.00	
		9	0.11	0.03	367.26	0.00	
		10	0.08	-0.02	376.70	0.00	
		11	0.09	0.02	389.92	0.00	
		12	0.10	0.04	405.58	0.00	
		13	0.12	0.07	429.22	0.00	
		14	0.15	0.08	464.90	0.00	
		15	0.10	0.02	482.98	0.00	
		16	0.15	0.06	520.06	0.00	
		17	0.13	0.04	547.99	0.00	
		18	0.09	0.01	562.99	0.00	
		19	0.06	-0.04	569.02	0.00	
		20	0.10	0.01	584.09	0.00	

Fuente: Elaboración propia.

### Anexo 7. Correlograma de los residuos y los residuos al cuadrado Modelo ARIMAX (9,1,0) - GARCH (1,1).

Con un nivel de confianza del 5% se acepta la hipótesis nula de no autocorrelación serial, dado que todos los P-Valor son mayores a 5%, los residuales del modelo no están autorrelacionados y son ruido blanco.

Residuos						Residuos al Cuadrado							
Autocorrelación	Correlación Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelación	Correlación Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob		
		1	0.03	0.03	1.02			1	0.02	0.02	0.45	0.50	
		2	0.03	0.03	2.62	0.11			2	0.05	0.05	4.82	0.09
		3	0.01	0.01	2.69	0.26			3	0.03	0.03	6.56	0.09
		4	-0.01	-0.01	2.87	0.41			4	0.00	0.00	6.57	0.16
		5	0.01	0.01	2.92	0.57			5	0.01	0.01	6.84	0.23
		6	0.02	0.02	3.31	0.65			6	-0.03	-0.03	8.09	0.23
		7	0.00	0.00	3.31	0.77			7	0.02	0.02	8.77	0.27
		8	0.02	0.02	4.09	0.77			8	-0.01	-0.01	9.06	0.34
		9	0.00	0.00	4.10	0.85			9	0.01	0.01	9.18	0.42
		10	-0.03	-0.03	5.89	0.75			10	-0.03	-0.03	10.52	0.40
		11	0.05	0.05	9.21	0.51			11	0.01	0.01	10.71	0.47
		12	-0.04	-0.04	11.32	0.42			12	0.00	0.00	10.72	0.55
		13	0.01	0.01	11.44	0.49			13	-0.02	-0.02	11.28	0.59
		14	0.02	0.02	12.14	0.52			14	0.03	0.03	12.86	0.54
		15	0.00	0.00	12.16	0.59			15	-0.01	-0.01	13.01	0.60
		16	0.02	0.01	12.61	0.63			16	0.03	0.03	14.50	0.56
		17	-0.02	-0.02	13.19	0.66			17	0.00	0.00	14.51	0.63
		18	-0.01	-0.01	13.51	0.70			18	-0.02	-0.03	15.44	0.63
		19	-0.02	-0.02	14.00	0.73			19	-0.03	-0.04	17.33	0.57
		20	0.038	0.04	16.37	0.632			20	-0.05	-0.04	20.91	0.40

Fuente: Elaboración propia.



# Combinación del método CART y de econometría de corte transversal para la identificación de determinantes: supervivencia de exportaciones argentinas

GONZÁLEZ, GERMÁN

Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales del Sur y Departamento de Economía  
Universidad Nacional del Sur (Argentina)

Correo electrónico: ghgonza@uns.edu.ar

DELBIANCO, FERNANDO

Instituto de Matemáticas de Bahía Blanca y Departamento de Economía  
Universidad Nacional del Sur (Argentina)

Correo electrónico: fernando.delbianco@uns.edu.ar

MICHALCZEWSKY, KATHIA

Instituto para la Integración de América Latina y Departamento de Economía  
Universidad Nacional del Sur (Argentina)

Correo electrónico: kmichalczewsky@gmail.com

RAMIREZ, MICAELA

Departamento de Economía, Universidad Nacional del Sur (Argentina)

Correo electrónico: micaela.ramirez@uns.edu.ar

## RESUMEN

Este trabajo identifica factores explicativos de la supervivencia de flujos de comercio argentinos utilizando como método de identificación la combinación del método de Análisis de Árbol de Clasificación y Regresión (CART, con sus siglas en inglés) y econometría de corte transversal. Mientras que el primero determina los mejores predictores, el segundo ofrece una función global que vincula a la variable dependiente con aquellos. La combinación de estos métodos permite reducir el número de variables potencialmente explicativas en problemas en los que no existe consenso teórico, o salvar situaciones en las que existen relaciones no lineales, datos faltantes u observaciones anómalas. La aplicación al caso de estudio permite observar que existe una diferencia significativa entre flujos de exportaciones preexistentes y nuevos flujos, a pesar de que las variables explicativas de su duración resulten ser las mismas.

**Palabras clave:** flujos de comercio, exportaciones, supervivencia, análisis de árbol de clasificación y decisión, econometría de corte transversal.

**Clasificación JEL:** C41; F10.

**MSC2010:** 62H30; 62J05.

Artículo recibido el 9 de mayo de 2018 y aceptado el 5 de marzo de 2019



# Combination of the CART method and cross-section econometrics for the identification of determinants: Survival of Argentine exports

## ABSTRACT

This paper identifies factors that explain the survival of Argentine trade flows using the combination of the Classification And Regression Tree analysis (CART) method and cross-section econometrics as the identification method. While the first determines the best predictors, the second offers a global function that links the dependent variable with those. The combination of these methods allows to reduce the number of potentially explanatory variables in problems in which there is no theoretical consensus, or to resolve situations in which there are non-linear relationships, missing data or anomalous observations. The application to the case study allows us to observe that there is a significant difference between pre-existing export flows and new flows, even though the explanatory variables of their duration turn out to be the same.

**Keywords:** trade flows, exports, survival, CART, cross section econometrics.

**JEL classification:** C41; F10.

**MSC2010:** 62H30; 62J05.



## 1. Introducción.

Sucesivos trabajos científicos desde comienzos de los años 2000 han fortalecido la hipótesis de que el crecimiento de las exportaciones en las economías en desarrollo ha estado impulsado, predominantemente, por el margen intensivo más que el margen extensivo -esto es, el crecimiento de los flujos existentes más que a partir de nuevos flujos de comercio (Besedes & Prusa, 2007; Brenton, Saborowski & von Uexkull, 2009). De todas formas, este fenómeno no sería exclusivo de las economías en vías de desarrollo, sino un fenómeno de carácter general.

En cambio, lo notable es que las economías en desarrollo experimentan una muy baja tasa de supervivencia en los nuevos productos exportados y esto contrarresta sus intentos por mejorar sus resultados comerciales. Argentina no es la excepción. Claramente, el estudio de este fenómeno es sumamente importante desde el punto de vista de la política práctica. No solo requiere atención la consideración de los factores conducentes a generar nuevos flujos de exportación, sino también de aquellos que proporcionen sustentabilidad a esos flujos; y, por consiguiente, garanticen el crecimiento del flujo de exportaciones agregadas, uno de los principales objetivos de estas economías.

Por lo general, se define la tasa de riesgo como la probabilidad de que finalice el flujo comercial en el momento  $t$  dado que no ocurrió antes y se estima su complemento, es decir, la tasa de supervivencia, mediante el estimador de Kaplan-Meier, o se regresan modelos de duración del tipo Cox, Weibull, o Prentice-Gloeckler.

A diferencia de estos ejercicios, se propone aquí un abordaje que parte de una medida alternativa de supervivencia y utiliza el método de análisis de árbol de clasificación y regresión (CART en sus siglas en inglés) para identificar los mejores predictores de la supervivencia de los flujos de exportaciones, combinado con econometría de corte transversal para fortalecer las conclusiones. Los justificativos de esta propuesta metodológica se presentan en la siguiente sección. En la sección 3 se muestran los datos, fuentes y variables. La sección 4 expone los resultados y en la sección 5 se proponen las consideraciones finales.

## 2. Antecedentes.

La propuesta metodológica que se presenta es la combinación de dos técnicas de análisis estadístico, una de ellas utilizadas desde hace tiempo en las ciencias médicas, aunque recientemente incorporada a la ciencia económica, y otra con el camino inverso.

El análisis de árbol de clasificación y regresión (CART por sus siglas en inglés) es un análisis de partición recursiva, capaz de manejar eficientemente relaciones no lineales, datos faltantes y robustos ante observaciones anómalas. El método involucra la discriminación de diferentes valores de variables de clasificación utilizando un árbol de decisión compuesto de divisiones binarias (nodos) que se van agregando progresivamente. Todos los valores de cada predictor son considerados un potencial divisor, siendo elegido el divisor óptimo a partir del criterio de impureza. Necesariamente, la división de un nodo debe aumentar la homogeneidad de los subconjuntos resultantes.

González-Fernández y González-Velasco (2016) son un claro ejemplo de la utilidad de aplicar CART en la ciencia económica. Este artículo ofrece un estudio sobre los determinantes de que algunos países paguen más por su deuda de largo plazo. Muchas de las conclusiones a los que los autores llegan hubieran sido difíciles de alcanzar con métodos tradicionales de regresión, por las no linealidades no paramétricas que se desprenden del análisis de árbol de clasificación.

Otros artículos que utilizan CART en las ciencias económicas, ya sea como metodología principal o suplementaria al análisis econométrico, son Gepp y Kumar (2015), Sohn y Moon (2004), y Tso y Yau (2007). El primero de ellos utiliza CART para analizar la posibilidad de

crisis financieras, comparando los resultados que arroja con los que arroja un análisis de supervivencia de Cox, y encuentran que los resultados son similares. Sohn y Moon utilizan árboles de clasificación para identificar los determinantes que hacen que la inversión en investigación y desarrollo (I+D) de las empresas logre ser efectivamente comercializada por ellas. Con el resultado de la clasificación obtenida, los autores proveen un enfoque para decidir qué variables ambientales deberían jugar un rol (y cómo) en la decisión de financiación de futuros proyectos de I+D. Finalmente, Tso y Yau (2007) incorporan CART junto con redes neuronales en un contexto de predicción de consumo de energía, para concluir que dichas metodologías tienen propiedades deseables a la hora de predecir, y deberían ser consideradas para complementar el análisis clásico de regresión paramétrica.

La desventaja que presenta el método CART es que carece de una función global y, por consiguiente, requiere de un gran número de datos para asegurarse que las relaciones detectadas sean significativas. Blanco, Irima y Vázquez (2016) enfrentan este problema combinando el método CART con estimaciones paramétricas. En particular, pre-seleccionan variables mediante el análisis del área bajo la curva (ROC) luego de hacer una regresión logística, y, con el subconjunto de variables seleccionadas, pasan a trabajar con el algoritmo de clasificación. Sin embargo, los autores pierden de vista que variables eliminadas en la etapa de preselección, podrían haber sido útiles en la clasificación de alguna manera no paramétrica (i.e. existen no linealidades difíciles de captar por el *logit*)

A diferencia de aquel trabajo, aquí se propone combinar el análisis de árbol de clasificación con una serie de estimaciones de mínimos cuadrados óptimos (MCO) que ofrezca dicha función global sin reasignar atributos. La naturaleza del problema estudiado y la definición de la variable dependiente, permiten alcanzar grados de libertad más que suficientes como para elegir los nodos y las divisiones del árbol de clasificación. Dicho de otro modo, si las observaciones son suficientes, es preferible que el algoritmo sea capaz de utilizar todos los atributos presentes en los datos. La complementación con MCO rinde, eficientemente, como análisis de robustez.

### **3. Fuentes de datos y variables.**

La variable primaria ha sido el flujo anual de exportaciones argentinas de bienes desagregados a seis dígitos del Sistema Armonizado en su versión 1992, por socio y para el período 2000-2015. La base incluye la totalidad de flujos de exportaciones de cada año para ese período, que abarca un total de 4959 productos destinados a 201 países, alcanzando un total de 123.589 flujos. Si se considera como referencia el total de productos y el total de destinos, la base de datos contiene el 12.4% de los flujos de exportaciones potenciales argentinas.

Con el objeto de reducir una dimensión, se definió una variable secundaria, exportaciones por producto-destino para cada año de la ventana temporal. Finalmente, el estudio de supervivencia se realizó sobre la variable *maxduration*, definida como la cantidad de años en que la variable exportaciones desagregada por producto-destino fue positiva en forma continua. Es decir que, si el valor  $x_{ijt}$  representa el volumen de exportaciones del producto  $i$  al destino  $j$  en el año  $t$ , y si  $x_{ijt}$  fue positiva durante 5 años y luego el flujo se detuvo, *maxduration* toma valor 5 y representa la cantidad de años que sobrevivió ese flujo de exportaciones. Considerando que un flujo puede reiniciarse varias veces durante un período suficientemente largo de tiempo, se ha tomado por defecto el período de máxima duración.

La base de datos se construyó a partir de varias fuentes estadísticas. En cuanto a los datos de exportaciones argentinas, éstos fueron obtenidos a partir de la Base pour l'Analyse du Commerce International del Centre d'Études Prospectives et d'Informations Internationales (CEPII) por ser una base con alto nivel de desagregación y armonizada en términos de clasificación de productos. Por lo tanto, permite hacer comparaciones de las canastas entre períodos de tiempo alejados.

Para identificar los predictores de la cantidad de años que se espera sobreviva un flujo de exportaciones de un producto determinado a un destino identificado, se consideraron una batería de variables. Partiendo de la premisa de que el comercio bilateral se ve afectado tanto por factores que facilitan, como de otros que lo entorpecen, es plausible que estos mismos factores tengan alguna responsabilidad en la permanencia de los flujos en el tiempo. Es así como fueron consideradas potencialmente explicativas las variables típicas de los modelos gravitacionales del comercio: el tamaño del mercado abastecido fue aproximado por el producto bruto doméstico (PPPDP), mientras que se utilizaron varias medidas alternativas de distancia (dist). A esta lista se agregaron variables dicotómicas para la existencia de lengua oficial común (comlang\_off) y para la existencia de límites geográficos compartidos (contig).

Nitsch (2007) encuentra que el riesgo de que un flujo de exportaciones se detenga aumenta con la distancia y disminuye con el tamaño del mercado abastecido. Mientras que la existencia de límites comunes, lengua común e, incluso, lazos culturales o coloniales pueden resultar facilitadores del comercio cuando los productos son diferenciados<sup>1</sup> dado que reducen los costos de búsqueda (Rauch, 1999).

Tras el trabajo de Rauch (1996), otros estudios suministraron evidencia a favor de las diferencias en el comercio de bienes homogéneos frente a los diferenciados<sup>2</sup>. En particular, Besedes y Prusa (2006a) encontraron que el tamaño de la transacción inicial (maxvicial) tiene un efecto positivo en la tasa de supervivencia de los bienes diferenciados, y mayor es este efecto cuanto mayor es la duración del flujo, lo cual hace que el efecto sea persistente.

El hecho de que el flujo sea nuevo también puede implicar cierta fragilidad debido a que el exportador no cuenta con información perfecta sobre su productividad y capacidad para competir, ni cuenta con conocimiento pleno del mercado abastecido, hasta que comienza a exportar. Para capturar este fenómeno se construyó una variable dicotómica (nuevo), que toma valor 1 si las exportaciones en el momento t son positivas y tomaron valor nulo en t-1.

Además, los flujos comerciales de bienes homogéneos son más frágiles debido a las mayores posibilidades de sustitución que presentan estos productos, y este efecto interactúa con el tipo de mercado abastecido. Se podría esperar que, en economías más avanzadas, la competencia, las condiciones de acceso y la elasticidad de sustitución de la demanda fuesen mayores, lo que elevaría el estándar de las firmas exportadoras y también las posibilidades de entablar rápidamente nuevas relaciones comerciales que sostengan el flujo. Para considerar este efecto se incorpora una variable dicotómica (incomegroup1) que toma valor 1 cuando la economía importadora pertenece al estrato de ingreso per cápita alto, de acuerdo a la clasificación del Banco Mundial.

Para considerar posibles efectos asimétricos, en este trabajo se han realizado reagrupamientos alternativos de los bienes exportados: siguiendo la clasificación utilizada por Giordano (2016), por rubro (manufacturas de origen agropecuario, manufacturas de origen industrial, manufacturas de origen mineral, productos primarios agropecuarios, productos primarios minerales, combustibles y energía); y, siguiendo la clasificación de Lall (2000), por contenido tecnológico (productos primarios, manufacturas basadas en recursos naturales, manufacturas de bajo, de medio y de alto contenido tecnológico).

---

<sup>1</sup> Se entiende por productos homogéneos tanto a los bienes que son comercializados en mercados organizados, como aquellos que poseen precios de referencia establecidos por entidades especializadas. Mientras que los bienes diferenciados no tienen un precio de referencia por la multiplicidad de características y variedades, por lo que no es posible el arbitraje y los compradores y vendedores se involucran en un proceso de búsqueda que finaliza cuando se alcanza un precio de reserva (Rauch, 1996).

<sup>2</sup> Besedes y Prusa (2006b) enumeran los principales hechos estilizados.

Las características del mercado fueron consideradas a partir del nivel de ingreso per cápita (alto, medio y bajo) según el Banco Mundial, y la región (América Latina y El Caribe; América del Norte; África del Norte y Este Medio; África Subsahariana; Europa y Asia Central; Asia del Este y Pacífico; Asia del Sur). También se ha considerado la posibilidad de diferencias en la calidad de las instituciones mediante la variable IPD2016, calculada como el promedio de los ítems B, C y D del Institutional Profiles Database (CEPII).

Finalmente, la escala del flujo de exportaciones de un producto a un mercado específico puede ser un determinante significativo; por ello, se incluye la variable share calculada como el cociente entre el tamaño del flujo específico y la suma de todos los flujos al mismo destino en el momento  $t$ . Desde el punto de vista de los costos (logísticos, financieros, de información) puede resultar ventajoso que un mismo destino cumpla el rol de multimercado, siempre que existan economías de escala y vínculos intersectoriales que permitan alcanzarlas. Sin embargo, la permanencia de un share significativo responde a la preexistencia de un capital intangible intransferible, llámese historial de acuerdos comunes exitosos, red de contactos de confianza, etc. que elimina costos de búsqueda, facilita las negociaciones, y redundaría en una mayor supervivencia del flujo.

Tanto las condiciones macroeconómicas como los cambios en las políticas podrían afectar la supervivencia de los flujos. Este efecto puede ser controlado mediante un efecto fijo en las regresiones de datos de panel si la base de datos es balanceada. En este caso, el panel construido no cumple con esa característica debido a la definición de la variable de interés. De todas formas, las variables omitidas no representan un problema para el método de identificación utilizado.

## **4. Resultados.**

### **4.1. Descripción estadística.**

La Tabla 1 describe estadísticamente a las variables seleccionadas. La base cuenta con 804563 observaciones, cada una de ellas corresponde a la duración del flujo de exportaciones de un bien identificado a un destino determinado. El 25% de las observaciones se encuentra censurado a la izquierda, es decir, se observa comercio desde el inicio del período considerado, y el 26% está censurado a la derecha, es decir, el flujo alcanza el extremo mayor del período. En ambos casos, el corte podría introducir error debido a que, en el primer caso, puede suponerse un nacimiento cuando el flujo ya existía desde antes del año 2000; mientras que, en el segundo caso, puede suponerse una muerte cuando en realidad el flujo no terminó en 2015. Por tal motivo, se han tomado las definiciones para minimizar la probabilidad de error.

La duración promedio de los flujos de comercio medido en términos de producto-destino y para el período considerado (16 años entre 2000 y 2015) supera los 7 años. Comparado con otros estudios, la media resulta significativamente alta<sup>3</sup>. Esto se debe a que, por cuestiones metodológicas, la base de datos no incluye los valores nulos y, por definición, la variable toma el período máximo en aquellos casos en que existe intermitencia en los flujos durante los 16 años. Esta situación ocurre en el 31% (38539 flujos) de los casos, siendo 1.49 años la media de las observaciones de los flujos descartados.

Es preciso tener en cuenta, también, que el valor promedio de duración de los flujos disimula la dinámica interna, que podría caracterizarse en algún producto particular por altas tasas

---

<sup>3</sup> González (2015) señala que la duración media de los flujos de exportaciones argentinas -al mismo nivel de desagregación que el presente trabajo- para el período 1993-2012 es 3 años, Besedes y Prusa (2007) y Besedes y Blyde (2010) encuentran valores menores a los 4 años para países con diferentes niveles de desarrollo y perfiles productivos. Del mismo modo se presenta en Fugazza y Molina (2011), con un promedio de 10 años de duración para países desarrollados y de 2 para países en desarrollo.

de entrada y salida de firmas exportadoras; y también hay que considerar que el desvío estándar de la duración media se encuentra cerca de los 6 años, un valor que deja en evidencia la gran disparidad existente al nivel de producto-destino.

**Tabla 1. Estadística descriptiva.**

Variable	Obs	Media	Desvío estándar	Min	Max
Maxduration	804563	7.154509	5.568756	1	16
Maxvinicial	804563	564.2249	10333.99	1	1157631
Share	792505	.0807566	.1869666	0	1
Dist	798180	7701.01	5076.709	215.0746	19447.35
Contig	798180	.2429527	.428867	0	1
comlang_off	798180	.45826	.498255	0	1
IPD2016Prom	778939	2.299403	.2636286	.8873239	2.842105
incomegroup1	799854	.4618755	.4985447	0	1
PPPGDP	787766	1462.749	3164.803	.037	19695.74

Fuente: Elaboración propia (ver Anexo).

Es interesante ver en la Tabla 2 que tanto la duración media como el valor inicial medio se reduce con el nivel de ingreso del mercado de destino: desde 7 hasta un valor cercano a 4 años, para la primera variable, mientras que 586.58 a 247.63 en la segunda.

También muestra una gran disparidad cuando las observaciones se reagrupan por regiones geográficas: por encima de los 8 años para los flujos destinados a América Latina y El Caribe, y un valor similar para América del Norte, mientras que se reduce a 4/5 años para las restantes regiones. Los valores iniciales medios también varían sustancialmente según la región abastecida, pero no se observa un patrón que sintetice la relación entre ambas variables.

En cuanto a los reagrupamientos según rubro y según contenido tecnológico, las Tablas 3 y 4 muestran las duraciones medias más altas en productos primarios, principalmente agropecuarios, y manufacturas basadas en recursos naturales y de tecnología media, los cuales concuerdan con aquellos donde Argentina presenta ventajas comparativas<sup>4</sup> (Corbella, 2016). Sin embargo, los valores rondan los 7 años en todos los casos y las diferencias no son significativas.

**Tabla 2. Duración y valor inicial por grupos de mercados destino.**

Variable	Obs	Media	Desvío estándar	Min	Max
Países de ingresos altos					
maxduration	369433	7.339718	5.687787	1	16
maxvinicial	369433	586.5832	10351.3	1	1157631
Países de ingresos bajos					
maxduration	15706	3.76805	3.758535	1	16
maxvinicial	15706	247.6323	1483.407	1	53581.02
América Latina y El Caribe					
maxduration	393147	8.646758	5.693496	1	16
maxvinicial	393147	542.6462	12419.39	1	1157631
América del Norte					
maxduration	44921	8.342913	5.733946	1	16
maxvinicial	44921	1212.218	14897.66	1	558359.7

<sup>4</sup> En Nicita, Shirotori y Tumurchudur (2013) se estudia si la distancia entre la canasta de bienes exportados y aquellos en los que presentan ventaja comparativa afecta la duración de las exportaciones. Los autores encuentran que solo después de 10 años de duración de la relación comercial, el efecto es similar entre países menos adelantados y países del MERCOSUR. Sin embargo, en los primeros años, ese efecto es mayor en el primer grupo respecto del segundo.

Variable	Obs	Media	Desvío estándar	Min	Max
Africa del Norte					
maxduration	47183	4.379798	4.260487	1	16
maxviniacial	47183	595.289	5208.854	1	195222.3
Asia del Este y Pacífico					
maxduration	70224	5.302162	4.78129	1	16
maxviniacial	70224	590.0801	8906.881	1	531285.4
Asia del Sur					
maxduration	13076	4.94662	4.502039	1	16
maxviniacial	13076	987.8443	11136.07	1	204149.6
Europa y Asia Central					
maxduration	195913	5.96541	5.08905	1	16
maxviniacial	195913	463.541	5729.625	1	317231.8

Fuente: Elaboración propia (ver Anexo).

**Tabla 3. Duración por rubro del bien exportado.**

Rubro	Obs	Media
Combustibles y energía	3400	7.387941
Manufactura de origen agropecuario	103496	7.762329
Manufactura de origen industrial	558502	7.018021
Manufactura de origen minero	63914	6.677442
Producto primario agropecuario	70411	7.774666
Producto primario mineral	4840	7.020868

Fuente: Elaboración propia (ver Anexo).

**Tabla 4. Duración por grupo según contenido tecnológico del bien exportado.**

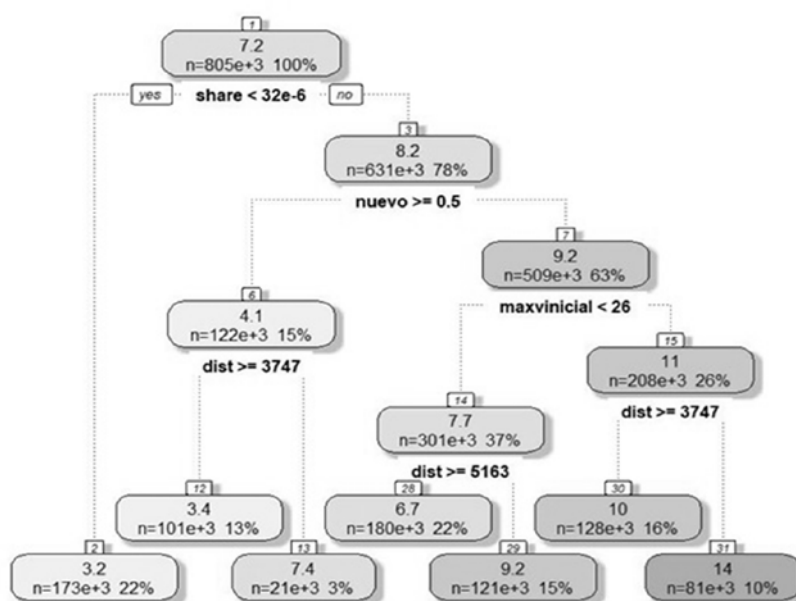
Grupo	Obs	Media
Producto primario	92120	7.756741
Manufactura basada en recursos naturales		
Agrícola/forestal	95237	7.437897
Otros	69268	7.096451
Manufacturas de baja tecnología		
Textil	90673	6.689819
Otras	120542	6.95828
Manufactura de tecnología media		
Productos automotores	17821	7.746591
Industrias de procesos de tecnología media	79568	7.59945
Ingeniería de tecnología media	142712	6.910764
Manufactura de alta tecnología		
Productos electrónicos y eléctricos	46039	6.372336
Otros	38731	7.140508
Otras transacciones	11852	8.228316

Fuente: Elaboración propia (ver Anexo).

#### 4.2. Análisis multivariado.

La Figura 1 muestra el árbol de clasificación para la muestra completa. El número de observaciones, como se mencionó antes, está cerca de los 805000 registros, cada uno de los cuales se corresponde con la duración de flujos de exportaciones según producto-destino para el período 2000-2015. La división estadísticamente más significativa, ubicada en la base del árbol, separó a los flujos de acuerdo con share. Si bien el valor umbral para la clasificación representa un valor muy bajo comparado con su media, es claramente significativo en términos de duración del flujo: mientras que, si no lo supera, la duración media es algo más de 3 años (Grupo 2; 22%); si lo supera, la supervivencia aumenta en un año (Grupo 3; 78%).

Figura 1. Árbol de clasificación para la muestra completa



Fuente: Elaboración propia.

El grupo 3 es dividido según sea un flujo nuevo (Grupo 6; 15%) o no lo sea (Grupo 7; 63%). Si el flujo es nuevo y el mercado es una economía relativamente lejana, la duración esperada se reduce a 3 años (13%); mientras que, si la distancia es menor al umbral, la duración supera los 7 años (3%).

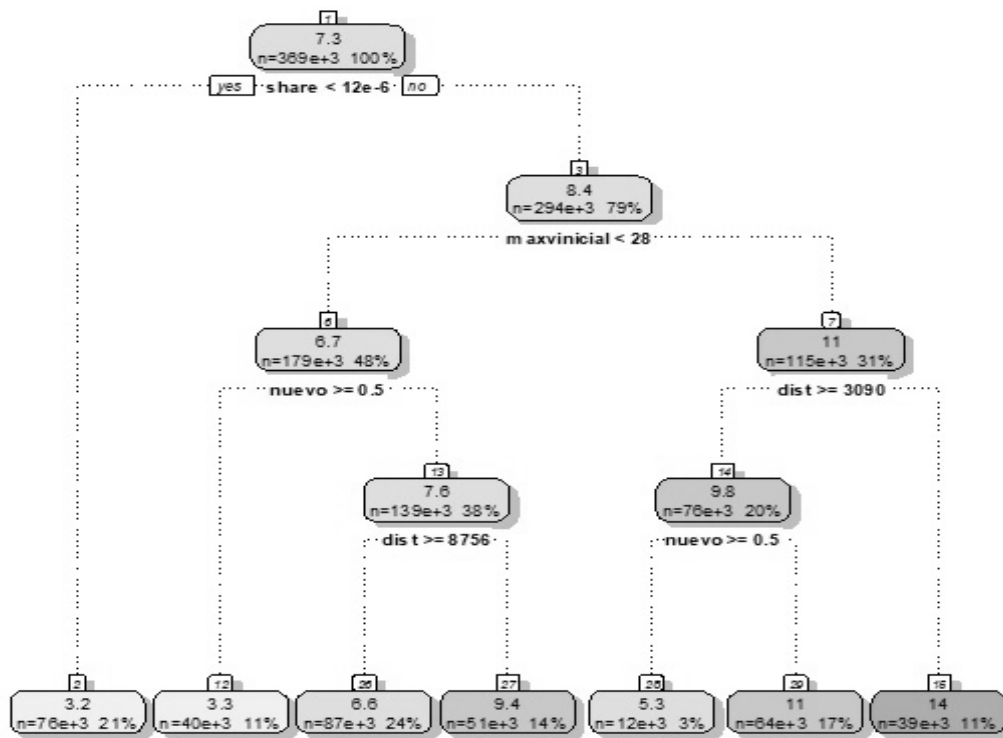
En cambio, si el flujo no es nuevo, gana relevancia el valor inicial del flujo correspondiente y se anticipa a la distancia como predictor, y las expectativas de supervivencia mejoran cuando el valor inicial supera al umbral computado por el algoritmo. Tras ello, tanto para el Grupo 6 (no nuevo, con valor inicial por debajo del umbral) como para el Grupo 7 (no nuevo, con valor inicial por encima del umbral), la duración del flujo se reduce con la distancia.

Finalmente, el mejor pronóstico de supervivencia lo tienen los flujos de exportaciones que son significativos en términos de escala (aunque con un umbral bajo), con cierta experiencia acumulada y que, preferentemente, correspondan a mercados cercanos. El 10% de las observaciones comparten estas características y alcanzan los 14 años promedio (Grupo 31), mientras que el 13% reúne las condiciones contrarias y su pronóstico se reduce a 3 años (Grupo 12).

Cuando se agruparon las observaciones según las características del mercado abastecido, surgieron resultados interesantes para remarcar. Si el nivel de desarrollo es el criterio elegido, los mejores pronósticos (en términos de supervivencia) los muestra el árbol que corresponde a las exportaciones dirigidas a las economías con mayores ingresos per cápita (Figuras 2a y 2b). Tanto en su mayor como en su menor pronóstico, los años esperados resultan superiores que en los casos similares pero destinados a economías de ingresos bajos. La diferencia mayor, en términos porcentuales, se da en los flujos con menor escala, en cuyos casos el pronóstico para destinos ricos es 50% superior al pronóstico de los destinos relativamente pobres: 3.2 frente a 2.1 años. Sin embargo, la diferencia en años de supervivencia es significativa en el extremo superior: 14 años para los mercados ricos frente a 9.2 en los países relativamente pobres. La explicación parece estar vinculada con la mayor escala en los flujos, pero también podría deberse al tipo de producto comercializado y a las condiciones de acceso a esos mercados, que elevan el estándar de competitividad de las firmas exportadoras.

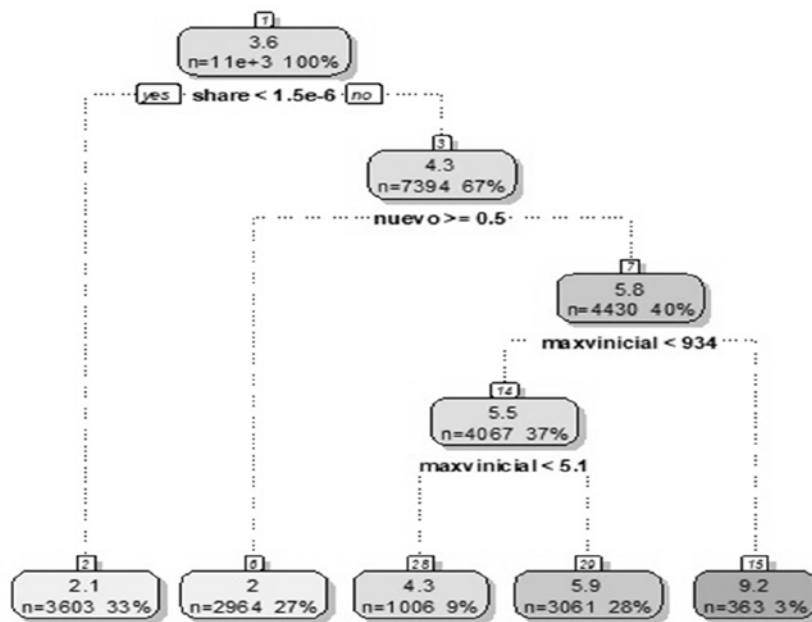


Figura 2a. Árbol de clasificación para destinos con ingreso per cápita alto



Fuente: Elaboración propia.

Figura 2b. Árbol de clasificación para destinos con ingreso per cápita bajo



Fuente: Elaboración propia.

Son la escala de los flujos, el valor inicial, la experiencia y la distancia, los predictores más relevantes para clasificar a los flujos de exportaciones dirigidas a países de ingreso per cápita alto. La escala inicial, maxvicial, divide al 79% de los flujos en dos grupos con medias de 7 y 11 años de supervivencia respectivamente. A partir de este punto, los flujos nuevos son los que peor

pronóstico presentan, y es aún más bajo cuanto más lejos sea el destino. De todas formas, estas características se disputan la supremacía como predictor, marcando una posible no-linealidad en la relación entre estas variables y maxduration. Esta observación se ve reforzada al notar que la distancia no es relevante como predictor para los flujos destinados a mercados incluidos en el grupo de países de bajos ingreso per cápita ni tampoco en gran parte de las regiones geográficas.

Observando los árboles por regiones geográficas de destino<sup>5</sup> se identifica un patrón en el que la distancia no resulta relevante como predictor y en donde aparecen, manteniendo el mismo orden, share, nuevo y maxviniacial. Este patrón lo presentan Europa, Asia y Norte de África. Por lo que, la existencia de vínculos consolidados y la experiencia previa elevan notablemente el pronóstico de supervivencia. La carencia de alguna de ellas reduce la expectativa a 2 o 3 años, mientras que su existencia simultánea se relaciona con un mínimo de 5 años y a un máximo de 13 años como medias, dependiendo positivamente del tamaño inicial del flujo.

Los flujos dirigidos a América del Norte tienen un pronóstico similar (4 años para el peor de los casos y 13 años en el otro extremo). A diferencia de las regiones anteriores, en el segundo nivel del árbol, la escala inicial del flujo resulta mejor predictor que la experiencia. Algo similar ocurre con los mercados de América Latina y El Caribe. Considerando a las variables share, maxviniacial y nuevo (en ese orden) se alcanza una predicción de supervivencia para el 67% de los flujos con destino latinoamericano, que alcanza un máximo de 10 años para los casos en los que se cuenta con experiencia previa y no se supera un determinado umbral de escala en el primer año en que se registraron exportaciones. El mejor pronóstico para esta región es de 13 años, y corresponde a los casos en que se supera los umbrales definidos para share y maxviniacial, y los mercados son relativamente cercanos.

Nuevamente, la relevancia como predictor de la variable dist es discutida cuando se reagrupan los flujos de acuerdo con el tipo de producto. Para los productos primarios agropecuarios (PPA), la distancia no es relevante y el primer nodo separador corresponde a maxviniacial. En la Figura 3 se observa que este predictor identifica a un grupo (67% de los flujos) con media de 6 años, pero con un pronóstico máximo de 8 cuando se supera el umbral de share y cuando existe experiencia previa. El restante grupo identificado (33%) presenta una media de 11 años, pero alcanzaría los 12 años si el flujo no es nuevo.

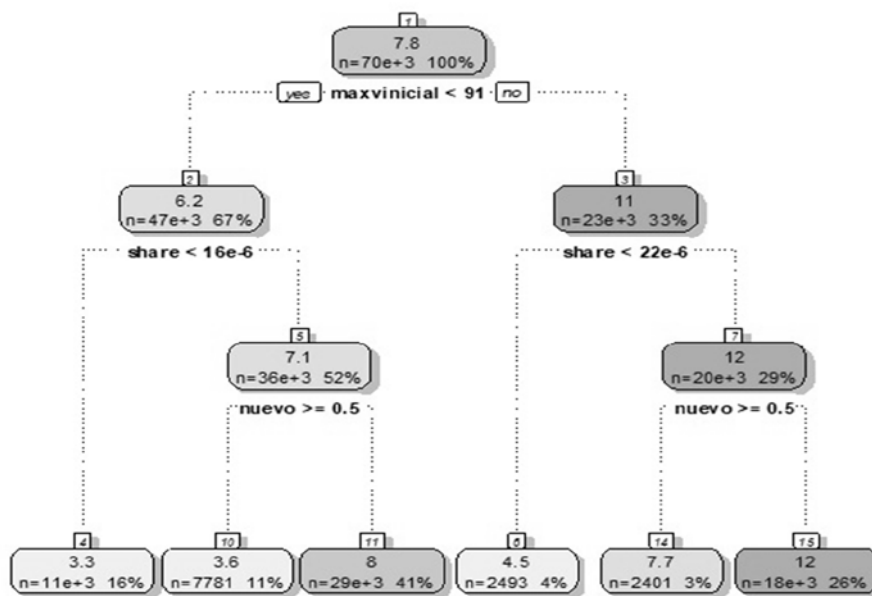
Las manufacturas de origen agropecuario (MOA) y las manufacturas de origen industrial (MOI) presentan como primer separador a share. Los grupos conformados por los flujos que superan el umbral definido para esta variable contemplan el 74% y el 78%, respectivamente. Luego, las variables maxviniacial y nuevo se disputan el lugar como segundo separador, y dist aparece como último predictor relevante.

Aquellos flujos de MOA que presentan una escala significativa para el mercado abastecido, cuyo valor inicial superó el umbral de maxviniacial y no es un flujo nuevo, tienen un pronóstico de 11 o 14 años, dependiendo de si el mercado es lejano o cercano. Por su parte, los flujos de MOI que superan el umbral de share, no son flujos nuevos y su valor inicial fue suficientemente grande, presentan un pronóstico cercano a 7 en el peor de los casos (destinos muy lejanos) y de 13 en el mejor de ellos (destinos relativamente cercanos). Las figuras 4a y 4b muestran los árboles correspondientes.

---

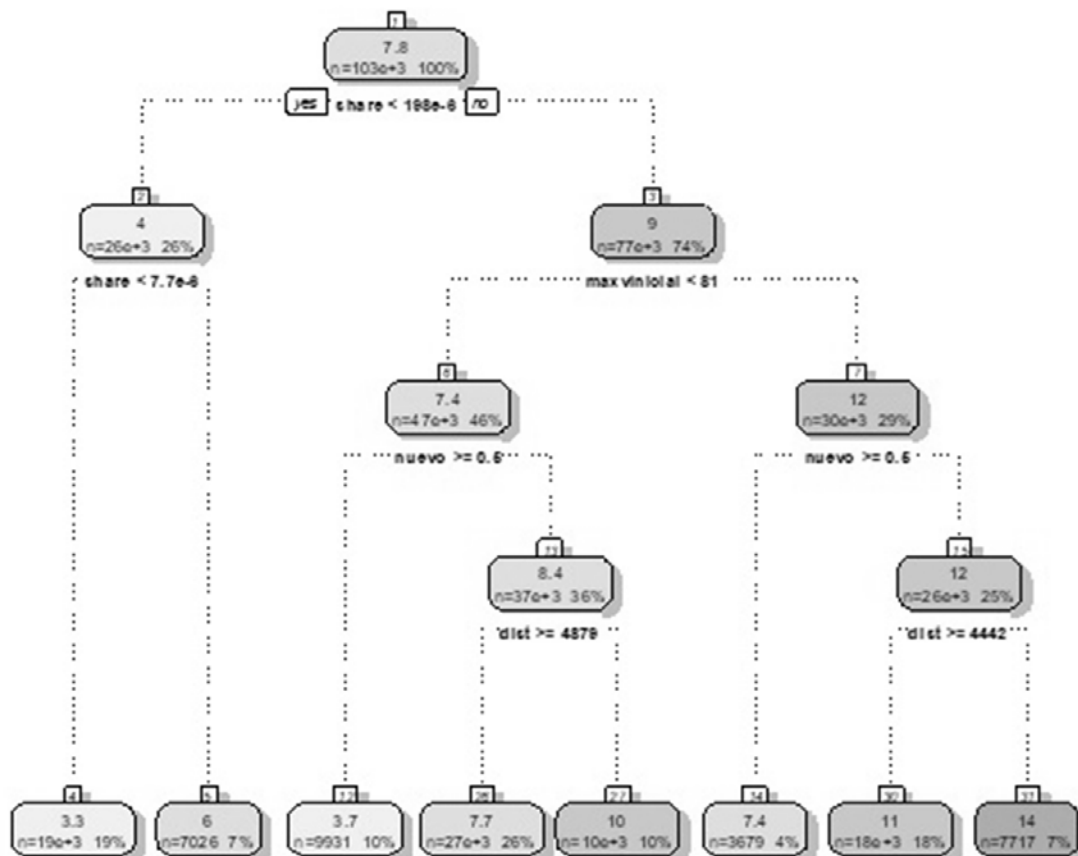
<sup>5</sup> Los árboles según destino por regiones geográficas se encuentran en el Anexo.

Figura 3. Árbol de clasificación para tipo de producto: productos primarios agropecuarios.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 4a. Árbol de clasificación para tipo de producto: manufacturas de origen agropecuario.

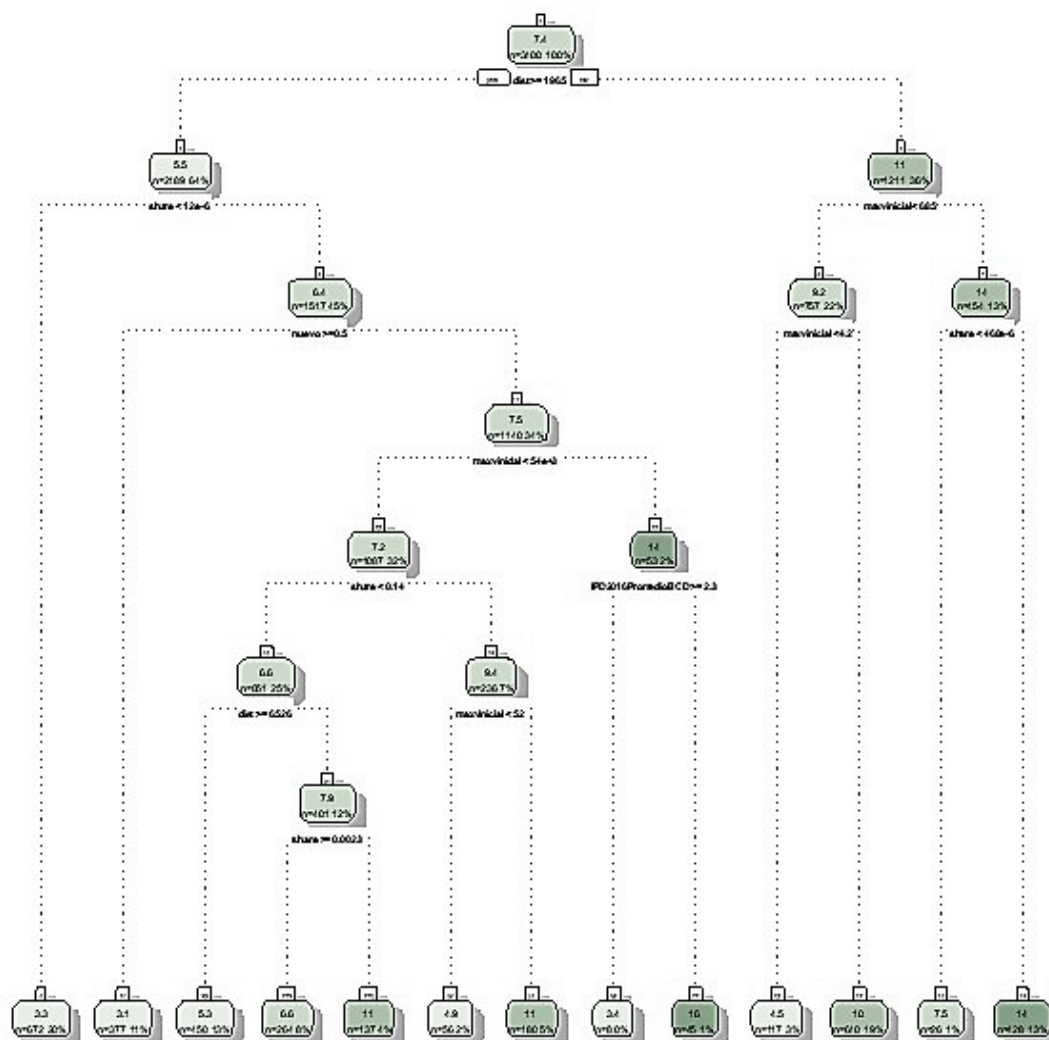


Fuente: Elaboración propia.





**Figura 5c. Árbol de clasificación para tipo de producto: combustible y energía.**



Fuente: Elaboración propia.

Con el objetivo de convalidar la significatividad y el signo de los predictores sobre la duración de los flujos de exportaciones se realizó una serie de estimaciones por MCO de un modelo de corte transversal, suponiendo una relación lineal entre la variable dependiente y las restantes mencionadas. En líneas generales, se espera una relación positiva entre la dependiente, maxduration, y las variables maxviniat, share\*, incomegroup1 e IPD2016; mientras que se espera signo negativo entre la dependiente y las variables dist. y nuevo\*. Además, se agregan como variables de control a comlang\_off, contig y PPPGDP.

Las variables share\* y nuevo\* son transformaciones de las variables share y nuevo descritas en la sección precedente. Dado que las variables originales tienen variabilidad en el tiempo y el modelo es de corte transversal, se ha optado por tomar los valores promedio de cada variable durante el período de supervivencia. Mientras que share\* presenta la misma interpretación, es preciso hacer una aclaración con respecto a nuevo\*.

La variable original, nuevo, es una dicotómica que toma como valor a la unidad si el flujo es positivo en el momento t cuando en el t-1 era nulo, y esta variable puede mostrarse no-nula en todo el período o en varias oportunidades durante el período considerado en el estudio, o mostrar un valor no nulo por única vez y luego desaparecer. Sumado a ello, para el promedio se toman en

consideración todos los subperíodos en que el flujo estuvo presente, por lo que los promedios no presentan un denominador común. La complejidad de la construcción de la variable nuevo\* hace que dificulte su interpretación, aunque no le quita utilidad. La variable nuevo\* es una variable continua con valores definidos entre 0 y 1, caracterizando al flujo de exportaciones como más inestable conforme la variable aumenta su valor y alcanza el 0.5, mientras que a partir de entonces aumenta su estabilidad, aunque reduce su supervivencia, debido posiblemente a la extraordinariedad de la relación comercial<sup>6</sup>.

La Tabla 5 muestra los resultados obtenidos. Las variables típicas de los modelos de gravedad muestran los signos y nivel de significatividad esperados. Cuanto mayor es la distancia menor resulta el período máximo de vida del flujo de exportaciones. En cambio, la existencia de una lengua oficial común y de vecindad, tienen el efecto contrario. El tamaño de la economía de destino, medido por PPPGDP resulta ser positivo, efecto que se ve reforzado con incomegroup1. En todos los casos, el resultado es robusto al modelo estimado.

**Tabla 5. Regresiones de maxduration.**

maxduration	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
maxviniacial	.0000292* (1.49e-06)	.0000408* (1.83e-06)	.0000291* (1.49e-06)	.0000389* (1.84e-06)	.0000403* (1.83e-06)
Share*	-.1211581** (.0584412)	-2.821541* (.070114)			-2.767507* (.0701669)
nuevo*	-13.48226* (.0564095)		-13.50487* (.0553461)		
Dist	-.000054* (3.92e-06)	-.0001254* (4.78e-06)	-.0000535* (3.91e-06)	-.0001149* (4.81e-06)	-.0001133* (4.75e-06)
contig	1.680714* (.0407069)	2.827541* (.0494296)	1.666351* (.0401135)	2.52658* (.0492021)	2.960119* (.0491448)
comlang_off	.3595107* (.3595107)	1.349918* (.0415846)	.3560142* (.034218)	1.305509* (.0418606)	1.311833* (.0416157)
IPD2016Prom	-.1475012* (.0468)	.6548864* (.0570799)	-.1537368* (.046704)	.5365859* (.0574027)	1.063163* (.0534982)
PPPGDP	.0000707* (3.74e-06)	.0001944* (4.53e06)	.0000693* (3.68e-06)	.0001665* (4.51e-06)	.0002013* (4.52e-06)
incomegroup1	.2904057* (.023804)	.5888492* (.0290676)	.2877254* (.0237692)	.5361144* (.029241)	
_cons	8.070512*	2.575238*	8.081367*	2.614916*	1.776122*
Obs	115351	115351	115351	115351	115351
R-squared	0.4332	0.1524	0.4331	0.1405	.1494

Nota: Errores estándar en paréntesis. \*\*\* p<0.01, \*\* p<0.05, \* p<0.1

Fuente: Elaboración propia.

El resto de las variables también presentan alta significatividad. Mientras que el valor inicial del flujo resulta ser el esperado, la relevancia del flujo en el mercado de destino, share\*, presenta el signo negativo. Una posible explicación de este último resultado se apoya en la distribución de los valores de dicha variable. Un conjunto de 2018 flujos de exportaciones posee, simultáneamente, share igual a 1 y maxduration con valor cercano a 1, es decir, fueron flujos de duración mínima y a destinos adonde no se exportó ningún otro producto. Estas observaciones podrían ser outliers que empujan la relación en el sentido contrario al esperado. La Tabla 6 muestra estadística descriptiva de este subconjunto de observaciones. Ni nuevo\* ni incomegroup1

<sup>6</sup> El valor máximo surge de considerar el caso límite de un flujo que nace y muere en el mismo año y no vuelve a nacer en los siguientes (1 nacimiento en 1 año de vida). En cambio, un flujo que nace y muere continuamente durante el período completo, es decir, toma valores 1 y 0 intercalados, alcanzará un valor igual a 0.5 (8 nacimientos en 16 años). En el extremo inferior, el flujo es positivo desde el momento inicial por lo que el valor de la variable nuevo\* será 0.0625 (1 nacimiento y 16 años de vida).

parecen ser útiles para explicar la existencia de estos flujos. La eliminación de share de la regresión no cambia los signos ni la significatividad de las demás variables, por lo que no existen argumentos para retirarla.

**Tabla 6. Observaciones con share = 1.**

Variable	Obs	Media	Des. Est.	Min	Max
maxduration	2018	1.161546	.7094992	1	16
nuevo*	2018	.5034919	.1539845	.0625	1
Incomegroup1	2018	.5258193	.4994569	0	1

Fuente: Elaboración propia.

La variable nuevo\* tiene un efecto negativo y significativo sobre la duración del flujo. Como se ha mencionado, el incremento en su valor implica inicialmente mayor inestabilidad y luego mayor extraordinariedad. En ambos casos, el efecto sobre la duración es menguante, por lo cual el resultado obtenido se condice con esta interpretación. El resultado, además, es robusto al modelo estimado, y el coeficiente de determinación de los modelos aumenta cuando se incluye nuevo\* entre las explicativas, elevando así su poder predictivo.

Finalmente, un párrafo aparte merece el resultado de IPD2016prom. El signo positivo esperado, es decir, mayor pronóstico de supervivencia cuanto mejor fuese la calidad de las instituciones del mercado de destino, solo se da en aquellos modelos en los que no aparece la variable nuevo\*. En los restantes, el signo es negativo, lo que resulta contraintuitivo. Lo mismo ocurre en el único árbol en el que aparece como nodo separador (esto es, en el subconjunto de flujos de exportaciones de combustible y energía). Si bien no resulta ser un separador eficiente en los restantes árboles, la falta de robustez mostrada en la regresión requeriría de un estudio minucioso.

## 5. Consideraciones finales.

La combinación del método CART y la econometría de corte transversal han permitido explotar dos vías de análisis distintas y hacerlo en forma complementaria. Por un lado, el árbol de clasificación ha permitido identificar los mejores predictores para el caso de estudio, entre una gran variedad de variables que diferentes enfoques teóricos señalan como relevantes, y ha podido identificar no-linealidades en las relaciones asociadas con la edad de los flujos de comercio y diferentes agrupamientos. Por otra parte, la econometría clásica de MCO ha permitido un análisis paramétrico y de significatividad suponiendo la existencia de una relación global entre las variables explicada y explicativas, tras una transformación de estas últimas acorde a los resultados obtenidos mediante el método CART.

El análisis CART y las regresiones coinciden en considerar relevantes al nivel de ingreso del país destino, la existencia de lengua común y vecindad, y al valor inicial del flujo. Mientras que el primero de los factores eleva el estándar de las firmas exportadora y asegura escala de colocación, la lengua común y la vecindad reducen el costo de búsqueda y facilitan las operaciones en los casos de firmas exportadoras sin experiencia. El valor inicial del flujo da cuenta del compromiso de las firmas involucradas, tanto exportadoras como importadoras, en la operación, y esto es más significativo en los casos de bienes diferenciados. Los resultados verifican la relación entre aquella variable y la duración del flujo.

Cuando el flujo es nuevo, ya sea debido al producto exportado o al destino, la expectativa de supervivencia es menor. Este resultado es observado en los árboles de clasificación, y es robusto a los reagrupamientos por destino y producto. Este resultado se contradice con la hipótesis de que el desconocimiento sobre las propias condiciones para afrontar la competencia afecta negativamente en los primeros años, luego la experiencia reduce el riesgo y amplía la expectativa



media de vida. También es observado en las regresiones y, en este caso, la variable se asocia a la inestabilidad y a la rareza de la relación comercial. La experiencia exportadora ofrece estabilidad, y ésta eleva la expectativa de vida del flujo comercial.

La escala del flujo en términos del mercado abastecido es relevante. Cuanto mayor es la participación del flujo específico en el total de compras del destino considerado, mayor es la supervivencia. La escala es resultado de la explotación de cierto capital intangible y específico, ventaja que se ve reflejada en la duración de los flujos. El resultado positivo entre escala y duración puede confundirse con la explotación de una ventaja comparativa significativa, aunque si éste fuera el caso debería sostenerse en todos los mercados para el mismo producto.

Por lo visto en los árboles de clasificación, cuanto mayor es la escala y la experiencia, y más cercano el mercado de destino, el pronóstico de vida se alarga hasta los 14 años de media, mientras que, si ocurre exactamente lo contrario, la expectativa se reduce a 3 años de media. Si los destinos son países desarrollados o pertenecen al continente americano, la duración esperada es mayor. Existen algunas diferencias en los resultados cuando se agrupan las observaciones por tipo de producto y destinos. Sin embargo, las conclusiones anteriores serían robustas. Finalmente, los resultados obtenidos hasta el momento dan cuenta de una diferencia significativa entre flujos preexistentes y nuevos flujos, a pesar de que las variables explicativas de su duración resulten ser las mismas.

Por último, el estudio resulta relevante por otro motivo. No se encuentran demasiados artículos que se concentren en los determinantes de la supervivencia de los flujos de exportaciones argentinas. Si bien existen antecedentes, la bibliografía presenta algunos resultados que merecen una mayor atención. En este sentido, la actualización del análisis hasta un período reciente, la utilización de una metodología alternativa y novedosa para el campo de estudio, y el análisis desagregado por tipo de producto y socio comercial ofrecen resultados que permiten una discusión política enriquecida por la información estadística.

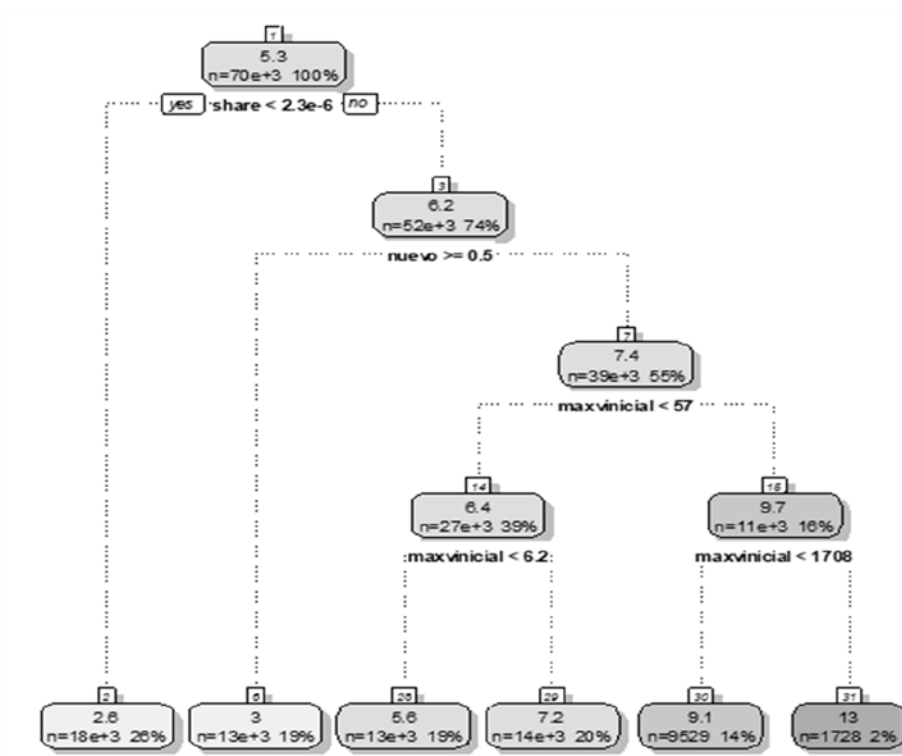
## Referencias

- Besedes, T., & Blyde G. (2010). *What drives export survival? An analysis of export duration in Latin America*. Institute of Technology, Inter-American Development Bank.
- Besedes, T., & Prusa T. (2006a). Ins, outs, and the duration of trade. *Canadian Journal of Economics*, 39, 266-295.
- Besedes, T., & Prusa T. (2006b). Product differentiation and duration of US import trade. *Journal of International Economics*, 70, 339-358.
- Besedes, T., & Prusa, T. (2007). *The Role of Extensive and Intensive Margins and Export Growth*. Working Paper 13628, NBER.
- Blanco, A., Irimia, A., & Vázquez, M. (2016). Diseño de un modelo específico para la predicción de la quiebra de micro-entities. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 22, 3-18.
- Brenton, P., Saborowski, Ch., & von Uexkull, E. (2009). *What Explains the Low Survival Rate of Developing Country Export Flows?* The World Bank Poverty Reduction and Economic Management Network International Trade Department, June.
- Corbella, V. (2016). *Asimetrías Estructurales, Integración Comercial y Especialización Industrial: el caso de la UNASUR*. Tesis de Magister en Economía. Universidad Nacional del Sur.

- Fugazza, M., & Molina, A.C. (2011). On the determinants of exports survival. *Policy Issues in International Trade and Commodities Study Series*, 46. Geneva: United Nations.
- Gepp, A., & Kumar, K. (2015). Predicting financial distress: A comparison of survival analysis and decision tree techniques. *Procedia Computer Science*, 54, 396-404.
- Giordano, P. (2016). *Cambio de Marcha. América Latina y el Caribe en la nueva normalidad del comercio global*. Monitor de Comercio e Integración, BID, Washington DC. <https://publications.iadb.org/handle/11319/7942>
- González, B. (2015). *Supervivencia de los Flujos de Exportación. Análisis de la Duración a Nivel de Producto-Destino para Argentina 1993-2012*. Tesis de Maestría en Economía, Facultad de Ciencias Económicas Universidad Nacional de La Plata.
- González-Fernández, M., & González-Velasco, C. (2016). Which Countries Pay More or Less for Their Long Term Debt? A CART Approach. *Journal of Quantitative Methods for Economics and Business Administration*, 21, 103-116.
- Lall, S. (2000). *The Technological Structure and Performance of Developing Country Manufactured Exports, 1985-1998*. Working Paper 44. Queen Elizabeth House, Oxford University.
- Nicita, A., Shirotori, M., & Tumurchudur, B. (2013). Survival Analysis of the exports of least developed countries: the role of comparative advantage. *Policy Issues in International Trade and Commodities Study Series*, 54. Geneva: United Nations.
- Nitsch, V. (2007). *Die another day: duration in German Import trade*. CESifo Working paper 2085. Munich: CESifo.
- Rauch, J. (1996). *Networks versus markets in International Trade*. Working Paper 5617, National Bureau of Economic Research, June.
- Rauch, J.E. (1999). Networks versus markets in international trade. *Journal of International Economics*, 48, 7-35.
- Rauch, J. (2007). *Development through synergistic reform*. National Bureau of Economic Research, June.
- Sohn, S., & Moon, T. (2004). Decision tree based on data envelopment analysis for effective technology commercialization. *Expert Systems with Applications*, 26(2), 279-284.
- Tso, G., & Yau, K. (2007). Predicting electricity energy consumption: A comparison of regression analysis, decision tree and neural networks. *Energy*, 32(9), 1761-1768.

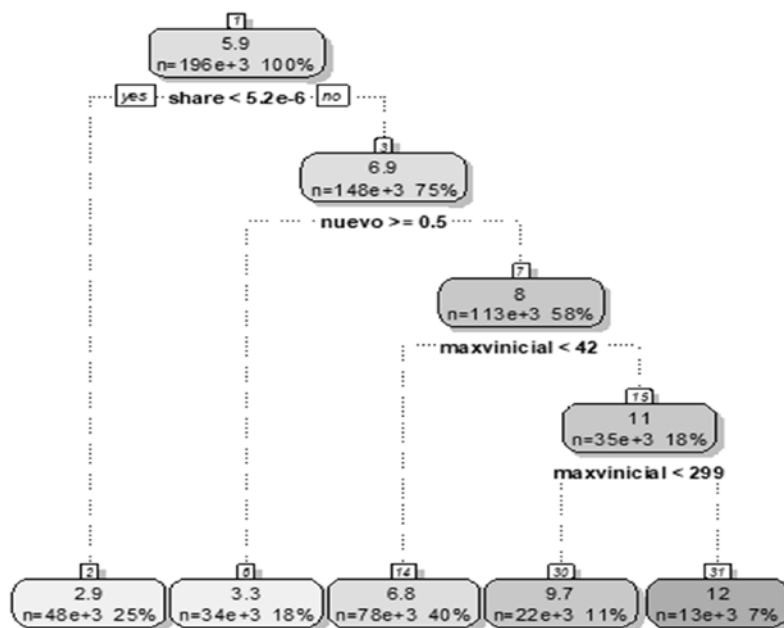
## Anexo

Figura A1. Árbol de clasificación para destinos: Asia del Este y Pacífico.



Fuente: Elaboración propia.

Figura A2. Árbol de clasificación para destinos: Europa y Asia Central.



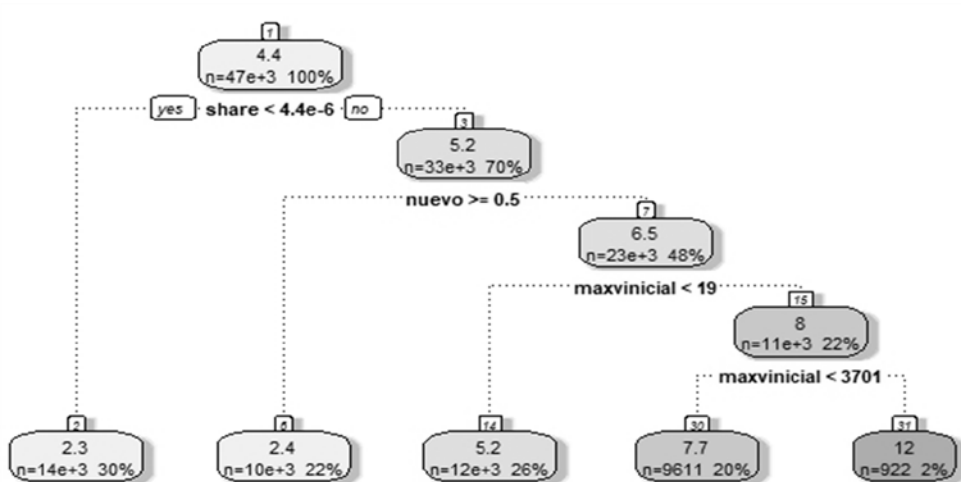
Fuente: Elaboración propia.

Figura A3. Árbol de clasificación para destinos: América Latina y El Caribe.



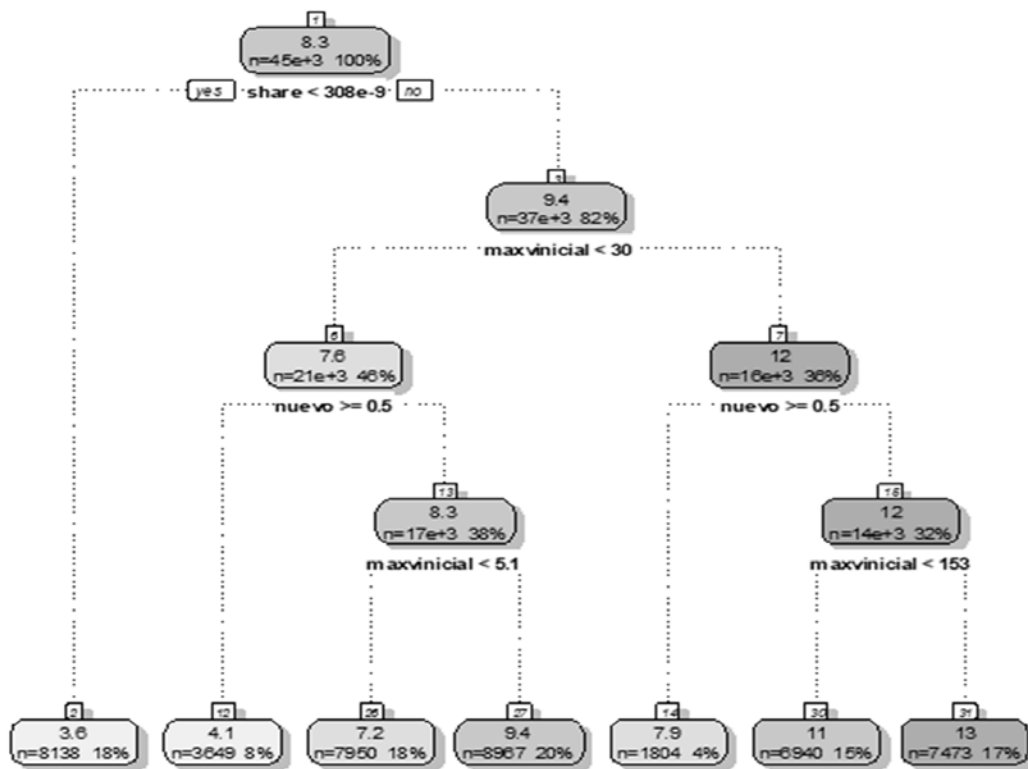
Fuente: Elaboración propia.

Figura A4. Árbol de clasificación para destinos: África del Norte y Este Medio.



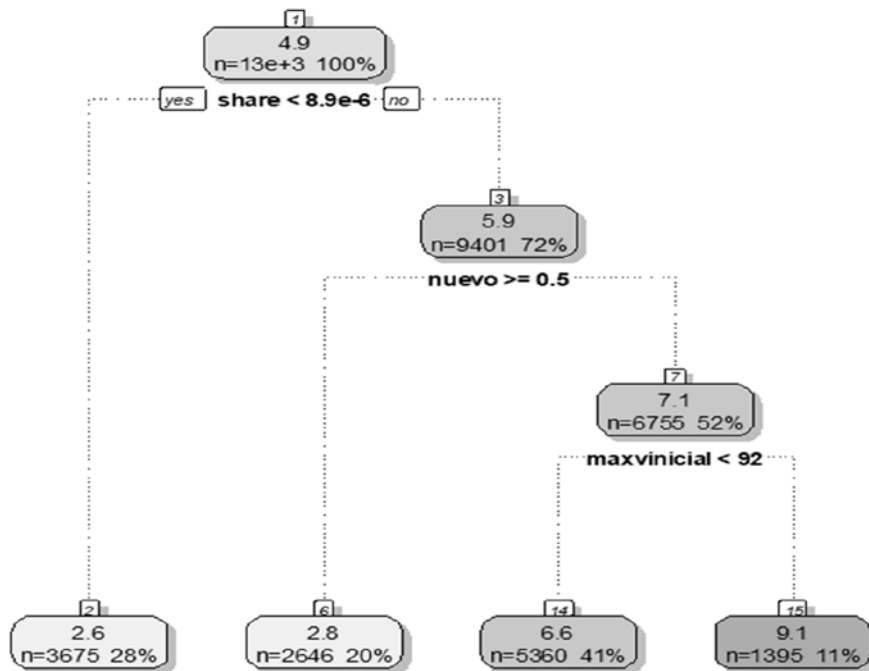
Fuente: Elaboración propia.

Figura A5. Árbol de clasificación para destinos: América del Norte.



Fuente: Elaboración propia.

Figura A6. Árbol de clasificación para destinos: Asia del Sur.



Fuente: Elaboración propia.



## Un análisis bibliométrico del brand equity 1991-2018

NEME-CHAVES, SAMIR RICARDO

Facultad de Mercadeo

Universidad Santo Tomás (Bogotá, Colombia)

Correo electrónico: [samirnema@usantotomas.edu.co](mailto:samirnema@usantotomas.edu.co)

RODRÍGUEZ-GONZÁLEZ, LILIANA YAMILE

Escuela de Posgrados

Fundación Universitaria Konrad Lorenz (Bogotá, Colombia)

Correo electrónico: [lilianay.rodriguezg@konradlorenz.edu.co](mailto:lilianay.rodriguezg@konradlorenz.edu.co)

### RESUMEN

Este artículo proporciona un análisis bibliométrico del estado actual de la investigación del brand equity, mediante el mapeo del panorama de investigación del concepto para identificar autores y países más productivos a lo largo del tiempo, análisis de publicaciones, cooperación entre autores, co-citas y co-ocurrencias de palabras clave; además, la identificación de clústeres de investigación para visualizar la estructura conceptual de este campo de conocimiento. Utilizando la colección de Scopus, este estudio realiza un análisis de 2000 publicaciones que estudian el brand equity. Se identifican cuatro grandes grupos de investigación: brand equity, análisis empíricos, el sector servicios y la metodología común de los estudios, los cuales caracterizan las diferentes corrientes de investigación y permiten analizar los campos de acción más preponderantes para el entendimiento del brand equity. Se proponen nuevos estudios que incluyan revisión sistemática tradicional para complementar lo planteado en este documento. Esta investigación otorga una visión general que puede ser una guía valiosa para docentes, investigadores y profesionales.

**Palabras clave:** bibliometría, brand equity, productividad científica, cooperación científica.

**Clasificación JEL:** M00; M30; M31; M39.

**MSC2010:** 6207; 00A99; 6209.

# A bibliometric analysis of brand equity 1991 - 2018

## ABSTRACT

This document provides a bibliometric analysis of the current state of the brand equity research by mapping the research landscape to identify more productive authors and countries over time, analysis of publications, cooperation between authors, co-appointments, co-occurrences of keywords; plus, identification of research clusters to visualize the conceptual structure of the field of knowledge. Using the Scopus collection, this study analyzes 2000 publications that study brand equity. Identify four major research groups: brand equity, empirical analysis, the services sector and the common methodology of the studies, which characterize the different research trends and analyze the most preponderant fields of action for the understanding of brand equity; new studies are proposed that include a traditional systematic review to complement what is stated in this document. This research provides an overview that can be a valuable guide for teachers, researchers and professionals.

**Keywords:** bibliometrics, brand equity, scientific productivity, scientific cooperation

**JEL classification:** M00; M30; M31; M39.

**MSC2010:** 6207; 00A99; 6209.



## 1. Introducción.

El Brand Equity se puede definir como “el conjunto de activos o pasivos siempre intangibles, que se encuentran relacionados con los símbolos identificadores de la marca y que se incorporan o sustraen del producto” (Hoyos, 2016, p.66). Es un concepto de suma importancia actualmente para el marketing, ya que se considera que está relacionado, entre otros, con la lealtad (Han & Hyun, 2018), reputación (Heinberg, Ozkaya, & Taube, 2018), actitud (Augusto & Torres, 2018) e imagen de marca (Anselmsson, Burt, & Tunca, 2017).

El desarrollo teórico adelantado sobre el brand equity ha llevado a la construcción de modelos que buscan explicar y medir este constructo; así, se han identificado 35 modelos de capital de marca (brand equity), 24 de ellos originados en la academia y 11 nacidos de empresas especializadas (Hoyos, 2016). Dentro de los modelos académicos, el más representativo es el modelo de Aaker (1992) que basa su aproximación al brand equity en cinco factores: equidad de marca, conciencia de marca, identidad de marca, calidad percibida y lealtad de marca (Hoyos, 2016). Otro modelo académico es el de Keller (2001), que presenta como componentes principales la prominencia de la marca, las imágenes de la marca, el desempeño, juicios, sentimientos y resonancia de marca.

Como representantes de los modelos de empresas especializadas se destacan el Brand Asset Evaluator (BAV), modelo de Young y Rubicam que propone dos factores: el primero, denominado fortaleza de la marca, que se compone de los sub-factores diferenciación y relevancia; y el segundo, estatura de la marca, que está compuesto por los sub-factores estima y conocimiento (Hoyos, 2016). Otro modelo de esta línea es el de Millward Brown, conocido como Modelo de Fortaleza de Marca, que basa su explicación del brand equity en el análisis de la presencia, relevancia, resultados, ventaja y vinculación emocional con la marca (Hoyos, 2016).

Debido a los múltiples aspectos relacionados con el constructo y a los diversos modelos propuestos, se han derivado investigaciones alrededor de los denominados modelos reflectivos (Aaker, 1992) o formativos (Moncayo, 2018), que abordan uno o varios de los factores o sub-factores mencionados; además, han surgido nuevas revistas que se han interesado en publicar investigaciones sobre el tema o temas similares, como el llevado a cabo por Londoño y Castañeda (2018), orientando a muchos investigadores a aproximarse y publicar sobre el brand equity. Este panorama de crecimiento exponencial de las investigaciones sobre el tema ha hecho que para los investigadores sea realmente difícil poder tener acceso a información que muestre un panorama general sobre el área y, de esta manera, mantenerse al día con el desarrollo de este campo de conocimiento. Por esta razón, resulta de gran importancia contar con un estudio que muestre un panorama general del desarrollo investigativo del concepto del brand equity.

Un análisis como el que se plantea en este artículo ofrece un enfoque capaz de manejar grandes conjuntos de datos para análisis cuantitativos, además de agrupar y priorizar las publicaciones existentes basándose en el comportamiento de citas de la comunidad investigadora general (Martín-Martín, Orduña-Malea, Ayllón & López-Cózar, 2016; Zupic & Čater, 2015).

Este estudio pretende abarcar el campo de investigación del brand equity de múltiples maneras. Inicialmente, al utilizar un análisis de citas bibliométricas, el estudio contribuye con la aproximación a una definición del campo interdisciplinario de la investigación del brand equity, así como a una mejor comprensión de su estado actual identificando los autores y países más productivos, las publicaciones clave y sus interrelaciones. Posteriormente, al utilizar un análisis de conglomerados, se logran identificar las diversas perspectivas intelectuales que subyacen a la investigación del brand equity, tal como ha sido llevado a cabo en otros estudios bibliométricos (Cuccurullo, Aria & Sarto, 2013; Gurzki & Woisetschlaeger, 2017).



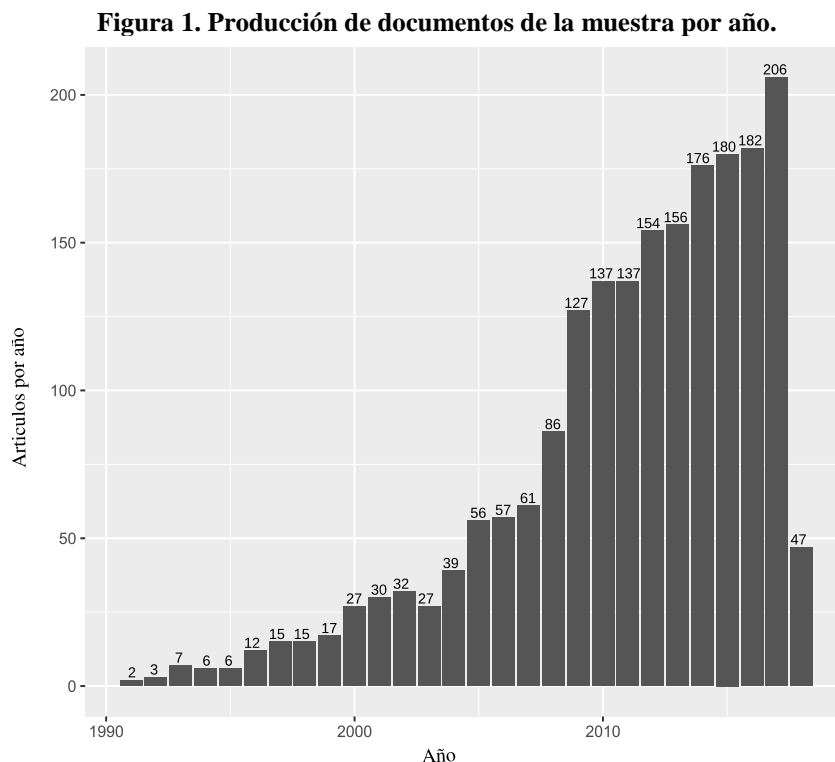
## 2. Metodología.

Este estudio utilizó datos de la base de datos Scopus, que es de amplia aceptación científica y se ha utilizado previamente en otras revisiones bibliométricas (Álvarez & Aneón, 2009; Bazm, Kalantar, & Mirzaei, 2016; Huamaní et al., 2014; Huamaní et al., 2015; Sánchez, de la Cruz Del Río, & García, 2017). La estrategia de búsqueda fue: *TITLE-ABS-KEY (brand AND equity)*, para así tomar en cuenta diferentes ciencias o disciplinas que estuviesen estudiando el constructo. La búsqueda se enmarcó en los documentos disponibles en el motor de búsqueda, que fueron de 2000 documentos y el periodo de tiempo analizado se extendió desde 1991, año del primer documento disponible en esta base de datos, hasta 2018 teniendo en cuenta que la búsqueda de información se llevó a cabo el 6 de marzo de 2018.

El tratamiento estadístico se llevó a cabo con The R Project for Statistical Computing y el paquete bibliometrix, considerado como una herramienta que se recomienda para análisis bibliométricos exhaustivos (Aria & Cuccurullo, 2017).

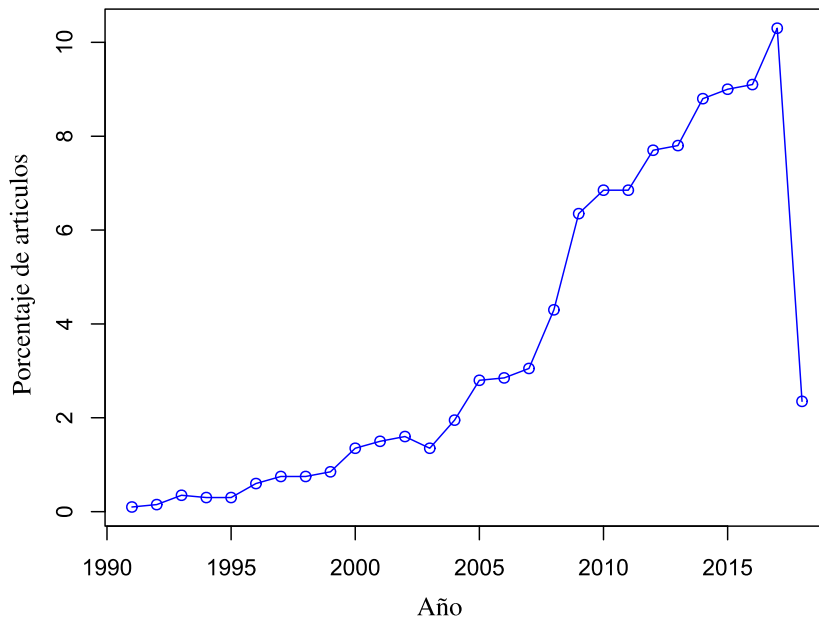
## 3. Resultados.

El análisis de la línea de tiempo de los documentos muestra que 1455 documentos (Figura 1) correspondiente al 75%, fueron escritos entre el 2009 y el 2018 (Figura 2); el porcentaje de crecimiento anual del 12.4%, permite observar el auge y creciente interés que el tema está teniendo en la actualidad a nivel científico. Se observa un registro de 3499 autores que publicaron en 690 revistas, libros, etc., con un promedio de 20.51 citas por documento y 3684 palabras claves mostradas.



Fuente: Elaboración propia.

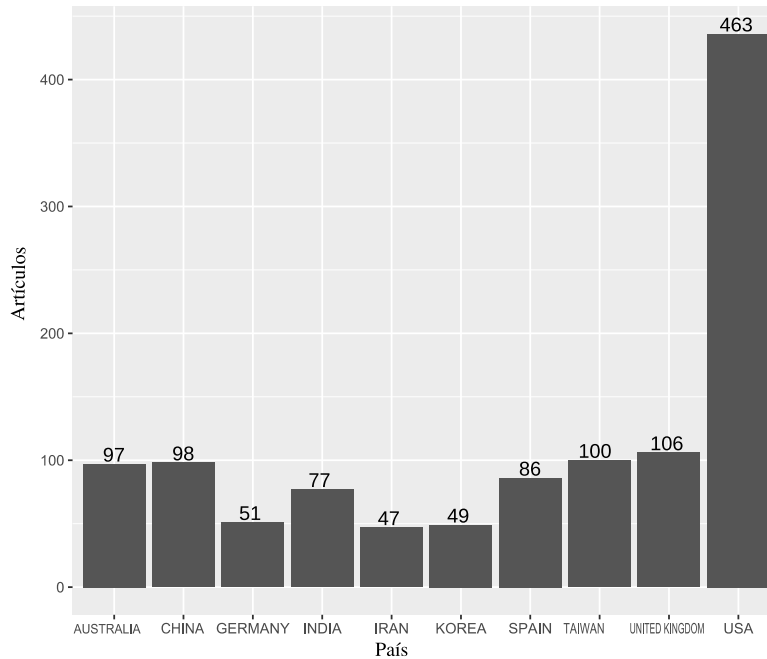
**Figura 2. Porcentaje producción de documentos de la muestra por año.**



Fuente: Elaboración propia.

El país más productivo es Estados Unidos (463 publicaciones), seguido de Reino Unido (106) y de otros países como Taiwán, China, Australia, España, India, Alemania, Corea e Irán (Figura 3).

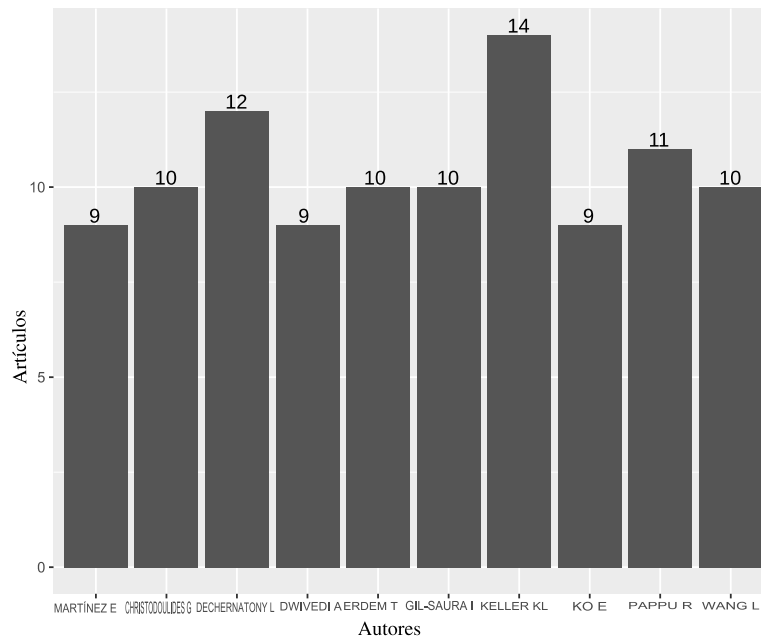
**Figura 3. Número de documentos publicados por país.**



Fuente: Elaboración propia.

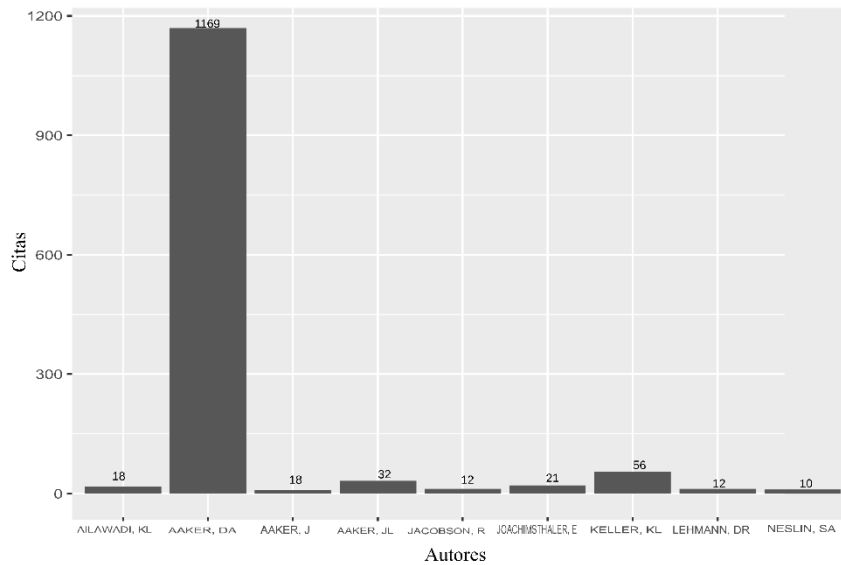
Los 10 autores más productivos son Keller, Kl. (14 publicaciones), Dechernatony L. (12), Pappu, R. (11), Christodoulides, G. (11), Erdem, T. (10), Gil-Saura, I. (10), Wang L. (10), Dwivedi, A. (9), Ko, E. (9), Martínez, E. (9) (véase figura 4). Sin embargo, los autores más citados son Aaker, Da. (1169 citas), Keller, KL. (56), Aaker, JL. (32), Joachimsthaler, E. (21), Ailawadi, KL. (18), Jacobson, R. (12), Lehmann, DR. (12), Neslin, SA. (10) y Aaker, J. (9) (Figura 5).

**Figura 4. Autores más productivos.**



Fuente: Elaboración propia.

**Figura 5. Autores más citados.**



Fuente: Elaboración propia.

Las principales publicaciones académicas de la muestra son: *Journal of Business Research* (78 registros), *Journal of Product And Brand Management* (73), *Journal of Brand Management* (61), *European Journal of Marketing* (42), *Journal of Product & Brand Management* (42), *Journal of Consumer Marketing* (32), *Industrial Marketing Management* (30), *Asia Pacific Journal of Marketing and Logistics* (26), *Journal of Marketing* (23), *Journal of Retailing and Consumer Services* (20), *Journal of Marketing Research* (18), *Marketing Intelligence and Planning* (18), *Tourism Management* (18), *International Journal of Research in Marketing* (17), *Journal of Strategic Marketing* (17), *Marketing Science* (16), *International Journal of Sport Management and Marketing* (15), *Journal of Advertising Research* (15), *Journal of Marketing Management* (15), *Journal of Promotion Management* (15). Esto muestra que las revistas de

negocios, administración de marca, marketing y consumidor son muy citadas en relación al campo de estudio y contribuyen a la base investigativa sobre el brand equity.

### 3.1. Ranking de dominancia de los autores.

El factor de dominancia es una proporción que indica la fracción de artículos de varios autores en los que aparece un erudito como primer autor (Kumar & Kumar, 2008). Para este análisis, Dwivedi es el de más alto nivel de dominancia ya que de 9 artículos publicados aparece como primer autor en los 9; el segundo es Pappu ya que, de 11 artículos publicados, aparece en 9 como primer autor; los demás autores pueden verse en la Tabla 1.

**Tabla 1. Ranking de dominancia de los autores.**

Autor	Factor de dominancia	Múltiples autores	Primer autor
DWIVEDI A	1	9	9
PAPPU R	0.81	11	9
ERDEM T	0.7	10	7
WANG L	0.7	10	7
TASCI ADA	0.3	9	3
CHRISTODOULIDES G	0.3	10	3
GIL-SAURA I	0.2	10	3
MARTÍNEZ E	0.1	9	2
KELLER KL	0.14	14	2
DECHERNATONY L	0.08	12	1

Fuente: Elaboración propia.

### 3.2. Índice h, g y m de los autores.

El índice h es una métrica de nivel de autor que intenta medir tanto la productividad como el impacto de citas de las publicaciones de un científico o académico. Para el cálculo del índice h, si el factor h vale n, entonces n publicaciones han sido citadas más de n veces.

El índice g cuantifica la productividad científica basada en el historial de publicaciones de los autores. Para el cálculo del índice g, se listan los artículos de un autor en orden descendente de acuerdo con el número de citas recibidas por cada uno de ellos (Arencibia & Carvajal, 2008).

Por su parte, el índice m se basa en el conjunto de los artículos más citados del científico y el número de citas que han recibido en otras publicaciones, es la relación  $h/n$ , donde n es el número de años transcurridos desde la fecha de la primera publicación hasta el momento actual (Arencibia & Carvajal, 2008).

Para el caso particular, el autor con mayor índice h (11) y g (14) es Keller; sin embargo, el autor con mejor índice m es Dechernatony (0.69) lo que muestra que publica artículos más frecuentemente que los demás autores (Tabla 2).

**Tabla 2. Índice h, g, m de los 10 primeros autores.**

Autor	Índice h	Índice g	Índice m
KELLER KL	11	14	0.52
DECHERNATONY L	9	12	0.69
PAPPU R	8	11	0.57
CHRISTODOULIDES G	7	10	0.46
ERDEM T	9	10	0.34
GIL-SAURA I	4	7	0.57
WANG L	4	4	0.57
DWIVEDI A	5	7	0.71
KO E	6	9	0.66

Fuente: Elaboración propia.

### 3.3. Estimación del coeficiente de la ley de Lotka.

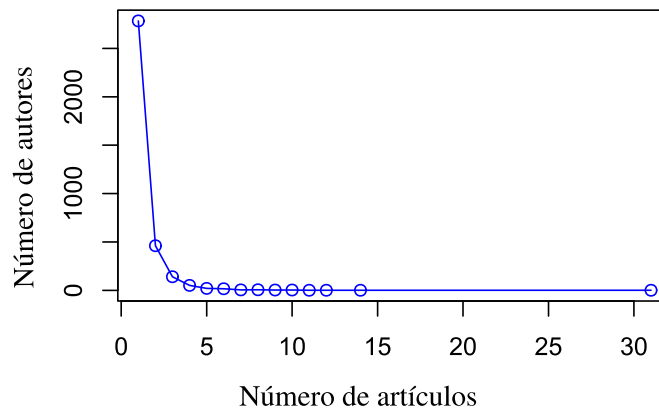
La ley de Lotka describe la frecuencia de publicación de los autores en cualquier campo, dada como una ley de cuadrado inverso en donde el número de autores que publican un cierto número de artículos constituyen una relación fija respecto al número de autores que publican un solo artículo (Aria & Cuccurullo, 2017; Urbizagástegui-Alvarado, 2014).

Aplicando la ley de Lotka (Figura 6), se estima que el total de autores que han escrito un solo artículo sobre el tema de brand equity son 2784; los que han escrito dos artículos, 461; tres artículos, 141; cuatro artículos, 52; cinco artículos, 21; seis artículos, 17; siete artículos, 5; ocho artículos 6; nueve y diez artículos, 4; y de 11 a 31 artículos, sólo un investigador.

Al comparar la estimación teórica de la Ley de Lotka y el comportamiento de la muestra estudiada, se espera que no haya diferencias significativas entre las dos muestras.

**Figura 6. Estimación coeficiente Ley de Lotka.**

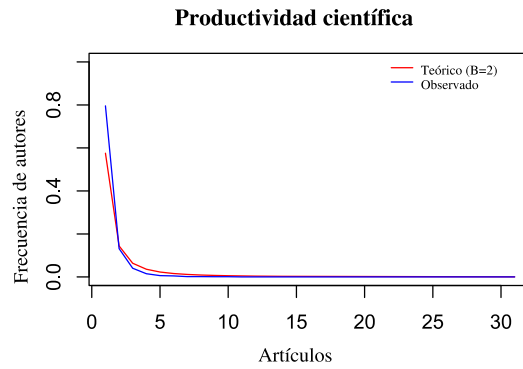
Número de autores vs Número de artículos



Fuente: Elaboración propia.

El coeficiente Beta estimado es 2.74, constante 0.57 con una bondad de ajuste igual a 0.92. La prueba de dos muestras de Kolmogorov-Smirnoff proporciona un valor de  $p = 0.060$ , lo que significa que no hay una diferencia significativa entre las distribuciones Lotka observadas y las teóricas (Figura 7).

**Figura 7. Comparación de la beta teórica con la observada de las distribuciones Lotka.**



Fuente: Elaboración propia.

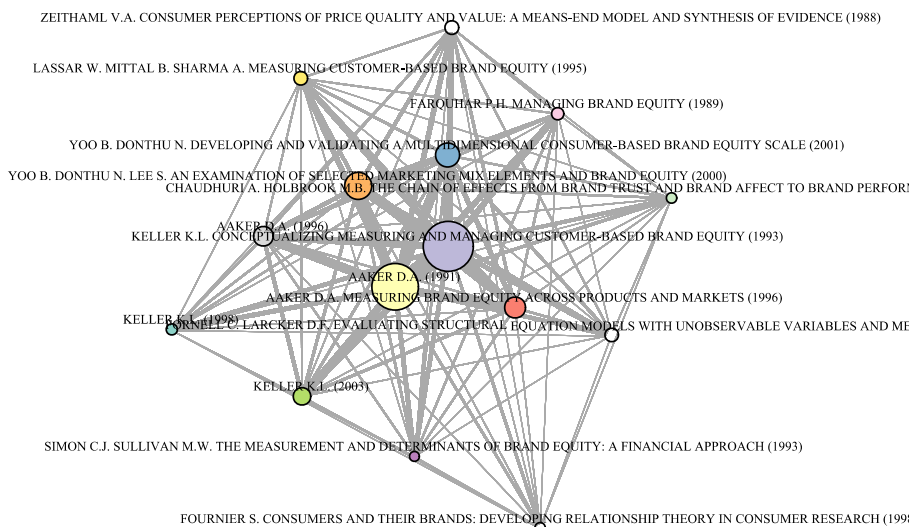
### 3.4. Acoplamiento bibliográfico.

Se dice que dos artículos están acoplados bibliográficamente si al menos una fuente citada aparece en las listas de referencias de ambos artículos. La fuerza del acoplamiento de dos artículos se define simplemente por el número de referencias que los artículos tienen en común (Aria & Cuccurullo, 2017) y se puede presentar acoplamiento de co-citas, colaboración entre países y co-ocurrencia de palabras clave.

#### 3.4.1. Co-citas.

La co-cita de dos artículos ocurre cuando ambos son citados en un tercer artículo (Aria & Cuccurullo, 2017; Urbizagástegui & Restrepo, 2011); la Figura 8 muestra que el nodo de artículos de autores eruditos, para este caso el artículo de Keller (1993) y Aaker (1991), es más grande y están espacialmente más cerca entre sí, en comparación con otros artículos menos populares como el de Chaudhuri & Holbrook (2001) y el propio Keller (1993).

**Figura 8. Red de co-citación.**



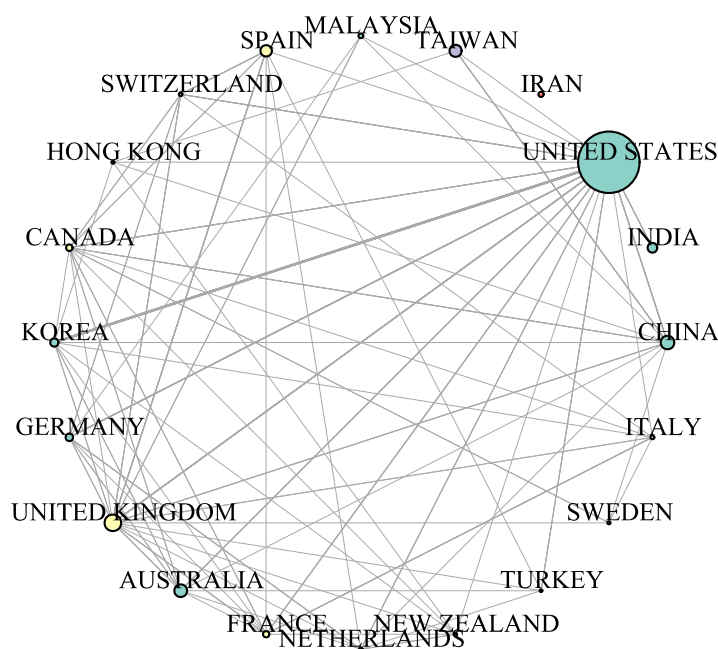
Fuente: Elaboración propia.

### 3.4.2. Colaboración científica internacional.

Una red de colaboración científica es una red donde los nodos son autores y los enlaces son coautorías. Es una de las formas de colaboración científica más difundida (Glänzel, 2001; Glänzel & Schubert, 2004; Kato & Ando, 2017; Kwon, Park, So, & Leydesdorff, 2012); a mayor tamaño del nodo, más cantidad de autores de ese país en coautoría con otros. En el caso del presente análisis, se observa que el país que más cooperación en términos de coautorías tiene en relación con el brand equity es Estados Unidos, que está unido con 19 países a través de 616 documentos, con una fuerza de enlace total de 441 (Figura 9).

En ese mismo orden de ideas, Reino Unido está unido con 18 países a través de 174 documentos y una fuerza de enlace total de 104; por su parte, Australia se relaciona con 16 países a través de 67 documentos, con una fuerza de enlace total de 67. China está unido con 13 países a través 133 documentos, con una fuerza de enlace total de 55 (Figura 9).

**Figura 9. Colaboración científica internacional.**



Fuente: Elaboración propia.

### 3.4.3. Co-ocurrencia de palabras clave.

La Figura 10 muestra dos conglomerados de nodos claramente divididos: uno (amarillo) encabezado por la palabra brand equity, acompañado de otras palabras menos concurrentes como calidad percibida, ventas y comercio electrónico; y el otro (verde) encabezado por marketing, acompañado de palabras como comercio, decisión humana, artículo, metodología, economía y consumidor.

Se puede decir que uno de los nodos muestra cuál es el contexto de aplicación del brand equity (nodo amarillo), mientras que el otro nodo muestra el modo de estudio y aplicación del concepto (nodo verde).





El análisis presenta K-means de clusterización con 4 clústeres de tamaños 9, 3, 6 y 9. Los límites de las dimensiones de los clústeres se pueden ver en la tabla 3. Dentro de la suma de cuadrados por cada clúster los valores son: 0.7812379, 0.2314650, 1.2083439, 2.2347087; la división entre suma de cuadrados y el total de la suma de cuadrados es de 91.4%, lo que muestra que la conexión entre las publicaciones clave son fuertes y la estructura de los clústeres es confiable.

**Tabla 3. Límites de las dimensiones de los clústeres.**

Dimensiones de los clústeres		
	Dim.1	Dim.2
1	-0.7698996	-0.96459596
2	-0.5431050	0.01717481
3	-0.5429544	160.985.442
4	13.129.041	-0.1143652

Fuente: Elaboración propia.

Se observa en la Figura 11 que el clúster número 1 (gris) agrupa los temas relacionados con la primer y más desarrollada área de estudio, el brand equity (Huang & Shih, 2017; Luo & Haiying, 2011; Vaijayanthi & Shreenivasan, 2017) con 1047 co-ocurrencias. Le siguen, ventas (69 co-ocurrencias) (Charles & Zavala, 2017; Li-xin & Shou-lian, 2010); satisfacción del consumidor (77) (Guan & Ma, 2009); comercio electrónico (34) (Luo & Haiying, 2011); lealtad de marca (139) (Bouazza & Habacha, 2013; Zhu & Kuo, 2010); competencia (26) (Xiaoping, Xiaojing, & Sijun, 2012) y percepción de calidad (63) (Huang & Shih, 2017).

El clúster número 2 (amarillo), muestra en qué áreas se están llevando a cabo análisis empíricos; por ejemplo, comercio (37 co-ocurrencias) (Andrlic, Idlbek, & Budic, 2007; Huang & Shih, 2017) y marketing (179) (Rajh, 2001). El clúster número 3 (cian) muestra el área de desarrollo investigativo con tradición estadounidense; por ejemplo, el sector servicios (15 co-ocurrencias) (Syed, Nguyen, Melewar, Loh, & Liu, 2016); los modelos numéricos (13) (Zhou, Xu, Yin, Bao, & Wang, 2014); el comportamiento de consumo (102) (Loureiro & Corria, 2013); el valor (38) (Rajh, 2001) y el retail (39) (Gómez-Suárez, Quinones, & Yagüe, 2016).

Finalmente, el clúster 4 (verde) muestra los temas relacionados con la metodología de estudio que se lleva a cabo en los desarrollos teóricos del brand equity (11 co-ocurrencias) (Davicik, Vinhas da Silva, & Hair, 2015), donde se encuentran estudios sobre la toma de decisiones (20) (Chattopadhyay & Alba, 1988; Baalbaki & Guzmán, 2016); consumidor (33) (Baalbaki & Guzmán, 2016) y economía (10) (Oh, Fiore, & Jeoung, 2007).

#### 4. Discusión.

El brand equity se puede considerar un tema tradicional en el marketing (Aaker, 1991; 1992); el análisis de este constructo, que está en constante evolución por su complejidad, multiplicidad de aspectos relacionados y factores que lo componen, hacen de éste un tema rico en análisis y aplicaciones. Este estudio intenta mostrar un análisis histórico que sirva de insumo para conocer el desarrollo de este campo de conocimiento. El estudio muestra que hay una variedad de temas en los que el brand equity juega un papel importante como las ventas, el consumidor, la marca, la calidad y diferentes sectores de la industria del marketing. El análisis logra identificar cuatro clústeres que representan temas clave respecto a cuáles son los esfuerzos de la comunidad científica respecto al estudio del brand equity.

Un análisis bibliométrico como éste es un buen punto de partida para la investigación en el ámbito comercial, particularmente para temas interdisciplinarios. Además, muestra los trabajos que han ganado rápidamente popularidad en la comunidad científica, mostrando que el comportamiento de las citas es dinámico. De este modo, las citas independientes y las citas compartidas de los documentos evolucionarán con el tiempo, conectando potencialmente grupos desconectados, identificando nuevos y reorganizando el mapa a medida que la comunidad científica crece y el campo madura.

Este documento proporciona una visión general del brand equity, sus fundamentos intelectuales y su potencial de utilidad para investigadores establecidos dentro del dominio, para identificar campo fértil y así, iniciar investigaciones para posibles contribuciones. También, es insumo para nuevos investigadores que ingresan al campo y desean obtener una visión general y amplia de los estudios existentes.

Sin embargo, se propone que haya complemento con una revisión sistemática ya que, si bien el análisis de citas bibliométricas proporciona evidencia cuantitativa sobre la importancia y la conexión de los artículos en el campo de la investigación, el análisis cualitativo sigue involucrando juicios subjetivos del investigador y un enfoque exploratorio para interpretar los hallazgos (Fetscherin & Heinrich, 2015; Price, 1976); así, se podría robustecer desde diferentes perspectivas el estudio aquí expuesto.

Otras limitaciones que implican los estudios bibliométricos son las publicaciones más antiguas, ya que los hallazgos científicos y las publicaciones necesitan tiempo para ser aceptados dentro de la comunidad científica y para recibir un alto número de citas (Price, 1976; Zupic & Čater, 2015).

Como recomendación final, otros estudios podrían refinar el alcance de la investigación, por ejemplo, enfocándose en un subcampo específico, revistas específicas, o ampliando el alcance para incluir campos de investigación o palabras clave adicionales.

## **Agradecimientos**

Queremos agradecer, a los revisores anónimos del presente artículo, por sus útiles sugerencias y comentarios sobre una versión anterior de este documento, cuyos aportes han dado como resultado un documento muy mejorado. Además, queremos agradecer muy especialmente al Dr. Juan Carlos Correa Nuñez, por sus enseñanzas, sin las cuales este documento no hubiera podido existir.

## **Referencias**

- Aaker, D. (1991). Capitalizing on the value of a brand name. *New York*, 28, 35-37.
- Aaker, D. (1992). The value of brand equity. *Journal of Business Strategy*, 13(4), 27-32.
- Álvarez, E. C., & Anegón, F. D. M. (2009). Chemistry in Spain: Bibliometric analysis through scopus. *Chimica Oggi*, 27(6), 61-64.
- Andrlic, B., Idlbek, R., & Budic, H. (2007). *Marketing strategy in creating of brand equity on internet*. Annals of DAAAM & Proceedings, 19-21.
- Anselmsson, J., Burt, S., & Tunca, B. (2017). An integrated retailer image and brand equity framework: Re-examining, extending, and restructuring retailer brand equity. *Journal of Retailing and Consumer Services*, 38, 194-203.

- Arencibia, J., & Carvajal, R. (2008). Los índices H, G y R: su uso para identificar autores líderes en el área de la comunicación durante el período 2001-2006. *ACIMED: Revista Cubana de los Profesionales de la Información y la Comunicación en Salud*, 17(4), 1-9.
- Aria, M., & Cuccurullo, C. (2017). Bibliometrix: An R-tool for comprehensive science mapping analysis. *Journal of Informetrics*, 11(4), 959-975.
- Augusto, M., & Torres, P. (2018). Effects of brand attitude and eWOM on consumers' willingness to pay in the banking industry: mediating role of consumer-brand identification and brand equity. *Journal of Retailing and Consumer Services*, 42, 1-10.
- Baalbaki, S., & Guzmán, F. (2016). A consumer-perceived consumer-based brand equity scale. *Journal of Brand Management*, 23(3), 229-251.
- Bazm, S., Kalantar, S. M., & Mirzaei, M. (2016). Bibliometric mapping and clustering analysis of iranian papers on reproductive medicine in scopus database (2010-2014). *International Journal of Reproductive BioMedicine*, 14(6), 371-382.
- Bouazza, H., & Habacha, A. (2013). Customer-based brand equity: A controversial issue. In: *Vision 2020: Innovation, Development Sustainability, and Economic Growth - Proceedings of the 21st International Business Information Management Association Conference*, IBIMA (Vol. 2, pp. 30–41). International Business Information Management Association.
- Charles, V., & Zavala, J. J. (2017). A satisficing DEA model to measure the customer-based brand equity. *RAIRO - Operations Research*, 51(3), 547-566.
- Chattopadhyay, A. & Alba, J.W. (1988). The situational importance of recall and inference in consumer decision making. *Journal of Consumer Research*, 15(1), 1-12.
- Chaudhuri, A., & Holbrook, M.B. (2001). The chain of effects from brand trust and brand affect to brand performance: The role of brand loyalty. *Journal of Marketing*, 65(2), 81-93.
- Cuccurullo, C., Aria, M., & Sarto, F. (2013). Twenty years of research on performance management in business and public administration domains. In *Academy of Management Proceedings* (Vol. 2013, No. 1, p. 14270). Briarcliff Manor, NY 10510: Academy of Management.
- Davcik, N.S., Vinhas da Silva, R., & Hair, J.F. (2015). Towards a unified theory of brand equity: Conceptualizations, taxonomy and avenues for future research. *Journal of Product & Brand Management*, 24(1), 3-17.
- Fetscherin, M., & Heinrich, D. (2015). Consumer brand relationships research: A bibliometric citation meta-analysis. *Journal of Business Research*, 68(2), 380-390.
- Glänzel, W. (2001). National characteristics in international scientific co-authorship relations. *Scientometrics*, 51(1), 69-115.
- Glänzel, W., & Schubert, A. (2004). Analysing scientific networks through co-authorship. *Handbook of quantitative science and technology research* 257-276. Springer.
- Gómez-Suárez, M., Quinones, M., & Yagüe, M. J. (2016). Store brand evaluative process in an

- international context. *International Journal of Retail & Distribution Management*, 44(7), 754-771.
- Greenacre, M. (2017). *Correspondence analysis in practice, third edition*. (pp. 1-310). CRC Press.
- Guan, H., & Ma, J. (2009). The impact of customer-based E-tail brand equity on web-market outcomes. In *Proceedings - International Conference on Networks Security, Wireless Communications and Trusted Computing*, NSWCTC 2009 (Vol. 2, pp. 270-273).
- Gurzki, H., & Woisetschlaeger, D.M. (2017). Mapping the luxury research landscape: A bibliometric citation analysis. *Journal of Business Research*, 77, 147-166.
- Han, H., & Hyun, S.S. (2018). Role of motivations for luxury cruise traveling, satisfaction, and involvement in building traveler loyalty. *International Journal of Hospitality Management*, 70, 75-84.
- Heinberg, M., Ozkaya, H. E., & Taube, M. (2018). Do corporate image and reputation drive brand equity in India and China? - Similarities and differences. *Journal of Business Research*, 86, 259-268.
- Hoyos, R. (2016). *Branding: el arte de marcar corazones*. Bogotá: Ecoe Ediciones.
- Huamaní, C., Rey de Castro, J., González-Alcaide, G., Polesel, D. N., Tufik, S., & Andersen, M. L. (2015). Scientific research in obstructive sleep apnea syndrome: Bibliometric analysis in SCOPUS, 1991 - 2012. *Sleep and Breathing*, 19(1), 109-114.
- Huamaní, C., Romaní, F., González-Alcaide, G., Mejia, M. O., Ramos, J. M., Espinoza, M., & Cabezas, C. (2014). South American collaboration in scientific publications on leishmaniasis: Bibliometric analysis in Scopus (2000-2011). *Revista do Instituto De Medicina Tropical De Sao Paulo*, 56(5), 381-390.
- Huang, Y., & Shih, K. (2017). Customer-based brand equity of smartphone in the emerging market. *International Journal of Mobile Communications*, 15(5), 467-490.
- Kato, M., & Ando, A. (2017). National ties of international scientific collaboration and researcher mobility found in nature and science. *Scientometrics*, 110(2), 673-694.
- Keller, K.L. (1993). Conceptualizing, Measuring, and Managing Customer-Based Brand Equity. *Journal of Marketing*, 57(1), 1-22.
- Keller, K.L. (2001). Building Customer-Based Brand Equity: A Blueprint for Creating Strong Brands. *Journal of Marketing Communications*, 15(2-3), 139-155.
- Kumar, S., & Kumar, S. (2008). *Collaboration in Research Productivity in Oil Seed Research Institutes of India*. Fourth International Conference on Webometrics, Informetrics and Scientometrics & Ninth COLLNET Meeting Humboldt- Universitat Zu Berlin, Institute for Library and Information Science (IBI), 1-18.
- Kwon, K., Park, H. W., So, M., & Leydesdorff, L. (2012). Has globalization strengthened South Korea's national research system? National and international dynamics of the triple helix of scientific co-authorship relationships in South Korea. *Scientometrics*, 90(1), 163-176.

- Li-xin, Z., & Shou-lian, T. (2010). *Research on Influencing Mechanism of Customer-Based Brand Equity of Service Enterprise*. International Conference on E-Business and E-Government (pp. 4406–4409).
- Londoño, W., & Castañeda, L. (2018). Análisis Bibliométrico de tendencias en marca. *Revista Espacios*, 39(14), 23-38.
- Loureiro, S., & Correia, M. (2013). The effect of perceived benefits, trust, quality, brand awareness/associations and brand loyalty on internet banking brand equity. *International Journal of Electronic Commerce Studies*, 4(2), 139-158.
- Luo, Z., & Wei, H. (2011). An empirical study on the formation mechanism of internet brand equity. In *2nd International Conference on Artificial Intelligence, Management Science and Electronic Commerce, AIMSEC - Proceedings* (pp. 109–112).
- Martín-Martín, A., Orduña-Malea, E., Ayllón, J. M., & López-Cózar, E. D. (2016). *The counting house: Measuring those who count. Presence of bibliometrics, scientometrics, informetrics, webometrics and altmetrics in the Google Scholar citations, Researcherid, ResearchGate, Mendeley & Twitter*. arXiv preprint arXiv:1602.02412.
- Moncayo, S. (2018). *Relación de los constructos que definen el brand equity desde un enfoque formativo de la marca YAMAHA en personas de 18 a 70 años en la ciudad de Bogotá* (Tesis de grado). Universidad Santo Tomás, Bogotá, Colombia.
- Murtagh, F. (2007). Multiple correspondence analysis and related methods. *Psychometrika*, 72(2), 275-277.
- Oh, H., Fiore, A. M., & Jeoung, M. (2007). Measuring experience economy concepts: Tourism applications. *Journal of Travel Research*, 46(2), 119-132.
- Price, D.S. (1976). A general theory of bibliometric and other cumulative advantage processes. *Journal of the Association for Information Science and Technology*, 27(5), 292-306.
- Rajh, E. (2001). The relationship between sources of brand equity and market outcomes; *Ekonomiska Istrazivanja*, 14(2), 77-82.
- Sánchez, A.D., de la Cruz Del Río Rama, M., & García, J.Á. (2017). Bibliometric analysis of publications on wine tourism in the databases scopus and WoS. *European Research on Management and Business Economics*, 23(1), 8-15.
- Syed, S.F., Nguyen, B., Melewar, T.C., Loh, Y.H., & Liu, M. (2016). Explicating industrial brand equity: Integrating brand trust, brand performance and industrial brand image. *Industrial Management & Data Systems*, 116(5), 858-882.
- Urbizagástegui, R., & Restrepo, C. (2011). Modelando la distribución del número de co–autores por artículo. *Investigación Bibliotecológica*, 25(53), 103-119.
- Urbizagástegui-Alvarado, R. (2014). Estudio sincrónico de obsolescencia de la literatura: El caso de la Ley de Lotka. *Investigación Bibliotecológica*, 28(63), 85-113.
- Vaijayanthi, P., & Shreenivasan, Ka. (2017) Measuring brand equity of cosmeceuticals â€œa case using consumer based brand equity model. *Asian Journal of pharmaceutical and clinical*

*research*, 10(6), 210-215.

Xiaoping, F., Xiaojing, T., & Sijun, X. (2012). A study on the operation mechanism of website brand equity based on S-O-R paradigm. In *9th International Conference on Service Systems and Service Management - Proceedings of ICSSSM'12* (pp. 566-569).

Zhou, Q., Xu, Y., Yin, Z., Bao, D., & Wang, S. (2014). Brand equity management for luxury food products based on the customer service strategy. *Advance Journal of Food Science and Technology*, 6(12), 1356-1361.

Zhu, D.S., & Kuo, M.J. (2010). A study on the customer-based brand equity of online retailers. In *Proceedings - 9th IEEE/ACIS International Conference on Computer and Information Science, ICIS 2010* (pp. 295-300).

Zupic, I., & Čater, T. (2015). Bibliometric methods in management and organization. *Organizational Research Methods*, 18(3), 429-472.



# Strategic Allocation of Pension Reserve Funds: Application of ALM Model and LDI Technique

AITOUTOUHEN, LATIFA

Faculty of Law, Economics and Social Sciences  
University Abdel Malek Essâadi (Tetouan, Morocco)  
Correo electrónico: latifa\_ait@hotmail.com

HAMZA, FARIS

Faculty of Law, Economics and Social Sciences  
University Abdel Malek Essâadi (Tetouan, Morocco)  
Correo electrónico: fhamza\_2004@yahoo.fr

## ABSTRACT

This article will focus on the research for the strategic allocation of reserve fund of the Moroccan pension scheme in order to ensure and improve its solvency. The first aim of this paper is to construct and test an Economic Scenario Generator (ESG) based on a model inspired of the Ahlgrim approach (2005) and adapted to the specificities of asset-liability management (ALM) and liability-driven investing (LDI).

In our study, we will also develop the ALM technique based on the maximization of the reserve under the criterion of maximization of solvency ratio (since the fund is in deficit). To do this, we consider a recent strategic asset allocation approach based on the "constant weight" strategy, or Fixed-Mix, Kouwenberg (2001). Indeed, we will implement the LDI strategies based on the Sharpe and Tint model (1990). For that, we will first try to find the desired weightings of the asset classes in an asset context only. Afterwards, we try to build a hedge portfolio (LHP) and a performance research portfolio (PSP).

**Keywords:** solvency, reserves fund, economic scenario generation (ESG), Monte Carlo simulation, ALM model, strategic allocation, LDI strategy, Moroccan civil pensions regime.

**Clasificación JEL:** G11; G12; G17; G22; G63.

**MSC2010:** 97M30; 97K40; 97K50; 97K60; 97K80; 91G10; 91G30; 91G70; 91B30; 91B82; 82C80.

# Asignación Estratégica de Fondos de Reserva de Pensiones: Aplicación del Modelo ALM y LDI Técnica

## RESUMEN

Este artículo se centrará en la investigación para la asignación estratégica del fondo de reserva del plan de pensiones marroquí para garantizar y mejorar su solvencia. El primer objetivo de este documento es construir y probar un generador de escenarios económicos (ESG) basado en un modelo inspirado en el enfoque Ahlgrim (2005) y adaptado a las especificidades de la gestión de activos y pasivos (ALM) y la inversión basada en pasivos (LDI)

En nuestro estudio, también desarrollaremos la técnica ALM basada en la maximización de la reserva bajo el criterio de maximización de coeficiente de solvencia (ya que el fondo está en déficit). Para hacer esto, consideramos un enfoque de asignación estratégica de activos reciente basado en el "peso constante" estrategia, o Fixed-Mix, Kouwenberg (2001). De hecho, implementaremos las estrategias LDI basadas en el modelo de Sharpe y Tint (1990). Para eso, primero intentaremos encontrar las ponderaciones deseadas de las clases de activos solo en un contexto de activos. Luego, tratamos de construir una cartera de cobertura (LHP) y una cartera de investigación de rendimiento (PSP).

**Palabras clave:** solvencia, fondo de reservas, generación de escenarios económicos (ESG), simulación de Monte Carlo, modelo ALM, asignación estratégica, estrategia LDI, régimen de pensiones civiles marroquíes.

**JEL classification:** G11; G12; G17; G22; G63.

**MSC2010:** 97M30; 97K40; 97K50; 97K60; 97K80; 91G10; 91G30; 91G70; 91B30; 91B82; 82C80.





## 1. Introduction

The investment of reserve funds plays a major role in the survival of pension plans. An in-depth study of asset allocation and regular monitoring should optimize the financial returns generated by the reserves and thus improve and ensure the solvency of the plan retirement.

The pension reserve therefore remains a very good indicator for the financial management of pension plans since its level and the projection of its behavior over time make it possible to see the number of years that the fund is able to honor its commitments and define the sustainability horizon of the plan. In addition, the level of the pension reserve makes it possible to calculate the financing ratio, ie. the degree of representativity of the fund's liabilities.

The long-term financial management of pension fund reserves is based on two important points. On the one hand, Economic Scenario Generators (ESGs) used to model fluctuations in macroeconomic and financial variables over the long-term then. On the other hand, the models and strategies proposed for the elaboration of the asset allocation.

The generation of economic scenarios is a crucial phase in asset-liability management (ALM) and liability-driven investing (LDI) of an insurance company or a pension fund. The choice of the strategic allocation comes in a second time to reflect the attitude towards the risk of the long-term investor (Meucci, 2005).

The needs of pension plans for economic scenarios have increased in recent years. The evolution of these needs is mainly due to two factors: the evolution of prudential regulation and the evolution of financial communication, particularly in the valuation of insurance and pension companies.

The economic crisis, which began with a financial crisis in the United States in 2007 has strongly affected the performance of an insurer's asset portfolio, particularly pension funds. In particular, it highlighted the shortcomings of certain existing generators, in particular in terms of the occurrence of extreme events and the structure of dependency in the tails of distributions and imposed on insurance and pension funds no longer benefiting from this tool, to put it in place. The financial and economic crisis of 2008 also had a negative impact on the CMR portfolio of assets. Thus, in the context of the insolvency of our civil regime, the creation of an economic scenario generator proves to be an indispensable tool for risk management and decision support. Our ESG must therefore be in an environment that includes probabilities of crises, which will increase the number of prudent and rational decisions.

The subject of asset allocation is at the center of concern for institutional investors. On the one hand, the financial crisis had a profound impact on the modeling of liabilities and assets, the characteristics of which are no longer consistent with long-term assumptions. On the other hand, the current conditions of historically low rates raise questions about their traditional investment approach, namely stable returns secured by more or less long-term rate products. In these circumstances, it is difficult for them to perform consistently and to manage extreme risks in parallel.

The asset allocation of the reserve funds is a strategic step to guarantee the financial stability of the pension funds and the achievement of the objectives set by them. Indeed, the pension fund is supposed to provide pension benefits to retirees throughout their lives and possibly to their beneficiaries. This is why some countries have even opted for the creation of institutions specialized in the allocation of reserve funds of pension funds.

The strategic asset allocation of a pension plan in general is often defined as a step in a broader asset / liability management process, particularly as a downstream step in risk apprehension and upstream of tactical asset allocation. In this sense, the strategic asset

allocation aims either at confirming the optimality of the reserve's existing asset structure or at proposing an optimal asset structure for this reserve that will allow the fund to achieve a certain financial performance objective while respecting its commitments with a given level of confidence.

The strategic allocation must take into account the evolution over time of asset returns and their dependency structure. This involves selecting the dynamics of each variable and then estimating the parameters of the chosen model (the calibration of the model). This leads to the establishment of a long-term economic scenario generation model that allows the projection of both asset value and liability.

The most widely used reference tool for determining the ability of a pension fund to take risks and therefore to define its strategic benchmark is Asset Liability Management (ALM). This strategy (ALM) has emerged in recent years for pension funds as a risk management approach that takes into account the assets, liabilities and also the different interactions that exist between these two parts (Adam, 2007). Fund managers must determine which eligible strategies provide sufficient assurance that the solvency of the fund is assured (taking into account the expected benefits).

Asset-liability management generally can be based on optimizing the value of the reserve, taking into account the constraints related to the liabilities it must meet. It is in this context that the choice of an effective strategic allocation plays a key role in the asset-liability management of a pension plan and the optimization of its solvency, since reserves contribute to the viability and the durability of this scheme.

In the 1990s, asset management for the majority of pension funds was done by examining the expected return and volatility of the assets with little regard to actuarial liabilities. The fall in interest rates in recent years, combined with stock market volatility and changes in regulations and accounting standards has led to the development of several reflections for the implementation of a strategic approach that manages the risk in a consistent manner according to the liabilities of the pension funds, notably the "liability-driven investments" or LDI. The objective of the LDI is to meet current and future obligations, hedge liabilities and reduce the volatility. LDI strategies are considered the most recent and sophisticated form of ALM. This model aims to generate performance once the commitments are honored. For this reason, this model is based on two portfolios: a hedge portfolio and a performance research portfolio.

In this sense, this study is aimed at seeking the best possible allocation of civil reserve portfolio of the CMR within the framework of Asset-Liability management and the LDI model. To achieve our goal, we will answer the central question: *how to optimize the strategic allocation of reserve funds under ALM management and LDI?*

This paper will be composed of four sections, after an introduction. The purpose of the second section is to present a review of a Generator of Economic Scenarios within our civil pension system financed by a pay-as-you-go, asset allocation models as well as the ALM models in the context of the management of a pension plan and the LDI strategy. The third section will be devoted to the presentation of the data and the methodology adopted for our study. The last section will present the different results and conclusions.

## **2. Literature review**

The literature on ESG is rich. David Wilkie (1986) marked a turning point in the design of ESG by publishing 'A stochastic investment model for actuarial use'. Not only are the works realized the first to integrate the interaction of the different variables in order to make the projections more coherent; but it also takes into account all financial and macroeconomic variables (inflation, equity, interest rates and real estate).

In order to characterize the structure of dependency, Wilkie uses a cascade approach, which can be applied in a wide field, particularly to insurance and pension funds. The first version of Wilkie's model (widely used in the Anglo-Saxon countries) was applied as part of the solvency measurement of an insurance company by the Faculty of Actuaries (1986). Similarly, one of the first areas of application of Wilkie's actuarial model was the valuation of equity-linked commitments. In general, this model is rather consistent with the logics of capital requirement and value projection (case of asset-liability management for example) than with pricing logics.

Several English actuaries have strongly criticized Wilkie's model, notably Kitts (1990), Daykin and Hey (1990), Huber (1995), Geoghegan and al. (1992). The main criticisms concern several elements: some of the parameters are unstable over time and a significant cross-correlation between the residuals of the projected variables is observed. The model of price indices for inflation does not allow the projection of periods with irregular shocks with high values of inflation. Similarly, the likelihood of having negative inflation values with this model is high. Indeed, Wilkie's model is above all empirical and two central assumptions of financial theory are not respected: the efficiency of financial markets and the absence of arbitrage opportunity.

Brennan and Xia (2000) discuss the modeling of inflation-linked assets. They choose a structure that places inflation and the short-term interest rate net of inflation (or real interest rate) at the center of modeling. The number of parameters of the Brennan and Xia model (2000) is lower than that of Wilkie (1986) and the parameters selected by these authors in 2000 are economically interpretable. Nevertheless, in an asset allocation objective, the approach of Brennan and Xia (2000) may seem limited because it does not include real estate, which can represent up to 40% of an insurer's portfolio.

Campbell and Viceira (2001) present an approach based on the correlation structure, the application of which was carried out in the context of determining the strategic asset allocation for a long-term investor, in particular pension funds. On the other hand, Kouwenberg (2001) adopted this structure to develop a scenario generation model based on a tree diagram for scenario projection. It compares the effect of choosing the projection scheme on optimal asset allocation in the context of asset-liability management of a German pension fund. The tree structure chosen by Kouwenberg (2001) is more suited to a series of dynamic models of asset-liability management based on stochastic programming techniques.

In the context of Dynamic Financial Analysis (DFA) or ALM non-life research, supported by two American professional associations, the Casualty Actuarial Society (CAS) and the Society of Actuaries (SOA). Ahlgrim, D'Arcy and Gorvett (2005) are essentially based on the two-point criticism of Wilkie's model (1995): the relationship between inflation and interest rates is considered incoherent and the treatment of stock returns by an autoregressive approach seems too simplistic of the observed history. They propose alternative processes by justifying their choices by backtesting on deep historical data. The model of Ahlgrim et al. (2005) follows the model of Hibbert et al. (2001) as a model of long-term value projection and risk management.

In the article 'A framework for the Actuarial Profession', Ahlgrim et al. (2005) put the inflation rate and the short-term interest rate at the center of their model. The model of Ahlgrim et al. (2005), which seems to be the most appropriate in the context of asset portfolio management, attaches particular importance to the correlation between the different economic and financial series. Nevertheless, this correlation does not introduce tail dependence and is therefore limited especially in times of crisis. Armel, Planchet and Kamega (2010) improves this aspect by using the theory of copulas, a function that allows modeling the dependency structure between random variables.

It is possible to represent the evolution over time of financial and macroeconomic variables in two schematic forms: the linear projection structure on the one hand Ahlgrim et al. (2005) and the structure of tree (or tree) projection on the other hand Kouwenberg (2001). The value of the nodes can be determined by different methods. Faleh, Planchet and Rullière (2009) group them into four main families: methods based on sampling, those based on matching statistical properties, Bootstrapping techniques, and the use of Principal Component Analysis.

For Hibbert et al. (2001), the properties that a 'good' ESG must have are: economic plausibility, parsimony, representativeness, transparency and evolution. The importance of asset allocation on portfolio performance has been established in the literature. Using the US investment data, Brinson, Hood and Beebower (1986) found that approximately 90% of the variability in returns over time of a typical portfolio is explained by the policy of the allocation of assets. A similar study using data for an Australian fund manager came to the same conclusion (Santacruz, 2013). In addition, a study by Brinson et al. (1986) found that about 40% of the variation in returns in several portfolios is explained by the asset allocation (Ibbotson & Kaplan, 2000). Previous research (eg, Exley & Mehta (1996) and Exley, Mehta & Smith (1997)) suggested that there is no optimal allocation of assets for a defined benefit pension plan.

Pension funds can adopt high-risk, high-yield strategies or low-risk, low-yield strategies. No strategy is optimal because optimal strategies need to be considered in the context of the overall asset and liability profiles of members and investors (Exley & Mehta, 1996).

From larger pension funds, the modern concepts of portfolio theory have been increasingly used to derive strategic asset allocation (SAA) and manage investment risk. Indeed, pension funds carry out an efficient frontier analysis based on the Markowitz mean-variance model, which aims to improve the efficiency of their investments.

This Markowitz risk-return model has revolutionized the solvency system approach by providing a new foundation for prudential investment analysis. Solvency II, which is considered the "revolution" of insurance solvency standards, is only an "evolution" since its vision is always "mono factorial", concentrated on a single objective: risk control.

Modern portfolio theory has some limitations. In particular, the risk measure used by Markowitz is variance, which may be limited in general. Moreover, this model does not take into account the existence of a liability, which makes it limited in certain insurance issues. The shortcomings of these analyzes are concentration on assets only and the short-term investment horizon (Campbell & Viceira, 2006).

In the literature, it is even indicated that the application of a single period model repeatedly for more than one period results in suboptimal dynamic decisions (Dupacová et al., 2003).

Research on optimal dynamic allocation began with Fama (1970) as part of a discrete-time model, Merton (1969 and 1971) and Samuelson (1969) in continuous time. These models make it possible to obtain closed formulas for optimal allocation over time - with a definite advantage for continuous time models - under assumptions about asset dynamics and utility function, Wachter (2002) or Chacko and Viceira (2005).

Following a review of the multi-period mean-variance approach based on scenario trees, Steinbach (2001), a more recent paper proposes a discrete time-series model that takes into account expected performance and the variance from one period to the next. Dynamic programming using objective functions that depend on the expected return and the variance of the final value of the portfolio is then used to determine the optimal portfolios (Çelikyurt & Özekici, 2007).

By adopting a long-term investment horizon, it is estimated that portfolio returns can be better optimized (Brennan, Schwartz, & Lagnado, 1997). However, differences in growth rates between different asset classes tend to move the portfolio away from the optimal allocation in the case of a buy and hold approach.

Even small changes in asset allocation weights are often statistically significant (Christie, 2005). One way to keep the portfolio near the efficient frontier in multi-period scenarios is to rebalance each time the asset weights deviate from the optimal allocation by more than the predetermined thresholds. This approach is called a "rebalancing" or "fixed-mix" management rule.

Multi-period strategies involving rebalancing were judged to outperform a buying and retaining strategy without rebalancing (Yu & Lee, 2011). However, it is observed that current rebalancing practices are characterized by suboptimal timing rules and other heuristics. An algorithm is proposed to determine when rebalancing is statistically desirable (Michaud, Esch & Michaud, 2012). The theoretical properties of the Fixed-Mix strategy are discussed in Merton (1990), Dempster et al. (2003), Infanger (2007), Brinson et al. (1991) and Kouwenberg (2001).

After the crisis of 1987, the Brady Commission strongly criticized the pro-cyclical dynamic strategies implemented as part of the replication of portfolio insurance strategies: they were accused of helping to accelerate the fall in financial markets 1987<sup>1</sup>. Mark Rubinstein concluded in 1988 in his article "Portfolio Insurance and the Market Crash" that the contribution of these strategies was only 12% and predicted as an oracle: "Those who proclaim the death of preferential motives for dynamic strategies presuppose an unrealistic reconstruction of natural human desires" (Rubinstein, 1988, p. 41). Another subgroup of models, and the most recent one, is mainly inspired by Merton's choice of consumption and portfolio theory (1971). These are dynamic or inter-temporal allocation models. These recent models come up against the problem of implementation considering the complexity of the mathematical tools used, Hainaut and Devolder (2005), Rudolf and Ziemba (2004) and Yen and Hsu (2003).

Asset-liability management or 'ALM' dates back to Frederick Macaulay in Berkeley (1938) and John Hicks in Oxford (1939). These two financial economists were interested in finding (the duration) a measure of the approximate change in the price of liabilities following a change in the performance of these commitments. Paul Samuelson (1945) and F. M. Redington (1952) rediscovered the duration measure in their analysis of the sensitivity of financial institutions' assets and liabilities to changes in interest rates. Redington was the first to associate this concept with the assets and liabilities of insurers.

Kim and Santomero (1988), Sharpe and Tint (1990), Leibowitz, Kogelman and Bader (1992) aim to minimize the risk of loss of surplus (measured by the variance of surplus profitability) assets. They are mono-periodic models, which limits their utility in practice for problems of allocation over the long term. The chosen risk measure can then be the variance or the Value at Risk of the surplus of the asset in relation to the liabilities.

Bauer, Hoevenaars and Steenkamp (2006) of the Dutch pension research community defines ALM as a study of the impact of investment, contribution and indexation decisions on the different fund actors (employees, employers, pensioners and future generations).

In a definition from the United Kingdom, Blake (2003) defines ALM as a quantitative technique used by some pension funds to structure their asset portfolio with due regard to the structure of their liabilities. Indeed, Blake (2006) summarizes the utility, advantages and disadvantages of asset-liability management. He argues that asset-liability management is a way

---

<sup>1</sup> These methods applied by a large number of players, on significant volumes (US pension funds) led the managers to reduce their positions all at the same time, and over very short periods.

of protecting oneself against the uncertainty associated with the economic and demographic assumptions used to value the present value of assets and liabilities.

The limitations of classical models of asset-liability management and the development of computerized media in the 1980s have recently led to the transition to other types of models: dynamic models and ALM stochastic models. Recent years have also seen the emergence of methods known as stochastic programming.

Rudolf and Ziemba (2004) include liabilities in their model and maximize the utility preferences of a pension fund relative to the inter-temporal surplus. In their model, surplus returns are assumed to depend on other state variables such as monetary returns or exchange rates.

Detemple and Rindisbacher (2008) also develop a dynamic model of asset allocation in the presence of liabilities for the management of pension funds. However, unlike Rudolf and Ziemba (2004), they argue that surplus maximization is problematic in circumstances where liabilities exceed assets. In this case, the surplus is negative leading to a poor specification of the objective - function.

Often, based on simulations because of its complexity, stochastic programming provides a flexible and powerful tool for ALM. Its importance lies in its ability to combine many types of characteristics within a common framework. In addition, assets and liabilities are all influenced by many sources of risk and risk aversion is taken into account. Another advantage of stochastic programming (SP) is that it can be extended directly from an asset analysis to an asset and liability management (ALM) problem only. The inclusion of balance sheet liabilities is an essential requirement for a financial planning model by most institutional investors: pension funds and insurance companies (Zenios & Ziemba, 2007; Ziemba, 2003).

Stochastic dynamic programming is provided as an alternative method for proposing decision policies for dynamic asset allocation strategies (Zenios & Ziemba, 2007). The main difference between stochastic programming models and stochastic dynamic programming is the solution concept. In stochastic programming, emphasis is placed on the decision of the first period, whereas in stochastic dynamic programming the aim is to establish decision rules which could be applied in the system, Dupacová et al. (2003). Stochastic programming models require rigorous scenarios as inputs to optimize and develop decision-making policies. The optimization results depend entirely on the scenarios on which they are optimized.

On the other hand, dynamic stochastic programming models incorporated in the system automatically cover current portfolio allocations against future uncertainties over a longer time horizon, leading to more robust decisions and insights into possible future problems and benefits. It is this characteristic and its ability to integrate different attitudes to risk that make dynamic stochastic optimization the most natural framework for the effective solution of pension fund management problems (Rudolf and Ziemba, 2004; Gao, 2008).

In dynamic stochastic optimization, the uncertain future is represented by a large number of future scenarios and contingent decisions are taken in stages according to the tree representations of future data and decision processes (Boender, 1997).

Large-scale applications were developed in the 1990s, such as the Russell-Yasuda Kasai model (1998) for a Japanese insurance company (Cariño et al., 1994), or the scenario-based optimization model of Dert for pension funds (Dert, 1998). Boender, Van Aalst and Heemskerck (1998) developed and described the ORTEC model, which again uses multi-stage stochastic programming.

The Towers Perrin-Tillinghast ALM system in Mulvey (1996, 2000) has three components: a scenario generator (CAP: Link), an optimization simulation model (OPT: Link) and a financial reporting module (FIN: Link). Kouwenberg (2001) focuses on comparing scenario generation methods for a multi-stage stochastic programming model of a Dutch pension fund. Hoyland and Wallace (2001) analyze the implications of regulation in Norwegian life insurance companies using a stochastic ALM model at several stages. Their results show that certain regulations (the guaranteed annual rate of return, for example) do not coincide with the best interests of the insured.

To overcome the disadvantages of simulation, stochastic linear programming (SLP) models have been used to solve ALM problems. Instead of exogenous variables, as in simulation, decisions become endogenous. Kusy and Ziemba (1986) developed a multi-period stochastic linear programming model for the Vancouver City Savings Credit Union for a five-year planning period.

Consigli and Dempster (1998) presented the Computer Assisted Liability (CALM) model, which maximizes wealth at the end of the time horizon. These authors present the CALM model, which was designed to deal with uncertainty affecting both assets (in either the portfolio or the market) and liabilities (in the form of scenario-based payments or borrowing costs). Their work suggests that their stochastic ALM model has given good results compared to deterministic models of 5 years. The Watson model is a specific example of the CALM model for a pension fund.

The stochastic control approach captures uncertainty by allowing a continuum of states that can be characterized by a small number of state variables that follow a joint Markov process. Bielecki and Pliska (1998) proposed a new stochastic control approach for pension funds that explicitly incorporates the underlying economic variables into the model as well as an objective function of the infinite risk-sensitive horizon.

The academic literature with respect to the application of LDI is still rather small. Amenc et al. (2006, 2007) apply the LDI concept to insurance companies and private wealth management. They argue that the LDI concept can be applied successfully in this case and give examples of the effectiveness of both static and dynamic LDI strategies. They show that, given a surplus optimization perspective, more efficient asset mixes can be found by introducing a liability-hedging portfolio (LHP) in the menu of asset classes. LDI solutions thus consist of three basic building blocks (cash, LHP, and a performance portfolio), as opposed to the allocation to standard asset classes, as in the context of regular surplus optimization techniques.

Mindlin (2006) discusses the relevance of LDI solutions for pension funds. He argues that the LDI concept is inadequate for open-ended pension plans since matching assets for on-going plans rarely exist. For example, if the matching asset for an on-going plan existed, it would contain bonds indexed to wage inflation with maturities of 50 years or more. Mindlin therefore concludes that the LDI approach is more appropriate for terminated plans or plans for which termination is likely. He also stresses that the impact of other risk factors (contribution risk, solvency risk, accounting risk, etc.) is not weighted appropriately by LDI proponents.

Boender (2007) points out that LDI is not a completely new concept at all: asset and liability management (ALM) for pension funds has given the liabilities a central role a long time ago (see for example Zenios and Ziemba (2006, 2007) or Ziemba and Mulvey (1998) for excellent overviews). Boender also demonstrates, with an example from practice that most LDI solutions for open-ended pension funds lead to solutions that are too risk-averse and, as a consequence, too expensive. He remarks that it is common practice that, given an agreed-upon asset allocation, sponsors contribute more in case of a decreasing funded ratio.

Studies focusing on this liability driven investment (LDI) approach of pension funds constitute a growing area within the portfolio choice literature (e.g., Sharpe & Tint, 1990; Rudolf & Ziemba, 2004; Hoevenaars, Molenaar, Schotman & Steenkamp, 2008; Berkelaar & Kouwenberg, 2010; Ang, Chen & Sundaresan, 2013; and Van Binsbergen & Brandt, 2014).

### 3. Methodology and data.

Optimizing the financial management of reserves is very important to ensure the solvency of pension funds.

#### 3.1. Presentation and description of data

As stipulated by the law n° 43-95 reorganizing the Moroccan pension fund, the financial management of the reserve funds aims to contribute, in the long term, to the financial equilibrium of the pension plans managed by the CMR. As regards the use of reserves, the article 14 of this law defines the investment universe and establishes the list of asset classes in which the CMR can make use of its established reserves. Thus, surpluses generated by the civil pensions scheme may be invested in government securities and those with a guarantee of 65%, listed shares and any securities traded on a regulated market up to 30%, and 5% of real estate, after authorization from the Tutorship ministry.

As we have already mentioned, we will focus on the generation of economic scenarios whose financial and macroeconomic variables are the inflation rate, the real long-term interest rate and the short-term interest rate, an investment in stocks, in bond and the return on an investment in real estate. Moreover, the modeling of these variables must integrate the long-term perspective of the management of these variables. This long-term perspective has consequences for the estimation of the parameters of the model chosen: the estimation must be made on series whose depth must be consistent with the envisaged horizon of projection. In this context, we have selected series of monthly data<sup>2</sup> with the exception of the real estate indices for which they are quarterly and dating from January 2004 to December 2016, thus covering a period of about 13 years, which is coherent with a projection horizon of 20 years. This period seemed appropriate to take into account changes in political and economic context. Moreover, having defined this period, the construction of these data series was based on the sources (available on the CMR sites, Casablanca Stock Exchange, HCP, the Bank of Maghreb BAM and DAPS). Particular attention will be paid to inflation, mainly because of the central role it plays in the asset-liability model ALM and LDI. The historical inflation rate is based on the Consumer Price Index (CPI) published on the HCP site. The CPI is calculated and published monthly only in 2006, to replace the cost of living index (LCI) introduced in 1991. More precisely, the annual inflation rate in month  $m$  is:  $q_m = \ln\left(\frac{IPC_m}{IPC_{m-12}}\right)$ .

In particular, the high level of inflation rate was observed in 2008, despite state control measures and a sharp drop to negative levels in 2009 following the effects of the 2007 financial crisis (Figure 1). In order to avoid obtaining negative rates and therefore the deflation hypothesis, we applied a lower bound equal to zero.

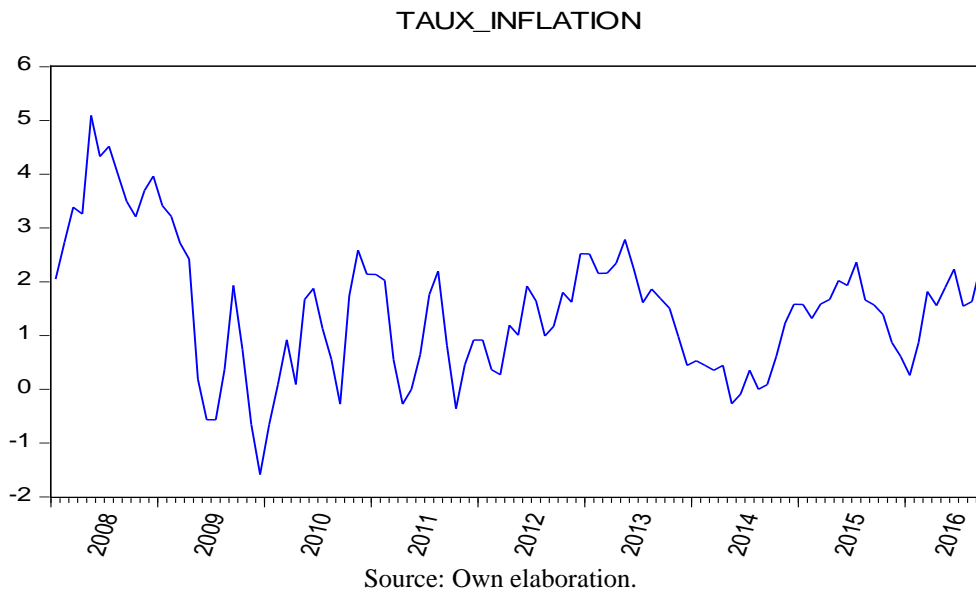
The nominal long-term rate (Figure 2) is the long-term government bond rate published by BAM (maturing 10 years).

---

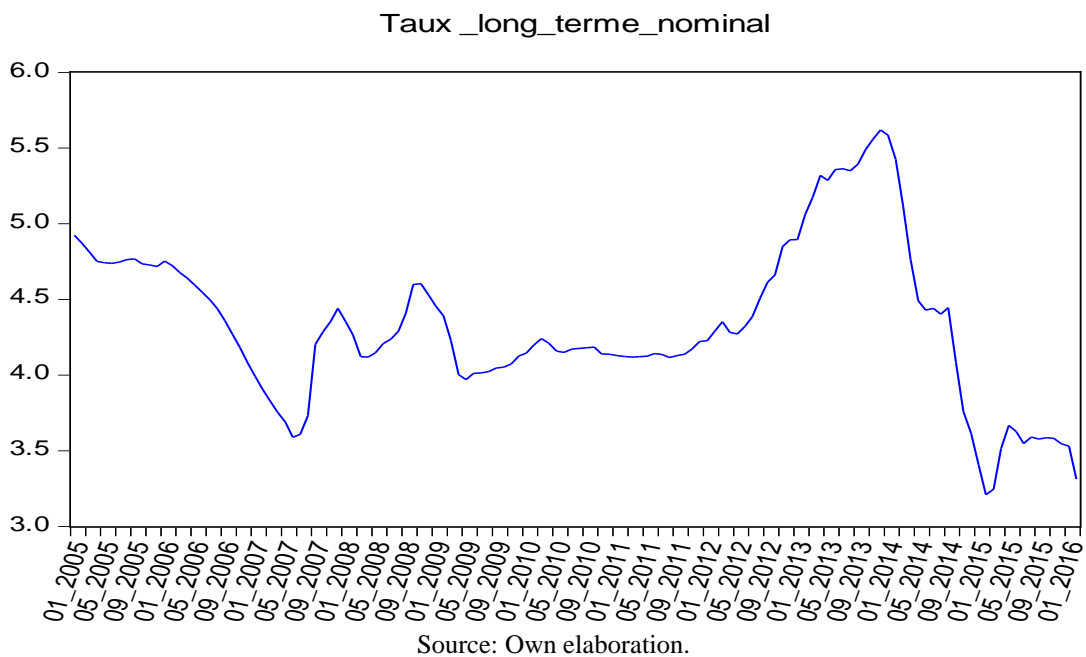
<sup>2</sup> Indeed, annual or quarterly data would give us a depth of history too low for our modeling to be reliable.



**Figure 1. Evolution of the inflation rate between 2006 and 2016.**

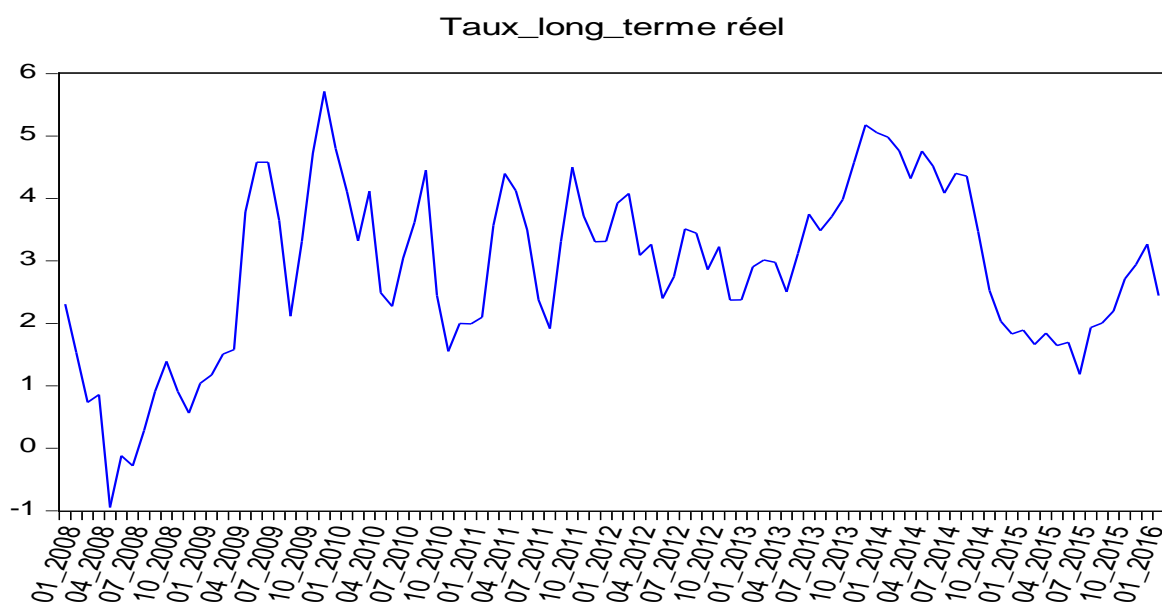


**Figure 2. Evolution (percentage) of the nominal monthly long-term interest rate.**



Long-term real interest rate history is constructed from the historical values of nominal long-term interest rates to which the historical values of the inflation rate are subtracted (Figure 3).

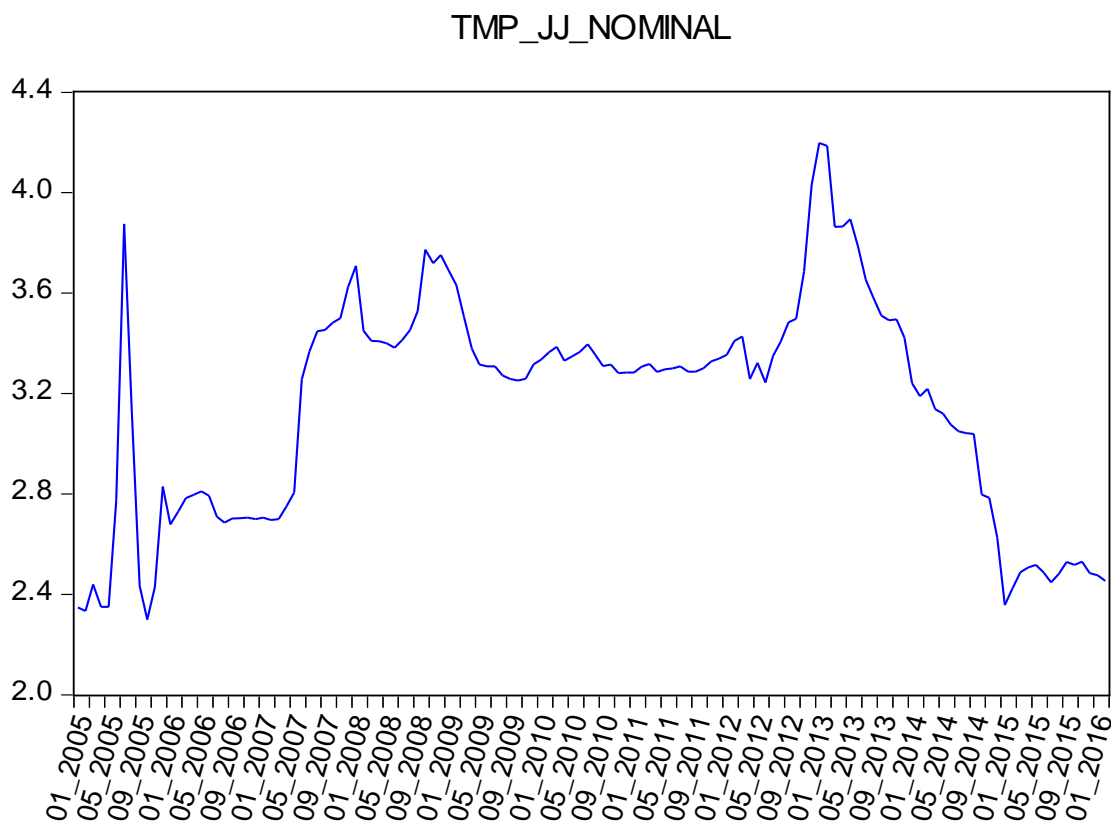
**Figure 3. Evolution (percentage) of the real long-term interest rate.**



Source: Own elaboration.

The nominal short-term interest rate (Figure 4) used corresponds to the average daily money market rate (TMPJJ) published by Maghreb Bank between 2006 and 2016.

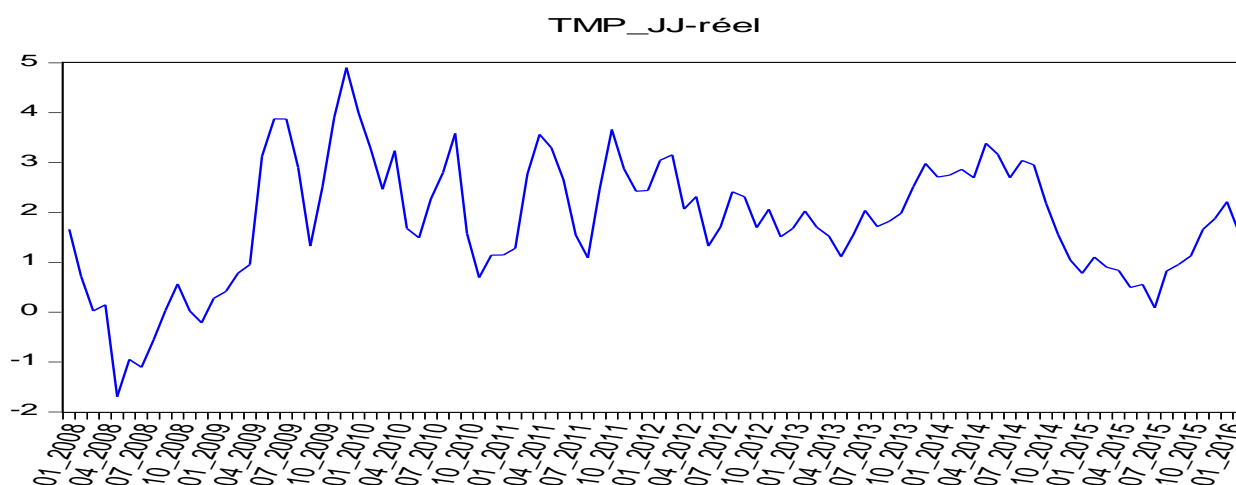
**Figure 4. Evolution (percentage) of the short-term nominal monthly interest rate.**



Source: Own elaboration.

The history of short-term real interest rates is constructed in the same way as real long-term interest rates.

**Figure 5. Evolution of the short-term real interest rates.**



Source: Own elaboration.

Concerning real short-term and long-term rates, they are calculated at any time  $t$ , taking into account the previously determined inflation, namely:  $r_t = \left(\frac{r_{nom,t}}{1+q_t}\right) - 1$  et  $l_t = \left(\frac{l_{nom,t}}{1+q_t}\right) - 1$

It should be noted, however, that the generation of negative interest rates may be a problem for the calculation of market values of bonds in the general modeling of pension funds. We have therefore minimized the rates to zero to avoid any inconsistencies in the model.

The Moroccan pension fund has a much diversified portfolio of equities that provide a significant return. However, there is a regulatory limit capped in 25% of the total value of the CMR portfolio. The main reason is obviously to avoid assets that are too risky given that there are commitments to be met in the medium and long term. The CMR equity portfolio reflects 70% of the MASI index. Thus, in order to construct the history of stock returns, the MASI index with dividends reinvested (total return) was retained.

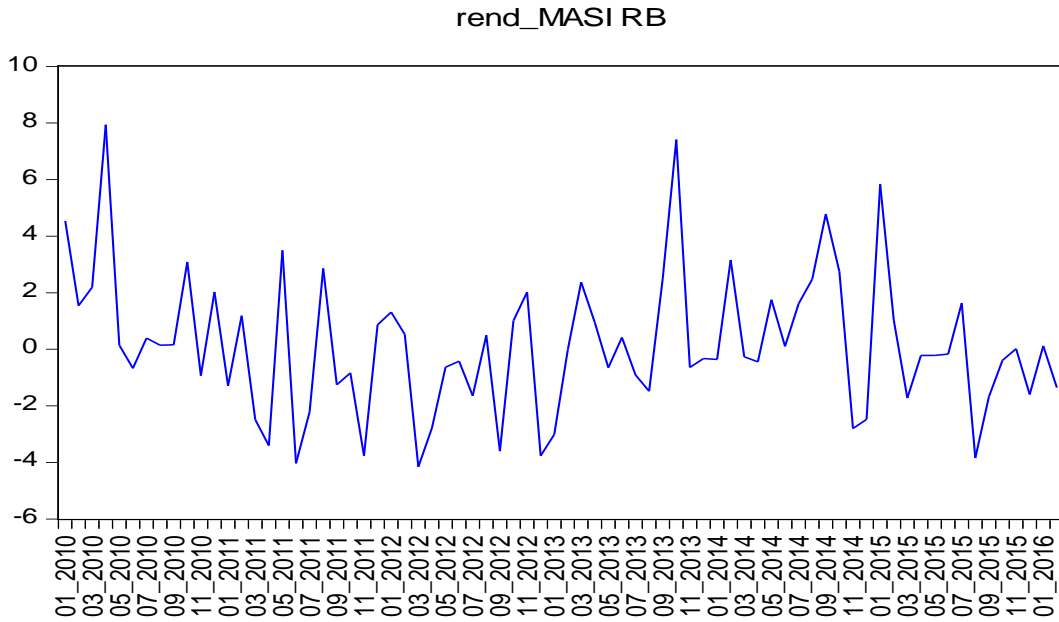
The MASI index is a capitalization index that traces the overall evolution of the market and takes into account all listed securities, which number 75 in 2015. The choice of this index responds to the constraint of coherence and that of diversification. The monthly return is calculated using the following formula:  $x_m = \ln\left(\frac{S_m}{S_{m-1}}\right)$ , where  $S_m$  represents the MASI index with dividends reinvested in month  $m$ .

The return of equities with reinvested dividends evolves according to the formula below:

$$x_t = i_{r,t} + e_t$$

- $i_{r,t}$  : the nominal short-term interest rate at any time  $t$ .
- $e_t = x_t - (r_t + q_t)$ : the excess return of the shares relative to the risk-free rate.

**Figure 6. Evolution of the monthly return of MASI between January 2010 and February 2016 (percentage).**



Source: Own elaboration.

However, unlike the stock rate of return, calibrating the performance of the excess return on the stock over the history of January 2010 to February 2016 poses a problem in the average. Indeed, this value is negative and if it is retained for projections and simulations, we will end up with a yield that diverges in the long term. The cause of this problem is the sharp decline in excess returns during the month of November 2011, representing a return of (-7.33%) and the month of March and December 2012 respectively of (-7.58%) and (-7.80%), as well as the first month of 2013 with a return of -7.21%.

Sovereign bonds represent the largest share of the CMR portfolio with a minimum regulatory level of 60% of the total value of the portfolio. This is the least risky asset class. The civil regime of the Moroccan pension fund, invested throughout the yield curve. In this sense, the performance of its sovereign bond portfolio will be calculated from the global MBI3 fixed income index<sup>4</sup>. The monthly return of the MBI in month  $m$  is calculated using the following formula:

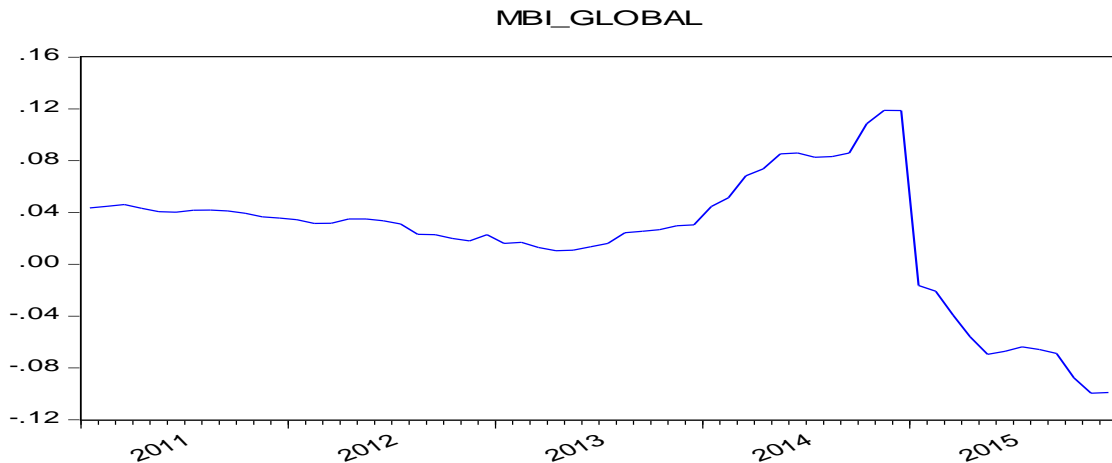
$$y_m = \ln\left(\frac{B_m}{B_{m-1}}\right), \text{ where } B_m \text{ represents the index MBI with coupons reinvested in } m.$$

Given the importance of real estate in financial investments, more and more academic publications encourage investment in this type of asset, as some research has shown that real estate could have replaced bonds in a portfolio, and offers higher yields. As regards CMR, the regulations do not grant it the right to exceed 5% of the total value of the investment portfolio. The main reason for this limitation is the heaviness of the risks associated with this asset class such as (natural disasters that can destroy buildings, liquidity risk, the offer and demand).

<sup>3</sup> The MBI index was created by BMCE Capital. It consists of several hundred fixed-rate government bonds, mainly treasury bills. This index reflects the actual yield of the Moroccan bond market.

<sup>4</sup> For bonds, we based our composition on bond indices for simplicity of handling. The Manager will then be responsible for including any obligations he may wish.

**Figure 7. Evolution of the return of the MBI index between January 2010 and February 2016.**



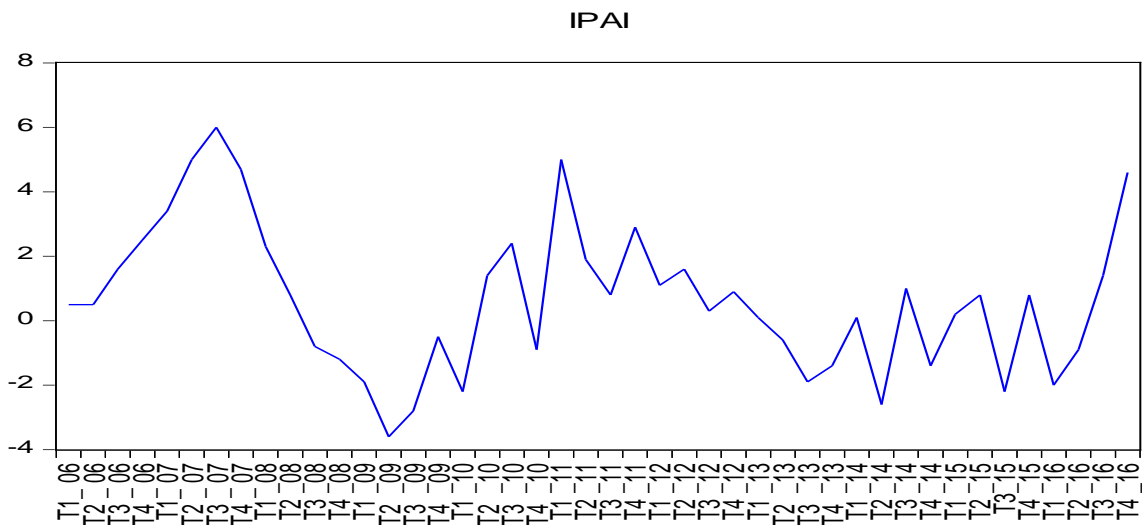
Source: Own elaboration.

We now have to project the value of real estate held by the CMR, but there is no history of the value of the buildings held, so it will be necessary to use a proxy for the underlying risk index real estate. The Property Price Index (IPAI) was developed jointly by Bank Al-Maghreb and the National Agency for Land Conservation, Cadastre and Cartography (ANCFCC). On a quarterly basis, this index, based on 100 in 2006, is calculated using the method of repeated sales, which makes it possible to remedy the problem of the heterogeneity of real estate. It should be noted that the only indicators of the real estate sector published regularly in Morocco are the IPAI and the index IMMO published by the Casablanca Stock Exchange. As we are interested in an index that traces the price evolution of the property itself, rather than the performance of the listed companies attached to the real estate sector, we decided to choose the IPAI that is more appropriate to the philosophy of our model.

More specifically, the annual yield of real estate in quarter m is written at any time t:

$$Im_m = \ln(IPAI_m / IPAI_{m-4})$$

**Figure 8. Evolution of the annual quarterly performance of the IPAI between January 2006 and December 2016.**



Source: Own elaboration.

The graphic above illustrates the evolution of the annual quarterly rate of return of real estate between January 2006 and December 2016. In particular, there is the sudden fall in 2009 due to the financial crisis.

The calibration of the yield of our property net of inflation on the history dating from the first quarter of 2006 to the fourth quarter of 2016 poses a problem at the level of long-term rate of return. Indeed, this value is negative (-0.487%) and if it is chosen for projections and simulations we will find (for certain values of real estate returns) with a yield that diverges in the long term. In order to remain consistent with the modeling of the other variables of the economic scenario generator, the calibration is made on the series of gross return of inflation.

The CMR reserve fund portfolio includes other assets that will not be taken into account in the development of our ESG; private equity, monetary and private bonds. We then present the basic descriptive statistics of the set of study series.

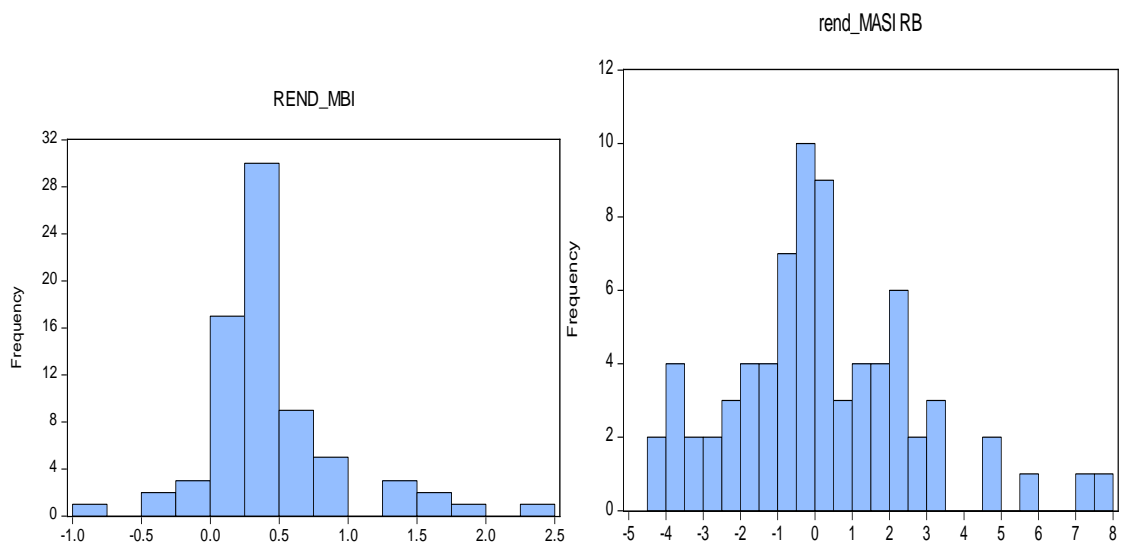
**Table 1. Descriptive Statistics of ESG Components.**

	Inflation	Nominal long-term	Nominal short-term	Equities	bond	Real-estate
Mean	1.464856%	4.332467%	3.1510%	0.1671%	0.447914%	0.629545%
Volatility	1.2422%	0.516883%	0.4466%	2.5020%	0.51249%	2.285707%
Median	1.577596%	4.239005%	3.2920%	-0.0898%	0.35755%	0.65%
Maximum	5.0948%	5.620259 %	4.1978%	7.9411%	2.47000%	6%
Minimum	-1.5866%	3.209706%	2.3000%	-4.1553%	-0.9200%	-3.6%
Skewness	0.373206	0.379064	-0.222584	0.6983	1.33419	0.442091
Kurtosis	3.146694	3.062950	2.274811	3.8990	6.68281	2.697879
Jarque-Bera	0.282014	0.198773	0.132474	0.01421	0.00000	0.449195

Source: Own elaboration.

Apart from stock returns and bond yields, the other series positively respond to the Jarque-Bera normality test. These early statistics suggest that the sample could approximate a normal distribution.

**Figure 9. Histograms of the returns of the MASI RB and MBI indices.**



Source: Own elaboration.

Most models rely mainly on the linear correlation matrix to model the interdependence between ESG variables. This is due to several factors; the simplicity of the models with linear dependence (correlation).

This correlation matrix between the gross inflation ESG variables is estimated on annual data between 2010 and 2015. The differences observed in the correlation coefficients suggest a great diversity of the dependency structures of the bi-varied series. On the gross inflation matrix below, we note, the positive correlation between the rate of inflation and the return of equities. Indeed, this class should theoretically protect the investor against inflation. Similarly, the correlation between short and long-term interest rates and bond yields is strongly positive. Intuitively, in times of uncertainty and turbulence in the markets, investors seek security and turn to sovereign bonds. Similarly, the correlation between nominal short-term and long-term interest rates and equities is positive but not strong enough.

We note that in this system, real estate is negatively correlated with other variables. This can be explained by the assumption made on real estate as a safe haven in the event of a crisis.

**Table 2. Correlation matrix (gross inflation) over the entire history of ESG components.**

	Inflation	Real-estate	Nominal long-term rate	Nominal short-term rate	Equities	Bond
Inflation	1.000000	-0.080176	0.27517	0.522136	0.183656	0.38081
Real-estate	-	1.000000	-0.433763	-0.120329	-	-
Nominal long-term	0.27517	-0.433763	1.00000	0.877658	0.252228	0.97656
Nominal short-term	0.522136	-0.120329	0.877658	1.000000	0.228202	0.94247
Equities	0.183656	-0.731682	0.252228	0.228202	1.000000	0.3348
Bond	0.38081	-0.373266	0.976566	0.942478	0.3348	1.00000

Source : Own elaboration.

The occurrence of a technical deficit of DhM 937 million from 2014 and the second deficit in 2015 has led to a mechanical increase in the contribution rate needed to balance the scheme. The contribution rate must be of the order of 45.75% in 2045, which shows the serious deficit incurred by the civil regime of the CMR.

Given the increase in benefits and the reduction in contributions, it is clear that the coverage rate is falling. Thus, it rose from 85.5% in 2015 to 32.25% in 2045. From the year 2014, the scheme began to draw on its reserve fund to finance the gap between the revenue and expenditure of the scheme. However, this situation would gradually lead to a depletion of reserves which would become negative in 2023 with an amount of about DhM 15 995 billion if no action is taken (Aitoutouhen & Faris, 2016).

### 3.1. Construction and test of a ESG.

In this study, the choice of a diffusion model relates to the following financial variables: term structure of interest rates (including nominal, real and inflation interest rates), return on equities, bonds and the yield of real estate. These variables are selected because of their importance in the context of a long-term strategic allocation of our pension fund (Campbell et al. (2001).

The inflation model is assumed to follow the Uhlenbeck Ornstein process. There are two reasons for choosing such a process. Empirically, there is a "mean reverting" effect of inflation rates. Institutionally, central banks have an inflation target, which suggests that this "mean reverting" should continue to exist in the future.

The inflation variable will be denoted by  $q_t$  at any time  $t$  and corresponds to the following stochastic differential equation with  $q_t = q_0$  for  $t = 0$  and  $Z_{q,t}$  the Brownian motion at any instant  $t$ .

$$dq_t = \kappa_q(\mu_q - q_t)dt + \sigma_q dZ_{q,t}$$

The exact discretization of processes:

$$q_{t+\delta} = q_t e^{-\kappa_q \delta} + \mu_q (1 - e^{-\kappa_q \delta}) + \varepsilon_{q,t} \sigma_q \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q \delta}}{2\kappa_q}}$$

We used the two-factor Hull & White model (1994) to describe the dynamics of the long real interest rate denoted  $l_t$  and the short real interest rate denoted  $r_t$ , in order to deduce there from the laws of nominal rates. The stochastic differential equations corresponding to this modeling are the following:

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa_r(l_t - r_t)dt + \sigma_r dZ_{r,t} \\ dl_t &= \kappa_l(\mu_l - l_t)dt + \sigma_l dZ_{l,t} \end{aligned}$$

We obtain after discretization:

$$\begin{aligned} r_{t+\delta} &= r_t e^{-\kappa_r \delta} + l_t (1 - e^{-\kappa_r \delta}) + \varepsilon_{r,t} \sigma_r \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_r \delta}}{2\kappa_r}} \\ l_{t+\delta} &= l_t e^{-\kappa_l \delta} + \mu_l (1 - e^{-\kappa_l \delta}) + \varepsilon_{l,t} \sigma_l \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_l \delta}}{2\kappa_l}} \end{aligned}$$

In our study, we choose to model stock returns using the Black-Scholes formula; the basic assumption is that the price follows a geometric Brownian motion with constant volatility. We then have the following formulation for the dynamics of the instant return of the equity portfolio under the real probability:  $dx_t = \mu_x x_t dt + \sigma_x x_t dZ_{x,t}$ .

The resolution of the equation of return of the equity index is based on the lemma of Itô:

$$x_{t+\delta} = \left(\mu_x - \frac{\sigma_x^2}{2}\right)\delta + \sigma_x \sqrt{\delta} \varepsilon_{x,t}$$

This model has the advantage of being easy to calibrate, simple to implement and the estimation of the different parameters by the method of maximum likelihood is direct.

In our case, we will retain a benchmark index on the market MBI and adopt the same modeling used for stock returns. The difficulty of holding a portfolio of bonds with different maturities and the uncertainty of the availability of similar bonds in the future can be overcome by the use of bond indices, which represent a class of bonds. Fund managers often use these bond indices to compare their portfolio of bonds (Vassiadou-Zeniou & Zenios, 1996).

The performance of the bond index with reinvested coupons evolves according to the Black-Scholes formula. Thus, the following formulation for the dynamics of the instant yield of the bond portfolio under the real probability is:  $dy_t = \mu_y y_t dt + \sigma_y y_t dZ_{y,t}$

The resolution of the yield equation of the bond index is based on the Itô lemma:

$$y_{t+\delta} = \left(\mu_y - \frac{\sigma_y^2}{2}\right)\delta + \sigma_y \sqrt{\delta} \varepsilon_{y,t}$$



The diffusion model for real estate yield follows the same logic as that of inflation, namely the following stochastic differential equations:

$$dIm_t = \kappa_{Im}(\mu_{Im} - Im_t)dt + \sigma_{Im}dZ_{Im,t}$$

The following discretization follows:

$$Im_{t+\delta} = Im_t e^{-\kappa_{Im}\delta} + \mu_{Im}(1 - e^{-\kappa_{Im}\delta}) + \varepsilon_{Im,t} \sigma_{Im} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_{Im}\delta}}{2\kappa_{Im}}}$$

Our choice of a process characterized by the mean-reverting for real estate is justified by the supposed presence of a real estate bubble.

Calibration is a fundamental step following the implementation of financial models. It allows adjusting the parameters of the model in order to make the results coherent. For this purpose, two main types of estimation methods for stochastic process parameters should be distinguished. On the one hand, the Vasicek models (1977), which are similar to autoregressive models of order 1 after discretization (models on inflation, real interest rates and real estate yields and on the other hand the total return model for equities and bonds, in which the maximum likelihood should be estimated for average returns and volatility.

The relevance of the model will be assessed on the basis of its quality of fit and its overall significance. Adjustment quality will be assessed from the coefficient of determination  $R^2$  and the overall significance will be measured from a Fisher test (1954). In addition, it will be necessary to evaluate the individual significance of the coefficients from the Student test.

Particular attention should be given to residue analysis, and in this context, the first step is to ensure that the residues are of zero mean. In a second step, it will be necessary to detect the possible auto-correlation of the errors, conventional in the time series models. For this purpose, the Durbin-Watson test for first order autocorrelations and the Breusch-Godfrey test for autocorrelations of order  $p \geq 1$ , Godfrey (1979). The test based on the ARCH models on the residuals verifies the non-heteroskedasticity of the model. In a fourth step, it will be necessary to carry out an error of normality. Indeed, we will retain the Jarque and Bera (1980).

The generation of economic scenarios will be realized in a real - world, in which the behavior of our variables is projected as observed in historical contexts. The projection of our variables consists in generating yield trajectories (for each asset class) thanks to discretization formulas presented above.

As a result, these projections are carried out using the Monte Carlo technique on the basis of the technical calibration of our model from a model close to that of Ahlgrim. In this work, this Monte Carlo simulation method consists in generating 10,000 economic scenarios to obtain various indicators. Moreover, it allows us to observe the distribution of the macroeconomic and financial variables of our model. These projections are presented in the case where the dependency structure of residuals and yields on equity and bond is described by the correlation. This is equivalent to saying that the dependency structure of the financial and macroeconomic indices studied is also described by the correlation (and is therefore Gaussian) since the relations which link these indices to residues and yields are linear.

In general, the diffusion processes used are characterized by residues following normal laws. Projecting the residues thus amounts to simulating Gaussian random variables correlated with each other by the estimated correlation matrix via the factorization of Cholesky (Campbell & Viceira, 2001). Moreover, for all projections, it is assumed that the initial date,  $t = 0$ , corresponds to the end of February 2016.

**Table 3. Initial Values of ESG Variables.**

ESG Variables	Initial Values
Inflation	0.6084%
Nominal long-term rate	1.9616%
Nominal short-term rate	0.9339%
Rate of return on real estate	0.8%

Source: Own elaboration.

The overall approach is therefore to first project the residuals of the inflation rate, real interest rates and real estate as well as the returns of MASI RB and MBI. Then the projections of the financial and macroeconomic variables can be deduced from the formulas presented above.

To test the robustness of our ESG, we will analyze its different properties: representativeness, economic interpretation, parsimony, transparency and evolution (Hibbert et al., 2001).

The quality of this forecast is measurable through a comparison between the empirical distribution of the ESG variable resulting from market observations and that of the projected variable resulting from the modeling.

Backtesting is the validation of a model on historical data. In our context, we will first estimate the model with a history up to December 2013 and then project the ESG variables from the 10000 simulations over the next 10 years, that is to say from 2014 to 2024. Establishing a backtesting for our model is equivalent to verifying that it is capable of making realistic predictions that follow the observed data trend.

### 3.2. Study of strategic allocation criteria in the framework of ALM.

We will focus on the application of asset-liability management based on the Fixed-Mix strategy to our pension fund that is currently in deficit. The implementation of an ALM strategy makes it possible to determine the best allocation of assets in the medium or long term. The objective of the optimal allocation sought is to optimally guarantee the solvency of the scheme while preserving assumptions of reserves and coverage ratio.

First, plan management always involves some kind of modeling of pension fund assets and liabilities for a given time horizon (usually at least 10 years). In our case, we have chosen to value assets and liabilities according to their market value, while striving to remain consistent with the results of modern financial economic theories.

The valuation begins with an appropriate estimate based on rules that take into account all relevant actuarial factors. Then, the present value of these cash flows is calculated in each forecast year using a discount rate<sup>5</sup>. The present value of liability flows is done with the values of the nominal long-term interest rates simulated in each forecast year by the ESG that we will build.

$$L_t = \sum_{i=t+1}^{t+h} \frac{\text{flow}_i}{\prod_{j=t+1}^i (1 + r_j)}$$

<sup>5</sup> As we consider a defined benefit plan, the total liability is the discounted value of future predefined payments. At some point t, it represents the amount the fund must repay if it is to close at that time.

with  $r_j$  the interest rate over period  $j$  (real rate in the case of real flows and nominal rate in the case of nominal flows) and  $h = 20$  years.

This liability is also revalued at the rate of revaluation or indexation by the inflation rates simulated by the ESG developed. In this case, the real flux at time  $t$  is multiplied by the indexing coefficient (ie 1/3 of the inflation value for the civil regime case) simulated over the periods between the initial time and  $t$ :

$$\text{Indexed flow}_t = \text{Realflow}_t \times \prod_{j=1}^t (1 + i_j), \text{ with } i_j \text{ the inflation rate over period } j.$$

$$L_t = \sum_{i=t+1}^{t+h} \frac{\text{Indexed flow}_i}{\prod_{j=t+1}^i (1 + r_j)}$$

During the course of our study, the value of the asset changes over time, depending on the contributions made to the fund, the evolution of the reserve on the basis of the returns on the financial assets constituting the portfolio and the choices for rebalancing the portfolio on the various financial assets. Future contributions will therefore be assumed known:

$$A_t = R_{t-1}(1 + \rho_t) + C_t$$

The definition of eligible asset classes in the modeled portfolio primarily depends on the regulatory, operational, modeling constraints and desired level of finesse in the portfolio representation. This will make it possible to reduce the size of the allocation matrix and thus substantially reduce the computation time. Consistent with our perceptions of risk and our long-term strategies, we have taken into account the financial risk factors (bond, real estate and equities) without considering the risk of longevity (Juillard et al., 2008) or the spread risk (Planchet et al., 2012). The distribution of the resources of the Moroccan Pension Fund between the above-mentioned uses is determined by regulation, the law of May 2010<sup>6</sup>.

Another type of constraint is systematically taken into account in the context of pension funds: the sum of the weights of each asset is equal to the unit.

When the initial allocation is defined, ie the weight of each asset class, we consider the management rule which consists in recomposing the portfolio at the end of each period in order to preserve the initial proportions 'rebalancing'. This approach controls the weight of each asset and the risk associated with the portfolio.

The amount of the total reserve evolves according to the following dynamics:

$$R_t = R_{t-1}(1 + \rho_t) + C_t - P_t$$

We determine the value of the 'objective' function for each of these allocations. Then, those that maximize the objective function and respect the constraints fixed will be retained.

---

<sup>6</sup> The major part of the portfolio is invested in favor of the State in order to finance the Treasury. This rate was 80% as a minimum requirement of the total value of the portfolio. On the other hand, it was not until 2010 that the State gave the green light to the CMR to invest up to 30% of the portfolio in equities. These figures raise the question of the effective independence of WRC from the management of its reserve funds. Similarly, the CMR introduced new regulatory limits by asset class:

- Extension of the class of private debt to commercial paper and unlisted bonds.
- Extension of the share class to Venture Capital Funds and Securitization Funds.

For our regime, which is in the depletion phase, maximizing the coverage or funding ratio can remain a good goal. The optimization system can be formulated as follows:

$$\text{Max } R_{t-1}(1 + \rho_t) + C_t - P_t, \text{ under constraint}$$

$$\text{Max } \frac{\text{Asset}_t}{\sum_{t=t_0+1}^{t_0+20} \frac{\text{Indexed flows}_t}{\prod_{j=t_0+1}^t (1+r_j)}}$$

In practice, the theoretical optimal allocation (i.e. resulting from the optimization program) is not always selected by the decision makers, especially when they call on their expert opinion. In this last approach, it is necessary to understand the behavior of the balance sheet in relation to the allocation chosen by these decision-makers, in particular the exposure to the ruin that the selected allocation implies.

Furthermore, it should be noted that the Fixed-Mix strategy involves periodic rebalancing of assets, to keep the composition of the financial portfolio constant at the beginning of each subperiod. Although the Fixed-Mix strategy has the merit of taking into account the randomness of the economic and financial scenarios, this strategy can be criticized for not assuming flexibility in future market positions in relation to the various scenarios projected performance. More precisely, this approach does not allow the full use of information that happens over time to optimize the choice of strategic allocation (Zenios, 2007).

In this context, the objective of this work is to propose a procedure for determining the specific strategic allocation of pension schemes integrating the particularities of insurance, without the need to fix a priori the probability of ruin, which is simply controlled ex post.

We measure the risk associated with the strategy at Value at Risk and CVaR over the one year horizon at 90%, 95% and 99.5%. Indeed, exposure to ruin based on the insurer's VaR calculated from projections from the developed generator is compared to that obtained from the CVaR model.

The most important risk management tool is the stress test imposed by the regulator. To realize these stress tests, we will be inspired by the rules applied to the insurance industry to stress the optimal portfolio of funds on the reserves of the RPC. This exercise consists of simulating extreme financial conditions and ensuring the portfolio capacity of the FDR (funds on the reserves) to resist a systemic risk materialized by several scenarios of negative developments on the financial markets. To do this, four market development scenarios were chosen to carry out the stress tests: a scenario of falling stocks (-30%), real estate (-20%), a scenario of rising inflation rates (+ 2%) and a combined scenario.

### 3.3. LDI model implementation.

In order to optimize the financial management of the CMR's civil reserve fund, we will try to put in place a Liability Driven Investment Policy (LDI) that will try to find a better allocation of the reserve funds of the CMR under the regulatory constraints imposed on it and taking into account the evolution of liabilities.

In this sense, the LDI model treats the fund's liabilities as a state variable and specifies an 'objective' function by relating assets and liabilities. The investor considers the correlation between liabilities and assets to determine the optimal allocation of the portfolio.

In what follows, we will determine the optimal portfolios, which correspond to the risk accepted by the pension fund manager and the desired level of performance according to the first criterion 'optimization Asset-only'.

In the long term, our pension plan does not take short positions, so we are spreading short sales by imposing non-negativity constraints on the proportion of assets. We also do not allow borrowing money. In addition, we will not use derivative instruments since they do not exist in the case of Morocco. In addition, our LDI model includes upper and lower limits on the proportion of assets invested to exclude solutions that would be unacceptable for the plan.

We start by determining a portfolio over a period of 10 years. We emphasize the static and long-term nature of this projection, which should answer the question of the expected average rate of return and the level of risk for each asset class, if we averaged over 10 years.

The simple method of strategic allocation that we will present is based on the modern theory of portfolio choice, Markowitz (1959). The construction of model portfolios is based on the portfolio constructed by the MASI RB Index, the MBI Bond Index and the IPAI Real Estate. The resulting optimization program is written as follows:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N x_j \mu_j = \rho \\ \sum_{j=1}^N x_j = 1 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \\ \text{Regulatory constraints} \end{array} \right.$$

In an LDI approach, we will try to apply the surplus optimization method to our civil pension plan using the Sharpe and Tint (1990) approach. This model based on the notion of surplus applies to a portfolio made up of several asset classes. The aim of the model is to minimize the risk of loss of surplus (measured by the variance in return of the surplus) for a level of return of the surplus given the integration of contractual constraints on liabilities and regulatory constraints.

$$\text{Min } \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} - \frac{1}{r_{f_0}} \sum_i \sigma_{i,L} x_i \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N x_j \mu_j \geq \mu_p \\ \sum_{j=1}^N x_j = 1 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \\ \text{Regulatory constraints} \\ \text{Cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) = \sigma_{ij}, \text{Cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_L) = \sigma_{i,L}, \text{ et } r_{f_0} \text{ is the ratio of funding of pension funds.} \end{array} \right.$$

Next, we rely on the Sharpe and Tint model (1990) to determine the strategic allocation and the LHP and PSP portfolios (Markowitz & van Dijk, 2006). Alex Keel and Heinz H. Müller (1995) of the University of St. Gallen proposed the most practical approach. Recall our surplus optimization problem presented above:

$$\text{Min} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} - \frac{1}{r_{f_0}} \sum_i \sigma_{i,L} x_i \right]$$

Such that: 
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N x_j \mu_j \geq \mu_p \\ \sum_{j=1}^N x_j = 1 \end{cases}$$

Keel and Müller used the Kuhn-Tucker theorem (a generalization of Lagrange multipliers, taking into account the constraints of inequality) to find the optimal conditions.

The portfolio  $x^*$  solution of the optimization problem is given by the following relation:  
 $x^* = x^{min} + \lambda z^*$ ,  $\lambda$  depends on the level of profitability of the surplus.

-  $x^{min} = \left( \frac{\sigma_{i,j}^{-1} e}{e' \sigma_{i,j}^{-1} e} \right) + \frac{1}{r_{f_0}} (\sigma_{i,j}^{-1} \sigma_{i,L} - \frac{e' \sigma_{i,j}^{-1} \sigma_{i,L}}{e' \sigma_{i,j}^{-1} e} \sigma_{i,j}^{-1} e)$  represents the minimum variance portfolio.

-  $z^* = \sigma_{i,j}^{-1} \mu + \frac{e' \sigma_{i,j}^{-1} \mu}{e' \sigma_{i,j}^{-1} e} \sigma_{i,j}^{-1} e$ .

In order to test the resilience of our LDI fund design, we tested a stress scenario (down 30% from the MASI RB index and 20% from the real estate index).

## 4. Results.

### Result 1

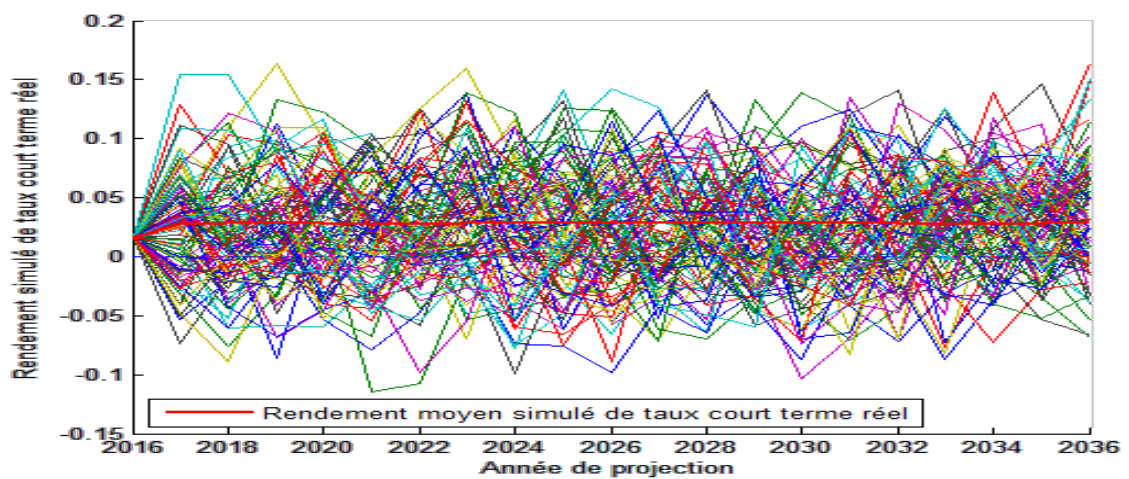
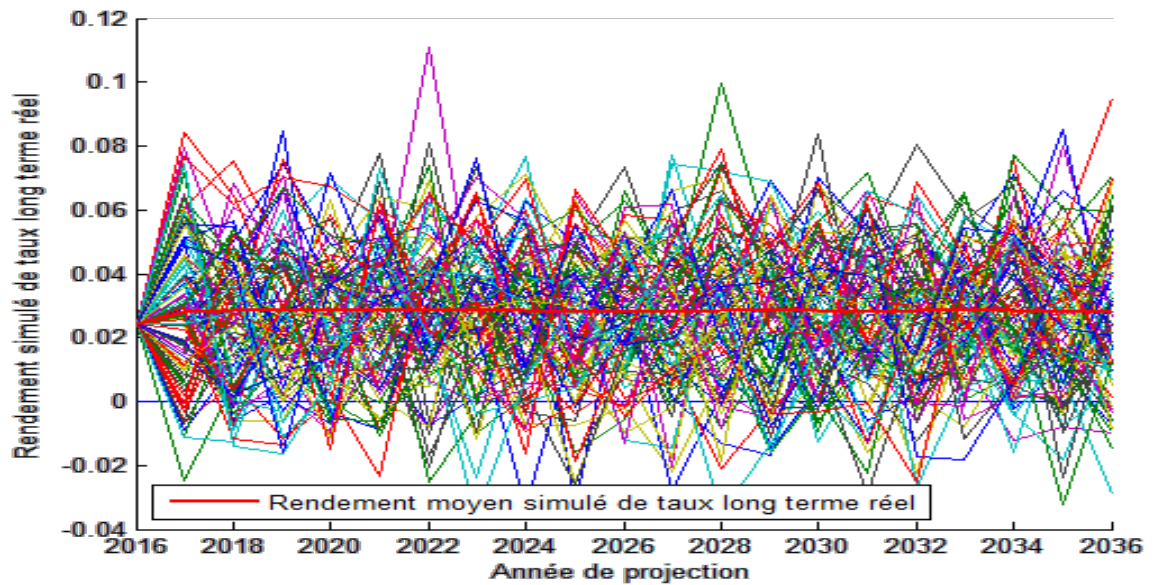
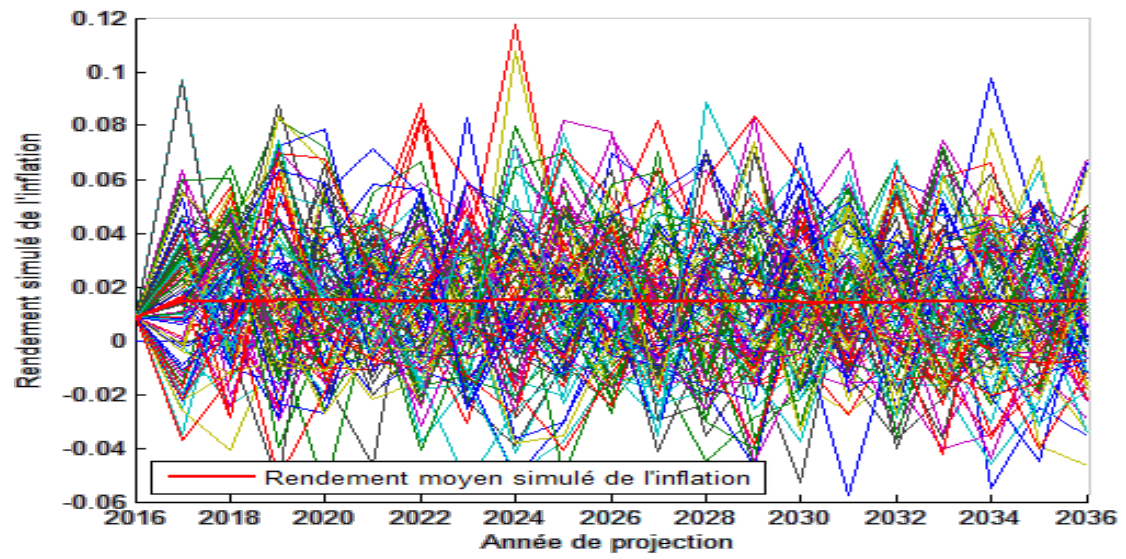
Based on the initial values presented below, calibration, statistical tests and for 10 000 simulations over a 20-year time horizon, we present the graphs relating to the projection of the components of our ESG by highlighting some properties theoretical models of the GSE model being studied.

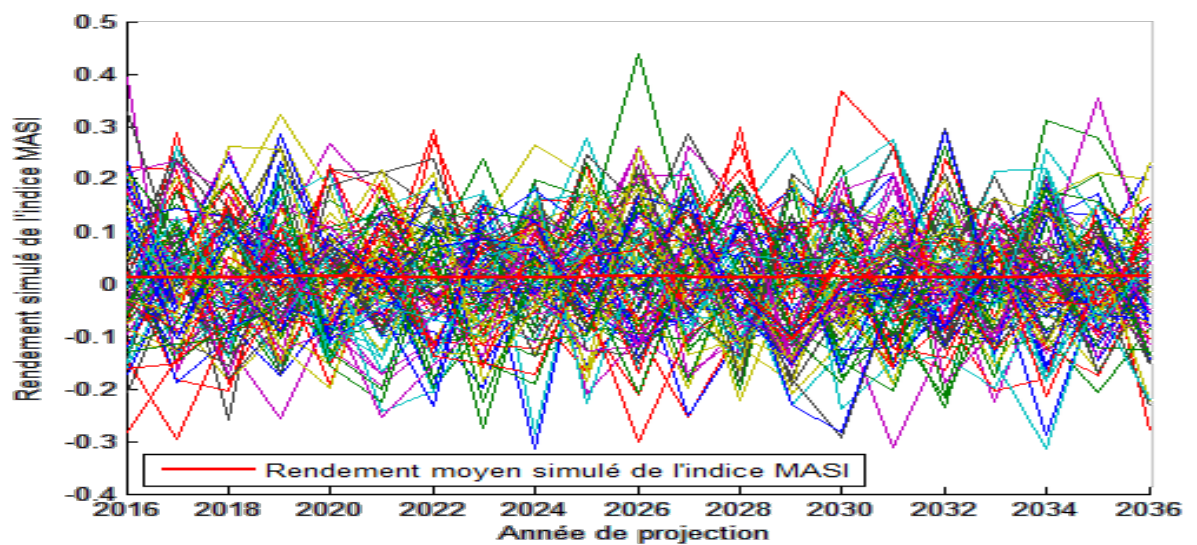
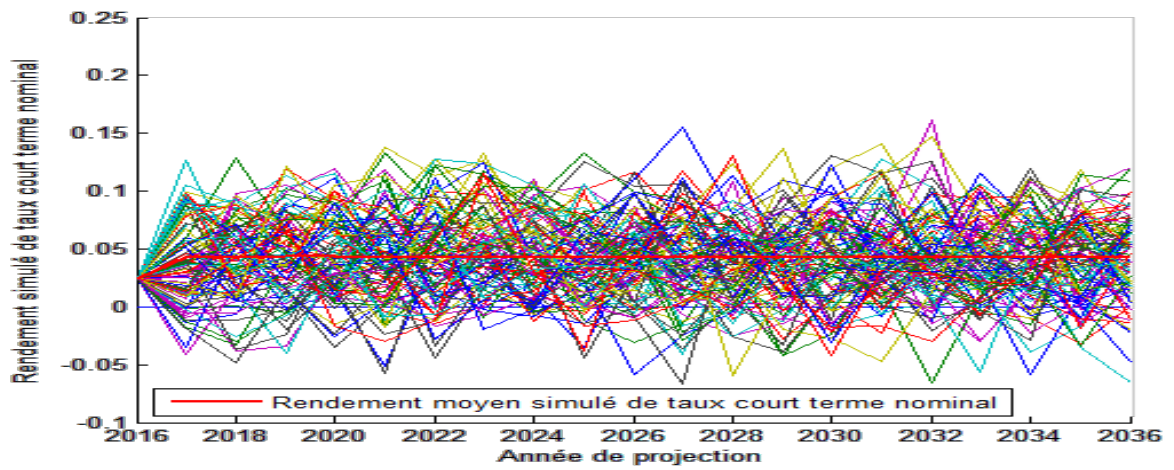
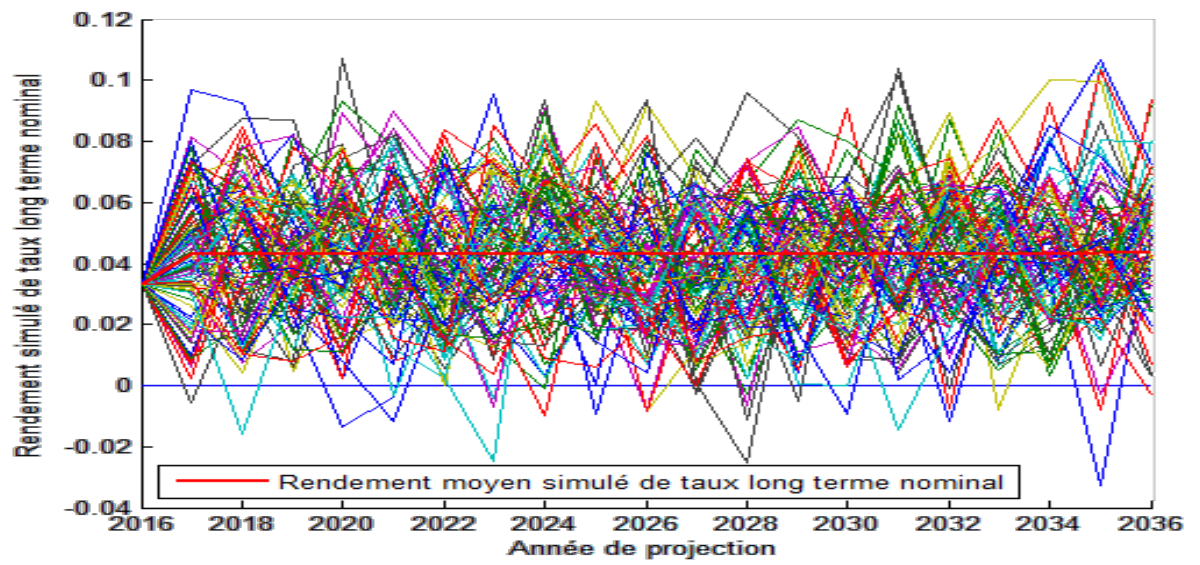
**Table 4. Matrix of correlation between residuals and returns of the share index and bond.**

	Equities	Real-estate	Inflation	Bond	Real ST rate	Real LT rate
Equities	1.000000	-0.215066	0.259798	-0.126602	-0.018864	0.044033
Real-estate	-0.215066	1.000000	-0.175596	-0.288786	0.158413	-0.076115
Inflation	0.259798	-0.175596	1.000000	-0.203141	-0.644874	-0.643463
Bond	-0.126602	-0.288786	-0.203141	1.000000	0.142084	0.301494
Real ST rate	-0.018864	0.158413	-0.644874	0.142084	1.000000	0.889294
Real LT rate	0.044033	-0.076115	-0.643463	0.301494	0.889294	1.000000

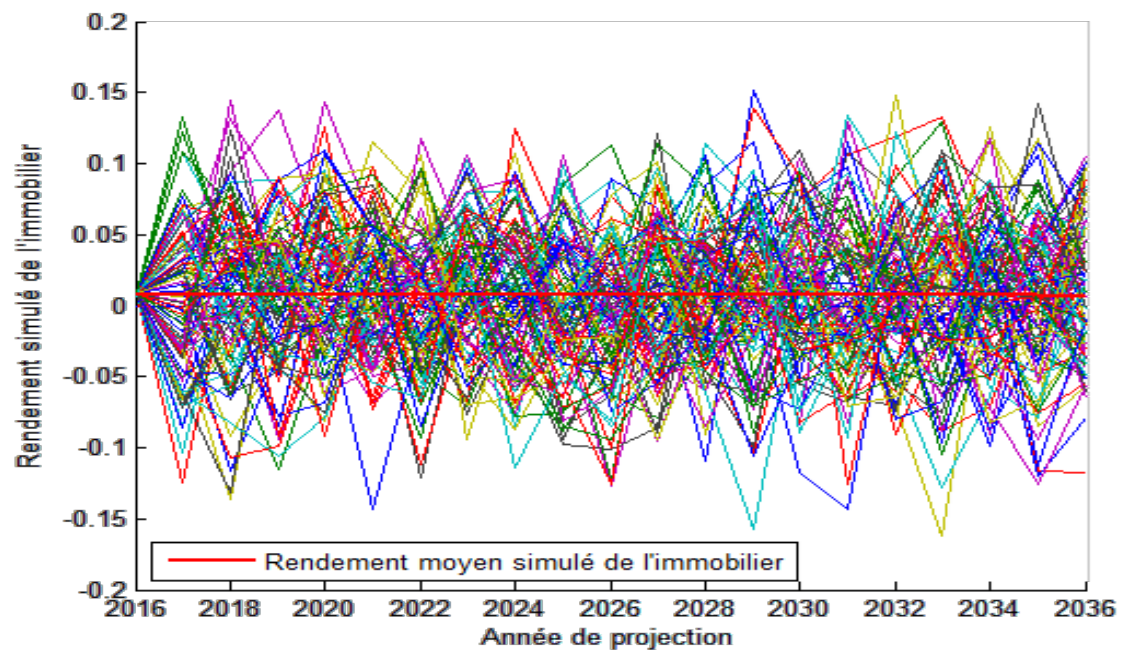
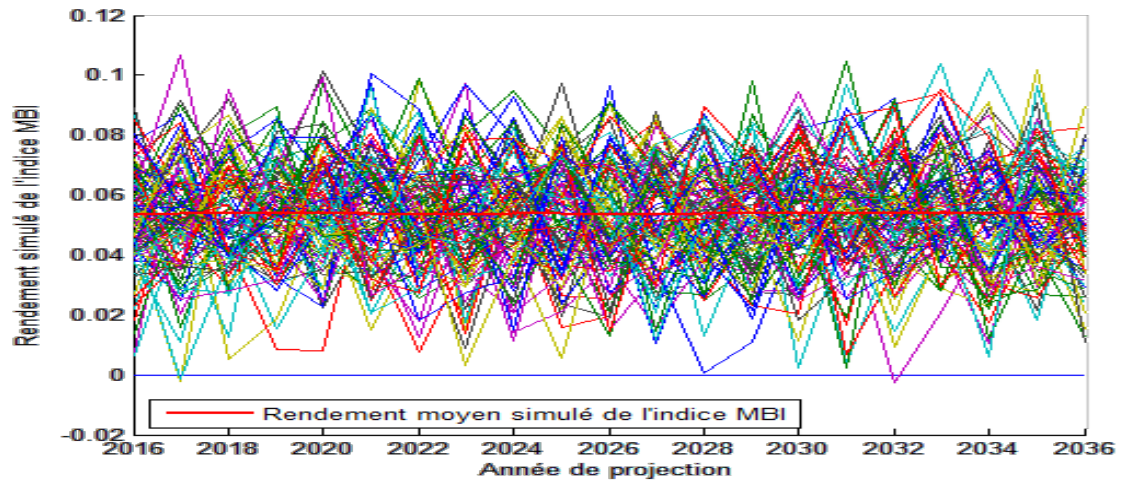
Source: Own elaboration.

Figure 10. Simulated Variable Rate and / or Yield Variables of GSE.









Source: Own elaboration.

We observe that the average returns curves of the variables (inflation rate, real and nominal interest rate) start from their initial values to reach the level of the long-term averages with a speed equal to the rate of return to the average.

In the case of our ESG, we have selected models that reflect the reality of our market and the economic context of the ESG components, including the process of mean-reversion and the Black & Scholes model.

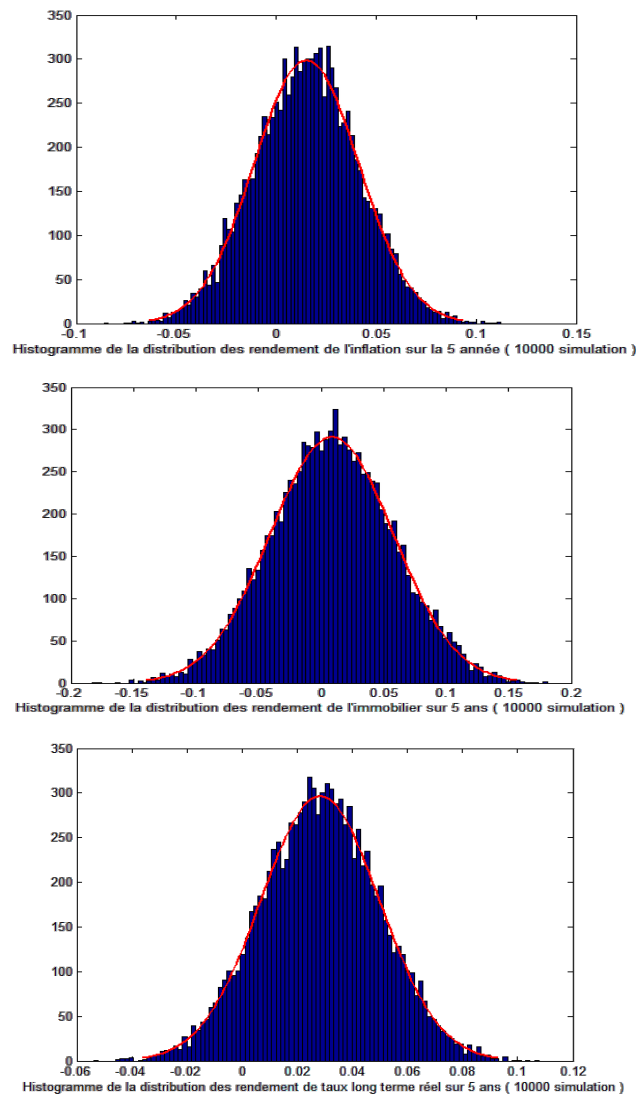
The projections of our ESG variables are economically interpretable, ie consistent with the Market data and based on generally accepted principles in the financial market place. For example, the model should be implemented in the absence of an arbitrage opportunity. This assumption is essential in the use of stochastic processes to model the behavior of financial assets such as the Hull and White model for interest rates and the Uhlenbeck model for inflation and real estate.

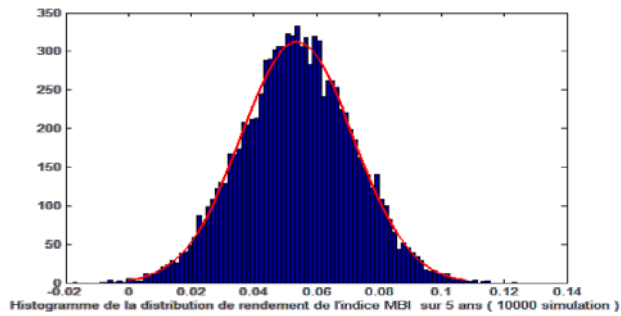
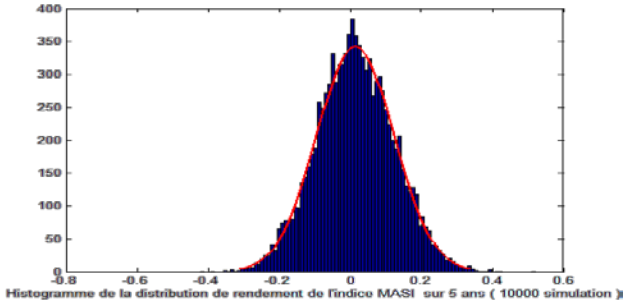
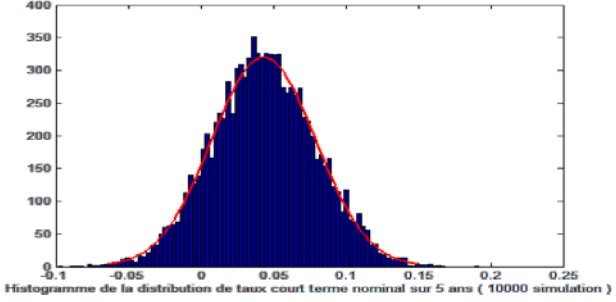
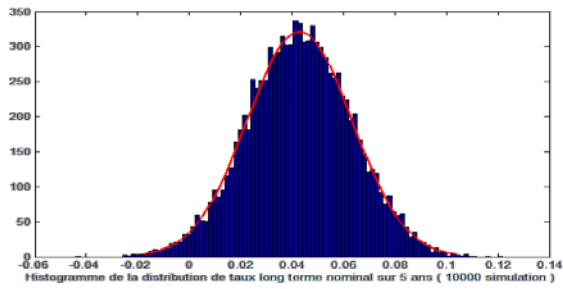
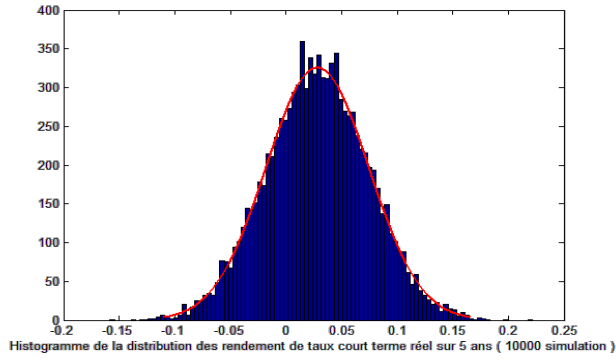
Simplicity is preferred in the choice of models: it is the principle of parsimony. In this case, we preferred a model similar to that of Ahlgrim et al. (2005) to that of Wilkie (1986). Indeed, the parameters of the model of Ahlgrim and al are economically interpretable, while those of Wilkie (1986) are difficult to interpret. Moreover, a complex model that perfectly imitates all the characteristics of the assets could give the illusion to the expert to be able to model the real world, which can lead to a loss of objectivity and critical analysis.

Our built ESG is transparent since it can be explained and justified in a simple way to a large public (such as managers and administrators, for example), for financial communication purposes but also within the current regulatory framework, development of future reforms. For example, the scenarios generated by the model are used to make long-term risk factor projections for Asset-Liability and LDI. The adaptability of ESG to the evolution of the market is also a desired characteristic. Our ESG can be used, with its recalibration, whatever the financial and macroeconomic environment.

The graphs below represent, in the form of histograms, the distributions obtained from different rate and / or yield variables.

**Figure 11. Histograms of Variable Rate and / or Yield Variables of ESG.**



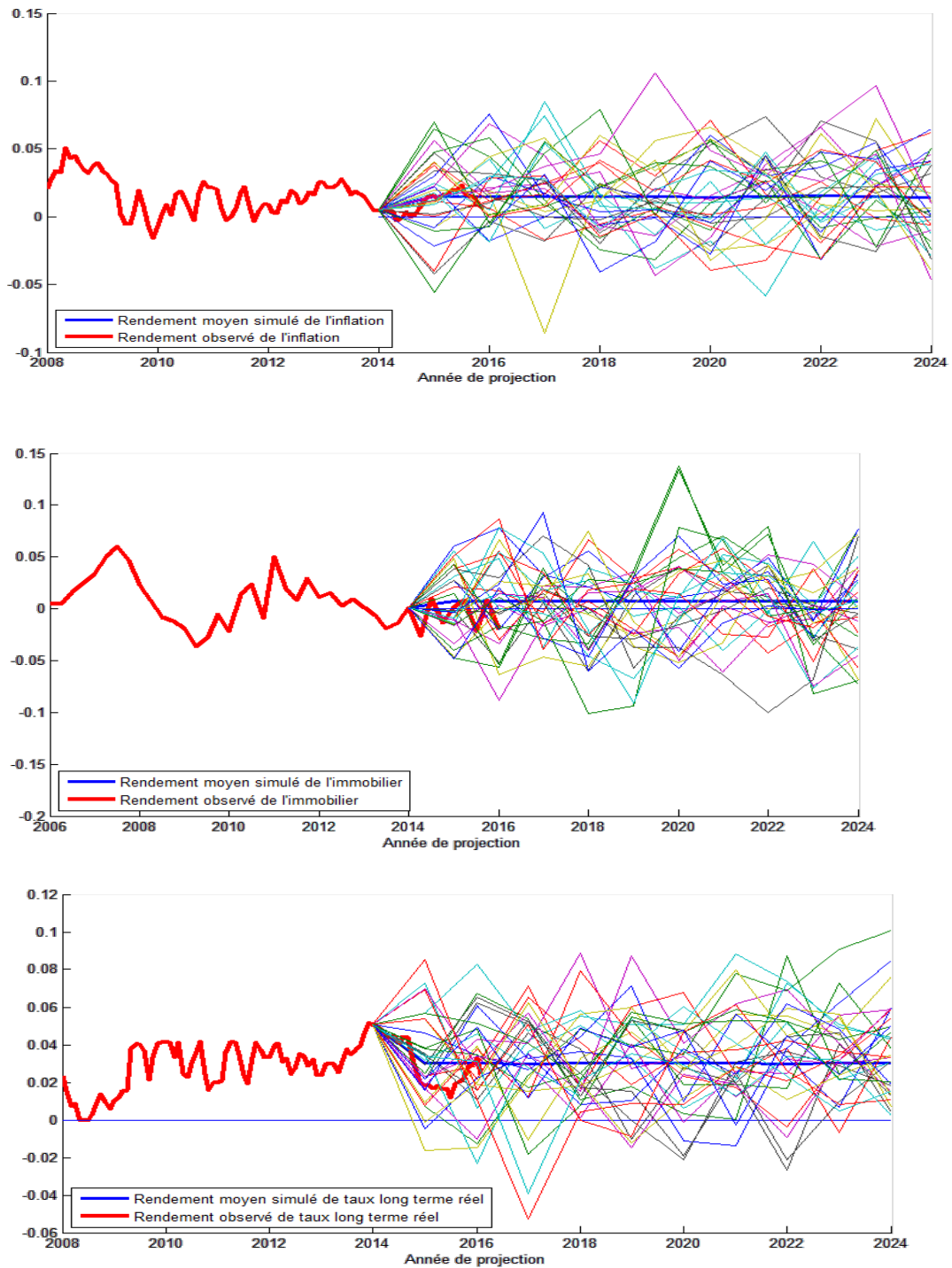


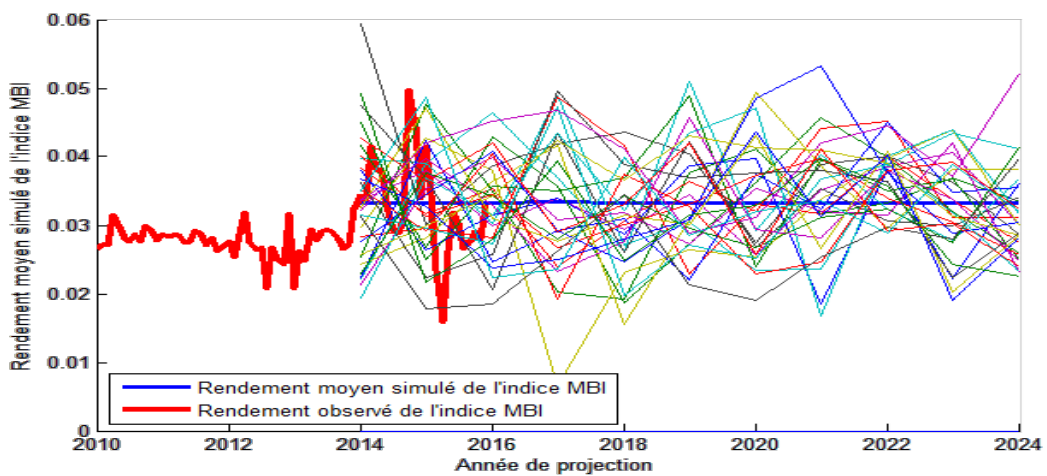
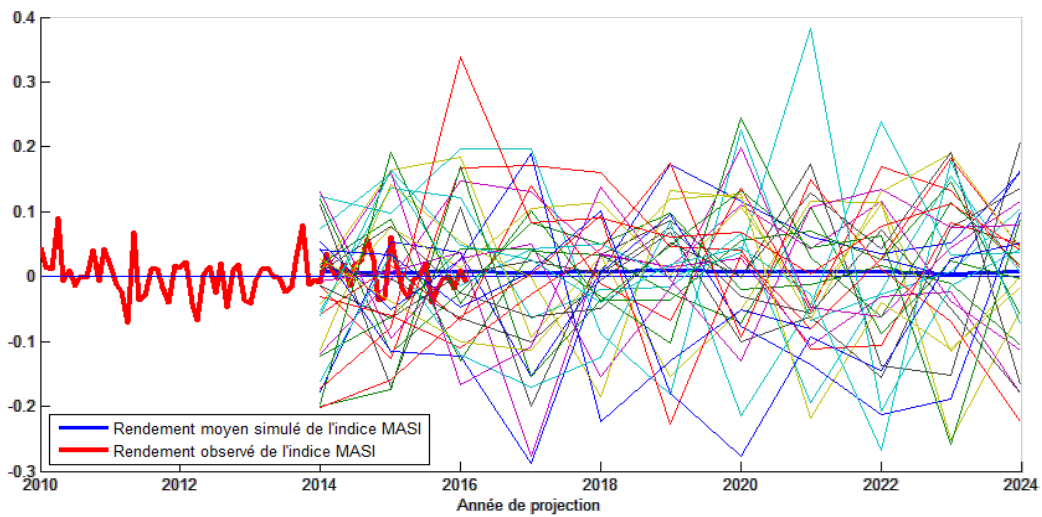
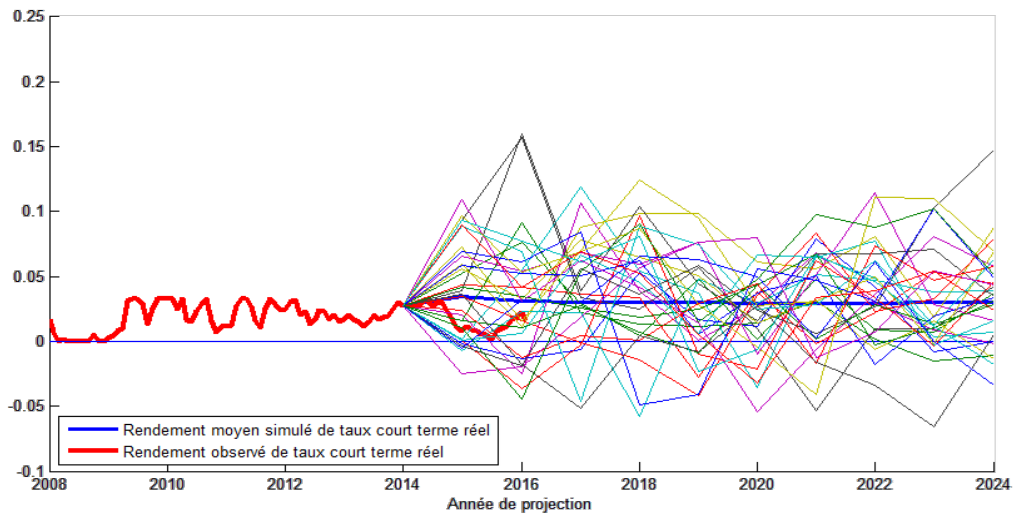
Source: Own elaboration.

We note that these histograms of simulated yields provide a good estimate of the probability density of the normal distribution.

The graphs below present the backtesting of the rates and / or returns of the components of our ESG by comparing the historical reality with the projections obtained.

**Figure 12. Backtesting of the rates and / or returns of the components of our ESG.**





Source: Own elaboration.

Based on the backtest results, we find that the model provides a fairly good estimate of the variation of the different components of ESG: inflation rate, short and long term real interest rates, MASI RB index, the MBI index and the IPAI index. This remark emphasizes the

robustness of our built ESG model, which can only reflect the historical evolution of our variables.

## Result 2

- **Optimal Central Allocation**

Based on the assumptions proposed, we tested 1000 asset allocations between the minimum and maximum limits that we set by article 14, respecting the constraint on the sum of the shares of the classes and setting a mesh step of 2.5%. As a result, we obtain 39 allocation options for our three asset classes (stock, bond and real estate).

These simulations made it possible to determine a cloud of points, each point corresponds to a well defined allocation. From these points, the strategic allocation is determined according to the decision criteria presented above. Thus, of the 39 eligible allocations obtained, we choose 10 allocations that will allow us to have a maximum investment reserve and a maximum funding ratio. It should be noted that in order to have a reliable and relevant analysis, we did not retain allocations whose weight of real estate or share is zero even if the latter offer maximum values.

Table 5 shows the top 10 allocations selected from the 39 allocations tested with the central scenario (without economic shock) under regulatory, operational and prudential constraints.

We note that in the 10 maximum allocations presented above, the weight of bonds occupies a prominent place followed by that of equities and real estate, which is consistent with the investment strategy adopted by the CMR.

**Table 5. Asset allocation by category for tested allocations.**

	Alloc_1	Alloc_2	Alloc_3	Alloc_4	Alloc_5	Alloc_6	Alloc_7	Alloc_8	Alloc_9	Alloc_10
<b>Bond</b>	0.875	0.925	0.925	0.9	0.875	0.85	0.825	0.85	<b>0.95</b>	0.9
<b>Equities</b>	0.1	0.05	0.025	0.075	0.075	0.1	0.15	0.125	<b>0.025</b>	0.05
<b>Real Estate</b>	0.025	0.025	0.05	0.025	0.05	0.05	0.025	0.025	<b>0.025</b>	0.05

Source: Own elaboration.

It should be noted that the maximum reserve and the funding ratio are calculated over a horizon equal to the allocation horizon (10 years). Portfolio performance is the average value calculated over the entire projection (20 years).

The funding ratio and the average return are collected for each of these portfolios; we therefore retain the portfolio with the best combination of performance, reserve and hedging rate as the strategic allocation of the pension fund.

**Table 6. List of best allocations obtained by the central scenario.**

	Alloc_1	Alloc_2	Alloc_3	Alloc_4	Alloc_5	Alloc_6	Alloc_7	Alloc_8	Alloc_9	Alloc_10
<b>Reserve</b>	7.08E+09	8.69E+09	8.45E+09	7.88E+09	6.85E+09	6.06E+09	5.51E+09	6.29E+09	<b>9.50E+09</b>	7.65E+09
<b>Funding ratio</b>	0.12	0.1254	0.1246	0.1227	0.1192	0.1166	0.1148	0.1174	<b>0.1281</b>	0.1219
<b>Average Return</b>	0.0569	0.059	0.0587	0.0579	0.0566	0.0555	0.0548	0.0558	<b>0.0601</b>	0.0576

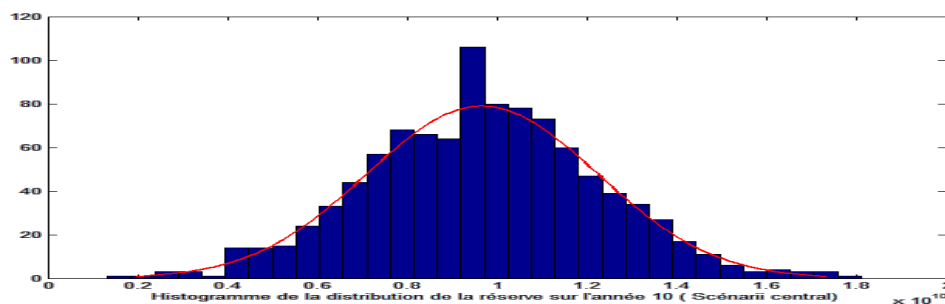
Source: Own elaboration.

We see in the chart above that the maximum funding ratio is about 12.81% for allocation 9 and 12.45% for allocation 2, indicating that in 10 years' time, the Plan Assets will not fully cover the discounted liabilities (approximately 13% of total liabilities).

The strategic portfolio with the best preservation of the investable financial reserve with a hedging of the liabilities by the assets of the reserves and a maximum return of portfolio is the portfolio corresponding to the alloc\_9. Its optimal composition includes 0.025% of shares, 0.025% of real estate and 0.95% of bonds. These results are obtained assuming that the economic situation will remain similar in the coming years.

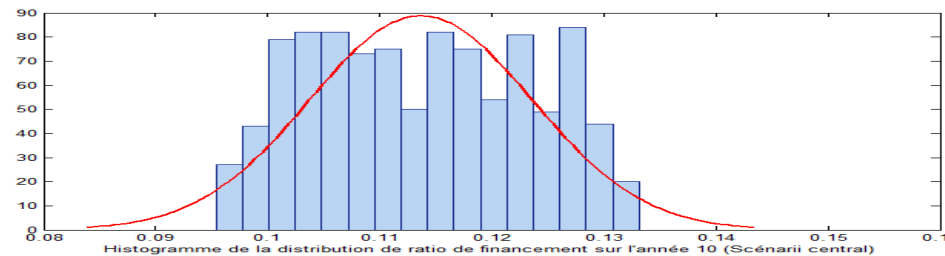
Knowledge of the distribution of the  $R_t$  and the funding ratio makes it possible to obtain a first view of the behavior of the balance sheet and a predetermined allocation at a given instant.

**Figure 13. Histograms of the maximum reserve over the 10-year horizon in the ‘central scenario’.**



Source: Own elaboration.

**Figure 14. Funding ratio histograms over the 10-year horizon and the central scenario.**



Source: Own elaboration.

As a result, we can conclude that the optimal allocation sought has increased the level of the reserve and the funding ratio, which has made it possible to delay the date of depletion of reserve funds and thereby improving the solvency of the fund.

We can also look for an allocation of our reserve fund over the medium term (5 years) and compare it to that of long-term (10 years already determined). The results show that the composition of different portfolios is preserved, with the optimal allocation corresponding to alloc\_9. Similarly, there is a significant increase in the funding ratio (from 12.81% to 39.37%), which will ensure a certain level of solvency of the fund. Thus, it is desirable for the civil regime to start optimizing its portfolio as soon as possible to benefit from the improvement of these indicators.

**Table 7. List of the ten best allocations obtained by the central scenario over 5 years.**

	Alloc_1	Alloc_2	Alloc_3	Alloc_4	Alloc_5	Alloc_6	Alloc_7	Alloc_8	Alloc_9	Alloc_10
<b>Reserve</b>	7.010E+10	7.096E+10	7.089E+10	7.05E+10	7.003E+10	6.961E+10	6.92E+10	6.967E+10	<b>7.139E+10</b>	7.046E+10
<b>Funding ratio</b>	0.3884	0.39197	0.39169	0.390217	0.38817	0.38643	0.384974	0.386715	<b>0.393745</b>	0.389932
<b>Average Yield</b>	0.0562609	0.058695	0.05850	0.057478	0.056061	0.054848	0.053825	0.055043	<b>0.059912</b>	0.057283

Source: Own elaboration.

- **Determination of stressed optimal allocation**

The tests on our allocations are carried out to ensure their robustness in case of stress scenarios: this is to ensure that these 10 best allocations check the constraints in the complementary scenarios selected.

In the context of these tests, it appears that the allocations presented as the best in the central scenario satisfy the constraints in the complementary scenarios. The conclusion of these tests confirms the robust nature of the ten allocations tested. The recommended allocation is then the same as that found in the central allocation, ie alloc\_9, composed of 2.5% share, 95% bond and 2.5% real estate.

We note that downward movements in real estate and equity returns have very little impact on reserves and financing ratios. On the other hand, the 2% increase in inflation led to an increase in the value of the plan liabilities, which led to a decline in the funding ratio.

By observing the movement of the top 10 allocations from the central case (without economic stress) to the combined stress scenario, we can see a very small decrease in the reserve value of 0.0137% as well as a decline in the funding ratio which increased from 0.1281 to 0.1264, a percentage of 1.327088%.

**Table 8. Stress Scenarios on tested allocation.**

Stress Scenarios	Stress Scenario _1		Stress Scenario _ 2		Stress Scenario _ 3		Stress Combined scenario	
	Reserve	Tx _ coverage	Reserve	Tx _ coverage	Reserve	Tx _ coverage	Reserve	Tx _ coverage
Alloc_1	6.63E+09	0.1186	7.07E+09	0.12007	7.066E+0	0.1183	6.64E+09	0.1174
Alloc_2	8.45E+09	0.1247	8.66E+09	0.1253	8.67E+09	0.1236	8.45E+09	0.1234
Alloc_3	8.33E+09	0.1243	8.39E+09	0.1244	8.44E+09	0.1229	8.29E+09	0.1228
Alloc_4	7.53E+09	0.1216	7.86E+09	0.1227	7.87E+09	0.121	7.54E+09	0.1204
Alloc_5	6.51E+09	0.1182	6.81E+09	0.1191	6.84E+09	0.1176	6.48E+09	0.1169
Alloc_6	5.62E+09	0.1152	6.03E+09	0.1165	6.05E+09	0.115	5.60E+09	0.1139
Alloc_7	4.85E+09	0.1126	5.51E+09	0.1148	5.49E+09	0.1132	4.87E+09	0.1115
Alloc_8	5.73E+09	0.1156	6.29E+09	0.1174	6.28E+09	0.1157	5.75E+09	0.1144
<b>Alloc_9</b>	<b>9.38E+09</b>	<b>0.1278</b>	<b>9.47E+09</b>	<b>0.128</b>	<b>9.49E+09</b>	<b>0.1263</b>	<b>9.37E+09</b>	<b>0.1264</b>
Alloc_10	7.42E+0	0.1212	7.60E+0	0.1218	7.63E+0	0.1202	7.38E+0	0.1198

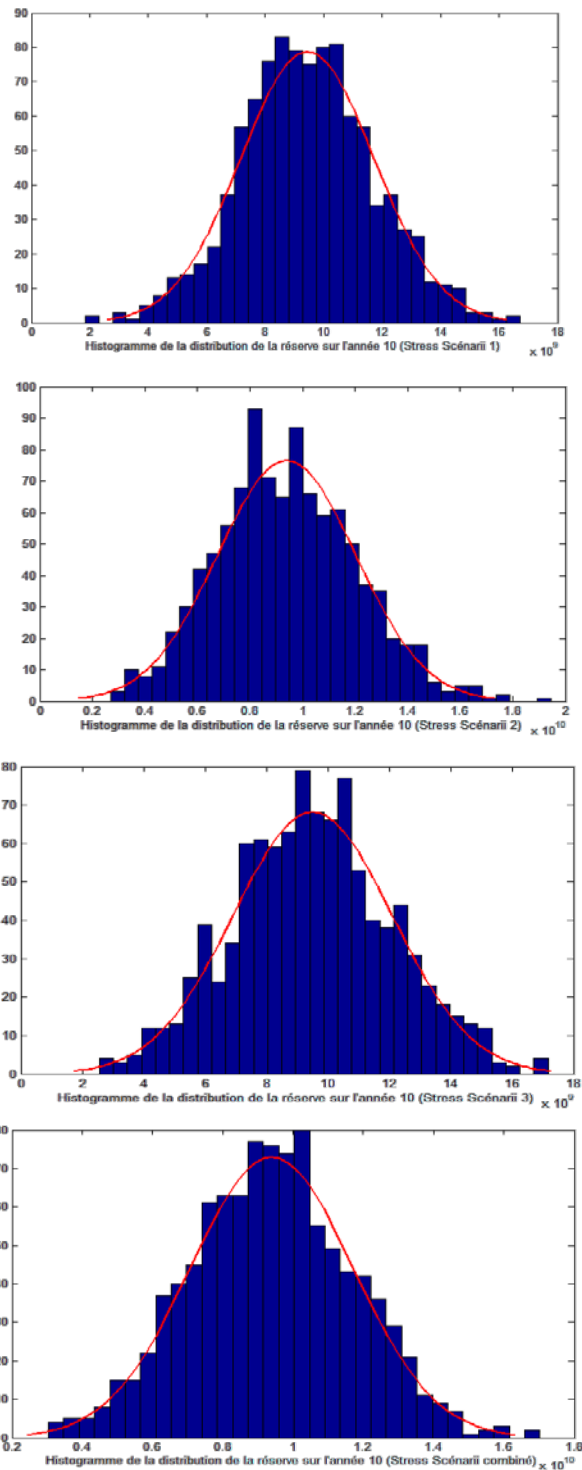
Source: Own elaboration.

In comparison with the new scatter plot, the 10 best allocations of the central case always seem to be very suitable. In terms of strategy, the conclusions that can be made in the central case remain valid in the stressed scenarios.



To get an idea about the behavior of the civil balance sheet as well as that of the predetermined allocation at a given moment. We present the empirical distribution of the financial reserve  $R_t$  obtained, corresponding to the optimal strategic allocation over 10 years for the four stress scenarios defined previously.

**Figure 15. Reserve histograms over the 10-year horizon according to the four Scenarios.**



Source: Own elaboration.

We note that over the projection horizon 10 years, more, the portfolio structure is risky, the thicker the tails, which increases the risk of ruin. Thus, risk takes place at the price of an increase in the probability of ruin.

- **Analysis of the results of the ex-post probability of the ruin**

As for the central scenario, we can see that the VaR increases with the level of risk taken on the projection horizon considered.

**Table 9. Value-at-Risk (in billions of DH) for the Central Scenarios.**

Risk level	Alloc_1	Alloc_2	Alloc_3	Alloc_4	Alloc_5	Alloc_6	Alloc_7	Alloc_8	Alloc_9	Alloc_10
90%	1.35E+10	6.797E+09	4.445E+09	9.902E+09	9.52E+09	1.197E+10	1.881E+10	1.411E+10	4.62E+09	6.707E+09
95%	1.66E+10	8.663E+09	5.418E+09	1.227E+10	1.207E+10	1.573E+10	2.34E+10	1.884E+10	5.87E+09	8.759E+09
99.50%	2.58E+10	1.534E+10	8.992E+09	2.174E+10	2.045E+10	2.677E+10	3.908E+10	2.806E+10	9.21E+09	1.292E+10

Source: Own elaboration.

Depending on its degree of risk aversion, the civil regime may choose between the two strategic allocations Alloc\_3 having a low VaR value at risk compared to the other portfolios and Alloc\_9 presenting maximum wealth and financing ratio values.

**Table 10. Conditional Value-at-Risk (in millions of DH) for the central scenario.**

Risk level	Alloc_1	Alloc_2	Alloc_3	Alloc_4	Alloc_5	Alloc_6	Alloc_7	Alloc_8	Alloc_9	Alloc_10
90%	1986232004	1.041E+09	651504825	1.497E+09	1.453E+09	1.903E+09	2.774E+09	2.168E+09	697561298.6	1025526923
95%	1087129535	584895058	357471301	840604492	810784902	1.073E+09	1.531E+09	1.174E+09	383498377.9	568236764.9
99.50%	116938665.1	66414227	42741726	101370701	94745264	137744929	169284367	110924309	43310531.03	67487800.48

Source: Own elaboration.

This comparison shows that the VaR approach underestimates the probability of occurrence of extreme events in relation to the CVaR approach for the given horizon.

### Result3

- **Assets-Only optimization**

The projection horizon will be fixed at 10 years and in order to make the calculations more fluid, we place ourselves at the end of the year closest to our study, ie 31/12/2016.

**Table 11. Weight of Optimal ‘Assets-Only’ Portfolio without constraints.**

<b>Return</b>	0.0275	0.03	0.0325	0.035	0.0375	0.04	0.0425	0.045	0.0457	0.05	0.0525	0.055
<b>Risk</b>	5.982	6.9091	7.8422	8.7791	9.7188	10.661	11.604	12.549	13.4943	14.441	15.388	16.336
<b>Proportion</b>												
<b>IPAI</b>	0.606	0.5624	0.5191	0.4758	0.4321	0.3851	0.338	0.291	0.2439	0.1969	0.1498	0.1028
<b>MASI</b>	0.019	0.0143	0.0094	0.0045	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>MBI</b>	0.375	0.4233	0.4715	0.5197	0.5679	0.6149	0.662	0.709	0.7561	0.8031	0.8502	0.8972

Source: Own elaboration.

For an expected level of profitability of 4.75% and a minimum risk of around 13.4943%, the optimal portfolio consists of 24.39% of the real estate and 75.61% of the bond. We note that the resulting portfolio does not contain the equity class.

**Table 12. Weight of Optimal 'Assets-Only Portfolio' with Regulatory Constraints.**

<b>Return</b>	0.045	0.0475	0.05	0.0525	0.055	0.0575	0.06
<b>Risk</b>	13.17%	13.736%	14.5799%	15.4569%	16.3616%	17.2896%	18.2371%
<b>Proportion</b>							
<b>IPAI</b>	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0084
<b>MASI</b>	0.3	0.2565	0.1942	0.1319	0.0696	0.0073	0
<b>MBI</b>	0.65	0.6935	0.7558	0.8181	0.8804	0.9427	0.9916

Source: Own elaboration.

The optimal structure corresponding to a return level of 4.75% for a minimum risk of 0.13736 is as follows: 5% of the real estate, 25.65% of the equity and 69.35% of the bond. We note that the weight restriction favored equities (which increased from 0% to 25.65%) and increased the portfolio risk by 1.79%. This increase in the risk value is mainly due to the increase in the share of the equity class (risky assets) as well as the decline in the fraction of the bond and real estate class, which are less risky than that of the share.

The return that will allow us to have the wealth necessary to cover our commitments at the end of the tenth year is 4.8582%. This critical return, which guarantees that the pension fund will be fully hedged at the end of 10 years, remains above the calculated returns (4.5% and 4.75%) by the mean-variance model. Intermediate funding ratios are not taken into account at all. In fact, if our portfolio had a stable return of 4.8582% over the 10 years, the pension fund will remain underfunded for the next few years as our benefits continue to increase in future years. In the end, deciding on a critical return reduces the choice of eligible portfolios, as all lower yield portfolios will no longer be considered.

- **Surplus optimization: LDI approach**

Using the mean-variance approach, Sharpe and Tint (1990) considered surplus optimization for portfolios of assets and liabilities.

**Table 13. Weight of portfolio asset classes 'optimization-surplus' without constraints.**

<b>Return</b>	0.03	0.0325	0.035	0.0375	0.04	0.0425	0.045	0.0457	0.05	0.0525	0.055
<b>Risk</b>	4.8848	5.5437	6.2054	6.8689	7.5341	8.2004	8.8677	9.5358	10.204	10.874	11.543
<b>Proportion</b>											
<b>IPAI</b>	0.566	0.5229	0.4798	0.4328	0.3857	0.3387	0.2917	0.2447	0.1977	0.1507	0.1037
<b>MASI</b>	0.0102	0.0051	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>MBI</b>	0.4238	0.472	0.5202	0.5672	0.6143	0.6613	0.7083	0.7553	0.8023	0.8493	0.8963

Source: Own elaboration.

We note from the table above that the optimal portfolios obtained consist of a very large part of bonds 'assets less risky' and correlated with the liability followed by the real estate whose proportion decreases with the level of return as well as a zero proportion of the equity. Similarly, we find that risk increases even in the absence of risky assets. Naturally, this increase is accounted for by the liability risk, which we consider to be zero in the asset model only.

**Table 14. Weight of portfolio asset classes 'optimization-surplus' with regulatory constraints.**

<b>Return</b>	0.045	0.0475	0.05	0.0525	0.055	0.0575	0.06
<b>Risk</b>	9.3161	9.7123	10.3049	10.9206	11.5556	12.2069	12.8754
<b>Proportion</b>							
<b>IPAI</b>	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0102
<b>MASI</b>	0.3	0.257	0.1951	0.1332	0.0714	0.0095	0
<b>MBI</b>	0.65	0.693	0.7549	0.8168	0.8786	0.9405	0.9898

Source: Own elaboration.

In the results summarized in the table above, we see that, the introduction of regulatory constraints has favored the bond class, which is supposed to mimic the liabilities. We have also seen a significant increase in the equity share relative to the portfolio without constraints. Nevertheless, this asset class experienced declines with the tolerated yield levels until it reached zero for a return of 6% and a risk of 12.875%.

We have also noticed that the proportion of the real estate class has become constant (5%) in the strategic allocations obtained (for yield levels ranging from 4.5% to 5.75%). Similarly, we note a significant decline in this real estate class's share of the 6% return level in the constrained surplus optimization model. We also find that the constraints that impose minimum and maximum values on asset classes have a significant impact on the risk of surplus. Comparing the 'Asset-only' and the 'surplus optimization' model results, we can see that the risk is lower for surplus optimization results. Naturally, this drop is due to the nature of its optimal portfolios which are made up of less risky assets (bonds) and correlated with the liabilities of the fund.

In sum, we found that the surplus optimization model was more appropriate to effectively minimize the likelihood of a mismatch between assets and liabilities and, therefore, efforts to find ways to improve its practicality would be better for pension funds.

- **Fund Separation Model (LHP / PSP)**

We were unable to find a portfolio that verified the condition of surplus variance nullity in the case of our plan. Hence, the portfolio of variance of the global minimum surplus is the LHP does not exist for our LDI strategy, which is obvious since the civil pension system has been in deficit since 2014. As a result, we will not have wealth to invest in a PSP performance portfolio.

Thus, by applying the model of Keel and Müller (1995), we obtain the decomposition relating to the real estate, the equity and the bond as follows. For a yield level of 0.05, we find:  $x^{\min} = (0.6524, -0.335, 0.0867)$ . That is to say to cover the liabilities of civil regime, it is necessary to build a LHP portfolio composed of 65.24% of the real estate of 8.67% in bond and a short sale of the shares of 33.5%, which is not consistent with the regulation of FDR regime management.

- **Stress test of LDI fund**

In order to test the resilience of our LDI fund design, we tested a stress scenario (down 30% from the MASIRB index and 20% from the real estate index).

These stress scenarios have kept the same character of our surplus optimization model with regulatory constraints and without economic shock. Thus, we note that with the increase in yield, the portfolio is moving more and more towards risk-free assets (bonds). On the other

hand, the share of risky assets has decreased significantly and the proportion of real estate has remained almost constant.

**Table 15. Scenario Stress on ‘Optimization Allocations - Surplus’ Tested.**

<b>Return</b>	0.0425	0.045	0.0475	0.05	0.0525	0.055	0.0575	0.06
<b>Risk</b>	9.3161%	9.5346%	10.0415%	10.5672%	11.109%	11.6648%	12.2326%	12.8738%
<b>Proportion</b>								
<b>IPAI</b>	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0103
<b>MASI</b>	0.3	0.2761	0.2223	0.1685	0.1147	0.0609	0.0071	0
<b>MBI</b>	0.65	0.6739	0.7277	0.7815	0.8353	0.8891	0.9429	0.9897

Source: Own elaboration.

## 5. Conclusions.

In this paper, we have attempted to develop a stochastic model for the generation of economic scenarios within the civil regime of the Moroccan pension fund and whose final purpose is that of risk management and the long-term projection of financial and macroeconomic indices. In this framework, we have adopted a model similar to that of Ahlgrim et al. (2005).

In this context, we generated economic scenarios to simulate the  $R_t$  reserve and the solvency ratio for a given allocation. To understand the behavior of these random variables, four stress scenarios are defined, and then the solvency ratio and the reserve are projected in each of these scenarios. Finally, their empirical distribution is plotted for the optimal strategic allocation obtained. It is then observed that the strategic allocation obtained makes it possible to improve the level of the reserve and the funding ratio without solving the problem of plan insolvency. Similarly, we observed that the more the allocation profile is risky and the thicker the distribution tail of the  $R_t$ .

We also calculated the Value-at-Risk to measure the insurer's exposure to the risk of ruin, depending on the allocation under consideration. Similarly, in order to determine the extreme failure, we applied the CVaR to our strategic allocation.

In this paper, we sought an asset allocation by using the model LDI that offers a better return and allows us to better protect our fund against "unfavorable" changes in its liabilities.

Several additional works could complement and improve the study initiated and relative to the construction of our ESG. In this sense, the addition of other distribution models for high-performance real estate and the bond index is important and the integration of a Merton jumping process to project the price of equities is essential in the context of rising risks due to the significant increase in the risk of major crises at the beginning of the 21st century. Similarly, conditional volatility can be taken into account by choosing the most reliable and relevant model between the GARCH model and the estimated historical volatility. Naturally, the use of a Poisson process, also called the rare event process, seems to be adapted to crisis modeling, a rare event by hypothesis.

The modeled dependence between the different risks is Gaussian, whereas the financial assets exhibit a stronger correlation in a situation of extreme stress (notion of tail-correlation). It is therefore possible to consider the use of copula to take this effect into account.

Some risks, such as the risk of longevity and stochastic mortality, are not modeled, but it is possible to extend the models used to incorporate these risk factors.

As for the other financial variables that can be defined, the 2007 crisis highlighted financial risks sometimes underestimated by the insurers: liquidity risk and credit risk. The integration of a liquidity premium as a ESG variable therefore seems relevant.

We recall that there are other candidate models in the literature of Ahlgrim et al. (2008) to generate reliable and realistic scenarios for our pension fund, in particular the model based on a schematic tree-based design, Kouwenberg (2001), which is more suited to a series of dynamic models of asset-liability management based on techniques of stochastic programming.

Introduce economic uncertainties in the development of a GSE such as a sharp decline in inflation and growth or an oil shock or a food shock involving inflation. We will replace in this case a single ESG by several weighted ESGs. The aim of this approach is to reduce the number of completely impossible scenarios by considering on the one hand that specialized ESG s produce scenarios more realistic than general ESG s and on the other hand that a single ESG with equally weighted scenarios leads to a too strong influence of the past. The ESGs created will be weighted using advanced indicators.

We will also mention the use of economic indicators whose evolution reflects a little in advance that of the real economy. In times of crisis, the leading indicators make it possible to anticipate economic downturns and to modify, for example, the composition of our portfolio. However, the number of months ahead depends on the chosen indicator and it is necessary to test its reliability in times of crisis.

Our context and the conclusions of our work lead us to propose a certain number of rules to which the technical follow-up of a pension system must comply. In the first place, it would seem delicate to pretend to set a priori realistic and perennial assumptions for the evaluation of the commitments of the regime, and it is therefore necessary to set up technical control; steering refers to the regular updating of assumptions, in particular mortality, in order to integrate its observed changes and to adjust the drifts modeled as a function of these observations.

The strategic allocation gives good long-term results in terms of asset allocation. Nevertheless, it is important to keep a place in the tactical allocation, i.e. the possibility of modifying this allocation in the short term depending on market conditions. Indeed, in the short term, the anticipated returns are different from what they are in the long term. Tactical allocation is important in market situations with uncertain mid-term trends and large market amplitudes over a few months' horizons. It requires either a delegation to a management company or a sufficiently reactive decision-making structure within the pension fund.

The longer the investor's horizon, the more the civil pension scheme can simulate the integration of other asset classes, in order to reinforce the allocation model by seeking "absolute return". We can cite in this framework many assets including alternative assets, derivatives, futures...

In addition, it is essential to define the "best" strategy for investing these reserves in the financial markets, particularly in a context of strong economic uncertainties, such as the recent financial crises.

The LDI model is capable, unlike traditional ALM techniques, of dealing with long-duration liabilities with such ease, because it implements a very fine analysis of the financial risks of liabilities, and employs a very diversified range of financial products, namely bonds of different maturities as well as real estate which is a low-risk asset with significant returns, but this expertise remains limited in the case of Morocco since it does not have derivatives, swaps and inflation-linked bonds that are used to better manage interest rate and inflation risks.

## References

- Adam, A. (2007). *Handbook of Asset and Liability Management: From Models to Optimal Return Strategies*, Wiley.
- Aitoutouhen, L., & Hamza, F. (2016). Financial Stochastic Modeling and The Subprime Crisis. *International Journal of Economics, Finance and Management Sciences*, 2, 67-77.
- Ahlgren, K., D'Arcy, S.P., & Gorrivett, R.W. (2005). Modelling Financial Scenarios. A Framework for the Actuarial Profession. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 92, 177-238.
- Amenc, N., Martellini, L., Foulquier, P., & Sender, S. (2006). *The impact of IFRS and Solvency II on asset-liability management and asset management in insurance companies*. EDHEC Risk and Asset Management Research Centre.
- Amenc, N., Martellini, L., & Ziemann, V. (2007). *Asset-liability management decisions in private banking*. EDHEC Risk and Asset Management Research Centre.
- Ang, A., Chen, B., & Sundaresan, S. (2013). Liability Driven Investment with Downside Risk. *Journal of Portfolio Management*, 40, 71-87.
- Armel, K., Planchet, F., & Kamega, A. (2010). *Quelle structure de dépendance pour un générateur de scénarios économiques en assurance?*, les cahiers de recherche de l'ISFA.
- Bauer, R., Hoevenaars, R., & Steenkamp, T. (2006). *Asset Liability Management. Oxford handbook of pensions and retirement income*. Oxford : Oxford University Press, 417-440.
- Berkelaar, A., & Kouwenberg, R. (2010). A Liability-Relative Drawdown Approach to Pension Asset Liability Management. *Journal of Asset Management*, 11(2/3), 194-217.
- Bielecki, T.R., & Pliska, S.R. (1998). Risk-sensitive dynamic asset allocation. *Asset and Liability Management*, 8, 129-138.
- Blake, D. (2003). Reply to 'survivor bonds: a comment on Blake and Burrows. *The Journal of Risk and Insurance*, 70(2), 349-351.
- Blake, D. (2006). *Pension finance*. New Jersey: John Wiley and Sons.
- Boender, G. (1997). A hybrid simulation/optimisation scenario model for asset/liability management. *European Journal of Operational Research*, 99(1), 126-135.
- Boender, G. (2007). Investors must approach LDI with caution. *Global Pensions*, March, p. 24.
- Boender, G., Van Aalst, P.C., & Heemskerk, F. (1998). Modelling and management of assets and liabilities of pension plans in the Netherlands. In: Ziemba, W.T., Mulvey, J.M. (ed.), *Worldwide Asset and Liability Modeling*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 561-580.
- Brennan, M.J., Schwartz E.S., & Lagnado R. (1997). Strategic Asset Allocation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, 1377-1403.
- Brennan, M.J., & Xia, Y. (2000). *Dynamic Asset Allocation Under Inflation*. University of California L.A.

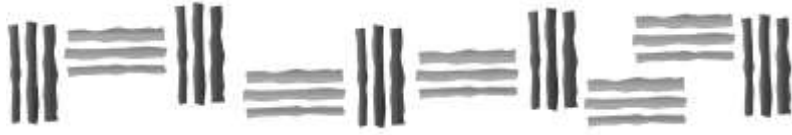
- Brinson, G.P., Hood, L.R., & Beebower, G.L. (1986). Determinants of Portfolio Performance. *Financial Analysts Journal*, 42(4), 39-44.
- Brinson, G.P., Singer, B.D., & Beebower, G.L. (1991). Determinants of Portfolio Performance II: An Update. *Financial Analysts Journal*, 47(3), 40-48.
- Campbell, J.Y., & Viceira, L.M. (2001). Who should buy long-term bonds? *American Economic Review*, 91, 99-127.
- Campbell, J.Y., & Viceira, L.M. (2002). *Strategic Asset Allocation, Portfolio Choice for Long-Term Investors*. Clarendon Lectures in Economics. Oxford: Oxford University Press.
- Campbell, J.Y., & Viceira, L.M. (2006). *Strategic Asset Allocation for Pension Plans*. In: Clark, G.L., Munnell, A.H., & Orszag, J.M. The Oxford Handbook of Pensions and Retirement Income. Oxford Handbooks online.
- Cariño D.R., Kent, T., Myers, D.H., Stacy, C., Sylvanus, M., Turner, A., Watanabe, K., & Ziemba, W.T. (1994). The Russell-Yasuda Kasai Model : An Asset Liability Model for a Japanese Insurance Company using Multi-stage Stochastic Programming. *Interfaces*, 24, 29-49.
- Çelikyurt, U., & Özekici, S. (2007). Decision Support Multiperiod portfolio optimization models in stochastic markets using the mean-variance approach. *European Journal of Operational Research*, 179, 186-202.
- Chacko, G., & Viceira, L. (2005). Dynamic Consumption and Portfolio Choice with Stochastic Volatility in Incomplete Markets. *Review of Financial Studies*, 18(4), 1369-1402.
- Christie, S. (2005). *Is the Sharpe ratio useful in asset allocation?* Macquarie Applied Finance Centre Research Paper. Recuperado de: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.720801>
- Consigli, G., & Dempster, M.A.H. (1998). Dynamic stochastic programming for asset liability management. *Annals of Operations Research*, 81, 131-162.
- Daykin, C.D., & Hey, G.B. (1990). Managing uncertainty in a general insurance company. *Journal of the Institute of Actuaries*, 117, 173-259.
- Dert, C. L. (1998). A dynamic model for asset liability management for defined benefit pension funds. In: Ziemba, W.T., & Mulvey, J.M. (Eds.), *World-Wide Asset and Liability Modeling* (pp. 501-536). Cambridge: Cambridge University Press.
- Dempster, M.A.H., Germano, M., Medova, E.A., & Villaverde, M. (2003). Global Asset Liability Management. *British Actuarial Journal*, 9, 137-216.
- Dupacová, J., Growe-Kuska, N., & Romisch, W. (2003). Scenario reduction in stochastic programming: an approach using probability metrics. *Math Program*, 95, 493-511.
- Detemple, J., & Rindisbacher, M. (2008). Dynamic Asset Liability Management with Tolerance for Limited Shortfalls. *Insurance, Mathematics and Economics*, 43, 281-294.
- Exley, J., & Mehta, S. (1996). *Market efficiency*. 1996 Investment Conference.
- Exley, J., Mehta, S., & Smith, A. (1997). The Financial Theory of Defined Benefit Schemes. *British Actuarial Journal*, 3(4), 835-966.



- Faleh, A., Planchet, F., & Rulliere, D. (2009). *Les générateurs de scénarios économiques : quelle utilisation en assurance*. Technical report, ISFA-Université Lyon I, Caisse des dépôts et Consignations.
- Fama, E. (1970). Multi-Period Consumption-Investment Decisions. *American Economic Review*, 60, 163-174.
- Gao, J. (2008). Stochastic optimal control of DC pension funds. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42, 1159-1164.
- Geoghegan, T.J. et al. (1992). *Report on The Wilkie Stochastic Investment Model*, JIA.
- Hainaut, D., & Devolder, P. (2005). *Management of a pension fund under a VaR constraint*, working paper.
- Hibbert, J. et al. (2001). A Stochastic Asset Model & Calibration for Long-Term Financial Planning Purposes, Rapport Barrie & Hibbert Limited. Recuperado de: [http://www.actuaries.org.uk/\\_data/assets/pdf\\_file/0014/26312/hibbert.pdf](http://www.actuaries.org.uk/_data/assets/pdf_file/0014/26312/hibbert.pdf)
- Hoevenaars, R., Molenaar, R., Schotman, P., & Steenkamp T. (2008). Strategic asset allocation with liabilities: beyond stocks and bonds. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(9), 2939-2970.
- Hoyland, K., & Wallace, S.W. (2001). Analyzing legal restrictions in the Norwegian life insurance business using a multistage asset liability management model. *European Journal of Operations Research*, 134(2), 65-80.
- Huber, P. (1995). A review of Wilkie's stochastic asset model. *British Actuarial Journal*, 1, 181-211.
- Ibbotson, R.G., & Kaplan, P.D. (2000). Does Asset Allocation Policy Explain 40, 90, or 100 Percent of Performance? *Financial Analysts Journal*, 56(1), 26-33.
- Infanger, G. (2003). *GAMS/Decis user's guide*. Recuperado de: <http://www.gams.com/dd/docs/solvers/decis.pdf>.
- Jarque, C., & Bera, A., (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters*, 6, 255-259.
- Julliard, C., Michaelides, A., & Sousa, R. M. (2008). *Housing prices and monetary policy*. Mimeo: London School of Economics and Political Science.
- Keel, A., & Müller, H.H. (1995). Efficient Portfolios in the Asset-Liability Context. *Astin Bulletin*, 25, 33-48.
- Kim, D., & Santomero, A. (1988). Risk in banking and capital regulation. *Journal of Finance*, 43(5), 1219-1233.
- Kitts A., (1990), Applications of Stochastic Financial Models: A Review, Department of Social Statistics, University of Southampton.
- Kouwenberg, R. (2001). Scenario Generation and Stochastic Programming Models for Asset Liability Management. *European Journal of Operational Research*, 134(2), 279-292.
- Kusy, M.I., & Ziemba, W.T. (1986). A Bank Asset and Liability Management Model. *Operations Research*, 34(3), 356-376.

- Leibowitz, M.L., Kogelman, S., & Bader, L.N. (1992). Asset Performance and Surplus Control: A Dual-Shortfall Approach. *Journal of Portfolio Management*, 18, 28-37.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. Basil Blackwell, New York.
- Markowitz, H.M. & van Dijk, E. (2006). Risk-Return Analysis. In Handbook of Asset and Liability Management, Volume 1: Theory and Methodology, Chapter 4, edited by Zenios, S. A. and Ziemba, W. T. Amsterdam: Elsevier.
- Mindlin, D. (2006). The myth of the liability benchmark. *Global Pensions*, October, 16-17.
- Merton, R.C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case. *Review of Economics and Statistics*, 51, 247-257.
- Merton, R.C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model. *Journal of Economic Theory*, 3, 373-413.
- Merton, R.C. (1990). *Continuous-Time Finance*. Blackwell Publishing, 350 Main Street, Malden, MA 02148- 5020, USA.
- Meucci, A. (2005). *Risk and asset allocation*. Technical report. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Michaud, R.O., Esch, D.N., & Michaud, R. (2012). *Dynamic Portfolio Monitoring*. United States (12) Patent Application Publication (10), Pub. No: US 2012/ 0116994 A1, May 10, 2012.
- Mulvey, J.M. (1996). Generating Scenarios for the Towers Perrin Investment System. *Interfaces*, 26(2), 1-15.
- Mulvey, J.M., Gould, G., & Morgan, C. (2000). An Asset and Liability Management System for Towers Perrin-Tillinghast, *Interfaces*, 30, 96-114.
- Planchet, F., Guibert, Q., & Juillard, M. (2012). Measuring Uncertainty of Solvency Coverage Ratio in ORSA for Non-Life Insurance. *European Actuarial Journal*, 2(2), 205- 226.
- Rubinstein, M. (1988). Portfolio insurance and the market crash. *Financial Analysts Journal*, 44, 38-47.
- Rudolf, M., & Ziemba, W.T. (2004). Intertemporal surplus management. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, 975-990.
- Samuelson, P. (1969). Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming. *Review of Economics and Statistics*, 51(3), 239-246.
- Santacruz, L. (2013). The importance of strategic asset allocation. *Journal of Business and Economics*, 4(3), 42-247.
- Sharpe, F.W., & Tint, L.G. (1990). Liabilities-A New Approach, *Journal of Portfolio Management*, 16(2), 4-10.
- Steinbach, M.C. (2001). Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis, SIAM REVIEW. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 43(1), 31-85.
- Van Binsbergen, J.H., & Brandt, M.W. (2014). *Optimal Asset Allocation in Asset Liability Management*. National Bureau of Economic Research Working Paper.

- Vassiadou-Zeniou, C., & Zenios, S.A. (1996). Robust optimization models for managing callable bond portfolios. *European Journal of Operational Research*, 91, 264-273.
- Wachter, J.A. (2002), Portfolio and consumption decisions under mean-reverting returns: An exact solution for complete markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 63-91.
- Wilkie, D. (1986). A Stochastic Investment Model for Actuarial Use. *Transactions of the Faculty of Actuaries*, 39, 341-403.
- Wilkie, D. (1995). More on a Stochastic Model for Actuarial Use. *British Actuarial Journal*, 1(5), 777-964.
- Yen, S.H., & Hsu, Y.H. (2003). Dynamic Asset Allocation Strategy for Intertemporal Pension Fund Management with TimeVarying Volatility. *Academia Economic Papers*, 31 (3), 229-261.
- Zenios, S.A., & Ziemba, W.T. (2006) (Eds.). *Handbook of Asset and Liability Management*, Vol. 2(1) in Series of Handbooks in Finance, North-Holland, The Netherlands: Elsevier Science.
- Zenios, S.A., & Ziemba, W.T., (2007). *Handbook of Asset and Liability Management*, Volume I and II, North Holland. Series of Handbooks in Finance, North-Holland. The Netherlands: Elsevier Science.
- Zenios, S.A. (2007). *Practical Financial Optimization: Decision Making For Financial Engineers*. Oxford: Blackwell Publishers.
- Ziemba, W., & Mulvey, J. (1998). *Worldwide Asset and Liability Modeling*. Isaak Newton Institute for Mathematical Sciences.
- Ziemba, W. (2003). *The Stochastic Programming Approach to Asset-Liability and Wealth Management*. AIMR-Blackwell.



**Revisores de RevMetCuant que han autorizado su aparición en el listado (actualizado a 1 de diciembre de 2019):**

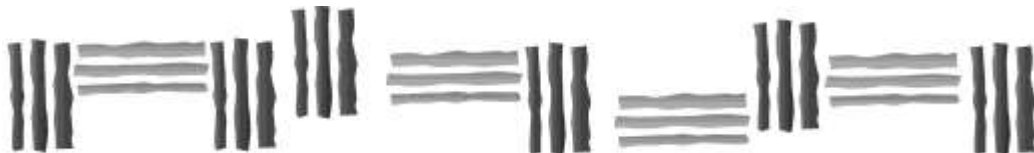
Elena Abascal Fernández  
 Javier Aguilera Caracuel  
 S. Ejaz Ahmed  
 Ángel Alanón Pardo  
 Adrian Albala  
 Noel Albert  
 José Tomás Alcalá Nalváiz  
 Esteban Alcaraz Vera  
 Joaquín Aldas Manzano  
 Julio César Alonso Cifuentes  
 Ana Belén Alonso Conde  
 José Antonio Álvarez-Jareño  
 Ana Alvarez Muelas  
 Michael D. Akers  
 Christine Amsler  
 María Pilar Aparicio Chueca  
 Nieves Aquino Llinares  
 Antonio Aragón Sánchez  
 Mar Arenas Parra  
 M<sup>a</sup> Teresa Arévalo Quijada  
 Isabel Argimón Maza  
 Millán Arroyo Menéndez  
 Lilliana Lorena Avendaño Miranda  
 Alberto Ayaviri  
 María Victoria Avilés Blanco  
 Mercedes Ayuso Gutiérrez  
 Harold Banguero Lozano  
 Víctor Bañuls Silvera  
 Eva Barrena Algara  
 Eduard Baumöhl  
 Miguel Alfonso Becerra Montañez  
 Jorge Belaire Franch  
 Emma Berenger Cárceles  
 Vanesa Berlanga Silvente  
 Amancio Betzuen Zalbidegoitia  
 Joerg Beutel  
 Celia Bilbao Terol  
 Margarita Billón Currás  
 María Teresa Blaconá  
 Francisco J. Blancas Peral  
 Pilar Blanco Alonso  
 Glenda Blaser Petarli  
 Héctor Alberto Botello Peñaloza  
 Carlos Bouza  
 Raúl Brey Sánchez  
 María Isabel Brusca Alijarde  
 Marcos Buestán  
 Eva María Buitrago Esquinas  
 Rafael Caballero Fernández  
 Álvaro Caballo Trébol

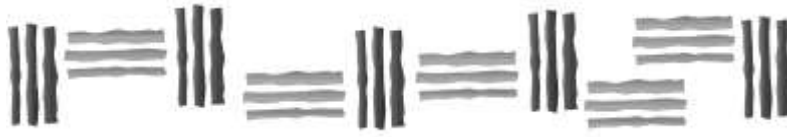


Ricardo Cabana-Villca  
 Laura Cabeza García  
 María Eugenia Calderon  
 Francisco Javier Callealta Barroso  
 Enriqueta Camacho Peñalosa  
 Lourdes Canós Darós  
 Jesús J. Cambra Friero  
 Mariano Carbonero Ruz  
 Luis Cárdenas del Rey  
 Clara Cardone-Riportella  
 Manuel J. Caro Encalada  
 M<sup>a</sup> Dolores Caro Vela  
 Esther Carrizosa Prieto  
 María Francisca Casado  
 Víctor M. Castañeda Rodríguez  
 Fco. Javier Castaño Gutiérrez  
 Juan Manuel Castaño Molano  
 María del Mar Cerban Jiménez  
 Jorge M. Chica Olmo  
 Manuel Civera Satorres  
 M. Mercedes Claramunt Bielsa  
 Luis A. M. Clemente Moquillaza  
 Germá Coenders  
 Claudio Comari  
 Guillermina Comas  
 Emilio Congregado Ramírez  
 Ignacio Contreras Rubio  
 Renê Coppe Pimentel  
 Natalia L. Coppola  
 Virginia Inés Corbella  
 Beatriz Corchuelo  
 Jose Manuel Cordero Ferrera  
 Manuela Coromaldi  
 Beatriz Correyero-Ruiz  
 Pablo Coto Millán  
 Maria Elizabeth Cristofoli  
 Rafael Cruz Salazar  
 M<sup>a</sup> Dolores Cubiles de la Vega  
 Fernanda Cuitiño  
 Antonio Cutanda Tarín  
 Luigi D'Ambra  
 Carlos Dabús  
 Arnaldo Dámera Martínez  
 José Pablo Dapena  
 Antonio F.de Amores Hernández  
 M<sup>a</sup> Dolores de Prada Moraga  
 Iván de la Fuente Merencio  
 Salvador del Barrio García  
 Francisco del Olmo García



André Gérald Destinobles  
 Laura Díaz Anadón  
 Norberto Díaz Díaz  
 Jorge Díaz Lanchas  
 Harald Dolles  
 Juana Domínguez Domínguez  
 Inmaculada Domínguez Fabián  
 Rosa María Domínguez Gijón  
 Mónica Domínguez Serrano  
 Marcos España García  
 Rosario Espínola Vílchez  
 Ángel Estrada García  
 Eugenio M. Fedriani Martel  
 Fernando Fedriani Martel  
 José Manuel Feria Domínguez  
 Gabriela Fernandez Barberis  
 Ana Fernández Carazo  
 Melchor Fernández Fernández  
 Javier Fernández Navas  
 María Yolanda Fernández Ramos  
 Yolanda Fernández-Santos  
 María Alejandra Ferrer  
 Luis Ferruz Agudo  
 Raquel Flórez López  
 Osvaldo A. Fosado Téllez  
 Inmaculada Fortes Ruiz  
 Roberto Carlos Fortich Mesa  
 Juan Jaime Fuentes  
 Miguel-Ángel Galindo Martín  
 Dolores Gallardo Vázquez  
 Guiselle María Garbanzo Vargas  
 Alejandro García Cintado  
 Luis Angel García Escudero  
 Alfredo García Hernández-Díaz  
 José Horacio García-Marí  
 Carmen Huerga Castro  
 Anna García Masiá  
 Cecilia García Muñoz Aparicio  
 Beatriz García Osma  
 José García Pérez  
 José Félix García Rodríguez  
 Ana Gargallo Castel  
 Christiane Gaul  
 Karl Geisler  
 Esperanza Gil Soto  
 Alicia Gila García  
 David Gómez Sánchez  
 Nuria Gómez Sanz  
 Mónica Gómez Suárez





**Revisores de RevMetCuant que han autorizado su aparición en el listado (actualizado a 1 de diciembre de 2019):**

Germán Héctor González		Begoña López Fernández		Luis Moreno	
Roberto González Acolt		Joaquín López Pascual		Ignacio Moreno Gabaldón	
María Pilar González Casimiro		Dunia López Pintado		M <sup>a</sup> Pilar Moreno Navarro	
Nieves Glez Fdez-Villavicencio		Sara López Pintado		María Carmen Moreno Perdigón	
Mercedes González Lozano		Jesús López Rodríguez		Rafael Moreno Ruiz	
Nuria González Rabanal		Ana Dolores López Sánchez		Rafael Moyano Franco	
Paula González Rodríguez		Macarena Lozano Oyola		Josefa Mula	
María Carmen González Velasco		María Asuncion Lubiano Gomez		Francisco Javier Muñoz Almaraz	
Flor M. Guerrero Casas		Alexis Lubow		Jesús Muñoz San Miguel	
M. Carmen Guisán		Amaia Lusa Garcia		Gábor Nagy	
Haochen Guo		Benjamín Manchado-Pérez		Gabriel Núñez Antonio	
Tomás Gutiérrez Barbarrusa		Cecilio Mar-Molinero		Aníbal Núñez Carrasco	
Cristián Gutiérrez Rojas		Juan A. Marín-García		Nemecio Núñez Rojas	
Elena Valentina Gutiérrez		Nelly Narcisa Manjarrez Fuentes		Julia M. Núñez Tabales	
Mauricio I. Gutiérrez Urzúa		Antonio Miguel Márquez Durán		Juan Núñez Valdés	
Katerina Hellström		Víctor Martín		José Javier Núñez Velázquez	
Markus Haas		Ana M. Martín Caraballo		Jair Ojeda Joya	
Pedro J. Hernández		Alfonso José Martínez		Joanna Olbrys Bialystok	
Beatriz Hernández Jiménez		Rafael Martínez		José Antonio Ordaz Sanz	
Antonio Hernández Moreno		Minerva Martínez Ávila		Jorge Orlando Arredondo	
Carmen Patricia Herranz Peinado		Francisco José Martínez Estudillo		Priscila Ortega Gómez	
Ainhoa Herrarte Sánchez		Ángel Enrique Martínez Galvez		Francisco J. Ortega Irizo	
Oscar Herrera-Restrepo		José Antonio Martínez García		Ignacio Osuna Vergara	
Manuel Hidalgo Pérez		José Miguel Martínez Paz		M <sup>a</sup> P. Pablo-Romero Gil-Delgado	
Miguel Ángel Hinojosa Ramos		José Francisco Martínez-Sánchez		Reinaldo Padrao	
José Manuel Hurtado González		María del Carmen Martínez Serna		Alvisa Palese	
Jorge Ibarra Salazar		Camilla Mastromarco		María Luisa Palma Martos	
Aysa Ipek Erdogan		Gregoria Mateos-Aparicio Morales		Concepción Paralara Morales	
Matías Irigoyen Testa		Thórólfur Matthíasson		José Parreño Fernández	
Harizmar Izquierdo Madrid		Adolfo Maza Fernández		Carmen Elena Patiño	
Timotej Jagric		María Amparo Medal Bartual		Douglas M. Patterson	
Diana Marcela Jiménez Restrepo		Mauro Mediavilla Bordalejo		José M. Pavía	
María Luisa Jimenez Rodrigo		Iguácel Melero Polo		Nelson Perera	
Enrique José Jiménez Rodríguez		M <sup>a</sup> Carmen Melgar Hiraldo		Alfredo Peris Beamonte	
Christian A. Johnson		Ari Melo Mariano		Vicente Pérez Chamorro	
Sevtap Kestel Ken Kwong		Rosa Fátima Medina Merino		Fátima Pérez García	
M.T. Lamelas Gracia		Edwin Leonardo Mendez Ortiz		Julián Pérez García	
Prosper Lamothe Fernández		Luís Ángel Meneses Cerón		María Dolores Pérez Hidalgo	
Bibiana Lanzilotta		Roberto Micera		Víctor Ernesto Pérez León	
Bárbara Larrañeta Gómez-Camirero		Patricia Milanés Montero		Rafael Pino Mejías	
José María Larrú Ramos		Jose Luis Miralles Quirós		Simon Price	
Thanh Le Phuoc		Juan Ignacio Modroño Herrán		Tomás Prieto Rumeau	
Juan Celestino León Mendoza		Julián Molina Luque		José Alejandro Quijada	
M <sup>a</sup> Amparo León Sánchez		María Molinos Senante		María Quintás	
Germán Leva		Samuel Mongrut		Arlé Quispe Villafuerte	
Francisco Liñán Alcalde		Joaquin Montreal Perez		R.Rajasekhar	
María Llop Llop		Oscar Montaña Arango		Josefa Ramoni Perazzi	
Luz Mary Londoño		María de Jesús Moo Canul		Manuel Ramos Francia	
Álvaro López Cabrales		Fco. Javier Morales E.		Carmen Ramos Carvajal	





**Revisores de RevMetCuant que han autorizado su aparición en el listado (actualizado a 1 de diciembre de 2019):**

Leonardo Ramos Gutiérrez		Luis Vicente Santana Quintero	
José Manuel Ramírez Hurtado		Rosa Santero Sánchez	
John Alex Ramirez Figueroa		Alejandro Smolje	
Juan Carlos Real Fernández		Mariagrazia Squicciarini	
David Redondo Ballesteros		M <sup>a</sup> Manuela Segovia González	
Hernaldo Reinoso Alarcón		María Semitiel García	
María Luisa Restaino		Pedro Serrano	
Pablo Revilla Aparicio		Yudayly Stable-Rodríguez	
David Alejandro Reyes Gómez		Alexandre Stamford da Silva	
Paz Rico Belda		Lourdes Susaeta Erburu	
Laura Riesgo		Phillip L. Swagel	
Rosa Rios Ramos		María T. Tascón Fernández	
Daniel Rivero Cebrián		Macarena Tejada Tejada	
David Robles Ortiz		Cecilia Téllez Valle	
Román Rodríguez Aguilar		Ángel F. Tenorio Villalón	
María Ángeles Rodríguez Bellido		Fernando Tohmé	
Domingo Rodríguez Benavides		Wilfredo Toledo Rodríguez	
Arturo Rodríguez-Castellanos		Álvaro Tresierra Tanaka	
M <sup>a</sup> Carolina Rodríguez Donate		Patricia Triunfo	
Rosario Rodríguez Guiñolo		Alicia Troncoso Lora	
Jesús Rodríguez López		Antonio Trujillo Ponce	
Manuel G. Rodríguez López		Efthymios G. Tsionas	
Natividad Rodríguez Masero		Carlos Usabiaga Ibáñez	
Inmaculada Rodríguez Puerta		Ana Utrillas Acerete	
Carlos V. Rodríguez-Caballero		Luis Enrique Valdez Juárez	
Patricia Isabel Romero		Marisol Valencia Cárdenas	
Inmaculada Romano Paguillo		Guadalupe Valera Blanes	
Diego Romero de Ávila Torrijos		Elisabeth Valle Valle	
Eulalia Romero Palacios		Laura Varela Candamio	
Francisco Javier Rondán Cataluña		María José Vázquez Cueto	
Dario Alejandro Rossignolo		Leudis Orlando Vega de la Cruz	
Carmen Rubio Castaño		Esther Velázquez Alonso	
José Manuel Rueda Cantuche		Francisco Venegas-Martínez	
David Ruggeri		María Victoria Verdugo Matés	
Belén Ruiz		Elena Vernazza	
Rocío Ruiz Benítez		Xavier Vilà Carnicero	
Jose Luis Ruiz Vergara		Fatima Irina Villalba Padilla	
Maria Luisa Saavedra		Esmeralda Villegas	
Francisco Javier Sáez Fernández		Guido Zack	
Ramón Sala Garrido		M <sup>a</sup> del Pilar Zarzosa Espina	
Román Salmerón Gómez		Ting Zhang	
Sandra M <sup>a</sup> Sánchez Cañizares			
Alfredo Sánchez-Daza			
Celia Sánchez-Lopez			
Sixto Sánchez Merino			
Ana María Sánchez Sánchez			
Francisca J. Sánchez Sánchez			
Manuel J. Sánchez Sánchez			
Maria Carmen Sánchez-Sellero			

